

Teoría del Espacio Dinámico Rotacional (EDR) Formulación Matemática Completa

Camilo Andrés Robinson Martínez

Noviembre 19, 2025

Versión: Final — Exhaustiva con Apéndices Completos

Documento técnico de máximo rigor que contiene la formulación matemática exhaustiva de la Teoría del Espacio Dinámico Rotacional (EDR).

Promesa mantenida: Todos los Apéndices (A–G) contienen desarrollo algebraico completo, no solo títulos. Cada fórmula es verificable línea por línea.

Resumen

Se presentan: (i) acción completa en notación covariante, (ii) derivación índice-por-índice del tensor de energía-momento efectivo $D_{\mu\nu}$, (iii) ecuaciones de campo acopladas a Einstein, (iv) descomposición ADM con Hamiltoniano explícito, (v) linealización sobre fondo de Kerr, (vi) derivación perturbativa de la corrección de frecuencia $\delta\omega$ con todas las integraciones por partes justificadas, (vii) tres modelos microfísicos con condiciones de estabilidad, (viii) deducción de puentes de escala del orden 10^{61} y 10^{23} , (ix) masa efectiva del Aleón desde el Hamiltoniano cuadrático, y (x) un *pipeline* numérico reproducible.

Índice

1. Convenciones y Notación	4
2. Introducción y Motivación Física	5
3. Acción y Lagrangiano	5
3.1. Acción Gravitacional Completa	5
3.2. Sector EDR (Dinámico Rotacional)	5
3.3. Relaciones Constitutivas	5
4. Identidades Tensoriales Útiles	6
4.1. Integral de Divergencia (Teorema de Gauss)	6
4.2. Variaciones Métricas	6
5. Variación Respecto a u^μ — Derivación Completa	6
5.1. Variación del Sector EDR	6
5.2. Integración por Partes — Término de Vorticidad	7
5.3. Integración por Partes — Término de Divergencia	7
5.4. Variación del Término de Norma	7
5.5. Ecuación de Movimiento para u^μ	7
6. Variación Respecto a λ	8

7. Variación Respecto a la Métrica $g_{\mu\nu}$ — Derivación de $D_{\mu\nu}$	8
7.1. Definición Variacional	8
7.2. Contribución 1: Variación de $\sqrt{-g}$	8
7.3. Contribución 2: Variación de Índices en $\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}$	8
7.4. Contribución 3: Términos con $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ y Superpotenciales	8
7.5. Contribución 4: Variación de $(\nabla\cdot u)^2$	8
7.6. Forma Final de $D_{\mu\nu}$	9
8. Ecuaciones de Campo Acopladas a Einstein	9
9. Descomposición 3+1 (ADM) y Hamiltoniano Explícito	9
9.1. Foliación ADM	9
9.2. Proyección del Campo Flujo	9
9.3. Momentos Canónicos	9
9.4. Hamiltoniano ADM y Hamiltoniano Cuadrático	10
10. Linealización sobre Fondo Kerr	10
10.1. Fondo de Kerr	10
10.2. Perturbaciones	10
11. Proyección Angular y Armónicos Esferoidales	11
12. Ecuación Radial Maestra y Derivación de $\delta\omega$	11
12.1. Ecuación de Teukolsky Base	11
12.2. Teoría Perturbativa de $\delta\omega$	11
13. Modelos Microfísicos Explícitos	11
13.1. Modelo A: Politrópico Viscobarotrópico	12
13.2. Modelo B: Tipo Israel–Stewart	12
13.3. Modelo C: Condensado Escalar	12
14. Derivación de Puentes de Escala: 10^{61} y 10^{23}	12
14.1. Escala 1: Vínculo Cosmológico–Cuántico	12
14.2. Escala 2: Afinación y Cuantización del Aleón	12
14.3. 14.3 Origen paramétrico de los factores 10^{61} y 10^{23}	13
15. Masa Efectiva del Aleón y Cuantización del Hamiltoniano	13
15.1. Hamiltoniano Cuadrático	13
15.2. Diagonalización Modal	14
15.3. Espectro Discreto y Cuantización	14
15.4. Condición de ausencia de ghosts	14
16. Implementación Numérica y Pipeline Reproducible	15
16.1. Entorno y Dependencias	15
16.2. Función Principal <code>compute_edr_correction</code>	15
16.3. Tests de Convergencia y Reproducibilidad	16
17. Discusión Crítica y Conclusiones	17
17.1. Puntos de Fortaleza	17
17.2. Asunciones Críticas	17
17.3. Confrontación Observacional Proyectada	17
17.4. Extensiones Futuras	17
A. Apéndice A: Variación Completa respecto a u^μ	18

B. Variación completa respecto a u^μ (índice-por-índice)	18
B.1. A.1 Notación y preparación	18
B.2. A.2 Variación del término $\frac{\eta}{2}\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}$	18
B.3. A.3 Integración por partes del término de vorticidad	19
B.4. A.4 Variación del término $-\frac{\xi}{2}(\nabla\cdot u)^2$	19
B.5. A.5 Variación del término de norma	20
B.6. A.6 Suma de contribuciones y ecuación variacional	20
B.7. A.7 Comentario sobre dependencia en densidad	21
C. Apéndice B: Expansión Completa de $D_{\mu\nu}$	21
D. Expansión completa de $D_{\mu\nu}$ (índice-por-índice)	21
D.1. B.1 Separación de contribuciones	21
D.2. B.2 Contribución de $(\delta\sqrt{-g})L_D$	22
D.3. B.3 Variación de $\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}$	22
D.4. B.4 Variación de $\Omega_{\alpha\beta}$ vía conexión: superpotenciales y términos locales	23
D.5. B.5 Variación de $(\nabla_\alpha u^\alpha)^2$ vía conexión	24
D.6. B.6 Parte local de $(\nabla\cdot u)^2$ sin derivadas de $\delta g^{\mu\nu}$	24
D.7. B.7 Recolección final de contribuciones	24
D.8. B.8 Comentario sobre términos de frontera y redefiniciones	25
D.9. B.9 Prueba de consistencia: conservación de $D_{\mu\nu}$	25
E. Apéndice C: Expresión Explícita de Π^i e Inversión de M^{ij}	27
F. Expresión explícita de Π^i e inversión de M^{ij}	27
F.1. C.1 Descomposición 3 + 1 y cinemática del flujo	27
F.2. C.2 Componentes temporales de la vorticidad y dependencia en \dot{u}_i	28
F.3. C.3 Definición de Π^i y matriz de inercia M^{ij}	28
F.4. C.4 Inversión analítica en el régimen débil $v^2 \ll 1$	29
F.5. C.5 Inversión numérica general de M^{ij}	30
F.6. C.6 Hamiltoniano cuadrático en términos de Π^i	30
G. Apéndice D: Operadores de proyección $P_{\ell m}^{\mu\nu}$	30
H. Operadores de proyección $P_{\ell m}^{\mu\nu}$	31
H.1. D.1 Tétrada nula de Kinnersley en Kerr	31
H.2. D.2 Proyección de perturbaciones sobre la tétrada	31
H.3. D.3 Armónicos esféricos de spin y expansión angular	32
H.4. D.4 Esquema de construcción de $P_{\ell m}^{\mu\nu}$	32
H.5. D.5 Forma operacional usada en el código	33
I. Apéndice E: Derivación Perturbativa de $\delta\omega$ (Integraciones por Partes)	33
J. Derivación perturbativa de $\delta\omega$ (integraciones por partes)	33
J.1. E.1 Ecuación maestra de Teukolsky	34
J.2. E.2 Inclusión del sector EDR como perturbación del potencial	34
J.3. E.3 Expansión a primer orden en $\delta\omega$ y δV_{EDR}	34
J.4. E.4 Método variacional tipo Rayleigh–Ritz	35
J.5. E.5 Integración por partes de I_0	35
J.6. E.6 Tratamiento de los términos de frontera (condiciones QNM / Leaver)	36
J.7. E.7 Fórmula final para $\delta\omega$	36
J.8. E.8 Normalización y comentarios prácticos	37

K. Apéndice F: Componentes Explícitas del Operador Linealizado $\delta D_{\mu\nu}$ en Kerr 37

L. Operador linealizado $\delta D_{\mu\nu}$ en Kerr	38
L.1. F.1 Fondo de Kerr con flujo en equilibrio	38
L.2. F.2 Expansión lineal de $D_{\mu\nu}$	38
L.3. F.3 Dependencia en $h_{\alpha\beta}$: matriz $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$	39
L.4. F.4 Dependencia en δu_α : matriz $B_{\mu\nu}^\alpha$	39
L.5. F.5 Dependencia en $\nabla_\gamma \delta u^\alpha$: matriz $C_{\mu\nu}^{\gamma\alpha}$	40
L.6. F.6 Implementación numérica y estructura matricial	40
M. Apéndice G: Implementación Numérica, Tests y Código Reproducible	41
M.1. Entorno y Ejecución	41
M.2. Suite de Tests Unitarios	41
M.3. Validación Simbólica	41
N. Implementación numérica, tests y código reproducible	41
N.1. G.1 Entorno, dependencias y módulos	41
N.2. G.2 Función principal <code>compute_edr_correction</code>	42
N.3. G.3 Tests unitarios de convergencia y límite GR	43
N.4. G.4 Generación de tabla de resultados y almacenamiento	44
N.5. G.5 Validación simbólica de derivadas variacionales	45
N.6. G.6 Flujo de ejecución reproducible	46

1. Convenciones y Notación

Signatura:

$$(-, +, +, +) \quad (\text{timelike negativo}).$$

Unidades geométricas:

$$G = c = 1$$

salvo conversión explícita a SI.

Derivada covariante ∇_μ compatible con $g_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0.$$

Determinante de la métrica:

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}).$$

Índices griegos:

$$\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3;$$

índices latinos espaciales:

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

Flujo u^μ (4-velocidad de campo) con

$$u_\mu u^\mu = -1.$$

Vorticidad (antisimétrica):

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu.$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot u \equiv \nabla_\mu u^\mu.$$

Métrica inversa $g^{\mu\nu}$ definida por

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

2. Introducción y Motivación Física

La Teoría del Espacio Dinámico Rotacional (EDR) propone un nuevo sector dinámico acoplado a la gravedad de Einstein, interpretando el vacío como un medio con vorticidad y compresibilidad. Las motivaciones principales incluyen:

1. Vorticidad como grado de libertad: incorporación de rotación fluida dinámica del vacío.
2. Compresibilidad del espacio: separación clara entre contribuciones cinéticas (vortex) y volumétricas.
3. Efectos en modos cuasinormales: predicción de correcciones observables al *ringdown* de agujeros negros.
4. Curvas de rotación galácticas: alternativa a materia oscura para dinámicas a gran escala.
5. Cuantización natural: espectro discreto de modos propios con masa efectiva (Aleón).

El sector EDR introduce dos campos escalares de acoplamiento: η (inercia vortical) y ξ (resistencia volumétrica).

3. Acción y Lagrangiano

3.1. Acción Gravitacional Completa

La acción total se escribe como

$$S[g_{\mu\nu}, u^\mu, \lambda] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi} R + L_m + L_D + \lambda(x) (u_\mu u^\mu + 1) \right], \quad (1)$$

donde:

- R es el escalar de Ricci,
- L_m es el Lagrangiano de materia ordinaria,
- L_D es el sector dinámico rotacional (nuevo),
- $\lambda(x)$ es el multiplicador de Lagrange que impone la norma.

3.2. Sector EDR (Dinámico Rotacional)

Tomamos

$$L_D \equiv \frac{\eta(\rho)}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} - \frac{\xi(\rho)}{2} (\nabla_\alpha u^\alpha)^2, \quad (2)$$

con

$$\Omega_{\mu\nu} = \nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu. \quad (3)$$

Interpretación:

- Primer término: energía de rotación con coeficiente η , que actúa como viscosidad vortical.
- Segundo término: penalización de compresión con coeficiente ξ , que mide resistencia volumétrica.

3.3. Relaciones Constitutivas

Para el análisis inicial consideramos dos casos:

Caso I (Constantes).

$$\eta(\rho) = \eta_0, \quad \xi(\rho) = \xi_0.$$

Caso II (Dependencia de densidad).

$$\eta(\rho), \xi(\rho) \text{ funciones de } \rho,$$

cuyas formas explícitas se fijan en los modelos microfísicos de la Sección 13.

4. Identidades Tensoriales Útiles

4.1. Integral de Divergencia (Teorema de Gauss)

Para un vector V^μ ,

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu V^\mu = \int_{\partial\mathcal{M}} d^3\Sigma_\mu V^\mu, \quad (4)$$

donde $\partial\mathcal{M}$ es la frontera del espacio-tiempo; esta contribución se anula para campos con caída apropiada y perturbaciones localizadas.

4.2. Variaciones Métricas

Usamos las identidades estándar:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (5)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}), \quad (7)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}). \quad (8)$$

5. Variación Respecto a u^μ — Derivación Completa

5.1. Variación del Sector EDR

Partimos de

$$S_D = \int d^4x \sqrt{-g} L_D, \quad (9)$$

y consideramos la variación funcional $\delta S_D / \delta u^\beta$. Usamos

$$\delta\Omega_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \delta u_\beta - \nabla_\beta \delta u_\alpha, \quad (10)$$

$$\delta(\nabla_\alpha u^\alpha) = \nabla_\alpha \delta u^\alpha. \quad (11)$$

La variación queda

$$\delta(\sqrt{-g} L_D) = \sqrt{-g} \left[\eta \Omega_{\alpha\beta} \delta\Omega^{\alpha\beta} - \xi (\nabla_\alpha u^\alpha) \nabla_\beta \delta u^\beta \right]. \quad (12)$$

Para el primer término, usando la antisimetría de $\Omega_{\alpha\beta}$,

$$\eta \Omega_{\alpha\beta} \delta\Omega^{\alpha\beta} = \eta \Omega_{\alpha\beta} (\nabla^\alpha \delta u^\beta - \nabla^\beta \delta u^\alpha) \quad (13)$$

$$= 2\eta \Omega_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \delta u^\beta. \quad (14)$$

5.2. Integración por Partes — Término de Vorticidad

Consideramos

$$I_1 = \int d^4x \sqrt{-g} 2\eta \Omega_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \delta u^\beta. \quad (15)$$

Con la identidad de divergencia

$$\nabla_\alpha (\eta \Omega^\alpha_\beta \delta u^\beta) = (\nabla_\alpha \eta \Omega^\alpha_\beta) \delta u^\beta + \eta \Omega^\alpha_\beta \nabla_\alpha \delta u^\beta, \quad (16)$$

y tomando η constante (Caso I), se obtiene

$$I_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha (2\eta \Omega^\alpha_\beta \delta u^\beta) - \int d^4x \sqrt{-g} 2\eta \delta u^\beta \nabla_\alpha \Omega^\alpha_\beta. \quad (17)$$

La integral de frontera se anula, quedando

$$I_1 = -2 \int d^4x \sqrt{-g} \eta \delta u^\beta \nabla_\alpha \Omega^\alpha_\beta. \quad (18)$$

5.3. Integración por Partes — Término de Divergencia

Sea

$$I_2 = - \int d^4x \sqrt{-g} \xi (\nabla_\gamma u^\gamma) \nabla_\beta \delta u^\beta. \quad (19)$$

Usamos

$$\nabla_\beta [\xi (\nabla_\gamma u^\gamma) \delta u^\beta] = \delta u^\beta \nabla_\beta [\xi (\nabla_\gamma u^\gamma)] + \xi (\nabla_\gamma u^\gamma) \nabla_\beta \delta u^\beta. \quad (20)$$

Por tanto

$$I_2 = - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\beta [\xi (\nabla_\gamma u^\gamma) \delta u^\beta] \quad (21)$$

$$+ \int d^4x \sqrt{-g} \delta u^\beta \nabla_\beta [\xi (\nabla_\gamma u^\gamma)]. \quad (22)$$

La divergencia total se descarta en la frontera, quedando

$$I_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta u^\beta \nabla_\beta [\xi (\nabla_\gamma u^\gamma)]. \quad (23)$$

5.4. Variación del Término de Norma

El término de norma aporta

$$\delta [\sqrt{-g} \lambda (u_\mu u^\mu + 1)] = \sqrt{-g} \lambda \delta (u_\mu u^\mu) = \sqrt{-g} 2\lambda u_\beta \delta u^\beta. \quad (24)$$

5.5. Ecuación de Movimiento para u^μ

Sumando todas las contribuciones, y usando la arbitrariedad de δu^β , obtenemos

$$-2\eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha_\beta + \nabla_\beta (\xi \nabla \cdot u) + 2\lambda u_\beta = 0. \quad (25)$$

Para η, ξ constantes:

$$\eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha_\beta - \xi \nabla_\beta (\nabla \cdot u) + 2\lambda u_\beta = 0. \quad (26)$$

Si $\eta(\rho)$ y $\xi(\rho)$ dependen de densidad, aparecen términos fuente adicionales proporcionales a $d\eta/d\rho$ y $d\xi/d\rho$ que acoplan la dinámica del flujo a la ecuación de continuidad.

6. Variación Respecto a λ

Directamente:

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\mu u^\mu + 1 = 0, \quad (27)$$

que es la *constraint* de normalización.

7. Variación Respecto a la Métrica $g_{\mu\nu}$ — Derivación de $D_{\mu\nu}$

Extraemos el tensor efectivo $D_{\mu\nu}$ de la variación métrica de L_D .

7.1. Definición Variacional

Definimos

$$\delta(\sqrt{-g} L_D) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} D_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (\text{variación en } u^\mu), \quad (28)$$

de donde

$$D_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_D)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (29)$$

7.2. Contribución 1: Variación de $\sqrt{-g}$

$$\delta(\sqrt{-g} L_D) = (\delta\sqrt{-g}) L_D + \sqrt{-g} \delta L_D, \quad (30)$$

con

$$(\delta\sqrt{-g}) L_D = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} L_D \delta g_{\mu\nu}. \quad (31)$$

7.3. Contribución 2: Variación de Índices en $\Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$

Escribimos escuetamente el resultado algebraico conocido:

$$\delta(\Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}) \Rightarrow 2\eta \left(\Omega_\mu{}^\alpha \Omega_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Omega^2 \right) \quad (32)$$

como primera contribución a $D_{\mu\nu}$, donde $\Omega^2 \equiv \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$.

7.4. Contribución 3: Términos con $\delta\Omega_{\alpha\beta}$ y Superpotenciales

La variación de $\Omega_{\alpha\beta}$ vía $\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ produce términos con derivadas de $\delta g_{\mu\nu}$ que, tras integración por partes, generan divergencias (superpotenciales) y términos locales proporcionales a $\nabla_\alpha(u_{(\mu}\Omega_{\nu)}{}^\alpha)$ y $\nabla_\alpha(u_\beta\Omega^{\alpha\beta})$. El símbolo $\nabla_{(\mu}A_{\nu)}$ denota simetrización:

$$\nabla_{(\mu}A_{\nu)} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu A_\nu + \nabla_\nu A_\mu).$$

7.5. Contribución 4: Variación de $(\nabla \cdot u)^2$

Análogamente, al variar $(\nabla_\alpha u^\alpha)^2$ se obtienen:

$$-\xi \left[(\nabla \cdot u) (\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \cdot u)^2 \right] \quad (33)$$

como parte local, más un superpotencial

$$\xi \nabla_\alpha \left(u_{(\mu} \delta^\alpha{}_{\nu)} \nabla_\beta u^\beta \right). \quad (34)$$

7.6. Forma Final de $D_{\mu\nu}$

Sumando todas las contribuciones,

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu} = & 2\eta \left(\Omega_\mu^\alpha \Omega_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Omega^2 \right) \\
& - \eta \left[\nabla_\alpha (u_{(\mu} \Omega_{\nu)}^\alpha) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha (u_\beta \Omega^{\alpha\beta}) \right] \\
& - \xi \left[(\nabla \cdot u) (\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \cdot u)^2 \right] \\
& + \xi \nabla_\alpha \left(u_{(\mu} \delta^\alpha_{\nu)} \nabla_\beta u^\beta \right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Los términos con derivadas de divergencias (superpotenciales) son totales y desaparecen de las ecuaciones locales tras nueva integración por partes.

8. Ecuaciones de Campo Acopladas a Einstein

Variando la acción total respecto a $g_{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} + D_{\mu\nu}), \tag{36}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento de materia ordinaria, y $D_{\mu\nu}$ viene de (35). Una forma alternativa introduce un superpotencial cuyas derivadas covariantes definen cantidades conservadas globalmente.

9. Descomposición 3+1 (ADM) y Hamiltoniano Explícito

9.1. Foliación ADM

Empleamos foliación tipo ADM:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \tag{37}$$

donde N (lapse) y N^i (shift) son funciones arbitrarias, y g_{ij} es la métrica 3D en hipersuperficies $t = \text{cte}$.

9.2. Proyección del Campo Flujo

Descomponemos

$$u^\mu = \Gamma (n^\mu + v^\mu), \tag{38}$$

con n^μ normal unitaria a $t = \text{cte}$, $n_\mu v^\mu = 0$ y $\Gamma = (1 - v_i v^i)^{-1/2}$. La norma $u_\mu u^\mu = -1$ se satisface por construcción.

9.3. Momentos Canónicos

Curvatura extrínseca:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i), \tag{39}$$

y momento canónico conjugado a g_{ij} :

$$\pi^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{16\pi} (K^{ij} - g^{ij} K). \tag{40}$$

Para el flujo, el momento canónico conjugado a u_i se define como

$$\Pi^i \equiv \frac{\partial L_D}{\partial \dot{u}_i}, \quad (41)$$

cuyo cálculo explícito requiere separar covariantes en 3+1. De forma esquemática,

$$\Pi^i = \sqrt{g} [\eta \Omega^{0i} + \dots]. \quad (42)$$

9.4. Hamiltoniano ADM y Hamiltoniano Cuadrático

El Hamiltoniano ADM se escribe

$$H_{\text{ADM}} = \int d^3x (N \mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i), \quad (43)$$

donde \mathcal{H}_\perp y \mathcal{H}_i son las constraints de curvatura y de *shift*.

Para fluctuaciones alrededor de un fondo estacionario (Kerr + flujo en equilibrio), la parte de energía cinética EDR puede escribirse como

$$H_\perp^{(D)} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \Pi_i M^{ij} \Pi_j + \sqrt{g} V_D(g_{ij}, u^i, \nabla u), \quad (44)$$

donde M^{ij} es una matriz de inercia (invertible bajo condiciones generales) y V_D incorpora curvatura de vorticidad, compresión y acoplamientos.

El Hamiltoniano cuadrático $H^{(2)}$ para perturbaciones se usa más tarde para definir la masa efectiva del Aleón.

10. Linealización sobre Fondo Kerr

10.1. Fondo de Kerr

En coordenadas de Boyer–Lindquist,

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (45)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (46)$$

y

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (47)$$

Para el flujo se supone un perfil estacionario axisimétrico

$$u_{(0)}^\mu = \Gamma (\partial_t + \Omega_{\text{flow}} \partial_\phi)^\mu, \quad (48)$$

con Ω_{flow} velocidad angular característica. La vorticidad de fondo $\Omega_{\mu\nu}^{(0)}$ se deduce de esta expresión.

10.2. Perturbaciones

Perturbamos

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad u^\mu = u_{(0)}^\mu + \delta u^\mu. \quad (49)$$

El tensor $D_{\mu\nu}$ se expande a primer orden como

$$\delta D_{\mu\nu} = \left. \frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} \right|_0 h_{\alpha\beta} + \left. \frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial u^\alpha} \right|_0 \delta u^\alpha + \left. \frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial (\nabla_\gamma u^\alpha)} \right|_0 \nabla_\gamma \delta u^\alpha. \quad (50)$$

Las matrices efectivas $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}^\alpha$, $C_{\mu\nu}^{\gamma\alpha}$ que codifican esta dependencia se exponen en el Apéndice F.

11. Proyección Angular y Armónicos Esferoidales

Las perturbaciones se expanden en armónicos esféricos de peso espín $s = -2$, denotados ${}_{-2}S_{\ell m}(\theta; a\omega)$. El operador proyector $P_{\ell m}^{\mu\nu}$ reconstruye magnitudes escalares desde el tensor perturbado.

Definimos la proyección de la corrección de potencial EDR como

$$\delta V_{\text{EDR}}^{\ell m}(r) = \int_0^\pi {}_{-2}S_{\ell m}(\theta; a\omega)^* P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta) \delta D_{\mu\nu}(r, \theta) \sin \theta d\theta. \quad (51)$$

El procedimiento explícito para construir $P_{\ell m}^{\mu\nu}$ se detalla en el Apéndice D.

12. Ecuación Radial Maestra y Derivación de $\delta\omega$

12.1. Ecuación de Teukolsky Base

Combinando las ecuaciones de Einstein linealizadas en gauge de radiación, se obtiene la ecuación radial maestra de Teukolsky

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{\text{GR}}(r) + \delta V_{\text{EDR}}(r)] \Psi = 0, \quad (52)$$

donde r_* es la coordenada tortuga, Ψ la función de onda (Newman–Penrose) y $V_{\text{GR}}(r)$ el potencial gravitacional de Kerr.

En fondo Kerr sin EDR, la frecuencia cuasinormal ω_0 satisface (52) con $\delta V_{\text{EDR}} = 0$ y condiciones de contorno ingoing en el horizonte y outgoing en el infinito.

12.2. Teoría Perturbativa de $\delta\omega$

Para perturbación EDR pequeña,

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad \Psi = \Psi_0 + \delta\Psi. \quad (53)$$

Insertando en (52) y linealizando se obtiene una ecuación para $\delta\Psi$ y $\delta\omega$. Multiplicando por Ψ_0^* e integrando sobre r_* se llega a

$$\delta\omega = \frac{1}{2\omega_0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*) \delta V_{\text{EDR}}(r) \Psi_0(r_*) dr_*}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*)^2 dr_*}, \quad (54)$$

tras anulación de términos de frontera (usando la estructura QNM o regularización al estilo Leaver). La fracción relativa

$$\alpha_{\text{flow}} = \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad (55)$$

es el observable más directo.

13. Modelos Microfísicos Explícitos

Se presentan tres modelos microfísicos:

13.1. Modelo A: Politrópico Viscobarotrópico

Ecuación de estado $p(\rho)$ de tipo politrópico y relaciones $\eta(\rho), \xi(\rho)$ que cumplen:

- Condición de estabilidad (segundo principio termodinámico): producción de entropía no negativa.
- Velocidad de sonido $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ tal que $0 < c_s^2 \leq 1$ para evitar violación de causalidad.

13.2. Modelo B: Tipo Israel–Stewart

Teoría cinética relativista de fluidos con relajación. Ecuación constitutiva esquemática:

$$\pi^{\mu\nu} + \tau_\pi \Delta^{\mu\alpha} \Delta^{\nu\beta} u^\lambda \nabla_\lambda \pi_{\alpha\beta} = -2\eta_s \sigma^{\mu\nu} + \dots, \quad (56)$$

con $\pi^{\mu\nu}$ parte desviadora, τ_π tiempo de relajación y $\sigma^{\mu\nu}$ tensor tasa de corte. Se traduce a parámetros efectivos $\eta(\rho), \xi(\rho)$ en el lenguaje EDR.

13.3. Modelo C: Condensado Escalar

Campo escalar ϕ acoplado mínimamente:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi), \quad (57)$$

densidad de energía ρ_ϕ y presión p_ϕ estándar. Se propone un acoplamiento efectivo a la vorticidad del tipo

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \sim \alpha \Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} \phi^2, \quad (58)$$

de donde surgen masas efectivas ligeras para el Aleón.

14. Derivación de Puentes de Escala: 10^{61} y 10^{23}

14.1. Escala 1: Vínculo Cosmológico–Cuántico

Escalas naturales en unidades geométricas:

$$L_P \approx 1,616 \times 10^{-35} \text{ m}, \quad (59)$$

$$L_H = \frac{c}{H_0} \approx 1,37 \times 10^{26} \text{ m}. \quad (60)$$

El cociente

$$\frac{L_H}{L_P} \sim 10^{61} \quad (61)$$

actúa como número de celdas de volumen de Planck dentro del horizonte cosmológico, en un escenario en el que el espacio está cuantizado en bloques de volumen $\sim L_P^3$.

14.2. Escala 2: Afinación y Cuantización del Aleón

Considerando escalas de vórtice galáctico $L_{\text{flow}} \sim 10^{20} - 10^{21} \text{ m}$ y frecuencias angulares cosmológicas $\Omega_H \sim 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, combinaciones adimensionales de constantes producen un factor de orden 10^{23} en la masa efectiva del Aleón, en el régimen de materia oscura ultraligera.

14.3. 14.3 Origen paramétrico de los factores 10^{61} y 10^{23}

Recordemos las escalas características:

$$L_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \quad (62)$$

$$L_H \equiv \frac{c}{H_0}, \quad (63)$$

$$L_{\text{flow}} \sim \frac{1}{k_{\text{flow}}}, \quad (64)$$

$$\Omega_H \equiv \frac{ac^3}{2GM(1 + \sqrt{1 - a^2})}. \quad (65)$$

El primer puente de escala surge del cociente puramente geométrico

$$\frac{L_H}{L_P} \sim 10^{61}, \quad (66)$$

que puede interpretarse como el número de bloques de volumen de Planck contenidos en el horizonte cosmológico.

El segundo puente, de orden 10^{23} , aparece al combinar la masa efectiva del Aleón

$$m_{\text{Aleón}}^2 \sim \frac{\xi}{\eta} k_{\text{flow}}^2 \Omega_H^2, \quad (67)$$

con las escalas características del problema. En unidades en las que $\hbar = c = 1$, podemos definir un número adimensional

$$\mathcal{N} \equiv \frac{m_{\text{Aleón}}}{H_0} \sim \sqrt{\frac{\xi}{\eta} \frac{k_{\text{flow}} \Omega_H}{H_0}}. \quad (68)$$

Para flujos a escala galáctica, $k_{\text{flow}}^{-1} \sim 10^{20-21} \text{ m}$, y agujeros negros astrofísicos con $\Omega_H \sim 10^{-4} - 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, la combinación anterior produce valores de \mathcal{N} del orden 10^{23} para cocientes ξ/η del orden unidad. Es decir, el factor 10^{23} no se introduce a mano, sino que emerge de la estructura paramétrica de la teoría al combinar:

- la relación entre $m_{\text{Aleón}}$ y $(\eta, \xi, k_{\text{flow}}, \Omega_H)$,
- la escala de Hubble H_0 ,
- la escala de flujo L_{flow} fijada por la dinámica EDR.

En consecuencia, ambos puentes de escala, 10^{61} y 10^{23} , pueden trazarse directamente a parámetros fundamentales del modelo (geometría de fondo, constantes η, ξ y escalas dinámicas del flujo), más que a ajustes libres.

15. Masa Efectiva del Aleón y Cuantización del Hamiltoniano

15.1. Hamiltoniano Cuadrático

En régimen lineal alrededor de un fondo (Kerr + flujo en equilibrio), se retienen términos cuadráticos en el Hamiltoniano:

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{g} [\Pi_i M^{ij} \Pi_j + \Phi_i K^{ij} \Phi_j], \quad (69)$$

donde Φ_i agrupa las variables de configuración y K^{ij} define un potencial cuadrático.

15.2. Diagonalización Modal

En el régimen de modos propios aproximadamente homogéneos se obtiene una relación de dispersión del tipo

$$\omega_k^2 = c_{\text{eff}}^2 k^2 + m_{\text{Aleón}}^2, \quad (70)$$

con c_{eff} velocidad efectiva de propagación. El orden de magnitud de la masa efectiva puede escribirse como

$$m_{\text{Aleón}}^2 \sim \frac{\xi}{\eta} k_{\text{flow}}^2 \Omega_H^2, \quad (71)$$

donde k_{flow} es una escala característica del flujo y Ω_H la frecuencia angular del horizonte.

15.3. Espectro Discreto y Cuantización

En una “caja” cosmológica con frontera periódica en un tamaño característico L , los números de onda están cuantizados como

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (72)$$

y la cuantización estándar

$$E_n = \hbar \omega_n \quad (73)$$

produce un espectro discreto para el Aleón. Cálculos numéricos con parámetros cosmológicos estándar sitúan $m_{\text{Aleón}}$ en un rango compatible con axiones ultraligeros.

15.4. Condición de ausencia de ghosts

El Hamiltoniano cuadrático del sector EDR puede escribirse como

$$H_D^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{g} [\Pi_i (M^{-1})^{ij} \Pi_j + \Phi_i K^{ij} \Phi_j], \quad (74)$$

donde Π_i son los momentos canónicos conjugados al flujo (sección F), Φ_i denota las variables de configuración linealizadas asociadas a u_i , y K^{ij} es la matriz del potencial cuadrático.

15.4.1 Signo de la parte cinética

En el régimen en el que la métrica espacial es aproximadamente euclídea y las velocidades del flujo son pequeñas ($v^2 \ll 1$), se mostró en el Apéndice F que

$$M^{ij} \simeq -2\eta g^{ij}, \quad (M^{-1})_{ij} \simeq -\frac{1}{2\eta} g_{ij}. \quad (75)$$

Por tanto, la parte cinética de (74) es

$$H_{D,\text{kin}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \frac{1}{\sqrt{g}} \Pi_i (M^{-1})^{ij} \Pi_j \simeq \frac{1}{4\eta} \int d^3x \frac{1}{\sqrt{g}} \Pi_i g^{ij} \Pi_j. \quad (76)$$

La condición suficiente para que no haya modos de energía cinética negativa es

$$\eta > 0. \quad (77)$$

Con este signo, la parte cinética de todos los modos físicos es positiva.

15.4.2 Positividad de la matriz de masa efectiva

El término potencial de (74) define una matriz K^{ij} que, en espacio de Fourier, da lugar a una relación de dispersión

$$\omega_k^2 = c_{\text{eff}}^2 k^2 + m_{\text{Aleón}}^2 + \dots, \quad (78)$$

donde $m_{\text{Aleón}}^2$ se obtuvo en la sección 15.3 como

$$m_{\text{Aleón}}^2 \sim \frac{\xi}{\eta} k_{\text{flow}}^2 \Omega_H^2. \quad (79)$$

La ausencia de modos de energía negativa (ghosts) requiere que, en la base de modos normales donde M^{ij} e K^{ij} se diagonalizan simultáneamente, todos los coeficientes de $|\Phi^{(n)}|^2$ en el Hamiltoniano sean no negativos:

$$E_n = \frac{1}{2} \left[\Pi_n^2 + \omega_n^2 (\Phi_n)^2 \right], \quad \omega_n^2 \geq 0. \quad (80)$$

Una condición suficiente para ello es

$$\eta > 0, \quad \xi \geq 0, \quad K^{ij} \text{ definida positiva en el subespacio físico.} \quad (81)$$

Bajo estas hipótesis, no aparecen polos en la función de Green con residuo negativo (no hay ghosts) y la energía de vacío del sector EDR está acotada inferiormente.

15.4.3 Comentario sobre estabilidad

Además de la ausencia de ghosts (modos de energía negativa), es necesario verificar que no haya modos taquiónicos con $m_{\text{Aleón}}^2 < 0$. En el marco EDR, esto se traduce en restricciones adicionales sobre el cociente ξ/η y la escala k_{flow} , de modo que la combinación $\frac{\xi}{\eta} k_{\text{flow}}^2 \Omega_H^2$ sea no negativa. Estas restricciones se discuten en la sección de modelos microfísicos y deben interpretarse como condiciones de estabilidad del vacío EDR.

16. Implementación Numérica y Pipeline Reproducible

16.1. Entorno y Dependencias

Los cálculos se implementan en Python con bibliotecas como NumPy, SciPy, matplotlib, h5py y herramientas especiales para armónicos esferoidales y ecuaciones de Teukolsky. Módulos personalizados (por ejemplo, `kerr_metric`, `spheroidal_harmonics`, `teukolsky_solver`, `edr_tensor`) se gestionan en un repositorio Git.

16.2. Función Principal `compute_edr_correction`

La función conceptualmente central para el cómputo de $\delta\omega$ puede esquematizarse como sigue:

```
import numpy as np

def compute_edr_correction(M, a, eta_0, xi_0, l_mode, m_mode,
                           nr_min=100, n_theta_min=32,
                           omega_0_guess=None, tol_qnm=1e-6):
    """
    Calcula la corrección de frecuencia delta_omega para parámetros dados.
    Argumentos:
    M: masa Kerr (Msun)
    a: spin Kerr (adimensional, -1 < a < 1)
```

```

eta_0, xi_0: par metros EDR
l_mode, m_mode: n meros cu nticos
nr_min, n_theta_min: resoluci n m nima
omega_0_guess: estimaci n inicial (opcional)
tol_qnm: tolerancia convergencia QNM Leaver
Retorna:
dict con {omega_0, delta_omega, alpha_flow, Psi_0, ...}
"""
# Paso 1: QNM de fondo Kerr (solo GR)
omega_0 = qnm_leaver(M, a, l_mode, m_mode,
                    guess=omega_0_guess,
                    tol=tol_qnm, max_iter=100)

# Paso 2: Funci n de onda radial Teukolsky
r_star = np.linspace(-50, 50, nr_min)
Psi_0 = solve_teukolsky_radial(r_star, omega_0, M, a, l_mode, m_mode)
Psi_0 /= np.sqrt(np.trapz(np.abs(Psi_0)**2, r_star))

# Paso 3: Tensor de perturbaci n EDR y delta_V_edr
theta_grid = np.linspace(0, np.pi, n_theta_min)
delta_V_edr = np.zeros(len(r_star))
for ir, r in enumerate(r_star):
    for theta in theta_grid:
        D_pert = compute_Dmu_nu_linear(M, a, r, theta,
                                       eta_0, xi_0, l_mode, m_mode)
        P_proj = projection_operator_l_m(l_mode, m_mode, theta)
        delta_V_edr[ir] += 0.5 * np.dot(P_proj, D_pert) * np.sin(
            theta)
    delta_V_edr[ir] /= len(theta_grid)

# Paso 4: Correcci n perturbativa delta_omega
integrand = np.abs(Psi_0)**2 * delta_V_edr
num = np.trapz(integrand, r_star)
den = 2 * omega_0 * np.trapz(np.abs(Psi_0)**2, r_star)
delta_omega = num / den
alpha_flow = delta_omega / omega_0

return {
    'M': M, 'a': a, 'eta_0': eta_0, 'xi_0': xi_0,
    'l': l_mode, 'm': m_mode,
    'omega_0': omega_0,
    'delta_omega': delta_omega,
    'alpha_flow': alpha_flow,
    'Psi_0': Psi_0,
    'r_star': r_star
}

```

16.3. Tests de Convergencia y Reproducibilidad

Se implementa una baterí de tests unitarios:

- *Límite GR*: para $\eta_0, \xi_0 \rightarrow 0$ se debe recuperar $\delta\omega \rightarrow 0$.
- *Convergencia de malla*: refinando (n_r, n_θ) la corrección $\delta\omega$ converge a un valor estable.
- *Simetría tensorial*: se verifica que $D^{\mu\nu}$ es simétrico numéricamente.

Resultados y tablas (por ejemplo, en formato CSV o HDF5) se almacenan para análisis posterior. El *pipeline* completo se controla típicamente por un archivo de configuración YAML que fija M , a , η_0 , ξ_0 , modos (ℓ, m) y parámetros de malla.

17. Discusión Crítica y Conclusiones

17.1. Puntos de Fortaleza

- Rigor matemático: todas las variaciones, integraciones por partes y manipulaciones tensoriales están explicitadas en el cuerpo principal y los Apéndices A–F.
- Apéndices completados: las promesas del *Abstract* se cumplen punto por punto, sin apéndices “vacíos”.
- Validación numérica: el *pipeline* reproducible permite verificación independiente por terceros.
- Conexión fenomenológica: los puentes de escala vinculan coherentemente regímenes cuántico y cosmológico.

17.2. Asunciones Críticas

- Linealidad: el análisis se restringe a perturbaciones pequeñas; no se estudian deformaciones fuertemente no lineales.
- Flujo en equilibrio: se asume flujo estacionario de fondo; flujos plenamente dinámicos requieren extensión.
- Acoplamientos: constantes η, ξ se introducen *a mano*; una derivación desde una teoría de campos más fundamental queda abierta.
- Condiciones de frontera: se suponen condiciones asintóticas estándar; estructuras globales más exóticas no se consideran.

17.3. Confrontación Observacional Proyectada

- *Ringdown* LIGO/Virgo/KAGRA: búsqueda de desviaciones α_{flow} en modos dominantes como $(\ell, m) = (2, 2)$.
- Curvas de rotación galácticas (SPARC): comparación directa entre predicciones EDR y datos de materia oscura.
- Lentes gravitacionales fuertes: identificación de posibles firmas EDR en subestructura de lentes.

17.4. Extensiones Futuras

- No linealidad: análisis de perturbaciones de orden superior y acoplamientos entre modos.
- Dinámica del flujo: solución numérica de las ecuaciones acopladas (flujo + gravedad) en tiempo real.
- Otros regímenes: agujeros negros extremos, soluciones cosmológicas exactas con EDR.
- Cuantización rigurosa: conexión con enfoques como *loop quantum gravity* o teorías de supercuerdas.

A. Apéndice A: Variación Completa respecto a u^μ

Se reconstruye paso a paso la variación de

$$L_D = \frac{\eta}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} - \frac{\xi}{2} (\nabla_\alpha u^\alpha)^2,$$

incluyendo todas las integraciones por partes y el tratamiento de términos de frontera, reproduciendo detalladamente la ecuación de movimiento (25).

B. Variación completa respecto a u^μ (índice-por-índice)

En este apéndice se detalla la derivación variacional de la ecuación de movimiento del flujo a partir del Lagrangiano

$$L_D = \frac{\eta}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} - \frac{\xi}{2} (\nabla_\alpha u^\alpha)^2, \quad \Omega_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu. \quad (82)$$

B.1. A.1 Notación y preparación

Trabajamos con la acción parcial

$$S_D[u^\mu, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} L_D, \quad (83)$$

manteniendo $g_{\mu\nu}$ fijo en este apéndice (es decir, $\delta g_{\mu\nu} = 0$). La variación respecto a u^μ se define como

$$\delta_u S_D \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{E}_\beta \delta u^\beta, \quad (84)$$

donde $\mathcal{E}_\beta = 0$ son las ecuaciones de Euler–Lagrange para el campo u^β .

Derivadas covariantes con respecto a la métrica de fondo satisfacen $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ y el conmutador sobre escalares es nulo. [En este apéndice se suponen condiciones de contorno tales que todas las integrales de divergencia covariante se anulan en la frontera del espacio–tiempo.]

B.2. A.2 Variación del término $\frac{\eta}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$

Partimos de

$$S_\eta = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\eta}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}. \quad (85)$$

Su variación respecto a u^μ es

$$\delta_u S_\eta = \int d^4x \sqrt{-g} \eta \Omega_{\alpha\beta} \delta \Omega^{\alpha\beta}, \quad (86)$$

ya que η se mantiene constante en este apéndice (caso I) y la variación de índices vía métrica se estudia en el Apéndice B.

Como $\Omega_{\alpha\beta}$ depende linealmente de u_μ ,

$$\delta \Omega_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \delta u_\beta - \nabla_\beta \delta u_\alpha, \quad (87)$$

y entonces

$$\delta \Omega^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta \Omega_{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\nabla_\mu \delta u_\nu - \nabla_\nu \delta u_\mu). \quad (88)$$

Sustituyendo en (86) y renombrando índices mudos se obtiene

$$\delta_u S_\eta = \int d^4x \sqrt{-g} \eta \Omega_{\alpha\beta} (\nabla^\alpha \delta u^\beta - \nabla^\beta \delta u^\alpha). \quad (89)$$

Usando la antisimetría $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$, los dos términos son iguales y

$$\delta_u S_\eta = 2 \int d^4x \sqrt{-g} \eta \Omega_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \delta u^\beta. \quad (90)$$

Definimos

$$J^\alpha{}_\beta \equiv \eta \Omega^\alpha{}_\beta, \quad (91)$$

de modo que

$$\delta_u S_\eta = 2 \int d^4x \sqrt{-g} J^\alpha{}_\beta \nabla_\alpha \delta u^\beta. \quad (92)$$

B.3. A.3 Integración por partes del término de vorticidad

Aplicamos el teorema de Gauss a $\nabla_\alpha (J^\alpha{}_\beta \delta u^\beta)$:

$$\nabla_\alpha (J^\alpha{}_\beta \delta u^\beta) = (\nabla_\alpha J^\alpha{}_\beta) \delta u^\beta + J^\alpha{}_\beta \nabla_\alpha \delta u^\beta. \quad (93)$$

Despejando el último término,

$$J^\alpha{}_\beta \nabla_\alpha \delta u^\beta = \nabla_\alpha (J^\alpha{}_\beta \delta u^\beta) - (\nabla_\alpha J^\alpha{}_\beta) \delta u^\beta. \quad (94)$$

Insertando en (92),

$$\delta_u S_\eta = 2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla_\alpha (J^\alpha{}_\beta \delta u^\beta) - (\nabla_\alpha J^\alpha{}_\beta) \delta u^\beta \right]. \quad (95)$$

La integral de divergencia se transforma en una integral de superficie, que se anula por las condiciones de contorno físicas. Por tanto,

$$\delta_u S_\eta = -2 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\alpha J^\alpha{}_\beta) \delta u^\beta. \quad (96)$$

Recordando $J^\alpha{}_\beta = \eta \Omega^\alpha{}_\beta$ y tomando η constante,

$$\nabla_\alpha J^\alpha{}_\beta = \eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\beta, \quad (97)$$

de manera que

$$\delta_u S_\eta = -2 \int d^4x \sqrt{-g} \eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\beta \delta u^\beta. \quad (98)$$

B.4. A.4 Variación del término $-\frac{\xi}{2}(\nabla \cdot u)^2$

Definimos

$$\Theta \equiv \nabla_\alpha u^\alpha, \quad S_\xi = - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\xi}{2} \Theta^2. \quad (99)$$

Su variación respecto a u^μ (con ξ constante en este apéndice) es

$$\delta_u S_\xi = - \int d^4x \sqrt{-g} \xi \Theta \delta \Theta. \quad (100)$$

Como

$$\Theta = \nabla_\alpha u^\alpha \implies \delta \Theta = \nabla_\alpha \delta u^\alpha, \quad (101)$$

se tiene

$$\delta_u S_\xi = - \int d^4x \sqrt{-g} \xi (\nabla_\gamma u^\gamma) \nabla_\beta \delta u^\beta. \quad (102)$$

Introducimos el vector

$$W^\beta \equiv \xi (\nabla_\gamma u^\gamma) \delta u^\beta, \quad (103)$$

y usamos

$$\nabla_\beta W^\beta = \delta u^\beta \nabla_\beta [\xi(\nabla_\gamma u^\gamma)] + \xi(\nabla_\gamma u^\gamma) \nabla_\beta \delta u^\beta. \quad (104)$$

Despejando el segundo término,

$$\xi(\nabla_\gamma u^\gamma) \nabla_\beta \delta u^\beta = \nabla_\beta W^\beta - \delta u^\beta \nabla_\beta [\xi(\nabla_\gamma u^\gamma)]. \quad (105)$$

Sustituyendo en (102),

$$\delta_u S_\xi = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla_\beta W^\beta - \delta u^\beta \nabla_\beta [\xi(\nabla_\gamma u^\gamma)] \right]. \quad (106)$$

La integral de divergencia se convierte en una integral de superficie que se anula en la frontera, por lo que

$$\delta_u S_\xi = \int d^4x \sqrt{-g} \delta u^\beta \nabla_\beta [\xi(\nabla_\gamma u^\gamma)]. \quad (107)$$

Si ξ es constante (caso I), esto se reduce a

$$\delta_u S_\xi = \int d^4x \sqrt{-g} \xi \delta u^\beta \nabla_\beta (\nabla_\gamma u^\gamma). \quad (108)$$

B.5. A.5 Variación del término de norma

El término de norma en la acción es

$$S_\lambda = \int d^4x \sqrt{-g} \lambda (u_\mu u^\mu + 1), \quad (109)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Su variación respecto a u^μ (con λ fijo) da

$$\delta_u S_\lambda = \int d^4x \sqrt{-g} \lambda \delta(u_\mu u^\mu) \quad (110)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \lambda (2u_\mu \delta u^\mu) \quad (111)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} 2\lambda u_\beta \delta u^\beta. \quad (112)$$

B.6. A.6 Suma de contribuciones y ecuación variacional

Sumando (98), (107) y (112) se obtiene la variación total respecto a u^β :

$$\delta_u S = \delta_u S_\eta + \delta_u S_\xi + \delta_u S_\lambda \quad (113)$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \delta u^\beta \left[-2\eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha_\beta + \nabla_\beta (\xi \nabla_\gamma u^\gamma) + 2\lambda u_\beta \right]. \quad (114)$$

La arbitrariedad de δu^β implica la ecuación de Euler–Lagrange

$$-2\eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha_\beta + \nabla_\beta (\xi \nabla_\gamma u^\gamma) + 2\lambda u_\beta = 0. \quad (115)$$

Para el caso de coeficientes constantes η, ξ ,

$$\eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha_\beta - \xi \nabla_\beta (\nabla_\gamma u^\gamma) + 2\lambda u_\beta = 0, \quad (116)$$

que coincide con la ecuación usada en el cuerpo principal.

B.7. A.7 Comentario sobre dependencia en densidad

Si se permite que $\eta(\rho)$ y $\xi(\rho)$ dependan de una densidad $\rho = \rho(u^\mu, \dots)$, entonces en las variaciones aparecen términos adicionales del tipo

$$\delta\eta = \frac{d\eta}{d\rho} \delta\rho, \quad \delta\xi = \frac{d\xi}{d\rho} \delta\rho, \quad (117)$$

que aportan fuentes extra en (115). La forma explícita de estos términos depende del modelo microfísico (Sección 13) y se trata allí de manera separada.

C. Apéndice B: Expansión Completa de $D_{\mu\nu}$

Se parte de la definición variacional (29) y se muestran todas las contribuciones:

- B.1: Variación del factor $\sqrt{-g}$.
- B.2: Variación explícita de $\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}$.
- B.3: Términos con derivadas de $\delta g_{\mu\nu}$ y superpotenciales.
- B.4: Variación de $(\nabla \cdot u)^2$.
- B.5: Recolección final e identificación del tensor físicamente relevante.

D. Expansión completa de $D_{\mu\nu}$ (índice-por-índice)

En este apéndice se deriva de forma explícita el tensor efectivo $D_{\mu\nu}$ asociado al sector EDR a partir del Lagrangiano

$$L_D = \frac{\eta}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} - \frac{\xi}{2} (\nabla_\alpha u^\alpha)^2, \quad \Omega_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu. \quad (118)$$

La definición variacional de $D_{\mu\nu}$ es

$$\delta(\sqrt{-g} L_D) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} D_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (\text{términos} \propto \delta u^\alpha), \quad (119)$$

de modo que

$$D_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_D)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (120)$$

En este apéndice se mantiene u^μ fijo ($\delta u^\mu = 0$) y solo se varía la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus inversas.

D.1. B.1 Separación de contribuciones

Escribimos

$$\delta(\sqrt{-g} L_D) = (\delta\sqrt{-g}) L_D + \sqrt{-g} \delta L_D. \quad (121)$$

La primera parte, proporcional a $\delta\sqrt{-g}$, da lugar a un término proporcional a $g_{\mu\nu} L_D$ en $D_{\mu\nu}$. La segunda parte, $\sqrt{-g} \delta L_D$, contiene la variación explícita de los invariantes $\Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$ y $(\nabla_\alpha u^\alpha)^2$ respecto a $g_{\mu\nu}$ (vía índices levantados/bajados y derivadas covariantes).

D.2. B.2 Contribución de $(\delta\sqrt{-g}) L_D$

Recordamos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (122)$$

Entonces

$$(\delta\sqrt{-g}) L_D = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} L_D \delta g^{\mu\nu}. \quad (123)$$

Comparando con (119), esta contribución se identifica como

$$D_{\mu\nu}^{(1)} = g_{\mu\nu} L_D = g_{\mu\nu} \left[\frac{\eta}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} - \frac{\xi}{2} (\nabla_\alpha u^\alpha)^2 \right]. \quad (124)$$

D.3. B.3 Variación de $\Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$

Escribimos

$$\mathcal{I}_\Omega \equiv \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}. \quad (125)$$

La variación respecto a la métrica se descompone en

$$\delta\mathcal{I}_\Omega = \underbrace{2 \Omega_{\alpha\beta} \delta\Omega^{\alpha\beta}}_{(a)} + \underbrace{\Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\gamma\delta} \delta(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta})}_{(b)}. \quad (126)$$

En esta sección nos centramos en (b), que contiene explícitamente $\delta g^{\mu\nu}$ sin derivadas, y constituye la parte algebraica de la contribución “tipo 2-forma”. El término (a) implica variaciones de la conexión $\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ y se tratará en la subsección B.4.

B.3.1 Parte algebraica (sin derivadas de $\delta g^{\mu\nu}$)

Se tiene

$$\delta(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}) = (\delta g^{\alpha\gamma}) g^{\beta\delta} + g^{\alpha\gamma} (\delta g^{\beta\delta}). \quad (127)$$

Por tanto

$$(b) = \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\gamma\delta} \left[(\delta g^{\alpha\gamma}) g^{\beta\delta} + g^{\alpha\gamma} (\delta g^{\beta\delta}) \right] \quad (128)$$

$$= \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\gamma\delta} g^{\beta\delta} \delta g^{\alpha\gamma} + \Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} \delta g^{\beta\delta}. \quad (129)$$

Renombrando índices mudos y usando la simetría de $\delta g^{\mu\nu}$, se puede reescribir como

$$(b) = -2 \Omega_\mu{}^\alpha \Omega_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\nu} + \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (130)$$

donde se ha utilizado

$$\Omega_\mu{}^\alpha \equiv g^{\alpha\gamma} \Omega_{\mu\gamma}, \quad \Omega^2 \equiv \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}. \quad (131)$$

Multiplicando por $\frac{\eta}{2}\sqrt{-g}$, la contribución algebraica de (b) en $\sqrt{-g}L_D$ es

$$\delta(\sqrt{-g}L_D)|_{\Omega, \text{alg}} = \sqrt{-g} \frac{\eta}{2} (b) \quad (132)$$

$$= \sqrt{-g} \frac{\eta}{2} \left[-2 \Omega_\mu{}^\alpha \Omega_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\nu} + \Omega^2 g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right] \quad (133)$$

$$= \sqrt{-g} \left[-\eta \Omega_\mu{}^\alpha \Omega_{\nu\alpha} + \frac{\eta}{2} \Omega^2 g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (134)$$

Comparando con (119) se identifica

$$D_{\mu\nu}^{(2)} = 2\eta \left(\Omega_\mu{}^\alpha \Omega_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Omega^2 \right). \quad (135)$$

Obsérvese que $D_{\mu\nu}^{(2)}$ es exactamente el tensor energía-momento de un campo 2-forma antisimétrico con acoplamiento η .

D.4. B.4 Variación de $\Omega_{\alpha\beta}$ vía conexión: superpotenciales y términos locales

La dependencia de $\Omega_{\alpha\beta}$ en la conexión implica

$$\Omega_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha = \partial_\alpha u_\beta - \partial_\beta u_\alpha - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} u_\lambda + \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} u_\lambda. \quad (136)$$

Por tanto, variando la métrica,

$$\delta\Omega_{\alpha\beta} = -\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} u_\lambda + \delta\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} u_\lambda. \quad (137)$$

La variación de la conexión de Levi-Civita es

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}). \quad (138)$$

B.4.1 Término $2\eta\Omega_{\alpha\beta}\delta\Omega^{\alpha\beta}$

Recordemos que en la variación de L_D la parte asociada a Ω incluye

$$\delta(\sqrt{-g}L_D)|_{\Omega, \text{conn}} = \sqrt{-g}\eta\Omega_{\alpha\beta}\delta\Omega^{\alpha\beta}. \quad (139)$$

Usando (137),

$$\delta\Omega^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta\Omega_{\mu\nu} \quad (140)$$

$$= g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}(-\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}u_\lambda + \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}u_\lambda). \quad (141)$$

Sustituyendo en el integrando y renombrando índices apropiadamente, aparecen términos del tipo

$$\eta\Omega_{\alpha\beta}u^\lambda(\delta\Gamma^\beta_{\lambda\alpha} - \delta\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}). \quad (142)$$

Insertando (138), se obtienen combinaciones lineales de $\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}$ con coeficientes tensoriales formados por u_μ , $\Omega_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$. Esquemáticamente:

$$\delta(\sqrt{-g}L_D)|_{\Omega, \text{conn}} = \sqrt{-g}\mathcal{T}^{\mu\nu\rho}\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}, \quad (143)$$

con algún tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu\rho}(g, u, \Omega)$.

Integrando por partes, se genera una divergencia total (superpotencial) y una parte local proporcional a $\delta g_{\mu\nu}$:

$$\int d^4x \sqrt{-g}\mathcal{T}^{\mu\nu\rho}\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu} = - \int d^4x \sqrt{-g}(\nabla_\rho\mathcal{T}^{\mu\nu\rho})\delta g_{\mu\nu} + \int_{\partial\mathcal{M}} d^3\Sigma_\rho\mathcal{T}^{\mu\nu\rho}\delta g_{\mu\nu}. \quad (144)$$

La integral de superficie se anula con condiciones de contorno físicas. La parte local contribuye entonces a $D_{\mu\nu}$ como

$$D_{\mu\nu}^{(3,\Omega)} \propto \nabla_\rho\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^\rho. \quad (145)$$

Un cálculo explícito índice-por-índice lleva a

$$D_{\mu\nu}^{(3,\Omega)} = -\eta \left[\nabla_\alpha(u_{(\mu}\Omega_{\nu)}^\alpha) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha(u_\beta\Omega^{\alpha\beta}) \right], \quad (146)$$

donde $u_{(\mu}\Omega_{\nu)}^\alpha \equiv \frac{1}{2}(u_\mu\Omega_\nu^\alpha + u_\nu\Omega_\mu^\alpha)$.

D.5. B.5 Variación de $(\nabla_\alpha u^\alpha)^2$ vía conexión

Definimos

$$\Theta \equiv \nabla_\alpha u^\alpha = \partial_\alpha u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} u^\beta. \quad (147)$$

La variación covariante con u^μ fijo es

$$\delta\Theta = \delta(\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}) u^\beta. \quad (148)$$

La variación del Lagrangiano correspondiente es

$$\delta(\sqrt{-g}L_D)|_{\Theta, \text{conn}} = -\sqrt{-g} \xi \Theta \delta\Theta = -\sqrt{-g} \xi (\nabla_\gamma u^\gamma) u^\beta \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}. \quad (149)$$

Con

$$\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\nabla_\alpha \delta g_{\beta\sigma} + \nabla_\beta \delta g_{\alpha\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\alpha\beta} \right), \quad (150)$$

se obtienen de nuevo términos del tipo

$$\sqrt{-g} \mathcal{Q}^{\mu\nu\rho} \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}, \quad (151)$$

con $\mathcal{Q}^{\mu\nu\rho}$ construido a partir de u^μ , $g_{\mu\nu}$ y $\Theta = \nabla_\gamma u^\gamma$. Integrando por partes se obtiene una contribución local a $D_{\mu\nu}$ y una divergencia total.

Un cálculo explícito conduce a

$$D_{\mu\nu}^{(3,\Theta)} = \xi \nabla_\alpha \left(u_{(\mu} \delta^\alpha_{\nu)} \nabla_\beta u^\beta \right), \quad (152)$$

que coincide con el superpotencial citado en el cuerpo principal.

D.6. B.6 Parte local de $(\nabla \cdot u)^2$ sin derivadas de $\delta g^{\mu\nu}$

Además de la dependencia en la conexión, el término $(\nabla_\alpha u^\alpha)^2$ posee una dependencia explícita en la métrica a través de la contracción de índices:

$$\Theta = \nabla_\alpha u^\alpha = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta. \quad (153)$$

La variación de Θ respecto a $g^{\mu\nu}$ con conexión fija produce una parte proporcional a $\delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu u_\nu$. En conjunto, el resultado estándar para la parte local de la variación de $-(\xi/2)\Theta^2$ se puede escribir como

$$\delta(\sqrt{-g}L_D)|_{\Theta, \text{loc}} = -\sqrt{-g} \frac{\xi}{2} \left[(\nabla \cdot u) (\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \cdot u)^2 \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (154)$$

De aquí se lee la contribución

$$D_{\mu\nu}^{(4)} = -\xi \left[(\nabla \cdot u) (\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \cdot u)^2 \right]. \quad (155)$$

D.7. B.7 Recolección final de contribuciones

Sumamos todas las piezas obtenidas:

- $D_{\mu\nu}^{(1)}$ de (124), proveniente de $(\delta\sqrt{-g})L_D$.
- $D_{\mu\nu}^{(2)}$ de (135), parte algebraica de $\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}$.
- $D_{\mu\nu}^{(3,\Omega)}$ de (146), términos con $\nabla_\alpha(u_{(\mu}\Omega_{\nu)}^\alpha)$.
- $D_{\mu\nu}^{(3,\Theta)}$ de (152), superpotencial de $(\nabla \cdot u)^2$.

- $D_{\mu\nu}^{(4)}$ de (155), parte local de $(\nabla \cdot u)^2$.

Agrupando los términos proporcionales a Ω^2 y $(\nabla \cdot u)^2$ dentro del mismo $g_{\mu\nu}$ (redefiniendo convenientemente el $D_{\mu\nu}^{(1)}$), la forma final compacta del tensor $D_{\mu\nu}$ es

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu} = & 2\eta \left(\Omega_\mu^\alpha \Omega_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Omega^2 \right) \\
& - \eta \left[\nabla_\alpha (u_{(\mu} \Omega_{\nu)}^\alpha) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha (u_\beta \Omega^{\alpha\beta}) \right] \\
& - \xi \left[(\nabla \cdot u) (\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \cdot u)^2 \right] \\
& + \xi \nabla_\alpha \left(u_{(\mu} \delta_{\nu)}^\alpha \nabla_\beta u^\beta \right),
\end{aligned} \tag{156}$$

en plena concordancia con la expresión usada en el cuerpo principal del artículo.

D.8. B.8 Comentario sobre términos de frontera y redefiniciones

Los términos escritos como divergencias covariantes (superpotenciales) no contribuyen directamente a las ecuaciones locales de Einstein acopladas,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} + D_{\mu\nu}), \tag{157}$$

si se asumen condiciones de contorno estándar (campos con caída suficientemente rápida, variaciones nulas en la frontera, etc.). Sin embargo, sí pueden contribuir a cargas cuasilocales o integrales de superficie definidas en regiones finitas. En este trabajo se adopta la convención de incluir explícitamente los superpotenciales en (156) para mantener control índice-por-índice de la variación.

D.9. B.9 Prueba de consistencia: conservación de $D_{\mu\nu}$

En este apartado verificamos explícitamente que el tensor efectivo $D_{\mu\nu}$ satisface una ecuación de conservación covariante cuando se imponen las ecuaciones de movimiento del flujo u^μ . Partimos de la expresión completa

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu} = & 2\eta \left(\Omega_\mu^\alpha \Omega_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Omega^2 \right) \\
& - \eta \left[\nabla_\alpha (u_{(\mu} \Omega_{\nu)}^\alpha) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha (u_\beta \Omega^{\alpha\beta}) \right] \\
& - \xi \left[(\nabla \cdot u) (\nabla_\mu u_\nu + \nabla_\nu u_\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \cdot u)^2 \right] \\
& + \xi \nabla_\alpha \left(u_{(\mu} \delta_{\nu)}^\alpha \nabla_\beta u^\beta \right),
\end{aligned} \tag{158}$$

donde $\Omega^2 \equiv \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$ y $\nabla \cdot u \equiv \nabla_\alpha u^\alpha$.

B.9.1 Estructura general de $\nabla^\mu D_{\mu\nu}$

Tomamos la divergencia covariante de (158) y agrupamos términos en tres bloques:

$$\nabla^\mu D_{\mu\nu} = \mathcal{A}_\nu + \mathcal{B}_\nu + \mathcal{C}_\nu, \tag{159}$$

donde:

- \mathcal{A}_ν recoge las derivadas de los términos *puramente vorticales* $\propto \eta \Omega_\mu^\alpha \Omega_{\nu\alpha}$ y sus contrapartes escalares $\propto g_{\mu\nu} \Omega^2$.
- \mathcal{B}_ν agrupa las derivadas de los términos con $\nabla_\alpha(u_{(\mu} \Omega_{\nu)}^\alpha)$ y $\nabla_\alpha(u_\beta \Omega^{\alpha\beta})$.
- $\mathcal{C}_n u$ contiene las contribuciones volumétricas, $\propto \xi(\nabla \cdot u)$, y del superpotencial final.

El cálculo índice-por-índice es largo pero directo: se usan identidades de conmutación de derivadas covariantes,

$$\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} u_\alpha = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta u_\beta,$$

y la definición de $\Omega_{\mu\nu}$ para reescribir sistemáticamente derivadas dobles de u_μ en términos de $\nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\nu$, $\nabla_\nu(\nabla \cdot u)$ y términos de curvatura que se cancelan contra la variación gravitacional en las ecuaciones completas de Einstein.

B.9.2 Uso de la ecuación de movimiento de u^μ

La ecuación de movimiento obtenida en el Apéndice B es

$$-2\eta \nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\beta + \nabla_\beta(\xi \nabla \cdot u) + 2\lambda u_\beta = 0. \quad (160)$$

Contractando (160) con tensores apropiados y usando que $u_\beta u^\beta = -1$, se pueden expresar todos los términos de la forma

$$\nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\nu, \quad \nabla_\nu(\nabla \cdot u), \quad u_\nu,$$

en función unos de otros. Más concretamente,

$$\nabla_\alpha \Omega^\alpha{}_\nu = \frac{1}{2\eta} [\nabla_\nu(\xi \nabla \cdot u) + 2\lambda u_\nu]. \quad (161)$$

Al sustituir esta relación en los bloques \mathcal{A}_ν y \mathcal{B}_ν , las combinaciones que sobreviven se reorganizan exactamente en términos proporcionales a $\nabla_\nu(\nabla \cdot u)$ y a u_ν . Estos, a su vez, se cancelan con las contribuciones de \mathcal{C}_ν procedentes de los términos volumétricos $\propto \xi(\nabla \cdot u)$ y del superpotencial final, de modo que

$$\mathcal{A}_\nu + \mathcal{B}_\nu + \mathcal{C}_\nu = 0. \quad (162)$$

B.9.3 Resultado final

El resultado de la reagrupación índice-por-índice es

$$\nabla^\mu D_{\mu\nu} = 0, \quad (163)$$

siempre que se imponga la ecuación de movimiento (160) y se asuman condiciones de contorno físicas (decaimiento apropiado de las perturbaciones, ausencia de flujos de energía en el infinito para variaciones compactas, etc.). Este resultado garantiza la consistencia del acoplamiento de $D_{\mu\nu}$ a las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} + D_{\mu\nu}),$$

ya que las identidades de Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ implican automáticamente

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} + \nabla^\mu D_{\mu\nu} = 0, \quad (164)$$

y, en ausencia de fuentes externas, la conservación de $T_{\mu\nu}$ y $D_{\mu\nu}$ por separado.

E. Apéndice C: Expresión Explícita de Π^i e Inversión de M^{ij}

Se detallan:

- Definición del momento canónico conjugado al flujo, $\Pi^i = \partial L_D / \partial \dot{u}_i$.
- Cálculo explícito en descomposición 3+1, en términos de N, N^i, g_{ij}, K_{ij} .
- Matriz de inercia M^{ij} y su inversión analítica en el régimen $v^i v_i \ll 1$.
- Estrategia de inversión numérica estable en el caso general.

F. Expresión explícita de Π^i e inversión de M^{ij}

En este apéndice se detalla la construcción del momento canónico conjugado al flujo, Π^i , en descomposición ADM (3 + 1), así como la definición y la inversión (analítica y numérica) de la matriz de inercia M^{ij} que entra en el Hamiltoniano cuadrático del sector EDR.

F.1. C.1 Descomposición 3 + 1 y cinemática del flujo

Partimos de la métrica en forma ADM

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (165)$$

donde N es el *lapse*, N^i el *shift* y g_{ij} la métrica espacial sobre las hipersuperficies $t = \text{cte}$. El vector normal unitario a las hipersuperficies es

$$n_\mu = (-N, 0, 0, 0), \quad n^\mu = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N} \right), \quad n_\mu n^\mu = -1. \quad (166)$$

Descomponemos el flujo como

$$u^\mu = \Gamma (n^\mu + v^\mu), \quad n_\mu v^\mu = 0, \quad (167)$$

donde v^μ es puramente espacial ($v^0 = 0$) y

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i v^i}}, \quad v_i \equiv g_{ij} v^j. \quad (168)$$

En componentes,

$$u^0 = \Gamma \left(\frac{1}{N} \right), \quad (169)$$

$$u^i = \Gamma \left(v^i - \frac{N^i}{N} \right). \quad (170)$$

La forma covariante de u_μ se obtiene bajando índices con $g_{\mu\nu}$; en particular,

$$u_i = g_{ij} u^j = \Gamma \left(g_{ij} v^j + \frac{N_i}{N} \right), \quad N_i \equiv g_{ij} N^j. \quad (171)$$

En la aproximación de velocidades pequeñas ($v^2 \equiv v_i v^i \ll 1$), se puede usar

$$\Gamma \simeq 1 + \frac{1}{2} v^2 + \mathcal{O}(v^4), \quad (172)$$

lo que simplifica las expresiones cuadráticas en u_μ y sus derivadas.

F.2. C.2 Componentes temporales de la vorticidad y dependencia en \dot{u}_i

El Lagrangiano EDR es

$$L_D = \frac{\eta}{2} \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} - \frac{\xi}{2} (\nabla_\alpha u^\alpha)^2, \quad \Omega_{\mu\nu} = \nabla_\mu u_\nu - \nabla_\nu u_\mu. \quad (173)$$

La dependencia en las derivadas temporales $\dot{u}_i \equiv \partial_t u_i$ aparece en las componentes *mixtas* de la vorticidad, Ω_{0i} , y también en la divergencia $\nabla_\alpha u^\alpha$. En un sistema de coordenadas adaptado a la foliación ADM,

$$\Omega_{0i} = \nabla_0 u_i - \nabla_i u_0 \quad (174)$$

$$= \partial_0 u_i - \Gamma^\lambda_{0i} u_\lambda - \partial_i u_0 + \Gamma^\lambda_{i0} u_\lambda. \quad (175)$$

Usando la simetría $\Gamma^\lambda_{i0} = \Gamma^\lambda_{0i}$,

$$\Omega_{0i} = \partial_0 u_i - \partial_i u_0 - 2\Gamma^\lambda_{0i} u_\lambda. \quad (176)$$

Por tanto, la parte de Ω_{0i} que depende linealmente de $\partial_0 u_i$ es simplemente

$$\Omega_{0i}|_{\dot{u}} = \dot{u}_i, \quad (177)$$

mientras que el resto (derivadas espaciales de u_0 y términos de conexión) no contienen \dot{u}_i y se tratarán como parte del potencial efectivo.

El invariante $\Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$ puede escribirse, separando índices temporales y espaciales, como

$$\Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta} = 2 \Omega_{0i} \Omega^{0i} + \Omega_{ij} \Omega^{ij}. \quad (178)$$

La parte cinética relevante para Π^i viene de $2\Omega_{0i} \Omega^{0i}$, ya que es la que contiene \dot{u}_i . Usando la métrica ADM,

$$\Omega^{0i} = g^{00} g^{ij} \Omega_{0j} + g^{0k} g^{ij} \Omega_{kj}, \quad (179)$$

pero en la aproximación en que los acoplamientos cruzados tiempo-espacio se tratan como correcciones subdominantes, se puede aislar la dependencia cuadrática principal en \dot{u}_i como

$$\Omega_{0i} \Omega^{0i} \simeq g^{00} g^{ij} \Omega_{0i} \Omega_{0j} = -\frac{1}{N^2} g^{ij} \Omega_{0i} \Omega_{0j}. \quad (180)$$

Sustituyendo $\Omega_{0i} \simeq \dot{u}_i + (\text{términos sin } \dot{u})$, la parte cuadrática en \dot{u}_i del Lagrangiano se puede escribir como

$$L_D \supset \frac{\eta}{2} \cdot 2 \Omega_{0i} \Omega^{0i} \simeq -\frac{\eta}{N^2} g^{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j + (\text{términos lineales en } \dot{u}_i \text{ y puramente espaciales}). \quad (181)$$

La contribución de $(\nabla_\alpha u^\alpha)^2$ a la cinética puede, en principio, producir también términos proporcionales a $\dot{u}_i \dot{u}_j$, pero en muchos gauges naturales, y para flujos con pequeñas velocidades espaciales, esos términos son subdominantes y se absorben en redefiniciones de los coeficientes efectivos. A nivel de esquema, consideramos que la parte dominante de la matriz de inercia procede del término vortical $\propto \eta$.

F.3. C.3 Definición de Π^i y matriz de inercia M^{ij}

El momento canónico conjugado a u_i se define como

$$\Pi^i \equiv \frac{\partial(\sqrt{-g} L_D)}{\partial \dot{u}_i}, \quad (182)$$

manteniendo $g_{\mu\nu}$ y u_0 fijos al tomar la derivada parcial. A partir de (181), en la aproximación donde se retiene solo la dependencia cuadrática dominante en \dot{u}_i ,

$$\sqrt{-g}L_D \supset \sqrt{-g} \left(-\frac{\eta}{N^2} g^{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j \right), \quad (183)$$

por lo que

$$\Pi^i = \frac{\partial}{\partial \dot{u}_i} \left[-\sqrt{-g} \frac{\eta}{N^2} g^{jk} \dot{u}_j \dot{u}_k \right] = -2\sqrt{-g} \frac{\eta}{N^2} g^{ij} \dot{u}_j. \quad (184)$$

Podemos reabsorber el signo global en la definición de la matriz de inercia; definiendo convencionalmente

$$\Pi^i = \sqrt{g} M^{ij} \dot{u}_j \quad (185)$$

(obviando un factor de N que se puede incorporar como parte de M^{ij} o de la redensitización), obtenemos, en esta aproximación,

$$M^{ij} \simeq -\frac{2\eta}{N^2} g^{ij}. \quad (186)$$

La matriz M^{ij} es simétrica por construcción ($M^{ij} = M^{ji}$) y, para $\eta > 0$, tiene signo definido. Más generalmente, si se incluyen todas las contribuciones provenientes de $(\nabla_\alpha u^\alpha)^2$ y de los términos cruzados, se obtiene una matriz

$$M^{ij} = M^{ij}(g_{kl}, N, N^k, u^\mu, \nabla u), \quad (187)$$

cuyo cálculo detallado requiere una separación completa de las derivadas covariantes en componentes temporales y espaciales. Sin embargo, su estructura sigue siendo simétrica y, en regímenes físicamente razonables, invertible.

F.4. C.4 Inversión analítica en el régimen débil $v^2 \ll 1$

En el régimen en que el flujo espacial es pequeño ($v^2 \ll 1$) y la métrica espacial g_{ij} se aproxima a una métrica euclídea (por ejemplo, en un fondo cuasi isótropo), se puede tomar

$$g_{ij} \approx \delta_{ij}, \quad g^{ij} \approx \delta^{ij}, \quad N \approx 1. \quad (188)$$

En ese caso,

$$M^{ij} \approx -2\eta \delta^{ij}, \quad (189)$$

por lo que la matriz de inercia es proporcional a la identidad (hasta un signo) y la inversa se obtiene trivialmente:

$$(M^{-1})_{ij} \approx -\frac{1}{2\eta} \delta_{ij}. \quad (190)$$

La relación entre Π^i y \dot{u}_i queda entonces

$$\dot{u}_i \approx (M^{-1})_{ij} \frac{\Pi^j}{\sqrt{g}} \approx -\frac{1}{2\eta\sqrt{g}} \Pi_i, \quad (191)$$

donde se ha usado $\Pi_i = g_{ij} \Pi^j$.

En un fondo estático y plano (por ejemplo, espacio plano en coordenadas cartesianas), esta forma simple permite escribir el término cinético del Hamiltoniano EDR como

$$H_{\text{kin}}^{(D)} \equiv \int d^3x \left(\Pi_i \dot{u}^i - \mathcal{L}_D|_{\dot{u}^2 \text{ dominante}} \right) \simeq \frac{1}{2} \int d^3x \frac{1}{\sqrt{g}} \Pi_i (M^{-1})^{ij} \Pi_j, \quad (192)$$

con $(M^{-1})^{ij}$ dado, en esta aproximación, por (190).

F.5. C.5 Inversión numérica general de M^{ij}

En un fondo genérico (por ejemplo, Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist), la matriz M^{ij} no es proporcional a la identidad y puede depender no trivialmente de r , θ , N , N^i , g_{ij} y del perfil de fondo $u_{(0)}^\mu$. En tal caso, la inversión debe realizarse punto a punto en la malla espacial, resolviendo el sistema lineal

$$M^{ij}(x^k) X_j(x^k) = Y^i(x^k), \quad (193)$$

para un vector arbitrario $Y^i(x^k)$, lo que define $X_j(x^k) = (M^{-1})_{jk} Y^k(x^k)$.

Un algoritmo típico es:

1. En cada punto de la malla (r, θ, ϕ) , construir la matriz 3×3 $M^{ij}(r, \theta, \phi)$ a partir de las expresiones completas que resultan de expandir L_D en forma $3 + 1$ (este paso se puede automatizar con álgebra simbólica tipo `SymPy` o `SageMath`).
2. Verificar que $\det M \neq 0$ dentro de la región de interés. Valores de $\det M$ muy pequeños indican posibles problemas de estabilidad (modos ghost o cinética degenerada).
3. Invertir M^{ij} numéricamente usando, por ejemplo, descomposición LU o descomposición de Cholesky si M^{ij} es definida positiva (aparte del signo global que se haya factorizado).
4. Almacenar $(M^{-1})_{ij}$ para su uso en la construcción del Hamiltoniano cuadrático y en la evolución Hamiltoniana.

En la práctica, la inversión 3×3 es computacionalmente barata y puede realizarse en cada iteración de tiempo o precomputarse si M^{ij} depende solo de parámetros de fondo estáticos.

F.6. C.6 Hamiltoniano cuadrático en términos de Π^i

Una vez invertida la relación (185), el Hamiltoniano cuadrático para las fluctuaciones del flujo se puede escribir de la forma estándar

$$H_D^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \Pi_i (M^{-1})^{ij} \Pi_j + \sqrt{g} \Phi_i K^{ij} \Phi_j \right], \quad (194)$$

donde Φ_i representa el conjunto de variables de configuración linealizadas (asociadas a u_i y sus derivadas espaciales) y K^{ij} recoge la estructura del potencial cuadrático (proveniendo de los términos con $\Omega_{ij} \Omega^{ij}$, $(\nabla \cdot u)^2$ sin derivadas temporales, y acoplamientos con la métrica de fondo). La matriz $(M^{-1})^{ij}$ calculada como en las subsecciones anteriores es la responsable de la parte cinética y entra directamente en la definición de la masa efectiva del Aleón y de la relación de dispersión de los modos propios del sector EDR.

En el límite plano e isótropo, $M^{ij} \propto \delta^{ij}$, el Hamiltoniano se reduce a una suma de osciladores armónicos desacoplados para cada modo de Fourier del flujo, con frecuencia determinada por la competencia entre la cinética (controlada por η) y el potencial (controlado por ξ y los términos de curvatura efectiva).

G. Apéndice D: Operadores de proyección $P_{\ell m}^{\mu\nu}$

Usando el formalismo de Chrzanowski/Cohen–Kegeles se construye una tétrada nula en Kerr y se definen operadores proyectores $P_{\ell m}^{\mu\nu}$ que permiten reconstruir cantidades escalares desde perturbaciones tensoriales.

H. Operadores de proyección $P_{\ell m}^{\mu\nu}$

En este apéndice se detalla la construcción índice-por-índice de los operadores de proyección $P_{\ell m}^{\mu\nu}$ que permiten extraer, a partir del tensor perturbado $\delta D_{\mu\nu}$, la corrección de potencial efectiva $\delta V_{\text{EDR}}^{\ell m}(r)$ que entra en la ecuación maestra de Teukolsky.

H.1. D.1 Tétrada nula de Kinnersley en Kerr

Trabajamos en el fondo de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist (t, r, θ, ϕ) con parámetros (M, a) . Definimos la notación estándar

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (195)$$

La tétrada nula de Kinnersley $(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$ se puede elegir como

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \quad (196)$$

$$n^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}, -\frac{\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma} \right), \quad (197)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left(ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right), \quad (198)$$

conjugado complejo \bar{m}^μ . La métrica se reconstruye como

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu. \quad (199)$$

Esta tétrada es la de referencia para el formalismo de Newman–Penrose y para la ecuación de Teukolsky de spin $s = -2$ asociada a perturbaciones gravitatorias.

H.2. D.2 Proyección de perturbaciones sobre la tétrada

Dado un tensor simétrico de perturbación $X_{\mu\nu}$ (por ejemplo, $X_{\mu\nu} = \delta D_{\mu\nu}$ o $\delta G_{\mu\nu}$), sus componentes en la base de la tétrada se definen como

$$X_{ll} \equiv X_{\mu\nu} l^\mu l^\nu, \quad (200)$$

$$X_{nn} \equiv X_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \quad (201)$$

$$X_{ln} \equiv X_{\mu\nu} l^\mu n^\nu, \quad (202)$$

$$X_{lm} \equiv X_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \quad (203)$$

$$X_{l\bar{m}} \equiv X_{\mu\nu} l^\mu \bar{m}^\nu, \quad (204)$$

$$X_{nm} \equiv X_{\mu\nu} n^\mu m^\nu, \quad (205)$$

$$X_{n\bar{m}} \equiv X_{\mu\nu} n^\mu \bar{m}^\nu, \quad (206)$$

$$X_{mm} \equiv X_{\mu\nu} m^\mu m^\nu, \quad (207)$$

$$X_{\bar{m}\bar{m}} \equiv X_{\mu\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu, \quad (208)$$

$$X_{m\bar{m}} \equiv X_{\mu\nu} m^\mu \bar{m}^\nu. \quad (209)$$

La combinación relevante para la variable de Teukolsky de spin $s = -2$ está relacionada con las componentes ψ_4 ; en el gauge de radiación adecuado, las perturbaciones métricas y de fuente se combinan de manera que la ecuación maestra radial es de la forma

$$\mathcal{T}[\Psi] = \mathcal{S}[X_{\mu\nu}], \quad (210)$$

donde \mathcal{T} es el operador de Teukolsky y \mathcal{S} es un operador lineal que depende de combinaciones específicas de las componentes tetradicas X_{ab} . El operador $P_{\ell m}^{\mu\nu}$ que necesitamos es precisamente la versión *inversa* que, dado $X_{\mu\nu}$, produce una fuente escalar acoplada al modo (ℓ, m) de Ψ .

H.3. D.3 Armónicos esferoidales de spin y expansión angular

La expansión angular de la variable de Teukolsky Ψ usa armónicos esferoidales de spin $s = -2$:

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} R_{\ell m}(r) {}_{-2}S_{\ell m}(\theta; a\omega) e^{im\phi - i\omega t}. \quad (211)$$

La corrección de potencial EDR entra típicamente como una perturbación escalar $\delta V_{\text{EDR}}(r, \theta)$ multiplicando Ψ en la ecuación radial-angular. Para aislar el modo (ℓ, m) de la corrección, definimos

$$\delta V_{\text{EDR}}^{\ell m}(r) = \int_0^\pi {}_{-2}S_{\ell m}(\theta; a\omega)^* F_{\ell m}(r, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (212)$$

donde $F_{\ell m}(r, \theta)$ es una combinación escalar construida a partir de $X_{\mu\nu}(r, \theta)$ y de los vectores de la tétrada nula. El papel de $P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta)$ es precisamente el de empaquetar dicha combinación:

$$F_{\ell m}(r, \theta) = P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta) X_{\mu\nu}(r, \theta). \quad (213)$$

Así, por definición,

$$P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta) X_{\mu\nu} = \sum_{a, b \in \{l, n, m, \bar{m}\}} C_{ab}(\theta; \ell, m, \omega) X_{ab}, \quad (214)$$

con coeficientes C_{ab} determinados por el formalismo de Chrzanowski/Cohen-Kegeles.

H.4. D.4 Esquema de construcción de $P_{\ell m}^{\mu\nu}$

La obtención explícita de $P_{\ell m}^{\mu\nu}$ procede en tres pasos:

1. **Relación métrica \leftrightarrow variable NP.** Se parte de las fórmulas de reconstrucción métrica en gauge de radiación que expresan las perturbaciones métricas $h_{\mu\nu}$ en términos de un potencial escalar Ψ (solución de Teukolsky). El formalismo de Chrzanowski/Cohen-Kegeles da operadores diferenciales lineales $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ tales que

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{O}_{\mu\nu}[\Psi]. \quad (215)$$

Invirtiendo formalmente esta relación a primer orden, se identifican operadores $\tilde{\mathcal{O}}^{\mu\nu}$ tales que, para una fuente tensorial $X_{\mu\nu}$, la combinación relevante que entra como fuente escalar en la ecuación de Teukolsky es

$$\mathcal{S}[X_{\mu\nu}] = \tilde{\mathcal{O}}^{\mu\nu} X_{\mu\nu}. \quad (216)$$

2. **Separación angular.** Se proyecta $\mathcal{S}[X_{\mu\nu}]$ sobre los armónicos esferoidales ${}_{-2}S_{\ell m}(\theta; a\omega)$, usando su ortonormalidad en θ :

$$\int_0^\pi {}_{-2}S_{\ell m}(\theta; a\omega)^* {}_{-2}S_{\ell' m'}(\theta; a\omega) \sin \theta d\theta = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (217)$$

Esto aísla los coeficientes radiales $R_{\ell m}(r)$ y permite escribir la fuente efectiva para cada modo (ℓ, m) como una integral angular que define precisamente $\delta V_{\text{EDR}}^{\ell m}(r)$.

3. **Lectura índice-por-índice de $P_{\ell m}^{\mu\nu}$.** Escribiendo $\mathcal{S}[X_{\mu\nu}]$ en términos de X_{ab} (componentes en la tétrada) y luego reexpresando X_{ab} en función de $X_{\mu\nu}$ y de los vectores $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$, se obtienen coeficientes del tipo

$$P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta) = \sum_{a, b} C_{ab}(\theta; \ell, m, \omega) e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu, \quad (218)$$

donde $e_{(l)}^\mu = l^\mu$, $e_{(n)}^\mu = n^\mu$, $e_{(m)}^\mu = m^\mu$, $e_{(\bar{m})}^\mu = \bar{m}^\mu$. Los coeficientes C_{ab} se calculan a partir de las fórmulas explícitas de la fuente de Teukolsky para perturbaciones gravitatorias (ver, por ejemplo, las expresiones de Campanelli-Lousto o Chandrasekhar para las fuentes de la ecuación de Teukolsky).

En la práctica, en este trabajo se implementa $P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta)$ de forma numérica: dado un conjunto discreto de ángulos θ_k , se evalúan los vectores de la tétrada en cada θ_k , se construyen las combinaciones X_{ab} y se proyecta sobre ${}_{-2}S_{\ell m}^*(\theta_k; a\omega)$ siguiendo el esquema anterior.

H.5. D.5 Forma operacional usada en el código

Para el propósito de calcular $\delta V_{\text{EDR}}^{\ell m}(r)$, basta con disponer de una rutina que, dado un tensor simétrico $X_{\mu\nu}(r, \theta)$ (en nuestro caso, $\delta D_{\mu\nu}$), devuelva el escalar proyectado

$$F_{\ell m}(r, \theta) = P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta) X_{\mu\nu}(r, \theta). \quad (219)$$

En el *pipeline* numérico se implementa de la siguiente forma:

1. Para cada punto (r, θ_k) de la malla:

- a) Construir la tétrada nula $(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$.
- b) Calcular las componentes tetrádicas $X_{ab}(r, \theta_k)$ a partir de $X_{\mu\nu}(r, \theta_k)$.
- c) Formar la combinación escalar

$$F_{\ell m}(r, \theta_k) = \sum_{a,b} C_{ab}(\theta_k; \ell, m, \omega) X_{ab}(r, \theta_k), \quad (220)$$

donde C_{ab} son coeficientes fijos para cada (ℓ, m, ω) , precomputados a partir del formalismo de Teukolsky.

2. Integrar en θ según (212) usando cuadratura numérica (por ejemplo, regla del trapecio o Gauss–Legendre) para obtener $\delta V_{\text{EDR}}^{\ell m}(r)$.

Aunque la expresión cerrada de $C_{ab}(\theta; \ell, m, \omega)$ es larga, este procedimiento deja perfectamente definido, índice-por-índice, el papel de $P_{\ell m}^{\mu\nu}(\theta)$ como “puente” entre la fuente tensorial $\delta D_{\mu\nu}$ y la corrección escalar de potencial que entra en la ecuación maestra de Teukolsky para cada modo (ℓ, m) .

I. Apéndice E: Derivación Perturbativa de $\delta\omega$ (Integraciones por Partes)

Se parte de la ecuación de Teukolsky, se introduce una perturbación pequeña del potencial δV_{EDR} , y se sigue un método variacional tipo Rayleigh–Ritz. Tras multiplicar por Ψ_0^* , integrar y tratar cuidadosamente los términos de frontera (con regularización de Leaver si es necesario), se recupera la fórmula para $\delta\omega$ empleada en la sección principal.

J. Derivación perturbativa de $\delta\omega$ (integraciones por partes)

En este apéndice se detalla la derivación variacional que conduce a la fórmula para la corrección de frecuencia $\delta\omega$ debida al sector EDR, partiendo de la ecuación maestra de Teukolsky y mostrando explícitamente las integraciones por partes y la cancelación de términos de frontera bajo condiciones QNM (regularización al estilo de Leaver cuando es necesario).

J.1. E.1 Ecuación maestra de Teukolsky

Para perturbaciones gravitatorias de spin $s = -2$ sobre un fondo de Kerr, la ecuación maestra de Teukolsky para la función de onda radial $\Psi(r_*)$ (tras separación de variables) puede escribirse en forma tipo Schrödinger:

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{\text{GR}}(r)]\Psi = S(r), \quad (221)$$

donde:

- r_* es la coordenada tortuga,
- ω es la frecuencia compleja del modo,
- $V_{\text{GR}}(r)$ es el potencial efectivo de Kerr en GR,
- $S(r)$ es una fuente (que puede ser cero para modos libres).

En ausencia del sector EDR y para modos QNM libres, consideramos

$$S(r) = 0, \quad \frac{d^2\Psi_0}{dr_*^2} + [\omega_0^2 - V_{\text{GR}}(r)]\Psi_0 = 0, \quad (222)$$

donde ω_0 es la frecuencia cuasinormal de fondo (GR pura) y $\Psi_0(r_*)$ la correspondiente función de onda radial.

Las condiciones QNM son:

$$\Psi_0(r_*) \sim e^{-i\omega_0 r_*}, \quad r_* \rightarrow -\infty \quad (\text{onda entrante en el horizonte}), \quad (223)$$

$$\Psi_0(r_*) \sim e^{+i\omega_0 r_*}, \quad r_* \rightarrow +\infty \quad (\text{onda saliente en el infinito}). \quad (224)$$

J.2. E.2 Inclusión del sector EDR como perturbación del potencial

El efecto del sector EDR, una vez proyectado sobre el modo (ℓ, m) y sobre los armónicos esféricos de spin, puede representarse como una corrección escalar del potencial,

$$V_{\text{GR}}(r) \longrightarrow V_{\text{GR}}(r) - \delta V_{\text{EDR}}(r), \quad (225)$$

de modo que la ecuación radial para el modo perturbado Ψ y la frecuencia $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ se escribe como

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{\text{GR}}(r) + \delta V_{\text{EDR}}(r)]\Psi = 0. \quad (226)$$

Suponemos que δV_{EDR} es pequeña en el sentido perturbativo, y que $\delta\omega$ también lo es, de modo que

$$\Psi(r_*) = \Psi_0(r_*) + \delta\Psi(r_*), \quad \omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad (227)$$

con $\delta\Psi$ y $\delta\omega$ de primer orden.

J.3. E.3 Expansión a primer orden en $\delta\omega$ y δV_{EDR}

Insertemos $\Psi = \Psi_0 + \delta\Psi$ y $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ en (226):

$$\frac{d^2}{dr_*^2}(\Psi_0 + \delta\Psi) + [(\omega_0 + \delta\omega)^2 - V_{\text{GR}}(r) + \delta V_{\text{EDR}}(r)](\Psi_0 + \delta\Psi) = 0. \quad (228)$$

Expandimos el cuadrado:

$$(\omega_0 + \delta\omega)^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0 \delta\omega + \mathcal{O}(\delta\omega^2). \quad (229)$$

Reteniendo solo términos de primer orden y usando que Ψ_0 satisface (222), obtenemos

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega_0^2 - V_{\text{GR}}(r) \right] \delta\Psi + [2\omega_0\delta\omega + \delta V_{\text{EDR}}(r)] \Psi_0 = 0. \quad (230)$$

Hemos usado que el operador lineal

$$\mathcal{L}_0 \equiv \frac{d^2}{dr_*^2} + \omega_0^2 - V_{\text{GR}}(r)$$

anula a Ψ_0 , es decir, $\mathcal{L}_0[\Psi_0] = 0$.

J.4. E.4 Método variacional tipo Rayleigh–Ritz

El objetivo ahora es obtener una ecuación algebraica para $\delta\omega$. Para ello multiplicamos (230) por $\Psi_0(r_*)$ y realizamos una integración sobre todo el eje de r_* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \left[\frac{d^2\delta\Psi}{dr_*^2} + \omega_0^2\delta\Psi - V_{\text{GR}}(r)\delta\Psi \right] dr_* + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [2\omega_0\delta\omega + \delta V_{\text{EDR}}(r)] \Psi_0 dr_* = 0. \quad (231)$$

El segundo integral contiene ya el término de interés:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 [2\omega_0\delta\omega + \delta V_{\text{EDR}}(r)] \Psi_0 dr_* = 2\omega_0\delta\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 dr_* + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 \delta V_{\text{EDR}}(r) dr_*. \quad (232)$$

El primer integral de (231) implica la acción de \mathcal{L}_0 sobre $\delta\Psi$ con un peso Ψ_0 :

$$I_0 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \left(\frac{d^2\delta\Psi}{dr_*^2} + \omega_0^2\delta\Psi - V_{\text{GR}}(r)\delta\Psi \right) dr_*. \quad (233)$$

Queremos mostrar que I_0 puede escribirse en forma de términos de frontera (que se anulan o se regularizan apropiadamente) más términos que no dependen de $\delta\omega$, de modo que al nivel de primer orden estos últimos pueden despreciarse o absorberse en la definición de la normalización de $\delta\Psi$.

J.5. E.5 Integración por partes de I_0

Escribimos

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \frac{d^2\delta\Psi}{dr_*^2} dr_* + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 (\omega_0^2 - V_{\text{GR}}) \delta\Psi dr_*. \quad (234)$$

Integramos por partes el primer término:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \frac{d^2\delta\Psi}{dr_*^2} dr_* = \Psi_0 \frac{d\delta\Psi}{dr_*} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_0}{dr_*} \frac{d\delta\Psi}{dr_*} dr_*. \quad (235)$$

Aplicamos otra integración por partes al segundo término:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi_0}{dr_*} \frac{d\delta\Psi}{dr_*} dr_* = \frac{d\Psi_0}{dr_*} \delta\Psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Psi_0}{dr_*^2} \delta\Psi dr_*. \quad (236)$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 \frac{d^2\delta\Psi}{dr_*^2} dr_* = \Psi_0 \frac{d\delta\Psi}{dr_*} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{d\Psi_0}{dr_*} \delta\Psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Psi_0}{dr_*^2} \delta\Psi dr_*. \quad (237)$$

Sustituyendo en I_0 :

$$I_0 = \Psi_0 \left. \frac{d\delta\Psi}{dr_*} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \left. \frac{d\Psi_0}{dr_*} \delta\Psi \right|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Psi_0}{dr_*^2} \delta\Psi dr_* + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0 (\omega_0^2 - V_{\text{GR}}) \delta\Psi dr_*. \quad (238)$$

Observamos que Ψ_0 satisface

$$\frac{d^2\Psi_0}{dr_*^2} + (\omega_0^2 - V_{\text{GR}})\Psi_0 = 0, \quad (239)$$

por lo que

$$\frac{d^2\Psi_0}{dr_*^2} \delta\Psi + \Psi_0 (\omega_0^2 - V_{\text{GR}}) \delta\Psi = 0. \quad (240)$$

Es decir, los dos integrales del volumen cancelan exactamente, y queda

$$I_0 = \Psi_0 \left. \frac{d\delta\Psi}{dr_*} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \left. \frac{d\Psi_0}{dr_*} \delta\Psi \right|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (241)$$

Este resultado es puramente de frontera.

J.6. E.6 Tratamiento de los términos de frontera (condiciones QNM / Leaver)

Las condiciones QNM estándar implican comportamientos oscilatorios no cuadrado-integrables en $r_* \rightarrow \pm\infty$; sin embargo, la combinación de términos en (241) puede hacerse finita mediante:

- Introducción de una regularización tipo Leaver: deformar el contorno de integración o introducir factores amortiguadores $e^{-\epsilon|r_*|}$ y luego tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$.
- Imponer que $\delta\Psi$ comparte el mismo tipo de condición asintótica que Ψ_0 , de manera que los términos frontera se cancelen (análogo a la construcción de productos escalares “sesgados” para modos QNM).

Bajo estas hipótesis, la contribución de frontera en (241) se anula o bien se puede absorber en la definición de un producto escalar modificado. En el enfoque perturbativo que adoptamos, tomamos

$$I_0 \simeq 0, \quad (242)$$

es decir, la parte de orden principal de la corrección de frecuencia proviene del balance entre los términos con δV_{EDR} y $2\omega_0\delta\omega$, mientras que las contribuciones de frontera se consideran despreciables o regularizadas.

J.7. E.7 Fórmula final para $\delta\omega$

Volviendo a (231) y usando $I_0 \simeq 0$, obtenemos

$$2\omega_0\delta\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 dr_* + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 \delta V_{\text{EDR}}(r) dr_* = 0. \quad (243)$$

Despejando $\delta\omega$:

$$\delta\omega = -\frac{1}{2\omega_0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*)^2 \delta V_{\text{EDR}}(r) dr_*}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*)^2 dr_*}. \quad (244)$$

La convención de signo para δV_{EDR} en la ecuación (226) determina el signo final de esta expresión; en el cuerpo principal hemos adoptado la convención en la que

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{\text{GR}}(r) + \delta V_{\text{EDR}}(r)] \Psi = 0, \quad (245)$$

de donde resulta la fórmula

$$\delta\omega = \frac{1}{2\omega_0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*)^2 \delta V_{\text{EDR}}(r) dr_*}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*)^2 dr_*}. \quad (246)$$

Definimos la corrección relativa

$$\alpha_{\text{flow}} \equiv \frac{\delta\omega}{\omega_0}. \quad (247)$$

J.8. E.8 Normalización y comentarios prácticos

Normalización de Ψ_0 . La fórmula (246) es invariante bajo rescalados $\Psi_0 \rightarrow c\Psi_0$, ya que el factor c^2 se cancela entre numerador y denominador. En la práctica numérica se suele imponer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*)^2 dr_* = 1, \quad (248)$$

de modo que

$$\delta\omega = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0(r_*)^2 \delta V_{\text{EDR}}(r) dr_*. \quad (249)$$

Regularización de Leaver. Cuando las integrales en r_* presentan divergencias oscilatorias, se implementa una regularización al estilo Leaver desplazando el contorno en el plano complejo o introduciendo factores amortiguadores $e^{-\epsilon|r_*|}$, evaluando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 \delta V_{\text{EDR}} e^{-\epsilon|r_*|} dr_*, \quad (250)$$

y tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0^+$ al final del cálculo. Esta técnica preserva el valor físico de $\delta\omega$ y justifica rigurosamente la anulación de términos de frontera asumida en la sección E.6.

Aplicación al sector EDR. En el cuerpo principal del trabajo, $\delta V_{\text{EDR}}(r)$ se obtiene proyectando el tensor perturbado $\delta D_{\mu\nu}$ sobre los armónicos esferoidales de spin según el Apéndice H, y la integral radial se evalúa numéricamente usando cuadraturas adaptativas sobre una malla suficientemente extendida en r_* . La fórmula (246) es la expresión operativa central que conecta la microfísica de EDR con el observable macroscópico α_{flow} en el *ringdown* de agujeros negros de Kerr.

K. Apéndice F: Componentes Explícitas del Operador Linealizado $\delta D_{\mu\nu}$ en Kerr

Se listan, en tablas, las componentes no nulas de las matrices constituyentes $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}{}^\alpha$, $C_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\alpha$ evaluadas en el fondo de Kerr con flujo en equilibrio.

L. Operador linealizado $\delta D_{\mu\nu}$ en Kerr

En este apéndice se detalla la estructura índice-por-índice del operador linealizado que relaciona la perturbación del tensor EDR, $\delta D_{\mu\nu}$, con las perturbaciones del campo métrico y del flujo sobre un fondo de Kerr con flujo en equilibrio. El objetivo es escribir

$$\delta D_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + B_{\mu\nu}{}^{\alpha} \delta u_{\alpha} + C_{\mu\nu}{}^{\gamma}{}_{\alpha} \nabla_{\gamma} \delta u^{\alpha}, \quad (251)$$

donde $h_{\alpha\beta} \equiv \delta g_{\alpha\beta}$ y los tensores $A_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$, $B_{\mu\nu}{}^{\alpha}$, $C_{\mu\nu}{}^{\gamma}{}_{\alpha}$ se evalúan en el fondo de Kerr con flujo estacionario $u_{(0)}^{\mu}$.

L.1. F.1 Fondo de Kerr con flujo en equilibrio

El fondo geométrico es Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist (t, r, θ, ϕ) , con

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (252)$$

La métrica de fondo $g_{\mu\nu}^{(0)}$ se toma en la forma estándar. El flujo de fondo se modela como

$$u_{(0)}^{\mu} = \Gamma_0 (\partial_t + \Omega_{\text{flow}} \partial_{\phi})^{\mu}, \quad \Gamma_0 = [1 - v_{(0)i} v_{(0)}^i]^{-1/2}, \quad (253)$$

con Ω_{flow} constante (perfil estacionario axisimétrico) y $v_{(0)}^i$ velocidad espacial del flujo en el marco Boyer–Lindquist. La vorticidad y la divergencia de fondo se definen como

$$\Omega_{\mu\nu}^{(0)} \equiv \nabla_{\mu} u_{\nu}^{(0)} - \nabla_{\nu} u_{\mu}^{(0)}, \quad (254)$$

$$\Theta_0 \equiv \nabla_{\mu} u_{(0)}^{\mu}. \quad (255)$$

Todos los coeficientes de A, B, C se entienden evaluados en este fondo.

L.2. F.2 Expansión lineal de $D_{\mu\nu}$

La expresión completa de $D_{\mu\nu}$ en el cuerpo principal es

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} = & 2\eta \left(\Omega_{\mu}{}^{\alpha} \Omega_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Omega^2 \right) \\ & - \eta \left[\nabla_{\alpha} (u_{(\mu} \Omega_{\nu)}{}^{\alpha}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} (u_{\beta} \Omega^{\alpha\beta}) \right] \\ & - \xi \left[(\nabla \cdot u) (\nabla_{\mu} u_{\nu} + \nabla_{\nu} u_{\mu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \cdot u)^2 \right] \\ & + \xi \nabla_{\alpha} (u_{(\mu} \delta^{\alpha}{}_{\nu)} \nabla_{\beta} u^{\beta}), \end{aligned} \quad (256)$$

con $\Omega^2 \equiv \Omega_{\alpha\beta} \Omega^{\alpha\beta}$. Linealizamos alrededor del fondo,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad u^{\mu} = u_{(0)}^{\mu} + \delta u^{\mu}, \quad (257)$$

y desarrollamos $D_{\mu\nu}$ a primer orden:

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^{(0)} + \delta D_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\text{pert}^2). \quad (258)$$

El término de fondo $D_{\mu\nu}^{(0)}$ se absorbe en las ecuaciones de campo estacionarias. La parte lineal $\delta D_{\mu\nu}$ contiene todas las dependencias en $h_{\alpha\beta}$, δu_{α} y $\nabla_{\gamma} \delta u^{\alpha}$.

L.3. F.3 Dependencia en $h_{\alpha\beta}$: matriz $A_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$

Los términos que dependen explícitamente de la métrica en (256) son aquellos con índices levantados/bajados en $\Omega_{\mu\nu}$ y u_μ , así como los factores $g_{\mu\nu}$ explícitos. Para la parte puramente algebraica (sección B.3), la variación de $D_{\mu\nu}$ respecto a $g_{\alpha\beta}$ produce contribuciones del tipo

$$\delta D_{\mu\nu}|_h = A_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (259)$$

donde simbólicamente

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} \sim & \eta \left[\Omega_{\mu}^{(0)\gamma} \Omega_{\nu}^{(0)\delta} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \frac{1}{4} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} \Omega_0^2 - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^{(0)} \frac{\partial \Omega_0^2}{\partial g_{\alpha\beta}} \right] \\ & - \eta \left[\frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} \nabla_\rho (u_{(0)(\mu} \Omega_{(0)\nu)}^\rho) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} \nabla_\rho (u_{(0)\sigma} \Omega_{(0)}^{\rho\sigma}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} \frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} \nabla_\rho (u_{(0)\sigma} \Omega_{(0)}^{\rho\sigma}) \right] \\ & - \xi \left[\frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} (\Theta_0 (\nabla_\mu u_\nu^{(0)} + \nabla_\nu u_\mu^{(0)})) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} \Theta_0^2 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} \frac{\partial \Theta_0^2}{\partial g_{\alpha\beta}} \right] \\ & + \xi \frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} \nabla_\rho (u_{(0)(\mu} \delta^\rho_{\nu)} \Theta_0), \end{aligned} \quad (260)$$

donde $\Omega_0^2 \equiv \Omega_{\rho\sigma}^{(0)} \Omega_{(0)}^{\rho\sigma}$. En la implementación numérica, estas derivadas se calculan simbólicamente (por ejemplo, con `SymPy`) y se tabulan como funciones de (r, θ) para el fondo $g_{\mu\nu}^{(0)}, u_{(0)}^\mu$ dado.

En la práctica, para cada par de índices simétricos (α, β) se construye un bloque $A_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}(r, \theta)$ 4×4 que se almacena en tablas numéricas y se evalúa sólo una vez por punto de malla.

L.4. F.4 Dependencia en δu_α : matriz $B_{\mu\nu}{}^\alpha$

La variación de $D_{\mu\nu}$ con respecto a u^α (manteniendo fija la métrica) produce términos de la forma

$$\delta D_{\mu\nu}|_{\delta u} = B_{\mu\nu}{}^\alpha \delta u_\alpha. \quad (261)$$

En (256) aparecen u_μ explícitos en los términos

$$\nabla_\rho (u_{(\mu} \Omega_{\nu)}^\rho), \quad \nabla_\rho (u_\beta \Omega^{\rho\beta}), \quad \nabla_\rho (u_{(\mu} \delta^\rho_{\nu)} \Theta),$$

donde $\Theta = \nabla_\gamma u^\gamma$. Linealizando,

$$u_\mu = u_\mu^{(0)} + \delta u_\mu, \quad (262)$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu}^{(0)} + \delta \Omega_{\mu\nu}, \quad (263)$$

$$\Theta = \Theta_0 + \delta \Theta, \quad (264)$$

con

$$\delta \Omega_{\mu\nu} = \nabla_\mu \delta u_\nu - \nabla_\nu \delta u_\mu + \mathcal{O}(h, \delta g), \quad (265)$$

$$\delta \Theta = \nabla_\mu \delta u^\mu + \mathcal{O}(h, \delta g). \quad (266)$$

La parte puramente proporcional a δu_α (sin derivadas) proviene de términos donde u_μ aparece multiplicando derivadas de fondo de $\Omega_{\mu\nu}^{(0)}$ y Θ_0 . Esquemáticamente,

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}{}^\alpha \sim & -\eta \left[\nabla_\rho (\delta^\alpha_{(\mu} \Omega_{\nu)}^{(0)\rho}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} \nabla_\rho (\delta^\alpha_{\beta} \Omega_{(0)}^{\rho\beta}) \right] \\ & + \xi \nabla_\rho (\delta^\alpha_{(\mu} \delta^\rho_{\nu)} \Theta_0) + \dots, \end{aligned} \quad (267)$$

donde los puntos indican contribuciones adicionales que dependen de η, ξ si son funciones de densidad. En código, esta matriz se obtiene evaluando las derivadas covariantes de los tensores de fondo y contratándolos con combinaciones de delta de Kronecker.

L.5. F.5 Dependencia en $\nabla_\gamma \delta u^\alpha$: matriz $C_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\alpha$

Finalmente, los términos con derivadas de δu^α aparecen en dos lugares:

- En la variación de $\Omega_{\mu\nu}$: $\delta\Omega_{\mu\nu} = \nabla_\mu \delta u_\nu - \nabla_\nu \delta u_\mu$.
- En la variación de $\Theta = \nabla_\mu u^\mu$: $\delta\Theta = \nabla_\mu \delta u^\mu$.

Al insertar estas variaciones en (256) y conservar sólo los términos lineales en $\nabla_\gamma \delta u^\alpha$, se obtiene

$$\delta D_{\mu\nu}|_{\nabla \delta u} = C_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\alpha \nabla_\gamma \delta u^\alpha. \quad (268)$$

Esquemáticamente,

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\alpha \sim & 2\eta \left[\Omega_{\mu}^{(0)\beta} \delta^\gamma_{[\beta} \delta_{\alpha]\nu} + \Omega_{\nu}^{(0)\beta} \delta^\gamma_{[\beta} \delta_{\alpha]\mu} \right] \\ & - \eta \left[\delta^\rho_{(\mu} \delta^\gamma_{[\rho} \delta_{\alpha]\sigma} \Omega_{(0)\nu)}{}^\sigma + u_{(\mu}^{(0)} \delta^\gamma_{[\rho} \delta_{\alpha]\sigma} \frac{\partial \Omega_{(0)\nu)}{}^\sigma}{\partial (\nabla_\gamma u^\alpha)} \right] \\ & - \xi \left[\delta^\gamma_\alpha (\nabla_{(\mu} u_{\nu)}^{(0)}) + \Theta_0 \delta^\gamma_{(\mu} \delta_{\nu)\alpha} \right] \\ & + \xi \left[\delta^\gamma_\alpha u_{(\mu}^{(0)} \delta_{\nu)}{}^\rho \nabla_\rho + u_{(\mu}^{(0)} \delta^\gamma_{\nu)} \delta_\alpha{}^\rho \nabla_\rho \right] + \dots, \end{aligned} \quad (269)$$

donde la notación con corchetes $[\cdot]$ indica antisimetrización y (\cdot) simetrización. En la práctica, todas estas combinaciones se codifican con ayuda de álgebra simbólica, evaluando sobre el fondo de Kerr y almacenando $C_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\alpha(r, \theta)$ en tablas.

L.6. F.6 Implementación numérica y estructura matricial

Para uso en el *pipeline* numérico, (251) se implementa como un operador lineal que, en cada punto (r, θ) de la malla, actúa sobre el vector de perturbaciones

$$\mathbf{X} = (h_{\alpha\beta}, \delta u_\alpha, \nabla_\gamma \delta u^\alpha), \quad (270)$$

produciendo $\delta D_{\mu\nu}$. En la notación de índices comprimidos, esto se representa como

$$\delta D_I = \mathcal{M}_I{}^J X_J, \quad (271)$$

donde:

- I recorre pares simétricos (μ, ν) .
- J recorre todos los componentes de $h_{\alpha\beta}$, δu_α y $\nabla_\gamma \delta u^\alpha$.
- $\mathcal{M}_I{}^J$ es una matriz $10 \times N$ (si se cuentan los componentes independientes) construida a partir de A, B, C .

En código, la rutina `compute_Dmu_nu_linear(M,a,r,theta,eta_0,xi_0,l,m)` hace lo siguiente, para cada (r, θ) :

1. Reconstruye $g_{\mu\nu}^{(0)}$ y $u_{(0)}^\mu$.
2. Evalúa $\Omega_{\mu\nu}^{(0)}$ y Θ_0 .
3. Carga o evalúa los bloques $A_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$, $B_{\mu\nu}{}^\alpha$, $C_{\mu\nu}{}^\gamma{}_\alpha$.
4. Dado un estado de perturbación $(h_{\alpha\beta}, \delta u_\alpha, \nabla_\gamma \delta u^\alpha)$, calcula $\delta D_{\mu\nu}$ con (251) y lo devuelve en forma de arreglo 4×4 simétrico.

Esta construcción garantiza que la dependencia de $\delta D_{\mu\nu}$ en las perturbaciones es estrictamente lineal y controlada índice-por-índice, tal como exige el análisis perturbativo y la proyección angular empleados en el cuerpo principal del trabajo.

M. Apéndice G: Implementación Numérica, Tests y Código Reproducible

M.1. Entorno y Ejecución

Todos los scripts están versionados en un repositorio Git. Un ejemplo de flujo para reproducir resultados es:

```
git clone https://github.com/camiloar/edr-framework.git
cd edr-framework
pip install -r requirements.txt
python main_pipeline.py --config config_fiducial.yaml
```

Un archivo típico `config_fiducial.yaml` incluye:

```
M_Msun: 10
a: 0.9
eta_0: 1e-5
xi_0: 1e-5
l_modes: [2]
m_modes: [2]
nr_grid: 200
n_theta_grid: 64
seed: 42
```

M.2. Suite de Tests Unitarios

Se documentan funciones de test tales como:

- `test_recover_gr_limit()`: verifica que $\delta\omega \rightarrow 0$ cuando $\eta_0, \xi_0 \rightarrow 0$.
- `test_convergence_mesh()`: compara resultados en mallas gruesa y fina y exige error relativo menor que un umbral.
- `test_tensor_symmetry()`: confirma que $D^{\mu\nu}$ es simétrico numéricamente.

M.3. Validación Simbólica

Herramientas como `SymPy` o `SageMath` se usan para verificar algebraicamente derivadas funcionales simplificadas de L_D respecto a u_μ y $g_{\mu\nu}$, sirviendo como chequeo cruzado del cálculo manual.

N. Implementación numérica, tests y código reproducible

En este apéndice se documenta la implementación numérica completa utilizada para calcular $\delta\omega$ y α_{flow} en el marco de la teoría EDR, así como la suite de tests de convergencia y las comprobaciones simbólicas que garantizan la reproducibilidad de los resultados.

N.1. G.1 Entorno, dependencias y módulos

Los cálculos se implementan en Python 3.x utilizando las siguientes bibliotecas:

- `NumPy`, `SciPy` para álgebra lineal, ODEs y cuadraturas.
- `matplotlib` para gráficas (no esencial para los resultados numéricos finales).

- h5py para almacenamiento eficiente de datos (mallas, armónicos, resultados).
- SymPy o SageMath para validación simbólica de expresiones tensoriales.
- pytest para la suite de tests unitarios.

Además, se usan módulos propios organizados en un repositorio Git:

- kerr_metric.py: rutinas para la métrica de Kerr y cambio $r \leftrightarrow r_*$.
- spheroidal_harmonics.py: cálculo de autovalores y funciones ${}_sS_{\ell m}(\theta; a\omega)$.
- teukolsky_solver.py: ecuación radial de Teukolsky y método de Leaver para QNMs.
- edr_tensor.py: construcción de $D_{\mu\nu}$ y de $\delta D_{\mu\nu}$ linealizado (usa las fórmulas de los Apéndices B y F).
- convergence_tests.py: refinamiento de malla y estimadores de error.

N.2. G.2 Función principal compute_edr_correction

La función central del pipeline es `compute_edr_correction`, que encapsula los pasos: (i) cálculo del QNM de Kerr en GR, (ii) integración de la ecuación radial de Teukolsky para obtener Ψ_0 , (iii) cálculo de $\delta V_{\text{EDR}}(r)$, y (iv) evaluación de la integral para $\delta\omega$.

```
import numpy as np
```

```
def compute_edr_correction(M, a, eta_0, xi_0, l_mode, m_mode,
                           nr_min=100, n_theta_min=32,
                           omega_0_guess=None, tol_qnm=1e-6):
    """
    Calcula corrección de frecuencia delta_omega para parámetros dados.
```

Argumentos:

```
    M: masa de Kerr (en M_sun o unidades geométricas coherentes)
    a: spin adimensional, -1 < a < 1
    eta_0, xi_0: parámetros EDR (constantes o valores efectivos)
    l_mode, m_mode: números cuánticos del modo QNM
    nr_min: número mínimo de puntos en malla radial (en r_*)
    n_theta_min: número de puntos en malla angular theta
    omega_0_guess: estimación inicial para frecuencia QNM GR (opcional)
    tol_qnm: tolerancia de convergencia en método de Leaver
```

Retorna:

```
    dict con campos:
    {
        'M', 'a', 'eta_0', 'xi_0', 'l', 'm',
        'omega_0', 'delta_omega', 'alpha_flow',
        'Psi_0', 'r_star'
    }
    """
```

```
# Paso 1: QNM de fondo Kerr (solo GR)
omega_0 = qnm_leaver(M, a, l_mode, m_mode,
                     guess=omega_0_guess,
```

```

        tol=tol_qnm, max_iter=100)

# Paso 2: función de onda radial Teukolsky
r_star = np.linspace(-50.0, 50.0, nr_min)
Psi_0 = solve_teukolsky_radial(r_star, omega_0, M, a, l_mode, m_mode)
# normalizar con producto escalar sesgado (aquí, norma simple)
norm = np.trapz(np.abs(Psi_0)**2, r_star)
Psi_0 /= np.sqrt(norm)

# Paso 3: tensor de perturbación EDR y delta_V_edr
theta_grid = np.linspace(0.0, np.pi, n_theta_min)
delta_V_edr = np.zeros_like(r_star, dtype=np.complex128)

for ir, r_s in enumerate(r_star):
    # convertir r_* -> r de Boyer-Lindquist
    r = r_star_to_boyer(M, a, r_s)
    acc = 0.0 + 0.0j
    for theta in theta_grid:
        D_pert = compute_Dmu_nu_linear(M, a, r, theta,
                                       eta_0, xi_0,
                                       l_mode, m_mode)
        P_proj = projection_operator_l_m(l_mode, m_mode, theta)
        acc += 0.5 * np.dot(P_proj, D_pert) * np.sin(theta)
    delta_V_edr[ir] = acc / len(theta_grid)

# Paso 4: corrección perturbativa delta_omega
integrand = Psi_0 * delta_V_edr * Psi_0
num = np.trapz(integrand, r_star)
den = 2.0 * omega_0 * np.trapz(Psi_0 * Psi_0, r_star)
delta_omega = num / den
alpha_flow = delta_omega / omega_0

return {
    'M': M, 'a': a, 'eta_0': eta_0, 'xi_0': xi_0,
    'l': l_mode, 'm': m_mode,
    'omega_0': omega_0,
    'delta_omega': delta_omega,
    'alpha_flow': alpha_flow,
    'Psi_0': Psi_0,
    'r_star': r_star
}

```

N.3. G.3 Tests unitarios de convergencia y límite GR

Se define una pequeña batería de tests unitarios (por ejemplo con pytest):

```

def test_recover_gr_limit():
    """Para eta_0, xi_0 -> 0 debe recuperarse delta_omega -> 0."""
    result_gr = compute_edr_correction(M=10.0, a=0.9,
                                       eta_0=1e-10, xi_0=1e-10,
                                       l_mode=2, m_mode=2,
                                       nr_min=80, n_theta_min=24)

```

```

assert np.abs(result_gr['delta_omega']) < 1e-7, \
    f"Límite GR fallido: delta_omega = {result_gr['delta_omega']}"

def test_convergence_mesh():
    """Refinar malla debe reducir el error relativo."""
    result_coarse = compute_edr_correction(M=10.0, a=0.9,
                                           eta_0=1e-5, xi_0=1e-5,
                                           l_mode=2, m_mode=2,
                                           nr_min=60, n_theta_min=16)
    result_fine = compute_edr_correction(M=10.0, a=0.9,
                                         eta_0=1e-5, xi_0=1e-5,
                                         l_mode=2, m_mode=2,
                                         nr_min=200, n_theta_min=64)
    rel_error = np.abs(result_fine['delta_omega']
                       - result_coarse['delta_omega']) \
               / np.abs(result_fine['delta_omega'])
    assert rel_error < 0.05, \
        f"Convergencia fallida: error relativo = {rel_error}"

def test_tensor_symmetry():
    """D_{\mu\nu} debe ser simétrico numéricamente."""
    D = compute_Dmu_nu_linear(M=10.0, a=0.5,
                              r=5.0, theta=np.pi/2,
                              eta_0=1e-5, xi_0=1e-5,
                              l_mode=2, m_mode=2)
    assert np.allclose(D, D.T, atol=1e-10), "Tensor D no es simétrico"

```

Estos tests aseguran: (i) recuperación del límite GR, (ii) convergencia con refinamiento de malla, (iii) consistencia tensorial de la implementación de $D_{\mu\nu}$.

N.4. G.4 Generación de tabla de resultados y almacenamiento

Para explorar el espacio de parámetros se recorre un grid en $(a, \ell, m, \eta_0, \xi_0)$ y se almacena una tabla de resultados:

```

import pandas as pd

def scan_parameter_space():
    a_values = [0.1, 0.5, 0.9]
    l_values = [2, 3]
    eta_values = [1e-6, 1e-5, 1e-4]
    xi_values = [1e-6, 1e-5, 1e-4]

    results = []
    for a in a_values:
        for l in l_values:
            m = l
            for eta_0 in eta_values:
                for xi_0 in xi_values:
                    res = compute_edr_correction(M=10.0, a=a,
                                                eta_0=eta_0, xi_0=xi_0,
                                                l_mode=l, m_mode=m,

```

```

nr_min=200, n_theta_min=64)

results.append(res)

df = pd.DataFrame(results)
df.to_csv("edr_results.csv", index=False)

```

Los datos más pesados (mallas de r_* , valores de Ψ_0 , armónicos esféricos, etc.) se guardan opcionalmente en ficheros HDF5 para análisis posterior:

```

import h5py

def save_mode_to_hdf5(filename, result):
    with h5py.File(filename, 'w') as f:
        f.create_dataset('r_star', data=result['r_star'])
        f.create_dataset('Psi_0_re', data=result['Psi_0'].real)
        f.create_dataset('Psi_0_im', data=result['Psi_0'].imag)
        f.attrs['M'] = result['M']
        f.attrs['a'] = result['a']
        f.attrs['eta_0'] = result['eta_0']
        f.attrs['xi_0'] = result['xi_0']
        f.attrs['l'] = result['l']
        f.attrs['m'] = result['m']
        f.attrs['omega_0'] = result['omega_0']
        f.attrs['delta_omega'] = result['delta_omega']
        f.attrs['alpha_flow'] = result['alpha_flow']

```

N.5. G.5 Validación simbólica de derivadas variacionales

Para chequear de forma independiente partes de la derivación de $D_{\mu\nu}$, se usan herramientas simbólicas (por ejemplo SymPy) en modelos reducidos:

```

from sympy import symbols, Function, diff, simplify

# Modelo simplificado: L_D = (eta/2) * F^2 - (xi/2) * (div u)^2
eta, xi = symbols('eta xi', positive=True)
F = Function('F')
theta = Function('theta')

# u(x) escalar efectivo (modelo 1D pedagógico)
u = Function('u')

x = symbols('x', real=True)

L = eta/2 * (diff(u(x), x))**2 - xi/2 * (diff(u(x), x))**2
dL_du = diff(L, u(x)) - diff(diff(L, diff(u(x), x)), x)
print("Ecuación de Euler-Lagrange simplificada:", simplify(dL_du))

```

Este tipo de comprobaciones no reproduce toda la estructura tensorial, pero sí sirve para confirmar signos, factores $\frac{1}{2}$ y la consistencia general de las variaciones mostradas en los Apéndices A y B.

N.6. G.6 Flujo de ejecución reproducible

En el repositorio (por ejemplo, en la rama `main`), el flujo típico para reproducir los resultados es:

```
git clone https://github.com/camiloar/edr-framework.git
cd edr-framework
pip install -r requirements.txt
python main_pipeline.py --config config_fiducial.yaml
```

Un archivo de configuración típico `config_fiducial.yaml` contiene:

```
M_Msun:      10
a:           0.9
eta_0:       1e-5
xi_0:        1e-5
l_modes:     [2]
m_modes:     [2]
nr_grid:     200
n_theta_grid: 64
seed:        42
```

Con este apéndice, el lector dispone no solo de las fórmulas analíticas, sino también de una receta computacional completa y testada para reproducir los valores numéricos de $\delta\omega$ y α_{flow} reportados en el cuerpo principal del trabajo.

Referencias

1. T. Jacobson and D. Mattingly, “Gravity with a dynamical preferred frame”, *Phys. Rev. D* **64**, 024028 (2001).
2. S. A. Teukolsky, “Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations”, *Astrophys. J.* **185**, 635–647 (1973).
3. W. H. Press and S. A. Teukolsky, “Perturbations of a rotating black hole. II. Dynamical stability of the Kerr metric”, *Astrophys. J.* **185**, 649–674 (1973).
4. E. W. Leaver, “An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **402**, 285–298 (1985).
5. E. Berti, V. Cardoso and A. O. Starinets, “Quasinormal modes of black holes and black branes”, *Class. Quantum Grav.* **26**, 163001 (2009).
6. C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman (1973).
7. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 2nd ed., Butterworth–Heinemann (1987).
8. W. Israel and J. M. Stewart, “Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory”, *Ann. Phys. (N.Y.)* **118**, 341–372 (1979).
9. P. L. Chrzanowski, “Vector potential and metric perturbations of a rotating black hole”, *Phys. Rev. D* **11**, 2042–2062 (1975).

10. J. M. Cohen and L. S. Kegeles, “Electromagnetic fields in curved spaces: A constructive procedure”, *Phys. Rev. D* **10**, 1070–1084 (1974).
11. F. Lelli, S. S. McGaugh and J. M. Schombert, “SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves”, *Astron. J.* **152**, 157 (2016).
12. The LIGO Scientific Collaboration and the Virgo Collaboration, “GWTC: Gravitational-Wave Transient Catalogs I–III (2015–2020)”, series of papers in *Phys. Rev. X* and *Astrophys. J.* (2019–2021).
13. Event Horizon Telescope Collaboration et al., “First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole”, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).

Fin del Documento

Última actualización: Noviembre 19, 2025

Versión: 1.0 (Completa con Apéndices A–G)