

CC2 – Complexité

45 minutes, documents non-autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1.

Questions de cours (4 points)

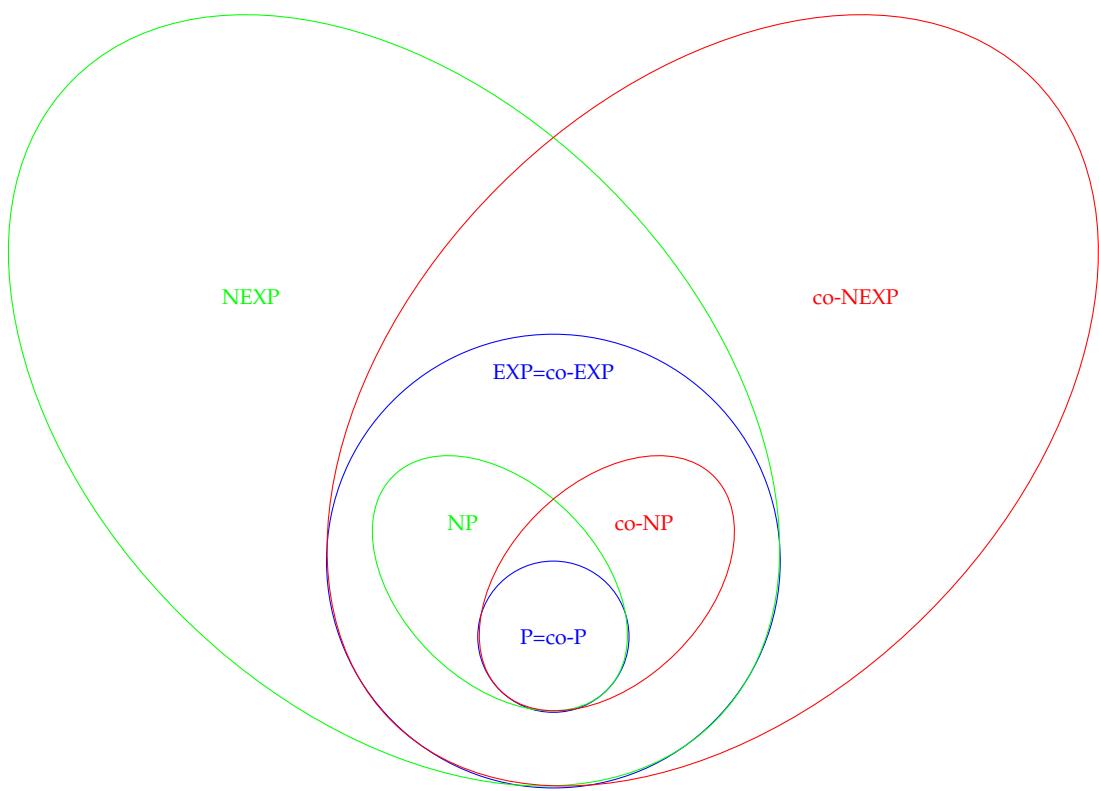
Dans cet exercice, ne justifiez pas vos réponses.

- De quoi P et NP sont les initiales ?

☞ *Polynomial* (temps polynomial) et *Non deterministic Polynomial* (pour temps polynomial non déterministe). L'erreur à ne pas faire est de répondre non polynomial car justement, on ne sait pas si tous les problèmes dans NP peuvent être résolus en temps polynomial ou non.

- Faites un diagramme de Venn des classes NP, EXP, NEXP, P, coNP, coEXP, coNEXP, coP

☞



- Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes ?

- (a) Un problème dans P est décidable. (b) Un problème dans P est semi-décidable.
 (c) Un problème dans NP est décidable. (d) Un problème dans NP est semi-décidable.

☞ Elles sont toutes correctes. Tous les problèmes dans les classes de complexités P, NP, EXP sont décidables, toute la question est en combien de temps.

- Soit A et B deux problèmes de décision. Que signifie $A \leq_m^P B$?

☞ Il existe une fonction f telle que :
 — $f : \Sigma_A^* \rightarrow \Sigma_B^*$ (des instances de A vers les instances de B);

- f est calculable en temps polynomial;
- $\forall w \in \Sigma_A^*, w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$.

Exercice 2.

P,NP,coNP ou EXP (8 points)

Pour chacun des problèmes suivants, donner sa classe de complexité C (la plus petite possible) parmi P,NP,coNP ou EXP et prouver l'appartenance à C . On ne vous demande pas de prouver la C -difficulté de votre problème ou de prouver la non-appartenance à une classe de difficulté plus petite que C .

1. Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et soit $S \subseteq V$ un ensemble de sommets. Le **graphe induit** $G[S] = (S, A')$ est un sous-graphe de G qui est formé en prenant S comme ensemble de sommets et en incluant toutes les arêtes de G qui relient des sommets dans S . Autrement dit $A' = \{(u, v) \in A \mid u \in S \text{ et } v \in S\}$.

Problème FORTE_CYCLICITÉ

entrée : Un graphe orienté $G = (V, A)$ et un entier $k \leq |V|$ codé en binaire.

question : Pour tout ensemble $S \subseteq V$ avec $|S| = k$, $G[S]$ contient un cycle ?

- ☞ Quand (G, k) est une instance négative, on peut le prouver avec un certificat vérifiable en temps polynomial (en k et donc en $|V|$) et le problème est donc dans coNP. Le certificat polynomial est un ensemble $S \subseteq V$ tel que $|S| = k$ mais tel que $G[S]$ est acyclique. On peut représenter S comme une liste de sommets. Pour vérifier que ce certificat est valide :
- Vérifier que la liste est de taille k (temps linéaire en k)
 - Vérifier que S ne contient pas deux fois le même sommet (temps quadratique en k)
 - Vérifier que $G[S]$ est acyclique. Plusieurs algorithmes peuvent faire ça. Le plus simple est de chercher pour chaque sommet $u \in S$ un chemin de u vers u (avec un algorithme de recherche en largeur par exemple). Ceci prend un temps quadratique en k . Sinon il existe des algorithmes plus intelligents et linéaires (voir [Recherche de cycles dans les graphes par Adrien Panhaleux](#)).

Notons que ce problème est (à une petite reformulation près) le complémentaire du problème Feedback vertex set qui est NP-complet.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, une formule k -CNF est une formule CNF (pour *conjunctive normal form*) dont les clauses sont de taille au plus k .

Exemple de formule 3-CNF : $(\lambda_1 \vee \bar{\lambda}_2 \vee \bar{\lambda}_3) \wedge (\bar{\lambda}_1 \vee \lambda_3 \vee \lambda_4) \wedge (\bar{\lambda}_2 \vee \lambda_3)$.

Problème 1-SAT :

entrée : Une formule 1-CNF ϕ .

question : ϕ est-elle satisfiable ?

- ☞ Pour toute variable λ_i , on vérifie qu'elle n'apparaît pas positivement et négativement dans ϕ (c'est-à-dire, on n'a pas une clause λ_i et une autre clause $\bar{\lambda}_i$). Ça prend un temps polynomial déterministe $O(nm)$ où n est le nombre de variables et m le nombre de clauses. Le problème est donc dans P. Notons que cet algorithme fonctionne car si une variable apparaît positivement et négativement dans ϕ alors peu importe la valuation de la variable, la formule ne sera pas satisfait. À l'inverse, si cette condition est respectée, on peut valuer à vrai toutes les variables qui apparaissent positivement dans ϕ et à faux toutes les autres et la formule sera satisfait.

3. Si A est un AFI (automate fini indéterministe) alors $L(A)$ est le langage reconnu par A .

Problème ÉQUIVALENCE_AFI

entrée : Deux AFI A et B .

question : Est-ce que $L(A) = L(B)$?

- ☞ C'est dans EXP car on peut :

- Déterminiser et mettre sous forme minimale A et B . (ça prend un temps exponentiel et les deux AFD obtenus sont potentiellement de taille exponentielle en le nombre d'états de A et B)

- Comparer les deux AFD obtenus pour vérifier que ce sont bien les mêmes à un renommage des états près. (On peut le faire de manière efficace avec un parcours préfixe. Ça prend un temps simplement exponentiel car linéaire en la taille des AFD).

On n'en a pas parlé pendant ce cours, mais ce problème est en fait PSPACE-complet. Ceci signifie qu'on pourrait faire un algorithme (pas celui-la) qui résout le problème en utilisant seulement un espace polynomial.

Problème SOMME_DE_SOUS_ENSEMBLE

4. *entrée* : Un ensemble d'entiers $E \subseteq \mathbb{N}$ et un entier k
question : Est-ce qu'il existe $S \subseteq E$ dont la somme des entiers est égale à k ?

On peut supposer que tous les entiers sont encodés en binaire et que E est donné sous la forme d'une liste d'entiers.

☞ C'est dans NP car quand l'instance est positive, S tel que la somme des entiers de S est égale à k serait un certificat valide. Pour vérifier le certificat, il suffit de calculer la somme des entiers de S et de la comparer à k .

Exercice 3.

Half-Clque (8 points)

Rappel : dans un graphe non-orienté $G = (V, E)$, une clique est un sous-ensemble $V' \subseteq V$ tel que pour tous $v, v' \in V'$ on a l'arrête $\{v, v'\} \in E$. Sa taille est $|V'|$.

HALF-CLIQUE

- entrée* : un graphe non-orienté $G' = (V', E')$ avec un nombre pair de sommet
question : G' contient-il une clique de taille $|V'|/2$?

1. Dessiner deux instances à 6 sommets de HALF-CLIQUE. La première instance doit-être positive et la seconde négative.

2. Montrer que le problème HALF-CLIQUE appartient à la classe NP.

☞ Pour montrer que c'est un problème dans NP, il suffit de montrer que dans le cas où une instance est positive, on peut le prouver grâce à un certificat qui peut-être vérifié en temps polynomial.

Certificat : un ensemble de sommets de taille $|V'|/2$ qui constitue une clique.

Vérification : Pour chaque paire de sommets $\{u, v\}$, vérifier que $\{u, v\} \in E$. Ça prend un temps polynomial $O(|V|^2)$. Selon comment l'ensemble de sommets est encodé, il faut potentiellement :

- vérifier que chaque sommet n'est présent qu'une seule fois dans la structure de donnée (si la structure de donnée est une liste par exemple). Ça prend un temps polynomial $O(|V|^2)$.
- vérifier que le nombre de sommets donné est bien $|V'|/2$. Ça prend un temps polynomial $O(|V|)$.

Une autre solution est de faire une réduction vers CLIQUE. La réduction est simplement $f : G' = (V', E') \mapsto (G', |V'|/2)$. Elle est clairement polynomiale. G' une instance positive de HALF-CLIQUE $\Leftrightarrow G'$ a une clique de taille $|V'|/2 \Leftrightarrow f(G') = (G', |V'|/2)$ est une instance positive de CLIQUE. Comme HALF-CLIQUE \leq_m^P CLIQUE et que CLIQUE est dans NP alors HALF-CLIQUE aussi.

CLIQUE

- entrée* : Un graphe non-orienté G et un entier k codé en binaire.
question : Le graphe G contient-il une clique de taille k ?

Rappel : CLIQUE est NP-complet.

3. Montrer que HALF-CLIQUE est NP-complet.

☞ On va montrer que CLIQUE \leq_m^P HALF-CLIQUE. Comme CLIQUE est NP-difficile, cela suffira pour montrer que HALF-CLIQUE aussi. Et comme HALF-CLIQUE est dans NP, alors cela montrera qu'il est également NP-complet.

On définit la réduction entre CLIQUE et HALF-CLIQUE suivante $f : (G, k) \mapsto G'$ où $G' = (V', E')$ est un graphe de taille $2|V|$ tel que :

- G est un sous graphe induit de G' ;
- en plus, G' contient $|V| - k$ sommets supplémentaires formant une clique et chacun voisin de tous les sommets de V (on appellera cet ensemble de sommets X) ;
- en plus, G' contient k sommets supplémentaires, chacun sans aucun voisin (on appellera cet ensemble de sommets Y).

f est clairement calculable en temps polynomial.

Soit (G, k) une instance de CLIQUE.

Dans un premier sens, (G, k) instance positive de CLIQUE $\Rightarrow G$ a une clique C de taille $k \Rightarrow G'$ a une clique $C' = C \cup X$ de taille $|V| \Rightarrow f(G, k) = G'$ est une instance positive de HALF-CLIQUE.

Dans l'autre sens, $f(G, k) = G'$ est une instance positive de HALF-CLIQUE $\Rightarrow G'$ a une clique C' de taille $|V|$ (notons que $Y \cap C' = \emptyset \Rightarrow C = C' \setminus X$ est une clique de taille au moins $|V| - |X| = |V| - (|V| - k) = k$ dans G' et dans $G \Rightarrow G$ a une clique de taille k (n'importe quel sous-ensemble de C de taille k) $\Rightarrow G$ est une instance positive de CLIQUE.

Donc, (G, k) instance positive de CLIQUE $\Leftrightarrow f(G, k)$ instance positive de HALF-CLIQUE. Ceci conclue la réduction.