

BEYOND THE SEA

Simulations Numériques

Kite Design

Rapport



beyond the sea[®]
by Yves Parlier

January, 2025

Contents

1	Les Théories Basses Fidélités	3
1.1	La théorie de la ligne portante (continue)	3
1.1.1	La résolution	4
1.2	Implémentation numérique (discret)	5
1.2.1	LLT - Lifting Line Theory	5
1.2.2	VSM - Vortex Step Method	7
1.2.3	VLM - Vortex Latex Method	9
1.2.4	Comparaison	11

Chapter 1

Les Théories Basses Fidélités

1.1 La théorie de la ligne portante (continue)

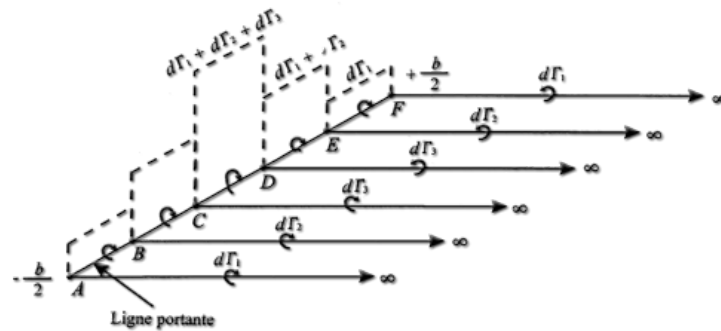


Figure 1.1: Vortex en fer à cheval de la ligne portante

La théorie des lignes portantes utilise la conception de circulation et le théorème de Kutta-Jukowski qui affirme que :

$$L(y) = \rho v \Gamma(y) \quad (1.1)$$

Aussi, la circulation élémentaire en un point M $\delta\Gamma(M)$ induit une vitesse en P $d\omega(P)$ selon :

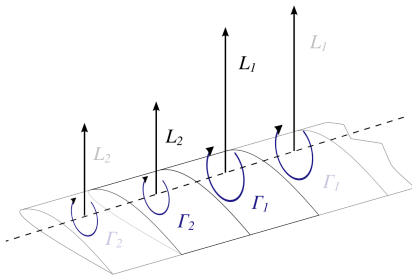
$$d\omega(M) = \frac{\delta\Gamma(P) \times \overrightarrow{PM}}{4\pi||\overrightarrow{PM}||^3} \quad (1.2)$$

Ce qui le long de la ligne portante, axe des y, donne :

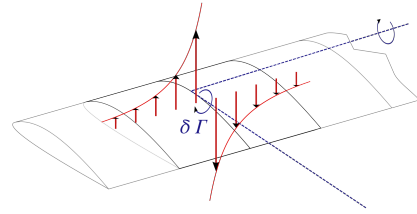
$$dv_i(y_0) = \frac{\delta\Gamma(y)}{4\pi(y - y_0)^2} \quad (1.3)$$

En intégrant l'équation 1.3 selon y, on remonte ainsi à l'angle induit en y_0 :

$$\alpha_i(y_0) = \frac{v_i(y_0)}{v_\infty} \quad (1.4)$$



(a) Lien Portance - Circulation



(b) Lien Circulation - Vitesse induite

Ainsi, on a :

$$L_{total} = \rho v_\infty \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy \quad (1.5)$$

et, avec $v_\infty \sin(\alpha_i(y)) = v_i(y)$ car $\tan(\alpha_i(y)) = \frac{v_i(y)}{v_\infty}$, on a :

$$D_{i,total} = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v_i(y) \Gamma(y) dy \quad (1.6)$$

1.1.1 La résolution

Pour résoudre un problème avec la LLT on utilise la méthode suivante :

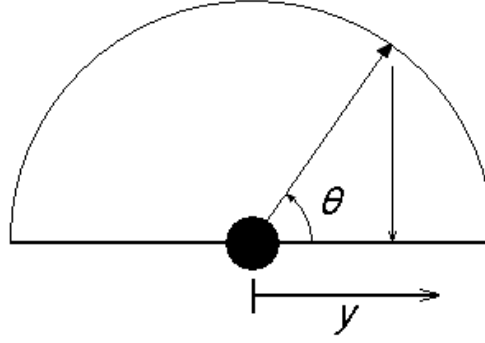


Figure 1.3: Changement de coordonnées

On pose $y = -\frac{b}{2}\cos(\theta)$ et $\Gamma(\theta) = 2bv_\infty \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \sin(n\theta)$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\rho v \Gamma}{P_{dynamique} S} &= \frac{L}{P_{dynamique} S} = C_L = C_{L,\alpha,3D}(\alpha - \alpha_{0,3D} - \Delta\alpha_{vrillage} - \alpha_{induit}) \\ &\Leftrightarrow 2b \sum_{n \geq 1} A_n \sin(n\theta) = \pi(\alpha - \alpha_{0,3D} - \Delta\alpha_{vrillage} - \sum_{n \geq 1} n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}) c(y) \end{aligned} \quad (1.7)$$

On remarque dans l'équation 1.7 que la LLT utilise donc la théorie 2D des profils minces ($C_L = C_{L,\alpha,2D}(\alpha - \alpha_{0,2D})$) avec une formule simple de passage des coefficients 2D à 3D (dépend de l'allongement de l'aile)

Finalement, **en faisant l'hypothèse de la théorie 2D des profils minces, et à partir de la loi de corde $c(y)$ uniquement**, on peut calculer la circulation 3D d'une aile $\Gamma(y)$, sa Portance L , sa trainée induite D_i , et sa vitesse induite $v_i(y)$

1.2 Implémentation numérique (discret)

On s'intéresse maintenant à l'application de cette théorie aux simulations numériques basses fidélités. En outre, on s'intéresse à son implémentation.

1.2.1 LLT - Lifting Line Theory

On discrétise l'aile par **panneaux le long de l'envergure**. Chaque panneau i est associé à une circulation Γ_i , une portance L_i , et une trainée D_i qui s'appliquent à $\frac{1}{4}$ de la corde, et une vitesse induite v_{ind} verticale à $\frac{3}{4}$ de la corde

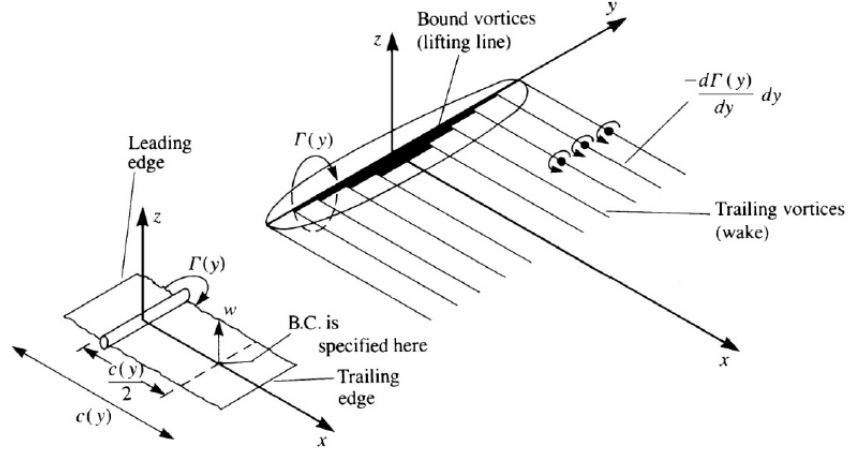


Figure 1.4: Représentation du modèle de ligne portante constitué de tourbillons en fer à cheval

L'équation 1.2 permet d'écrire en le panneaux i:

$$v_i = \sum_{\text{panneaux } j} v_{j,i} = \sum_{\text{panneaux } j} b_{j,i} \Gamma_j \quad (1.8)$$

avec v_i la vitesse induite en i, $v_{j,i}$ la vitesse induite en i par le panneau j, et $b_{j,i}$ un coefficient d'influence (géométrique) du panneau j sur le panneau i. Donc

$$V_{ind} = AIC \cdot \Gamma \quad (1.9)$$

avec $V \in M_n(\mathbb{R})$, $\Gamma \in M_n(\mathbb{R})$, et $AIC \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice d'influence

De plus, en combinant 1.7 et 1.9, en sachant que $\alpha_i = \frac{v_i}{v_\infty}$, on obtient une équation de la forme :

$$\frac{1}{v_\infty} \Gamma = \pi c (\alpha - \alpha_{0,3D} - \Delta \alpha_v - \frac{1}{v_\infty} AIC \cdot \Gamma) \quad (1.10)$$

avec $c \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice dont la colonne j correspond à la valeur de la corde en le $j^{\text{ème}}$ panneau.

Finalement, on peut écrire 1.10 sous la forme :

$$A\Gamma = B \quad (1.11)$$

Ainsi on peut calculer Γ , en déduire les vitesses induites V_{ind} , calculer la répartition des forces de portance et de trainée $L_i = \rho v_\infty \Gamma_i$ et $D_i = \rho v_i \Gamma_i$, et sommer pour obtenir les forces de portance et de trainée.

Finalement, en faisant l'hypothèse de la théorie 2D des profils minces ($C_{L,\alpha,2D}$ et $\alpha_{0,2D}$), et à partir de la loi de corde uniquement (matrices c et

AIC), on peut calculer la circulation 3D d'une aile Γ , sa Portance L , sa trainée induite D_i , et sa vitesse induite v_i .

A noter qu'il existe une formule simple qui permet de calculer $C_{L,\alpha,3D}$ et $\alpha_{0,3D}$ à partir de $C_{L,\alpha,2D}$ et $\alpha_{0,2D}$ et de l'allongement de l'aile.

1.2.2 VSM - Vortex Step Method

Hypothèses

- L'écoulement peut être divisé en deux régions : la région interne et la région externe. D'une part, l'écoulement dans la région interne représente les propriétés du profil aérodynamique, qui peuvent être obtenues par une variété de méthodes. D'autre part, l'écoulement en dehors de la région du profil est sans viscosité, irrotationnel et incompressible, afin d'obtenir une solution d'écoulement potentiel.
- Le théorème de Kutta–Joukowski est satisfait dans chaque section de l'aile, reliant les régions interne et externe.
- L'écoulement est quasi-stationnaire, ce qui signifie que chaque condition d'écoulement peut être résolue uniquement dans le domaine spatial.
- Le vortex de départ est situé très en aval et son influence peut être négligée.
- HYPOTHÈSE DU SILLAGE FIGÉ.

Système de vorticity

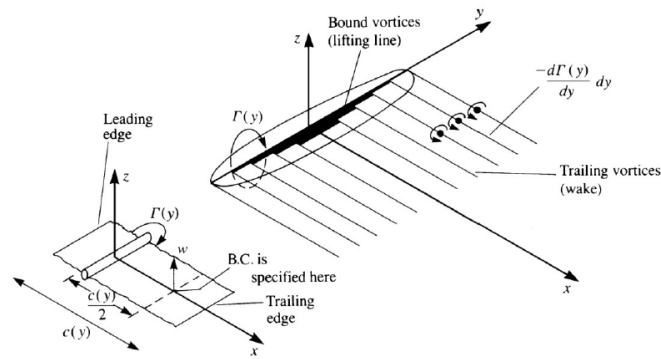


Figure 1.5: Représentation du modèle de ligne portante constitué de tourbillons en fer à cheval

Dans la théorie classique de la ligne portante de Prandtl, la ligne portante est supposée être droite, et les tourbillons traînants sont uniquement responsables de

l'induction du vent induit qui modifie les angles d'attaque locaux. En revanche, dans un cas plus général, où la ligne portante n'est pas droite, comme dans le cas du VSM actuellement étudié, l'ensemble du système de vorticité joue un rôle dans le changement de l'angle d'attaque sectionnel.

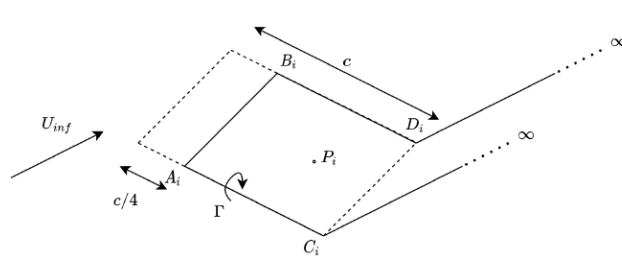


Figure 1.6: Représentation de la géométrie d'un vortex en fer à cheval

Les vitesses induites des panneaux J sur les points de control i

Ces vitesses induites sont compliquées à exprimer selon si on se situe sur un panneau ou un filament infinie. La formule générale, issue de la théorie de la ligne portante, est la suivante :

$$dw = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (1.12)$$

Matrice d'influence AIC

Ainsi, grâce à 1.12 on lie vitesse induite en un point de control i par l'ensemble des circulations Γ des panneaux j via des matrices d'influences :

$$u = AIC_u \Gamma \quad (1.13)$$

Calcul de la circulation

$$\rho|U_\infty \Gamma_j| - \frac{1}{2} \rho |U_{rel} z_{airf}|^2 c C_l(\alpha_{EFF_j}) = 0 \quad (1.14)$$

Résolution par itération à convergence

On part d'une circulation Γ initiale, on en déduit la vitesse induite (eq. 1.13), on calcul l'angle induit ($\alpha_{ind} = \frac{v_{ind}}{v_\infty}$) ($\alpha_{tot} = \alpha + \alpha_{ind}$), on calcul $C_l(\alpha)$ (ici, avec le code de Ocaryon, on utilise la formule de régression de Breukels), puis on calcul à nouveau Γ grâce à l'équation 1.14. On itère le procédé jusqu'à convergence...

En conclusion

la VSM utilise la loi de corde de l'aile (relation 1.13) & la polaire 2D par regression de Breukels (i.e. CFD 2D sur kites à boudin), le tout lié par les relations de la théorie de la ligne portante (1.12, 1.13 1.14)

A noter que cette méthode de résolution utilise les mêmes théories/-calculs que la LLT mais en by-passant l'inversion de matrice par des itérations à convergence sur le calcul de la loi/répartition de circulation Γ

1.2.3 VLM - Vortex Latex Method

Les hypothèses suivantes sont formulées concernant le problème dans la méthode du réseau tourbillonnaire (vortex lattice method) :

- Le champ d'écoulement est incompressible, non visqueux et irrotationnel. Cependant, un écoulement compressible subsonique avec de faibles perturbations peut être modélisé si la transformation générale tridimensionnelle de Prandtl-Glauert est intégrée dans la méthode.
- Les surfaces portantes sont minces. L'influence de l'épaisseur sur les forces aérodynamiques est négligée. C'est la **théorie des surfaces minces**
- L'angle d'incidence (angle d'attaque) et l'angle de dérapage sont tous deux petits, ce qui permet l'utilisation de l'approximation des petits angles.

On discrétise cette fois une aile en plein de panneaux le long de l'envergure et de la corde. Pour ce faire, on représente l'aile par sa loi de cambrure moyenne (pour que cela fasse une surface en 3D). Comme avec la LLT on considère qu'en chaque panneau s'appliquent une portance via une circulation (vortex en fer à cheval) à $\frac{1}{4}$ de la corde et un point de collocation à $\frac{3}{4}$ de la corde

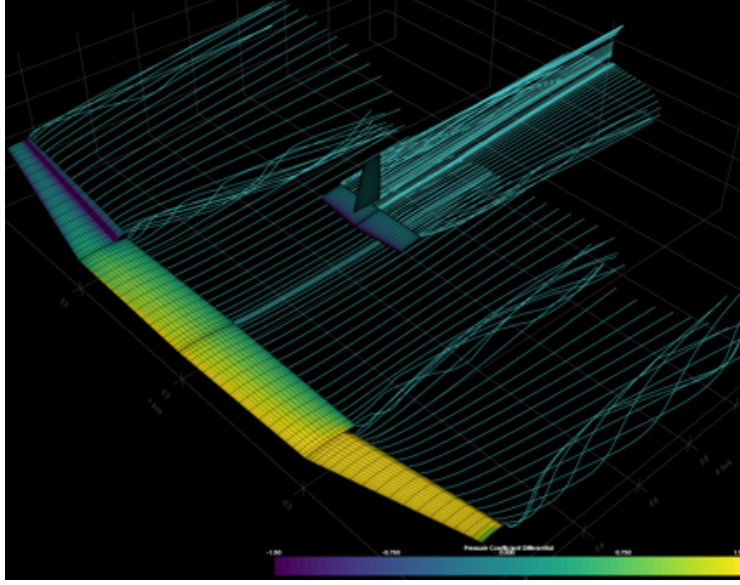


Figure 1.7: Illustration de la VLM avec ses panneaux de discrétisation et les lignes de vortex en fer à cheval dans le sillage de l'avion

On applique en chaque point de collocation ($\frac{3}{4}$ de la corde) la **condition aux limites de Neumann** qui impose que la vitesse ($\vec{v}_i = \vec{v}_\infty + \vec{v}_{induite,i}$) soit orthogonale au panneaux (**condition d'imperméabilité**) :

$$\vec{v}_i \cdot \vec{n}_i = (\vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^N \vec{v}_{j,i}) \cdot \vec{n}_i = (\vec{v}_\infty + \sum_{j=1}^N w_{j,i} \vec{\Gamma}_j) \cdot \vec{n}_i = 0 \quad (1.15)$$

On remarque que la vitesse induite par un panneaux j sur un panneaux i $\vec{v}_{j,i}$ est liée à la circulation du panneaux j Γ_j par un coefficient d'influence $w_{j,i}$ **exactement comme pour la théorie de la ligne portante**, ce qui ici s'appelle **la théorie de la surface portante**.

Finalement, en posant $A = (a_{i,j})_{0 \leq (i,j) \leq N}$ la matrice d'influence, $B = (b_j)_{0 \leq j \leq N}$, $a_{i,j} = \frac{w_{j,i} \vec{\Gamma}_j \cdot \vec{n}_i}{\|\vec{\Gamma}_j\|}$, et $b_i = \vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_i$, on résoud à nouveau un système (inversion de matrice ou itération sur la loi de Γ jusqu'à convergence) :

$$A \cdot \Gamma = B \quad (1.16)$$

De là, on peut calculer la résultante aéro de chaque panneaux (la condition de Neumann impose une vitesse tangente au panneaux donc cette force est suivant \vec{n}_i), puis la force totale, le moment total, la trainée induite (par l'angle induit par les vortex en fer à cheval), et la portance:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_i &= \rho \Gamma_i (v_\infty + v_{i,ind}) l_i \vec{n}_i \\
\vec{F} &= \sum_{i=0}^N \vec{F}_i \\
\vec{M} &= \sum_{i=0}^N \vec{F}_i \vec{r}_i \\
D_{ind} &= \vec{F}_i \cdot \vec{e}_x \vec{e}_x \\
L &= \vec{F}_i \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Avec l_i la longueur transverse du panneaux (selon l'envergure).

Remarque : là où VSM et LLT considèrent le point de collocation ($\frac{3}{4}$ de la corde du panneaux, allant du BA au BF) comme étant là où la vitesse induite est orthogonale à la vitesse à l'infinie ($\alpha_i = \frac{v_i}{v_\infty}$), la VLM considère son point de collocation comme l'endroit où s'applique la condition d'imperméabilité ($(\vec{v}_\infty + \vec{v}_{ind}) \cdot \vec{n} = 0$)

Remarque bis : la condition de non pénétration est ce qui permet d'obtenir les résultat de la théorie 2D des profils minces ($C_L = C_{L,\alpha}(\alpha - \alpha_{0,2D}) = 2\pi(\alpha - \alpha_{0,2D})$). Pour ce faire il faut rajouter la condition de Kutta-Joukowski qui permet de fermer le système d'équation (N équations à N inconnues) et se traduit par $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ et donc $\Gamma_N = \Gamma_0$; qui sont les Γ du BF sur l'intrados et l'extrados (car on discrétise le profil par N panneaux du BF au BF en passant par le BA, de l'extrados à l'intrados)

Finalement, en faisant l'hypothèse de la théorie 2D des profils minces sur chaque panneaux (via condition de non pénétration), à partir de la loi de corde $c(y)$ (matrice d'influence AIC notée A), et à partir de la loi de cambrure moyenne (discrétisation le long de la corde), on peut calculer la circulation 3D d'une aile Γ_i , sa Portance L , sa trainée induite D_{ind} , et sa vitesse induite $v_{i,ind}$. On ne parle plus de ligne portante mais plutôt de **surface portante** car désormais chaque panneaux à un vortex élémentaire $\delta\Gamma_i$ au $\frac{1}{4}$ de la corde, repartit sur toute l'aile (envergure + corde), qui génère sa portance élémentaire δL_i .

1.2.4 Comparaison

	LLT	VSM	VLM
Théorie 3D	Ligne Portante	Ligne Portante	Surface Portante
Discrétisation	Envergure	Envergure	Envergure ET corde selon la loi de cambrure moyenne
Théorie 2D	Théorie profils minces	Regression Breukels (CFD 2D)	Théorie profils minces par panneaux + matrice d'influence
Déclinaison LLT continue en discret	Matrice d'influence	Matrice d'influence	Matrice d'influence
Représentation d'une section	Profil mince (problème portant (+ problème épais ?))	Airfoil	Panneaux discret (eux-mêmes profils minces (plaque plane donc problème portant sans cambrure))
Passage 2D à 3D	Loi de corde et matrice d'influence AIC	Loi de corde et matrice d'influence AIC	Loi de corde et matrice d'influence AIC
Prise en compte de la cambrure via	calcul 2D	calcul 2D	discrétisation selon la loi de cambrure moyenne

Table 1.1: Tableau de comparaison des théories