

ЗАСТОСУВАННЯ МУЛЬТИСІТКОВИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ

У роботі описана мультисіткова оптимізація (MG/OPT), що значно покращує ефективність схем оптимізації, що лежать у її основі і використовуються у якості «згладжувача». Досліджено різноманітні оптимізаційні методи та обрано найефективніші з них для демонстрації тандему мультисіткових методів з оптимізаційними для розв'язку задачі мінімальної поверхні. Показано, що поєднання методів нелінійної оптимізації з мультисітковими є досить перспективним і може значно прискорити розв'язок задач певного типу.

Ключові слова: оптимізація, мультисіткові методи.

1. Вступ

Мультисіткові методи – одна з сучасних галузей дослідження прикладної математики. Вони вважаються найшвидшими чисельними методами для розв'язку еліптичних диференціальних рівнянь [9]. Більш того, мультисіткові методи розглядаються, як одні з найшвидших методів для багатьох інших задач, таких як інші види диференціальних рівнянь, інтегральні рівняння, реконструкція зображень та томографія, статистична механіка, суто алгебраїчні задачі без фізичної сітки (наприклад, мережа) і т.д. Серед задач, що ефективно вирішуються за допомогою мультисіткових алгоритмів, є і задачі оптимізації. Останнім часом саме поєднання мультисіткових алгоритмів та оптимізаційних методів викликає найбільшу зацікавленість у науковців [1, 2, 5, 6, 8]. У роботі буде розглянуто розв'язок нелінійних оптимізаційних задач за допомогою такого поєднання.

Метою статті є дослідження різноманітних оптимізаційних методів для обрання оптимального (найбільш ефективного, швидкого) з метою використання останнього у роботі методу MG/OPT, що ґрунтується на поєднанні оптимізаційних методик та мультисіткових алгоритмів.

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу мінімальної поверхні:

$$\underset{x(s,t)}{\text{minimize}} \iint \sqrt{1 + x_s^2 + x_t^2} \, dsdt,$$

де x_s та x_t – частинні похідні від x по s і t відповідно. Поверхня $x(s,t)$ визначена на одиничному квадраті $\{(s,t): 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$. Граничні умови

$$x(s,t) = \begin{cases} \sin(2\pi s), & t = 0, 0 \leq s \leq 1 \\ \sin(-2\pi t), & s = 0, 0 \leq t \leq 1 \\ \sin(2\pi s), & t = 1, 0 \leq s \leq 1 \\ \sin(-2\pi t), & s = 1, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Для розв'язку поставленої задачі методом MG/OPT розглянемо наступні оптимізаційні методи: метод покоординатного спуску (метод Хука-Дживса), метод спряжених градієнтів (метод Флетчера-Рівса), метод Ньютона-Гауса, метод

Левенберга-Маркварда, та оберемо, які з них найбільш ефективні у поєднанні з мультисітковими методами.

3. Оптимізаційні методи

3.1. Метод Хука-Дживса

Метод Хука-Дживса – це модифікований метод покоординатного спуску. Якщо лінії рівня сильно витягнуті, метод покоординатного спуску може «застрягати». Пробні кроки не призводять до зменшення цільової функції і, таким чином, процес обчислень переривається завчасно далеко від точки мінімуму. Ці складності і допомагає вирішити метод Хука-Дживса. Сутність цього методу полягає у наступному. Перші k ітерацій цього методу виконуються аналогічно ітераціям звичайного методу покоординатного спуску. Після визначення точки мінімуму у напрямку e^k пошук мінімуму виконується у напрямку вектора, що з'єднує початкове наближення $\theta^{(0)}$ та наближення $\theta^{(k)}$, знайдене в результаті k -ої ітерації. Після цього знову виконується покоординатний пошук і т.д.

Пошук мінімуму функції за напрямками, відмінними від координатних, дозволяє суттєво підвищити ефективність покоординатного спуску.

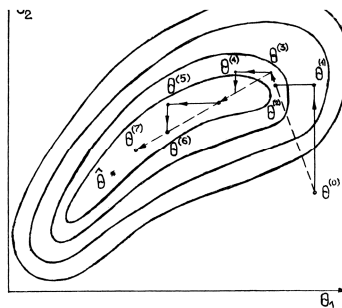


Рис. 1. Пошук мінімуму функції методом Хука-Дживса

3.2. Метод спряжених градієнтів (метод Флетчера-Рівса)

У методі спряжених градієнтів при виборі на кожній ітерації напрямку спуску враховується інформація, отримана на попередніх етапах обчислень. У цьому методі напрямок спуску відхиляється від напрямку вектору антиградієнту за рахунок додавання до нього вектору напрямку спуску попередньої ітерації, помноженого на деяке додатне число. Метод спряжених градієнтів є частинним випадком методу спряжених напрямків.

3.3. Метод Ньютона-Гауса

Одним з найбільш надійних, апробованих методів оцінки параметрів нелінійних моделей є метод Ньютона-Гауса. Цей метод має швидкість збіжності, близьку до швидкості збіжності методу Ньютона, але позбавлений його недоліків, пов'язаних з необхідністю обрахунків других частинних похідних суми квадратів відхилень експериментальних значень від значень моделі.

У методі Ньютона-Гауса довжина кроку на кожному кроці обирається рівною одиниці. Більш гнучким є модифікований метод Ньютона-Гауса, у якому є можливість довжину кроку обирати змінною.

Обчислення за методом Ньютона-Гауса припиняються, якщо на деякій ітерації виконується одна з розглянутих вище умов зупинника. Вибір відповідного

критерію зупинника процесу обчислень зазвичай здійснюється відповідно до фізичної сутності задачі.

3.4. Метод Левенберга-Маркварда

Метод Ньютона-Гауса може розходитися, оскільки навіть найменші зміни початкових даних спричиняють великі помилки при визначенні компонент вектора поправок для невідомих параметрів. При розв'язуванні задач такого типу часто застосовують метод Левенберга-Маркварда.

Метод Ньютона-Гауса збігається швидше, ніж метод Левенберга-Маркварда, якщо функція, що мінімізується, не має глибоких ярів. Проте у тому випадку, коли функція є сильно нелінійною, кращим є другий метод. Хоча метод Левенберга-Маркварда збігається не так швидко, як метод Ньютона-Гауса, він дає гарні результати для функцій, які мають глибокі яри, в той час як метод Ньютона-Гауса при розв'язуванні таких задач може взагалі розходитися.

3.5. Порівняльна характеристика методів

Порівнюємо описані оптимізаційні методи шляхом оцінки параметрів у тестових степеневих, дробово-раціональних, експоненційних та тригонометричних функціях [10]. Слід зауважити, що використання аналітичних тестових функцій на першому етапі дослідження виявилось достатнім для попереднього дослідження, оскільки ці тестові нелінійні функції-прикладі дозволили повністю розкрити основні властивості оптимізаційних методів, що розглядаються. Для оцінки (ідентифікації) параметрів розглядалися наступні тестові задачі (функції):

1) Степенева функція

$$y = p_1 x^{p_2}.$$

Функція характерна тим, що залежність y від параметра p_1 – лінійна, від p_2 – нелінійна. Шукаються параметри p_1 та p_2 ($n=2$) по двом ($m=2$) експериментальним точкам $y_{екс1}=0.5$ у точці $x_1=1$ та $y_{екс2}=8$ у точці $x_2=4$. Точні значення шуканих параметрів $p_1=0.5$, $p_2=2$, початкове наближення вектора $p_1^{початкове}=1$, $p_2^{початкове}=1$.

2) Дробово-раціональна функція

$$y = \frac{p_1}{1 + p_2 x}.$$

Шукаються два параметри ($n=2$) по $m=11$ експериментальним точкам $y_{ексj}$ в точках $x_j = 0.5(j-1)$, $j=1, \dots, 11$. Точні значення параметрів $p_1=2$, $p_2=3$; початкові значення параметрів $p_1^{початкове}=1$, $p_2^{початкове}=1$.

3) Згасаюча косинусоїда

$$y = e^{-p_1 x} \cos(p_2 x).$$

Шукаються два параметри по 10 експериментальним значенням $y_{ексj}$ у точках $x_j = 0.1(j-1)$, $j=1, \dots, 10$. Точні значення параметрів $p_1=2.3$, $p_2=0.7$; початкові значення параметрів $p_1^{початкове}=1.2$, $p_2^{початкове}=2.2$.

4) Сума дробово-раціональної функції та згасаючої косинусоїди

$$y = \frac{p_1}{1 + p_2 x} + e^{-p_3 x} \cos(p_4 x).$$

Шукаються $n = 4$ параметрів по $m = 11$ експериментальним значенням $y_{екс\ j}$ у точках $x_j = 0.1(j-1)$, $j = 1, \dots, 11$. Точні значення параметрів $p_1 = 2$, $p_2 = 1.9$, $p_3 = 1.7$, $p_4 = 2.5$; початкові значення параметрів $p_1^{початкове} = 1.5$, $p_2^{початкове} = 2$, $p_3^{початкове} = 2$, $p_4^{початкове} = 2$.

5) Добуток степеневі та тригонометричних функцій.

$$y = p_1 e^{-p_2 x_1} \sin(p_3 x_2) \cos(p_4 x_2).$$

Тестова задача 5 – функція від двох змінних та 4-х параметрів. Шукаються $n = 4$ параметрів по $m = 60$ експериментальним значенням $y_{екс\ i, j}$ точкам $x_{1j} = 0.05(j-1)$, $j = 21, \dots, 80$; $x_{2i} = 0.15i + 0.05$, $i = 13, \dots, 72$. Точні значення параметрів $p_1 = 1.12$, $p_2 = 2.05$, $p_3 = 1.23$, $p_4 = 2.15$; початкові значення параметрів $p_1^{початкове} = 1.02$, $p_2^{початкове} = 2.18$, $p_3^{початкове} = -1.4$, $p_4^{початкове} = 2.35$.

Результати роботи методів подано у таблиці 1. В таблиці використано позначення:

- (1) – розрахунок похідних за допомогою аналітично знайдених функцій;
- (2) – розрахунок похідних чисельно;
- calls – кількість викликів підпрограми обчислення значення функції в точці за умови досягнення точності одного порядку параметрів тестових функцій
- Φ – значення суми квадратів нев'язок;
- t – час роботи.

Таблиця 1

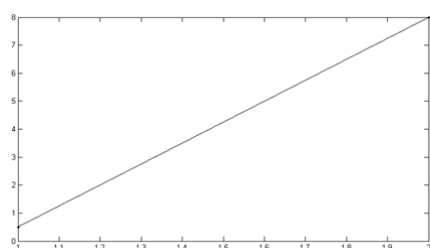
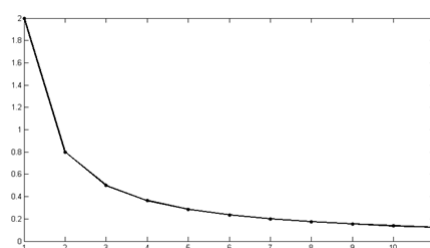
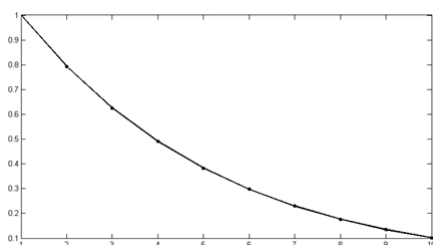
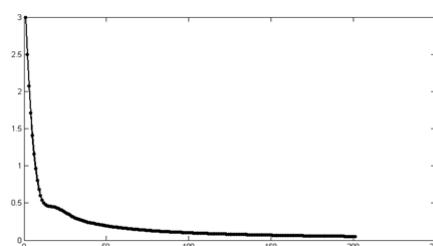
Таблиця порівняння оптимізаційних методів за кількістю викликів підпрограми обчислення значення функції в точці за умови досягнення точності одного порядку параметрів тестових функцій, а також за часом роботи

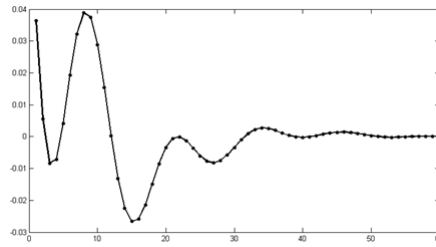
№	Метод	Пара- метри	Номер моделі				
			1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Метод Хука- Дживса	calls	952224	47278	495950	2009598	2312760
		Φ	1.0800 e-27	1.6563 e-31	3.0532 e-29	1.3010 e-28	2.4759 e-11
		T	31.4275	0.7794	9.0438	17.3617	2.7598
2	Флетчера- Рівса (1)	calls	14452	1045	20780	86631	48600
		Φ	2.2885 e-06	2.6701 e-05	4.5678 e-07	3.5946 e-04	1.9723 e-07
		T	0.5405	0.0165	0.4125	0.8860	0.4433
3	Флетчера- Рівса (2)	calls	18588	1573	34660	82812	97560
		Φ	2.2885 e-06	2.6701 e-05	4.5678 e-07	4.2956 e-06	1.9723 e-07
		T	0.6732	0.0502	0.9096	1.5789	2.2501

Продовження таблиці 1

1	2	3	4	5	6	7	8
4	Левенберга-Маркварда (1)	calls	38	176	190	9849	1140
		Φ	9.9881 e-14	2.5013 e-23	1.0028 e-20	1.9549 e-08	6.6262 e-19
		t	0.0037	0.0042	0.0165	0.2376	0.0217
5	Левенберга-Маркварда (2)	calls	86	396	430	9045	4020
		Φ	9.9882 e-14	2.5013 e-23	1.0028 e-20	4.8873 e-18	6.62630 e-19
		t	0.0041	0.0111	0.0231	0.2510	0.1270
6	Ньютона-Гауса (1)	calls	50	187	250	10653	1260
		Φ	2.9890 e-29	1.2832 e-21	6.8563 e-32	3.7321 e-05	3.1198 e-21
		t	0.0038	0.0043	0.0133	0.1942	0.0174
7	Ньютона-Гауса (2)	calls	50	187	250	10653	1260
		Φ	2.9890 e-29	1.2832 e-21	6.8563 e-32	3.7321 e-05	3.1198 e-21
		t	0.0023	0.0029	0.0042	0.1904	0.0096

Аналіз результатів таблиці 1. показує, що найбільш ефективним з точки зору звернень до обчислення функції є метод Ньютона-Гауса без використання методики автоматичного вибору кроку (тобто крок рівний 1). Найбільш «трудомісткими» виявились ідентифікація чотирьох коефіцієнтів у задачах 4 та 5 у порівнянні з задачами 1-3. Розв'язок задачі 1 (пошук двох параметрів за двома експериментальними точками) виявився досить трудомістким для методу Хука-Дживса, що пов'язано, скоріш за все, з обмеженою кількістю експериментальних точок.

Рис. 2. $y = p_1 x^{p_2}$ Рис. 3. $y = p_1 / (1 + p_2 t)$ Рис. 4. $y = e^{-p_1 x} \cos(p_2 x)$ Рис. 5. $y = \frac{p_1}{1 + p_2 x} + e^{-p_3 x} \cos(p_4 x)$

Рис. 6. $y = p_1 e^{-p_2 x_1} \sin(p_3 x_2) \cos(p_4 x_2)$

Тобто, на даній стадії аналізу оптимізаційних методів перевага на боці методу Ньютона-Гауса з одиничним кроком.

Графіки тестових функцій мають вигляд, поданий на рис. 2-6.

4. Мультисіткові методи

Формалізуємо ідею мультисіткового методу. Побудуємо послідовність сіток $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_l$. Найбільш грубій сітці Ω_0 відповідає крок h_0 . Крок h_i сітки Ω_i визначається співвідношенням $h_i = h_0 2^{-i}$, $i = 1, \dots, l$. Нехай задано послідовність скінченновимірних векторних просторів

$$M_0, M_1, \dots, M_l,$$

що відповідають цим сіткам. Припустимо, що задано оператори інтерполяції

$$I_i : M_i \rightarrow M_{i+1}, i = 0, \dots, l-1,$$

проекування

$$R_i : M_i \rightarrow M_{i-1}, i = 1, \dots, l,$$

а також оператори

$$L_i : M_i \rightarrow M_i, i = 0, \dots, l.$$

Мета – розв'язок системи рівнянь

$$L_l v_l = f_l$$

на найдрібнішій сітці. Алгоритм для будь-якого рівня $i = 0, \dots, l$ буде наступним. Одна ітерація багатосіткового методу для розв'язку системи рівнянь

$$L_i v_i = f_i$$

Визначається рекурсивною процедурою $w^{new} = MG(i, w^{old}, f_i)$. Тут w^{old} – початкове наближення до v_i , w^{new} – отримане нове наближення. Алгоритм полягає у наступному:

Якщо $i = 0$, то

0) $w^{new} = L_0^{-1} f_0$ (точний розв'язок на найгрубішій сітці), далі вихід з процедури. Інакше ($i > 0$):

1) покладаємо

$$u_0 = w^{old} u_{k+1} = u_k - D_i (L_i u_k - f_i), k = 0, \dots, m_1 - 1$$

(m_1 передзгладжуючих ітерацій);

2) $g_{i-1} = R_i (f_i - L_i u_{m_1})$ (проекування нев'язки на грубу сітку);

- 3) $z_0 = 0$, $z_s = MG(i-1, z_{s-1}, g_{i-1})$, $s = 1, \dots, \gamma$ (γ ітерацій багатосіткового методу на грубій сітці);
- 4) $y_0 = u_{m_i} + I_i z_\gamma$ (корекція наближення u_{m_i} з грубої сітки);
- 5) обраховуємо

$$y_{k+1} = y_k - D_i(L_i y_k - f_i), \quad k = 0, \dots, m_2 - 1,$$

(m_2 постзгладжуючих ітерацій); покладаємо

$$w^{new} = MG(i, w^{old}, f_i) = y_{m_2}.$$

Одне виконання процедури $w^{new} = MG(e, w^{old}, f_e)$ є однією ітерацією мультисіткового методу. Всього виконують задану кількість ітерацій або доки норма нев'язки $\|f_e - L_e w^{new}\|$ не стане меншою заданого ε .

Приклади ітерацій:

$$w^{old} = 0;$$

$$\text{доки } \|f_e - L_e w^{new}\| \geq \varepsilon, \text{ виконувати } \{w^{new} = MG(e, w^{old}, f_e), w^{old} = w^{new}\}.$$

Кількість передзгладжуючих m_1 та постзгладжуючих m_2 ітерацій, а також кількість рекурсивних викликів процедури γ задають заздалегідь. Зазвичай обирають $\gamma = 1$ або $\gamma = 2$. При $\gamma = 1$ одна ітерація методу отримала назву V-циклу, при $\gamma = 2$ – W-циклу.



Рис. 7. V-цикл

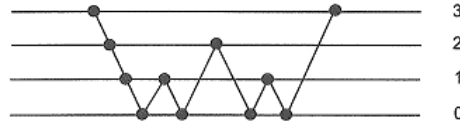


Рис. 8. W-цикл

5. Мультисіткова оптимізація або MG/ОПТ

Одним зі способів застосування мультисіткових методів до нелінійної оптимізації є використання вищеприписаного алгоритму для розв'язку рівнянь Ньютона

$$[\nabla^2 f_h(x_k)]p = -\nabla f_h(x_k)$$

для напрямку пошуку p . Ця ідея використовується різними авторами, наприклад [4]. Проте вона має кілька недоліків, оскільки неявно передбачає, що метод Ньютона – основа оптимізаційного алгоритму, і що буде явне обчислення матриць Гессе. Часто використовують великомасштабні оптимізаційні алгоритми, лише вимагаючи, щоб значення функції та градієнту забезпечувалися користувачем. При використанні цих алгоритмів незрозуміло, як застосовувати мультисіткові методи.

Опишемо мультисітковий алгоритм, який працює безпосередньо з оптимізаційними задачами, та може мати за основу різноманітні оптимізаційні методи. Він ґрунтується на «повній апроксимаційній схемі», описаній у [7, с. 66-67].

Мультисітковий алгоритм, що буде розглянуто, призначений для розв'язку задач без обмежень

$$\text{minimize}_x f_h(x),$$

де h – індекс, що використовується для задання дискретизації оптимізаційної задачі.

Спочатку розглянемо опуклу квадратичну задачу

$$\text{minimize}_x \frac{1}{2} x^T A x - b^T x,$$

де A – додатньо визначена матриця. Це еквівалентно системі рівнянь

$$Ax = b.$$

Індекси h та H відповідають поточній та наступній більш грубій дискретизаціям відповідно. Заведено обирати грубу дискретизацію вдвічі меншу (рідшу) за мілку, але іноді використовується довільна груба дискретизація. Оператор I_h^h визначає інтерполяційний оператор (від грубої до мілкої сітки), та I_h^H визначає також інтерполяційний оператор (від мілкої до грубої сітки). Вектори, позначені рисою, – вектори наступної, більш грубої, дискретизації.

Мультисітковий алгоритм – рекурсивний. Нехай дано початкову оптимізаційну задачу на мілкій сітці

$$\text{minimize}_x f_h(x)$$

та початкове наближення $x_{(0)}$. Одна ітерація алгоритму MG/OPT полягає в наступному:

- якщо це найгрубіша сітка – розв'язати

$$\text{minimize}_x f_h(x)$$

і повернутися;

- інакше, виконати N_0 ітерацій оптимізаційного алгоритму до вихідної задачі, щоб отримати $x_{(1)}$;
- обрахувати

$$\begin{aligned}\bar{x}_{(1)} &= I_h^H x_{(1)} \\ g_{(1)} &= \nabla f_h(x_{(1)}) \\ \bar{g}_{(1)} &= \nabla f_h(\bar{x}_{(1)}) \\ \bar{v} &= \bar{g}_{(1)} - I_h^H g_{(1)}\end{aligned}$$

- застосувати мультисітковий метод з початковим наближенням $\bar{x}_{(1)}$ до

$$\text{minimize}_x f_H(\bar{x}) - \bar{v}^T \bar{x}$$

і нехай $\bar{x}_{(2)}$ – результат;

- обрахувати

$$e_{(2)} = I_H^h(\bar{x}_{(2)} - \bar{x}_{(1)});$$

- виконати лінійний пошук, щоб отримати

$$x_{(2)} \leftarrow x_{(1)} + \alpha e_{(2)};$$

- застосувати N_1 ітерацію оптимізаційного алгоритму до вихідної задачі з початковим наближенням $x_{(2)}$, щоб отримати $x_{(3)}$.

6. Результати обчислень та обговорення

Мультисіткові алгоритми можуть бути значно більш ефективними за оптимізаційні методи, що лежать у їх основі, особливо у точках, віддалених від розв'язку.

Перша ітерація MG/OPT використовує так звану повну мультисіткову («full multigrid») техніку [3]. У повному мультисітковому алгоритмі початкові обчислення виконуються на грубій сітці, а результати інтерполюються (розширюються) на мілку сітку. Алгоритм наступний:

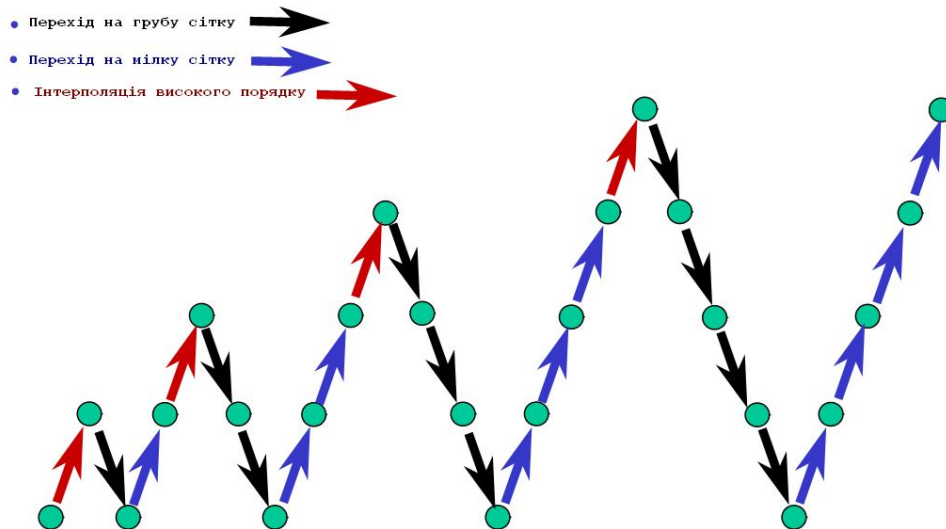


Рис. 9. Схема «full multigrid»

- дано початкове наближення $x_{(0)}$: якщо це найгрубіша сітка, розв'язати оптимізаційну задачу та повернути результат. Інакше:
- використати $x_{(0)}$, щоб отримати $\bar{x}_{(0)}$; застосуємо повний мультисітковий алгоритм для наступної більш грубої дискретизації з $\bar{x}_{(0)}$ в якості початкового наближення для отримання $\bar{x}_{(1)}$;
- оновити розв'язок на поточній дискретизації, щоб отримати $x_{(1)}$;
- застосувати MG/OPT до поточної дискретизації з початковим наближенням $x_{(1)}$ та повернути результат.
- Наступні ітерації MG/OPT використовують описаний у пункті 5 алгоритм.

Застосуємо рівномірну дискретизацію по s і t до задачі, описаної у пункті 2, використавши різницеву апроксимацію вперед до похідних, тобто

$$x_s \approx \frac{x(s+h, t) - x(s, t)}{h}.$$

Для розв'язання задачі було використано два методи нелінійної оптимізації: метод Хука-Дживса та метод Флетчера-Рівса. Інші два методи, описані в пункті 3, використовують у своїй роботі Гессіан, для чого необхідно реалізовувати метод пошуку частинних похідних другого порядку чи будувати відповідну матрицю

ітераційними методами. Зважаючи на це, методи Левенберга-Маркварда та Ньютона-Гауса не використовувались.

Задача була розв'язана для сітки $N = n^2 = 9^2$ у випадку використання в якості оптимізаційної частини методу Хука-Дживса, та для сітки $N = n^2 = 17^2$ у випадку використання методу Флетчера-Рівса. Зауважимо, що була використана версія реалізації методу Флетчера-Рівса з чисельним знаходженням похідних. Початкове наближення було отримане за допомогою наступних команд у середовищі Matlab:

```
N=n*n;  
X=ones(N,1)+0.05*randn(N,1);  
x=reshape(X,n,n);
```

Результати роботи методів подано у таблиці 6.1. У рядках 2 та 3 в дужках після назви методу вказано розмірність сітки, на якій його було використано.

Таблиця 2

Таблиця порівняння оптимізаційних методів за отриманим значенням цільової функції, а також за часом роботи

№	Метод	Параметри	Методи		
			Звичайний	Мультисітковий FAS	Мультисітковий FAS + MG/OPT
1	Метод Хука-Дживса	S	1.9134	1.9125	1.9093
		t	905.61	49.07	280.62
2	Флетчера-Рівса (9)	S	1.9070	1.9189	1.9078
		t	38.12	8.30	41.90
3	Флетчера-Рівса (17)	S	1.9031	1.9120	1.9066
		t	315.54	42.98	213.62

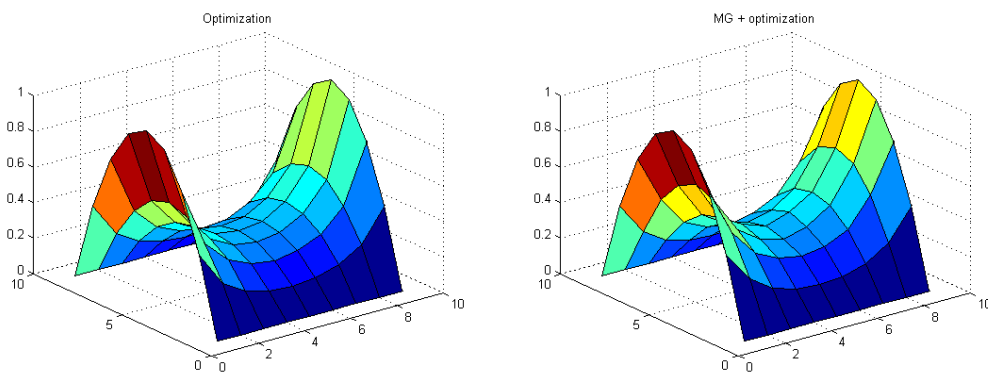


Рис. 10. Результат роботи оптимізаційного звичайного (зліва) та оптимізаційного мультисіткового (справа) алгоритмів на основі методу Флетчера-Рівса для сітки 9×9

На рис. 10 подано отриману на сітці $N = n^2 = 9^2$ поверхню, отриману з використанням методу Флетчера-Рівса та мультисіткового методу на основі

алгоритму Флетчера-Рівса. На рис. 11 подано результат роботи тих же методів, однак, на сітці $N = n^2 = 17^2$.

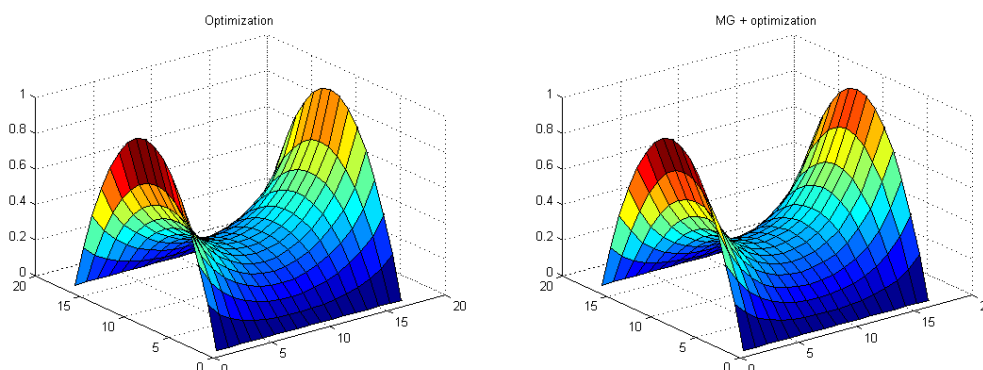


Рис. 11. Результат роботи оптимізаційного звичайного (зліва) та оптимізаційного мультисіткового (справа) алгоритмів на основі методу Флетчера-Рівса для сітки 17×17

За даними таблиці 2 можна зробити наступні висновки:

1. Мультисіткові методи працюють значно швидше на задачах великої розмірності, при цьому із збільшенням розмірності збільшується перевага методів.
2. Виконання алгоритму MG/OPT після повної апроксимаційної схеми приводить до зменшення помилки, хоча й сповільнює час роботи методу, що, однак, залежить також від кількості повних циклів виконання MG/OPT.

Для порівняння часу роботи обраних методів та підтвердження отриманих результатів було використано при розв'язанні задачі сітки різних розмірів, а саме – 9×9 , 17×17 , 33×33 , 65×65 , та визначено середній час роботи програм (розглядалась також отримана точність розв'язку). Результати експериментів подано у таблиці 3.

Таблиця 3

Таблиця порівняння середнього часу роботи програм (с)

Метод розв'язку	Розмір сітки			
	9x9	17x17	33x33*	65x65*
1	2	3	4	5
Флетчера-Рівса	13.1	99.2	1186.6	27608.9
Флетчера-Рівса з використанням мультисіткового методу	2.8	13.6	87.1	1115.6
Флетчера-Рівса з використанням повного алгоритму мультисіткового методу	13.6	67.3	515.9	6211.5
Хука-Дживса	306.9	8889.7	—	—

* застосування методу Хука-Дживса для сіток розміром 33×33 та 65×65 не проводилось внаслідок великих очікуваних часових затрат (більше 70 годин при використанні методу оптимізації Хука-Дживса на сітці 33×33)

			Продовження таблиці 3			
	1		2	3	4	5
Хука-Дживса з використанням мультисіткового методу			15.9	279.9	—	—
Хука-Дживса з використанням повного алгоритму мультисіткового методу			106.7	1833.9	—	—

З таблиці 3 можна зробити висновки, що уточнюють попередні:

1. Використання повного алгоритму мультисіткового методу, як і очікувалось, дозволяє зменшити час обрахунків, причому із збільшенням розміру сітки збільшується відношення у часі роботи (до 5 разів при використанні сітки 65x65 для методу Флетчера-Рівса), застосування ж звичайного мультисіткового методу дозволяє зменшити час роботи ще у 5-10 разів порівняно з повним алгоритмом мультисіткового методу.
2. На сітках дуже малого розміру (9x9, 17x17) точність методів, що використовують мультисітковий підхід, менша за звичайні оптимізаційні методи на порядок, однак, при поступовому збільшенні розміру сітки точність стає порівнянною, а далі – зростає у методів, що використовують мультисітковий підхід.

Використання методу Флетчера-Рівса зменшує час розв'язання задачі порівняно з методом Хука-Дживса, що пояснюється вибором напрямку оптимізації з застосуванням градієнтів замість звичайного пошуку оптимального значення.

7. Висновки

На даний момент існує широкий спектр методів нелінійної оптимізації, а тому значний інтерес представляє вибір найбільш адекватного для поєднання з мультисітковими технологіями алгоритму. У роботі для розгляду було обрано 4 методи нелінійної оптимізації 0-го та 1-го порядку: Хука-Дживса, Флетчера-Рівса, Левенберга-Маркварда та Ньютона-Гауса. Попередньо було реалізовано та перевірено роботу методів для пошуку оптимальних значень нелінійних функцій, зокрема, розв'язано задачу підбору параметрів деякої нелінійної функції. Найкращі результати було отримано для методів Ньютона-Гауса та Левенберга-Маркварда. Однак, використання з мультисітковим алгоритмом для розв'язку задачі мінімальної поверхні ці методи не підійшли, зважаючи на велику розмірність задачі та необхідність чисельного пошуку частинних похідних другого порядку, що призводить до надзвичайного збільшення обчислень. Тому було обрано перші два методи. Кращі результати було отримано для методу Флетчера-Рівса.

Зважаючи на отримані результати, можна зробити висновок, що поєднання методів нелінійної оптимізації з мультисітковими є досить перспективним і може значно прискорити розв'язок задач певного типу.

8. Література

1. Borzi A., Shulz V. Multigrid methods for PDE optimization [Text] / Alfio Borzi, Volker Shulz. – SIAM Review, 2007. – p. 26.

2. Borzi A. On the convergence of the MG/OPT method / Alfio Borzi. – PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 5, 2005. – pp. 735-736.
3. Brandt A. Multilevel adaptive solutions to boundary value problems / A. Brandt. – Math. Comp. 31, 1977. – pp. 330-390.
4. Deufllhard P., Weiser M. Local inexact Newton multilevel FEM for nonlinear elliptic problems in Computational Science for 21st Century [Text] / Peter Deufllhard, Martin Weiser. – Wiley, New York, 1997. – pp. 129-138.
5. Haber E., Asher U.M. A multigrid method for distributed parameter estimation problems / U.M. Asher, E.Haber. – p. 16.
6. Lewis R.M., Nash S.G. Model Problems for the multigrid optimization of systems governed by differential equations / Robert Michael Lewis, Stephen G. Nash. – SIAM Journal of Scientific Computing, to appear. – p. 27.
7. McCormick S.F. Multilevel Adaptive Methods for Partial Differential Equations / Stefan F. McCormick. – SIAM, Philadelphia, 1989. – p. 173.
8. Nash S. A multigrid approach to discretized optimization problems / S. Nash. – Optimization Methods and Software 14, 2000. – pp. 99-116.
9. Trottenberg U., Oosterlee C.W., Schuller A. Multigrid / Ulrich Trottenberg, Cornelius W. Oosterlee, Anton Schuller. – Academic Press, 2001. – p. 644.
10. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров [Текст] / В.В. Носач. – М.: МИКАП, 1994. – 382 с. – ISBN 5-85959-067-9.

Прийнято до друку 02.10.2011

Аннотация

Ю.В. Клименко. Применение мультисеточных алгоритмов для решения задач поиска экстремума выпуклых функций

В работе описана мультисеточная оптимизация (MG/OPT), значительно улучшающая эффективность схем оптимизации, лежащих в ее основе и использующихся в качестве сглаживающего оператора. Исследованы разнообразные оптимизационные методы и выбраны самые эффективные для демонстрации объединения мультисеточных методов с оптимизационными для решения задачи минимальной поверхности. Показано, что объединение методов нелинейной оптимизации с мультисеточными является достаточно перспективным и может значительно ускорить решение задач определенного типа.

Ключевые слова: оптимизация, мультисеточные методы.

Summary

Y.V. Klymenko. Using multigrid algorithms for solving problems of convex functions extremum finding

The article describes multigrid optimization (MG/OPT) significantly improves the efficiency of optimization schemes on which MG/OPT is based and which are used as a smoothing operator. Various optimization methods were analyzed and the most effective of them were chosen to demonstrate combining multigrid and optimization methods to solve minimal surface problem. The results show that combining nonlinear optimization and multigrid methods is quite promising and can considerably increase the speed of finding certain type problems solution.

Keywords: optimization, multigrid methods.