1. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕБОРНОГО ТИПА

1.1. Математическая формулировка экстремальной задачи однокритериального выбора

Многие прикладные проблемы, связанные с задачами выбора, управления и проектирования, сводятся, как правило, к принятию решения на основе исследования математических моделей. Каждая *математическая модель* отображает взаимосвязь тех количественных свойств объекта, которые являются существенными для решаемой задачи.

Предположим, что конкретный объект (техническое устройство, физический или технологический процесс, экономическая система и т.д.) может быть охарактеризован конечной совокупностью существенных свойств, которые могут быть объективно измерены. Количественная оценка существенных свойств осуществляется с помощью величин, называемых *параметрами*. Можно выделить следующие типы параметров:

$\vec{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ - *внешние параметры*, характеризующие внешнюю по отношению к объекту среду и оказывающие влияние на его функционирование;

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ - *внутренние параметры*, характеризующие свойства отдельных элементов объекта.

В определении конкретных значений внутренних параметров, так же называемых *управляемыми переменными*, фактически состоит акт принятия решения.

Объединенную совокупность внешних и внутренних параметров будем называть *множеством входных параметров*.

Величины, характеризующие свойства объекта в целом как системы, будем называть *выходными параметрами (характеристиками)*, которые можно только измерять или вычислять, но непосредственно изменять нельзя. Обозначим их вектором $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$.

Управляемые переменные $\vec{x}$ и характеристики $\vec{\varphi}$ определяют существенные свойства исследуемого объекта, а внешние параметры $\vec{c}$ являются, как правило, константами и характеризуют внешнюю среду. При этом внутренние параметры $\vec{x}$ играют роль независимых переменных, а выходные параметры $\vec{\varphi}$ являются зависящими от них величинами. Будем считать, что соотношения, выражающие эти зависимости, заданы в виде “черного ящика”, который имеет n входов $x_i, i = \overline{1, n}$

и s выходов $\varphi_i, i = \overline{1,s}$.

В процессе принятия решения значения управляемых переменных $\vec{x}$ могут варьироваться в некоторых пределах, определяемых системой неравенств:

$$x_i^- \le x_i \le x_i^+, i = \overline{1,n}; \ \varphi_j^- \le \varphi_j(\vec{x}) \le \varphi_j^+, j = \overline{1,s}, \tag{1.1}$$

где $(x_i^-, x_i^+), (\varphi_j^-, \varphi_j^+)$ -нижнее и верхнее предельно-допустимые значения, соответственно, для i-ой переменной и j-ой характеристики. Область управляемых переменных, в которой выполняется система ограничений (1.1), будем называть *областью поиска D*, а любой вектор $\vec{x}$, принадлежащий множеству D - *допустимым решением.*

Для выбора из области поиска D одного или нескольких "лучших" допустимых решений часто приходится вводить *критерий оптимальности* Q - количественный показатель, посредством которого осуществляется объективное измерение в некоторой числовой шкале Y какого-либо одного наиболее важного для задачи принятия решения выходного параметра φ_i. Здесь под *измерением по шкале* Y понимается отображение Q, которое каждому решению $\vec{x} \in D$ ставит в соответствие числовую оценку $Q(\vec{x}) \in Y$ таким образом, чтобы отношения между числами сохраняли бинарные отношения предпочтения между решениями:

1) $\vec{x}^1$ "предпочтительнее" $\vec{x}^2$ $(\vec{x}^1 P \vec{x}^2)$ тогда и только тогда,

когда $Q(\vec{x}^1) < Q(\vec{x}^2)$;

2) $\vec{x}^1$ "не менее предпочтительнее" $\vec{x}^2$ $(\vec{x}^1 R \vec{x}^2)$ тогда и только тогда,

когда $Q(\vec{x}^1) \le Q(\vec{x}^2)$; (1.2)

3) $\vec{x}^1$ "эквивалентно" $\vec{x}^2$ $(\vec{x}^1 I \vec{x}^2)$ тогда и только тогда,

когда $Q(\vec{x}^1) = Q(\vec{x}^2)$.

Из соотношений (1.2) следует, что механизм выбора "лучшего" решения сводится к отбору тех и только тех решений, которые доставляют наименьшее значение критерию оптимальности Q в области поиска D :

$$Q^* = Q(\vec{x}^*) = \underset{\vec{x} \in D}{MIN}\ Q(\vec{x}), \tag{1.3}$$

где $\vec{x}^*$ - *оптимальное решение*; $Q^* = Q(\vec{x}^*)$ - наименьшее значение критерия оптимальности, получаемое при принятии оптимального решения $\vec{x}^* \in D$.

Выражение (1.3) является математической записью модели принятия оптимального решения, называемой *экстремальной задачей однокритериального выбора*. В том случае, когда решение задачи (1.3) можно свести к анализу значений критерия оптимальности Q для конечного числа решений $\vec{x} \in D$ (например, заданных числом перестановок n!, числом сочетаний C_n^m или просто дискретным множеством допустимых вариантов) экстремальная задача однокритериального выбора относится к классу *экстремальных задач переборного типа* [1].

1.2. Понятие "оптимальное решение"

Минимизируемая многопараметрическая функция $Q(\vec{x})$, выражающая зависимость критерия оптимальности Q от управляемых переменных $\vec{x}$, может быть как унимодальной, так и многоэкстремальной функцией. Независимо от вида функции $Q(\vec{x})$ оптимальное решение $\vec{x}^* \in D$ должно удовлетворять условию:

$$Q(\vec{x}^*) \le Q(\vec{x}) \text{ для всех } \vec{x} \in D. \qquad (1.4)$$

В случае *унимодальной функции* (одноэкстремальной функции, которая может быть разрывной, недифференцируемой и т.д.) оптимальное решение задачи (1.3) является единственным и достигается в точке *локального минимума* $\vec{x}^*$:

$$Q(\vec{x}^*) \le Q(\vec{x}) \text{ для всех } \vec{x} \in d(\vec{x}^*, \varepsilon), \qquad (1.5)$$

где $d(\vec{x}^*, \varepsilon)$ - ε -окрестность точки локального минимума $\vec{x}^* \in D$.

В случае *многоэкстремальной функции* (функции $Q(\vec{x})$, имеющей несколько локальных минимумов $\vec{x}^k, k = \overline{1, l}$ в области поиска D) оптимальное решение задачи (1.3) является *глобальным минимумом* - наименьшим из всех локальных минимумов:

$$Q^* = Q(\vec{x}^*) = \min_{1 \le k \le l} Q(\vec{x}^k), \qquad (1.6)$$

где $\vec{x}^k$ - к-ый локальный минимум функции $Q(\vec{x})$;

l - число локальных минимумов в области поиска D.

В общем случае оптимальное решение задачи (1.3) может достигаться на некотором подмножестве допустимых решений $\Omega \subseteq D$, удовлетворяющих условию:

$$Q(\vec{x}) = Q^* \text{ для всех } \vec{x} \in \Omega. \qquad (1.7)$$

Тогда, в зависимости от постановки задачи однокритериального выбора, требуется либо перечислить все решения, принадлежащие подмножеству Ω, либо указать любое одно из решений этого подмножества.

1.3. Задача разбиения графа как экстремальная задача переборного типа

Пусть задан неориентированный граф G(X, V, W) порядка n,
где $X=\{x_1, ..., x_n\}$ - множество вершин; $V \subseteq X*X$ - множество ребер;
$W:V\rightarrow N$ - отображение, определяющее вес каждого ребра.
Дихотомическим разбиением (X_1, X_2) будем называть разбиение графа G (X, V, W) на два подграфа $G_1(X_1, V_1, W_1)$ и $G_2(X_2\ V_2, W_2)$:

1) $X_1\subset X$, $X_2\subset X$; $X_1\neq\varnothing$, $X_2\neq\varnothing$;

$$X_1\cup X_2=X;\quad X_1\cap X_2=\varnothing. \tag{1.8}$$

2) $$|X_1|=n_1,\ |X_2|=n_2, \qquad n_1+n_2=n, \tag{1.9}$$

где n_1, n_2 - целые положительные числа, которые задаются как внешние параметры перед решением задачи разбиения.

Система требований (1.8)-(1.9), предъявленных к разбиению (X_1,X_2), определяет область поиска D.

Дихотомическое разбиение (X_1,X_2) называется *равномерным разбиением*, если мощности подмножеств вершин X_1 и X_2 равны между собой при условии, что порядок n исходного графа G (X, V, W) является четным числом:

$$n_1=n_2=n/2 \quad . \tag{1.10}$$

В качестве критерия оптимальности Q, определяющего эффективность дихотомического разбиения (X_1, X_2), будем рассматривать *вес разреза* - сумму весов ребер, соединяющих вершины подграфов $G_1(X_1, V_1, W_1)$ и $G_2(X_2\ V_2, W_2)$:

$$Q(X_1, X_2) = \sum_{x_i\in X_1}\sum_{x_j\in X_2} W(x_i, x_j), \tag{1.11}$$

где x_i, x_j - управляемые переменные, характеризующие вершины, включаемые, соответственно, в подграф $G_1(x_i\in X_1)$ и подграф $G_2(x_j\in X_2)$; $W(x_i,x_j)$ - вес ребра (x_i,x_j), попадающего в разрез между подграфами G_1 и G_2.

Тогда *оптимальное дихотомическое разбиение* является оптимальным решением (X_1^*, X_2^*) следующей экстремальной задачи однокритериального выбора:

$$Q^* = Q(X_1^*, X_2^*) = \underset{(X_1,X_2)\in D}{MIN}\left\{\sum_{x_i\in X_1}\sum_{x_j\in X_2} W(x_i, x_j)\right\}. \tag{1.12}$$

Задача (1.12) относится к экстремальным задачам переборного типа, так как общее число допустимых решений равно C_n^{n1}.

В том случае, когда весовые коэффициенты W можно интерпретировать как кратность ребер в мультиграфе G (X, V, W), критерий оптимальности (1.11) называется *коэффициентом разбиения (числом реберного соединения)*, определяющим мощность подмножества ребер, которые попали в разрез между подграфами G_1 и G_2**:**

$$K(X_1, X_2) = \left| V \setminus (V_1 \cup V_2) \right|, \tag{1.13}$$

где V- множество ребер исходного графа G (X, V, W);

V_1- подмножество ребер ($V_1 \subset V$), соединяющих только вершины $x_i \in X_1$ подграфа $G_1(X_1, V_1, W_1)$ между собой;

V_2- подмножество ребер ($V_2 \subset V$), соединяющих только вершины $x_j \in X_2$ подграфа $G_2(X_2\ V_2, W_2)$ между собой.

Обозначим через S сумму весов всех ребер исходного графа G (X, V, W):

$$S = \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} W(x_i, x_j) \tag{1.14}$$

$$x_i \neq x_j$$

Тогда в качестве критерия оптимальности можно рассматривать *общую сумму весов ребер, входящих в подграфы* $G_1(X_1, V_1, W_1)$ и $G_2(X_2\ V_2, W_2)$:

$$F(X_1, X_2) = S\text{-}Q(X_1, X_2) = f_1(X_1) + f_2(X_2), \tag{1.15}$$

где $f_1(X_1) = \sum_{x_i \in X_1} \sum_{x_j \in X_1} W(x_i, x_j)$ - сумма весов всех ребер

$x_i \neq x_j$ подграфа $G_1(X_1, V_1, W_1)$; (1.16)

$f_2(X_2) = \sum_{x_i \in X_2} \sum_{x_j \in X_2} W(x_i, x_j)$ - сумма весов всех ребер

$x_i \neq x_j$ подграфа $G_2(X_2\ V_2, W_2)$. (1.17)

В этом случае экстремальная задача (1.12) эквивалентна следующей задаче максимизации:

$$F^* = F(X_1^*, X_2^*) = \underset{(X_1, X_2) \in D}{MAX} \{F(X_1, X_2)\}, \tag{1.18}$$

являющейся *аддитивной сверткой бикритериальной задачи оптимизации*:

$$\underset{(X_1, X_2) \in D}{MAX} f_1(X_1); \underset{(X_1, X_2) \in D}{MAX} f_2(X_2). \tag{1.19}$$

В дальнейшем все иллюстрации применения генетических алгоритмов к решению экстремальных задач переборного типа будут рассматриваться на примере задачи построения оптимального дихотомического разбиения (X_1^*, X_2^*).   .

Пример 1.1 [2,3]

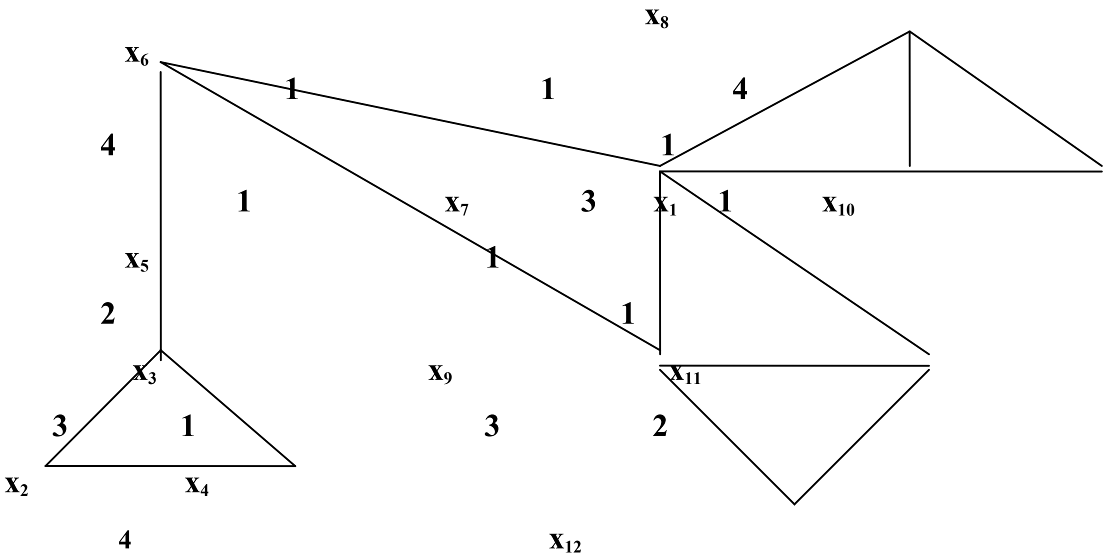

Рис. 1.1. Неориентированный простой граф G (X, V, W) порядка n=12

(цифрами указаны веса W соответствующих ребер).

Требуется найти оптимальное дихотомическое разбиение графа G для внешних параметров n_1=5 и n_2=7, которое обеспечивает минимальный вес разреза $Q(X_1,X_2)$. Число допустимых решений равно $C_{12}^5 = 792$, два из которых приведены в Таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Разбиение (X_1,X_2)	Характеристики			
	f_1	f_2	F	Q
$X_1 = (x_1, x_7, x_8, x_{10}, x_{11})$; $X_2 = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{12})$	11	18	29	7

$X_1^* = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$; $X_2^* = (x_1, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})$	14	20	34	2

Дихотомическое разбиение (X_1^*, X_2^*) является оптимальным разбиением графа, приведенного на рис. 1.1.