Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Институт компьютерных наук и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовой проект по курсу «Численные методы»
«Вычисление несобственных интегралов численными методами»

Студент:	Р. С. Лисин
Преподаватель:	Д. Л. Ревизников
Группа:	М8О-406Б-20
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2023

1 Теоретические сведения

Определённый интеграл называется несобственным, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий.

1. Область интегрирования является бесконечной - интеграл 1 рода.

2. Подынтегральная функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования - интеграл 2 рода.

Несобственный интеграл 2 рода можно свести к интегралу 1 рода с помощью замены переменной. Поэтому в данной работе будем рассматривать несобственные интегралы 1 рода

1. Сведение к определенному интегралу

Рассмотрим преобразование из мат анализа, выполненное с помощью замены переменной:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})dt$ при $ab > 0$

Можем разложить несобственный интеграл на сумму интегралов.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int\limits_{-A}^{B} f(x)dx + \int\limits_{B}^{+\infty} f(x)dx$ при $-A < 0$ и $B > 0$

Первый и последний интегралы можем преобразовать с помощью формулы выше. Так мы можем посчитать каждый из этих трех интегралов (например, методом прямоугольников) и сложить получившиеся результаты.

2. Предельный переход

Запишем предельный переход для несобственного интеграла 1 рода:

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b->\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

Будем вычислять правый интеграл (например, методом прямоугольников) до тех пор, пока следующее слагаемое не станет меньше заданного эпсилон.

2 Исходный код

```
import math

INF = 1e10


def integrate_rectangle_method(f, l, r, h):
    """
    Calculate integral f(x)dx at interval [l; r] using rectangle method with step=h
    """
    result = 0
    cur_x = l
    while cur_x < r:
        result += h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
        cur_x += h
    return result


def integrate_rectangle_method2(f, l, r, h):
    """
    Calculate integral f(x)dx at interval [l; r] using rectangle method with step=h
    """
    result = 0
    cur_x = l
    iters = 0
    while cur_x < r:
        result += h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
        cur_x += h
        iters += 1
    return result, iters


def f(x):
    """
    Function to integrate
    """
    if x < 0:
        return 0
    else:
        return x * (math.exp(- x / 2) / 4)


def integrate_with_definite_integral(f, l, r, h=0.01, eps=1e-6, max_iters=10000000):
    """
    Calculate improper integral (type 1) transforming to definite integrals
    """

    def f_new(t):
```

```
            return (1. / t ** 2) * f(1. / t)

    result = 0
    iters = 0
    if r == INF:
        new_r = max(eps, l)
        try:
            res, i = integrate_rectangle_method2(f_new, eps, 1. / new_r - eps, h)
        except ValueError:
            res = 0
        iters += i
        if iters >= max_iters:
            return "The integral is probably divergent, or slowly convergent"
        result += res
    else:
        new_r = r
    if l == -INF:
        new_l = min(-eps, r)
        try:
            res, i = integrate_rectangle_method2(f_new, 1. / new_l + eps, -eps, h)
        except ValueError:
            res = 0
        iters += i
        if iters >= max_iters:
            return "The integral is probably divergent, or slowly convergent"
        result += res
    else:
        new_l = l
    if new_l < new_r:
        try:
            res, i = integrate_rectangle_method2(f, new_l, new_r, h)
        except ValueError:
            res = 0
        iters += i
        if iters >= max_iters:
            return "The integral is probably divergent, or slowly convergent"
        result += res
    print(iters)
    return result


def integrate_lim(f, l, r, h=0.1, eps=1e-6, max_iters=10000000):
    """
    Calculate improper integral f(x)dx (type 1) using limit transition.
    Returns: integral result, number of iterations
    """
    result = 0
    iters = 0
    if r == INF:
```

```
        finish = False
        cur_x = max(l, 0)
        while not finish:
            iters += 1
            try:
                res = h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
            except ValueError:
                res = 0
            iters += 1
            if iters >= max_iters:
                return "The integral is probably divergent, or slowly convergent", None
            new_result = result + res
            cur_x += h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
            result = new_result
    else:
        try:
            res = integrate_rectangle_method(f, 0, r, h)
        except ValueError:
            res = 0
        iters += 1
        if iters >= max_iters:
            return "The integral is probably divergent, or slowly convergent", None
        result += res
    if l == -INF:
        finish = False
        cur_x = min(0, r)
        while not finish:
            iters += 1
            try:
                res = h * f((cur_x - h + cur_x) * 0.5)
            except ValueError:
                res = 0
            iters += 1
            if iters >= max_iters:
                return "The integral is probably divergent, or slowly convergent", None
            new_result = result + res
            cur_x -= h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
            result = new_result
    else:
        try:
            res = integrate_rectangle_method(f, l, 0, h)
        except ValueError:
            res = 0
        iters += 1
        if iters >= max_iters:
```

```python
            return "The integral is probably divergent, or slowly convergent", None
        result += res
    return result, iters


if __name__ == '__main__':
    a = -INF
    b = INF
    h = 0.01
    eps = 0.0001
    print('Transforming to definite integral')

    res_definite = integrate_with_definite_integral(f, a, b, h, eps)
    print('Integral =', res_definite)
    print()

    print('Limit method')
    res_limit, iters_limit = integrate_lim(f, a, b)
    print('Integral =', res_limit)
    print('Iterations:', iters_limit)
    print()
```

3 Результат работы программы

Для примера будем вычислять интегралы плотностей вероятностей $f(x)$ четырёх распределений. Как известно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Также попробуем вычислить интеграл Лебега.

Нормальное распределение

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}*(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$

$\boldsymbol{\sigma = 2,\ \mu = 0}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0019548111873857

Limit method
Integral = 0.9999932196196758
Iterations: 180
```

$\boldsymbol{\sigma = 3,\ \mu = 0}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0013032096773957

Limit method
Integral = 0.9999891850685468
Iterations: 264
```

$\boldsymbol{\sigma = 4,\ \mu = 1}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0009476311809966

Limit method
Integral = 0.9999847546048135
Iterations: 346
```

Распределение Коши

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2} dx$

$\boldsymbol{\gamma = 1,\ x_0 = 0}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.003119415164576

Limit method
Integral = 0.9964335400800076
Iterations: 3570
```

$\gamma = 2$, $x_0 = 0$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0015598183000929

Limit method
Integral = 0.9949555749574255
Iterations: 5048
```

$\gamma = 3$, $x_0 = 2$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0007211420267739

Limit method
Integral = 0.9938214191681052
Iterations: 6182
```

Интеграл Лебега

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi} \frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2} dx$

$\gamma = 1$, $x_0 = 0$

```
Transforming to definite integral
Integral = -0.031438613222249466

Limit method
Integral = 8.033545498346535e-15
Iterations: 1273244
```

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi} \frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2} dx$

$\gamma = 2$, $x_0 = 1$

```
Transforming to definite integral
Integral = 0.9370980498678241

Limit method
Integral = 0.9999999999998485
Iterations: 2546484
```

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\pi} \frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2} dx$

$\gamma = \mathbf{2},\ x_0 = \mathbf{1}$

```
Transforming to definite integral
Integral = The integral is probably divergent,or slowly convergent

Limit method
Integral = The integral is probably divergent,or slowly convergent
Iterations: None
```

Логнормальное распределение

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$\sigma = \mathbf{2},\ \mu = \mathbf{0}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0131561902665505

Limit method
Integral = 1.001363049446542
Iterations: 3167
```

$\sigma = \mathbf{3},\ \mu = \mathbf{0}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0472003386683912

Limit method
Integral = 0.926369682713668
Iterations: 9650
```

$\sigma = \mathbf{4},\ \mu = \mathbf{1}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 0.9771914251773338

Limit method
Integral = 0.9448438863216047
Iterations: 44328
```

Гамма-распределение

$$f(x) = \begin{cases} x^{k-1}\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^2\Gamma(k)}, & \text{x} \geq 0\text{, где } \Gamma\text{(k) - гамма-функция Эйлера.} \\ 0, & \text{x} < 0 \end{cases}$$

Вычисляем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$\theta = \mathbf{2},\ k = \mathbf{1},\ \Gamma(1) = \mathbf{1}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0049377660743455

Limit method
Integral = 0.9998764383415955
Iterations: 218
```

$\theta = \mathbf{3},\ k = \mathbf{2},\ \Gamma(2) = \mathbf{1}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0000051938529737

Limit method
Integral = 1.000014648439496
Iterations: 391
```

$\theta = \mathbf{4},\ k = \mathbf{3},\ \Gamma(3) = \mathbf{2}$

```
Transforming to definite integral
Integral = 1.0000222206730895

Limit method
Integral = 0.9999551813863633
Iterations: 595
```

4 Выводы

Выполнив данную работу, я познакомился с численными методами решения несобственных интегралов:

1. Сведение к сумме определенных интегралов

2. Предельный переход

Я реализовал два этих метода и протестировал их работу на разных несобственных интегралах. Полученные значения оказались очень близки к аналитическим ответам.