1 Eléments de logique

1.1 Définitions

Déf 1 : propositions
Une **proposition** ou phrase assertive (ou encore **assertion** : terme mathématique) est une phrase obéissant à une certaine syntaxe susceptible de faire l'objet d'un jugement de vérité, c'est à dire à laquelle on peut lui attribuer une valeur de vérité 1 (V : "vrai") ou 0 (F : "faux").

Exemples : "il pleut", "demain, j'irai au cinéma", "L'homme est mortel", "3 est un entier pair", "$(500+1)^2 = 500^2 + 1000 + 1$", "$2 = 3\times$"

"3 est un entier pair" est une assertion fausse
"$(500+1)^2 = 500^2 + 1000 + 1$" est une assertion vraie
"$2 = 3\times$" n'est pas une assertion
Une proposition ne se limite pas à l'énoncé d'une vérité absolue (comme "l'homme est mortel" ou les deux exemples précédents). De façon plus générale, la vérité d'une proposition est relative à certaines situations réelles ou imaginaire susceptibles d'être vérifiée ou pas. En effet les propositions "il pleut" ou "demain, j'irai au cinéma" peuvent être vraies ou fausses.

Remarque : en mathématique, pour effectuer une démonstration, on utilise des déductions logiques d'assertions vraies utilisant les propriétés des connecteurs et des raisonnements logiques (voir partie 4).

Déf 2 : négation
Soit p une proposition, on note **non**(p) ou $\neg p$ la négation de p ($\neg$: opérateur logique de négation). $\neg p$ est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie. L'opérateur de négation s'applique immédiatement à la proposition qui la suit. La table de vérité d'une proposition p et $\neg p$ est :

p	$\neg p$
1	0
0	1

Déf 3 : les connecteurs logiques
A partir d'un certain nombre d'assertions, on peut en fabriquer de nouvelles en utilisant des connecteurs logiques. Ils permettent de construire des énoncés complexes dont la valeur de vérité est fonction de la valeur de vérité des énoncés élémentaires qui les composent.

Remarques : en automatique ou en électronique, on utilisera plutôt le terme d'opérateur logique.

Soient p et q deux propositions, on définit :

– **la conjonction logique ET** notée $\wedge$, définie par :

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Par exemple si p : "il pleut" et q : "il fait froid", $p \wedge q$: "il pleut et il fait froid" est vraie lorsque chacune des deux phrases élémentaires p et q sont vraies, fausse si l'une des deux est fausse.

– **la disjonction logique OU** notée $\vee$, définie par :

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Par exemple si p : "Jean a eu plus de la moyenne générale au BAC" et q : "Jean a réussi ses rattrapages", $p \vee q$: "Jean a eu plus de la moyenne générale au BAC ou Jean a réussi ses rattrapages" est vraie lorsque l'une ou l'autre des deux phrases élémentaires p et q sont vraies. $p \vee q$ est faux lorsque Jean n'a pas eu la moyenne générale au BAC et n'a pas réussi ses rattrapages.

Remarques : le ou dans le langage courant peut être utilisé avec des sens différents. Par **exemple** :
. ou exclusif (disjonction exclusive) : "fromage ou dessert"
. ou mathématique (disjonction logique, ou inclusif) : "on recherche une personne parlant l'anglais ou l'espagnol"
. ou conditionnel (mettant en jeu une implication logique) : "fait tes devoirs ou tu auras une mauvaise note", qui a le même sens logique que "si tu ne fais pas tes devoirs alors tu auras une mauvaise note"

– **la disjonction exclusive** notée $\triangle$, définie par :

p	q	$p \triangle q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Par exemple si p : "viande" et q : "poisson", $p \triangle q$: "viande ou poisson" est vraie lorsqu'exclusivement l'une ou l'autre des deux phrases élémentaires p et q sont vraies, mais pas les deux. $p \triangle q$ est faux lorsque p et q ont même valeur de vérité.

– **l'implication logique** notée $\Longrightarrow$, définie par :

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Par exemple si p : "il pleut demain" et q : "j'irai au cinéma", $p \Longrightarrow q$ signifie : "s'il pleut demain, j'irai au cinéma" On peut remplacer la virgule par alors. Au moment où j'énonce cette phrase, je la considère comme vraie, et que s'il ne pleut pas, j'ai le choix de faire ce que je veux. J'envisage donc que demain il puisse pleuvoir ou ne pas pleuvoir, que je puisse aller ou non au cinéma, mais j'exclus de ne pas aller au cinéma en cas de pluie. Pour résumer, s'il ne pleut pas demain, j'ai le choix d'aller au cinéma ou non (l'implication restera vraie), en revanche, une seule possibilité est exclue (implication est fausse) : celle où on a simultanément "il pleut demain" vrai et "j'irai au cinéma" faux.

Dans la Grèce antique, les stoïciens disaient : « Du vrai suit le vrai... Du faux suit le faux... Du faux suit le vrai... Mais du vrai, le faux ne peut s'ensuivre ».

Autre exemple : Soit l'implication $(x > 1) \Longrightarrow (x > 0)$. Prouvons que cette implication est une assertion vraie pour certaines valeurs réelles de x.

pour $x =$	$x > 1$	$x > 0$	$(x > 1) \Longrightarrow (x > 0)$
-3	F	F	V
1	F	V	V
2	V	V	V

En fait, cette implication est vraie pour tout x réel. (Voir la quantification dans le chapitre suivant).

Remarque 1. Dans l'implication $p \Longrightarrow q$, p s'appelle l'**hypothèse** et q la **conclusion**.
L'implication $q \Longrightarrow p$ s'appelle la **réciproque** de l'implication $p \Longrightarrow q$.

Remarque 2. Dans l'implication $p \Longrightarrow q$, en mathématiques, on dira aussi :
. pour que p soit vraie il faut que q soit vraie
. la condition nécessaire (à voir comme une obligation, une nécessité) de l'implication est q
. pour que q soit vraie il suffit que p soit vraie
. la condition suffisante de l'implication est p

– **l'équivalence logique** notée $\Longleftrightarrow$, définie par :

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

L'équivalence $p \Longleftrightarrow q$ est vraie uniquement lorsque les propositions p et q sont **logiquement équivalentes**, c'est à dire qu'elles ont même valeur de vérité (en effet, on a simultanément $p \Longrightarrow q$ et $p \Longleftarrow q$). Ce connecteur correspond au **si et seulement si** du langage mathématique. Par exemple p : "il fait beau" et q : "je fais une promenade", $p \Longleftrightarrow q$ signifie : "s'il fait beau, et seulement dans ce cas, je fais une promenade".

Remarque : en mathématiques, on dira aussi :
. pour que p soit vraie, il faut et il suffit que q soit vraie
. p est vraie si et seulement si q est vraie
. une condition nécessaire et suffisante (ou **CNS**) pour que p soit vraie est que q soit vraie
. p équivaut à q

1.2 Propriétés

Deux énoncés sont équivalents s'ils ont une même table de vérité.
Soient p, q et r trois propositions, on a les propriétés suivantes :

1) la **double négation**
   $\neg(\neg p) \iff p$

2) La **commutativité** de $\wedge$ et $\vee$
   $(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$
   $(p \vee q) \iff (q \vee p)$

3) L'**associativité** de $\wedge$ et $\vee$
   $(p \wedge (q \wedge r)) \iff ((p \wedge q) \wedge r)$
   $(p \vee (q \vee r)) \iff ((p \vee q) \vee r)$

4) La **distributivité** de $\wedge$ sur $\vee$ et réciproquement
   $(p \wedge (q \vee r)) \iff ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
   $(p \vee (q \wedge r)) \iff ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

5) **Les lois de De Morgan**
   $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$
   $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$

6) **L'implication et sa négation**
   $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$
   $\neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q)$

7) **L'équivalence et sa négation**
   $(p \iff q) \iff ((p \implies q) \wedge (q \implies p))$
   $\neg(p \iff q) \iff ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$

En guise d'entraînement, ces propriétés sont toutes à démontrer

Exemple 1. montrons que : $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$

p	q	$p \implies q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

On verra dans la partie 3 une autre façon de présenter ce type de tableau.

Exemple 2. les assertions $p \iff p$, $(p \wedge q) \implies p$ et $p \implies (p \vee q)$ sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité des assertions p et q. De telles assertions sont appelées **tautologies**.

Conséquences des lois de De Morgan pour l'électronique :

1) L'opérateur **NAND** : NON-ET
L'opérateur NAND est aussi connu sous le non de barre de **Sheffer** notée |
On définit A NAND B par $(\neg(A \wedge B)) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$. On a :

A	B	A NAND B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Illustration : Soient deux interrupteurs initialement fermés et une lampe allumée dans un circuit. La lampe reste allumée sauf si l'on appuie sur les deux interrupteurs A et B (ils s'ouvrent). L'opérateur NAND est caractérisé par des contacts NF (normalement fermés) montés en parallèle.

2) L'opérateur **NOR** : NON-OU
On définit A NOR B par $(\neg(A \vee B)) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$. On a :

A	B	A NOR B
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Illustration : Soient deux interrupteurs initialement fermés et une lampe allumée dans un circuit. La lampe reste allumée sauf si l'on appuie sur A ou B ou bien A et B. L'opérateur NOR est caractérisé par des des interrupteurs NF (normalement fermé) montés en série.

Intérêt : On peut exprimer tous les opérateurs existants uniquement à l'aide des opérateurs ET, OU et NON. Ceci est pratique dans la mesure où, en automatisme, chaque opérateur est représenté par un composant (appelé PORTE). Mais on peut se limiter à 2 opérateurs, ET et NON par exemple :
$(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

On peut même se limiter à un seul opérateur NAND ou NOR :
$(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg(A \text{ NAND } B)$; $(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A \text{ NAND } \neg B)$; $\neg A \Longleftrightarrow (A \text{ NAND } A)$

Notation : en électronique, on note $\neg A$ par $\overline{A}$

1.3 Le calcul des propositions

Présentation : méthode qui fait abstraction de la structure interne des énoncés simples et se limite à étudier la relation entre la vérité/fausseté d'énoncés complexes et la vérité/fausseté des énoncés élémentaires qui les composent, avec comme objectif de pouvoir reconnaître comme valides ou invalides certains raisonnements.

Une **expression propositionnelle** est un énoncé complexe formé par combinaison d'énoncés élémentaires au moyen de connecteurs logiques. On ne s'occupe pas de la structure interne des énoncés élémentaires mis en jeu.
Une expression propositionnelle est donc une séquence de symboles pouvant appartenir à trois catégories différentes :

– les **variables propositionnelles** : phrases assertives élémentaires

– les **opérateurs logiques**

– les **parenthèses** indiquant l'ordre d'application des connecteurs

On dit qu'une expression propositionnelle est **bien formée** si l'application des opérateurs logiques à partir des variables propositionnelle et l'imbrication des parenthèses fournissent un résultat sans ambiguïté.

Règles de syntaxe :

– une variable propositionnelle constitue une expression propositionnelle bien formé

– si E est une expression propositionnelle bien formée, $\neg E$ est aussi une expression propositionnelle bien formée

– si E et F sont des expressions propositionnelles bien formées et c un connecteur logique, $E\ c\ F$ est aussi une expression propositionnelle bien formée.

Remarque 1. La construction d'une expression propositionnelle peut se visualiser sous forme d'un **graphe arborescent** (ou **arbre**) dont les expressions élémentaires ainsi que les opérateurs logiques constitueraient les feuilles, elles-mêmes regroupées par paquet constituant un noeud.

Remarque 2. Évaluer une expression propositionnelle, c'est indiquer la valeur de vérité qu'elle prend pour toutes les combinaisons possibles des valeurs de vérité des variables qu'elle comporte. On peut utiliser l'arbre de la remarque.1.
On présentera, ensuite, l'évaluation de l'expression propositionnelle dans un **tableau**, sous chaque opérateur apparaît l'évaluation du constituant dont il est l'opérateur principal.

Exemple En reprenant l'exemple de la partie précédente : $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$, on construit aisément l'arbre de cette expression, on en déduit ce tableau, un peu différent que celui mentionné plus haut.

$(p$	$\Longrightarrow$	$q)$	$\Longleftrightarrow$	$(\neg p$	$\vee$	$q)$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0

1.4 Méthodes de démonstration

Dans une théorie mathématique :
– un **axiome** est une assertion que l'on pose vraie à priori. Par exemple les axiomes d'Euclide en géométrie plane
– un **théorème** est une assertion que l'on peut déduire d'axiomes ou d'autres théorèmes. Le théorème de Thalès en est un exemple en géométrie plane.

Les règles de déduction sont fondées sur les propriétés élémentaires des connecteurs logiques ainsi que sur des règles tautologiques constituant un raisonnement valide.

Remarques :
une **tautologie** est une assertion toujours vraie
une **contradiction** est une assertion toujours fausse

Soient p, q et r trois assertions, voici quelques types de raisonnement :

1) Le **syllogisme** (ou **modus ponens**)
Si l'on a $p \wedge (p \Longrightarrow q)$ alors on a q. Ce raisonnement est fondé sur la tautologie $(p \wedge (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow q$ que l'on vérifie facilement à l'aide des tables de vérité.
Ainsi, en mathématiques, pour démontrer que q est un théorème, il suffit de vérifier que p et $p \Longrightarrow q$ sont des théorème ou des axiomes.

   Exemple : "Tous les hommes sont mortels, or Socrates est un homme, donc Socrates est mortel"
   Grossièrement : Homme implique mortel et on choisit un homme : Socrates, donc Socrates est mortel.
   On reverra ce type de raisonnement dans le chapitre des ensembles, quand les quantificateurs seront abordés.

2) Raisonnement utilisant la **transitivité de l'implication**
Si l'on a $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)$, alors on a $p \Longrightarrow r$.
Ainsi, pour démontrer $p \Longrightarrow r$, il suffit de montrer que r est conséquence de q, lui-même conséquence de p.

   Exemple : "Si j'appuie sur l'interrupteur quand il fait nuit, la lampe s'allume et si la lampe s'allume, la pièce est éclairée"
   On a "Si j'appuie sur l'interrupteur quand il fait nuit, la pièce est éclairée"

3) Raisonnement par **contraposition** (ou **modus tollens**)
On a $p \Longrightarrow q$ si et seulement si, on a $\neg q \Longrightarrow \neg p$.
$\neg q \Longrightarrow \neg p$ est appelée la **contraposée** de $p \Longrightarrow q$.
Pour démontrer l'implication $p \Longrightarrow q$, il suffit de montrer sa contraposée.

   Exemple : "S'il pleut, la route est mouillée".
   Ce qui équivaut à "Si la route n'est pas mouillée, il ne pleut pas."

4) Raisonnement par le **contre-exemple**
Si l'on veut démontrer que $p \Longrightarrow q$ est fausse, il suffit de montrer qu'il existe un exemple de p qui est vrai mais pour lequel q est faux.
En effet on veut démontrer $\neg(p \Longrightarrow q)$ est vraie c'est à dire $(p \wedge \neg q)$ vraie.

   Exemple : pour réfuter que tous les tous les traders prennent les meilleurs décisions possibles, il suffit de choisir Jérôme Kerviel (qui a fait perdre 5 milliards à la SG).

5) Raisonnement par **disjonction des cas**
Si l'on a $(p \vee q) \wedge (p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)$, alors on a r.
Ainsi pour démontrer le résultat r, il suffit de montrer que l'on a p ou q et que dans chacun des cas on peut en déduire r.

   Exemple : on peut appliquer ce raisonnement en posant p : "avoir plus de la moyenne à l'épreuve du BAC", q : " réussir ses rattrapages" et r : "obtenir son diplôme du BAC"

6) Raisonnement par l'**absurde**
Si l'on a $(\neg p \Longrightarrow q) \wedge (\neg p \Longrightarrow \neg q)$ alors on a p.
Ainsi, pour démontrer p, on montre que sa négation $\neg p$ entraîne une assertion et son contraire, c'est-à-dire une contradiction.

Remarque : ce raisonnement est utilisé en mathématiques (on aura l'occasion de le rencontrer) ou en philosophie.

Exemple : Selon **Spinoza** (philosophe néerlandais, milieu du 17ème siècle), la substance est « ce qui est en soi et est conçu par soi, c'est-à-dire ce dont le concept n'a pas besoin du concept d'une autre chose pour être formé».
Ainsi :
Spinoza démontre par l'absurde que « la production d'une substance est chose absolument impossible » (Éthique I, proposition VI, corollaire). En effet, si une substance pouvait être produite, la connaissance de cette substance devrait dépendre de la connaissance de sa cause (sachant que la connaissance de l'effet suppose celle de la cause) et ainsi elle ne serait plus une substance, puisqu'une substance est précisément ce qui est en soi et est conçu par soi.

1.5 Exercices

On considérera que p, q et r sont des propositions

Exercice 1

1. Montrer que $p \iff q$ est logiquement équivalent à $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$
2. Existe t-il une équivalence logique entre $p \iff q$ et p NAND q ?

Exercice 2

Démontrer que :

1. $(p \wedge (q \vee r)) \iff ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
2. $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$
3. $\neg(p \iff q) \iff ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$
4. $(p \vee q) \iff \neg(\neg p \wedge \neg q)$

Exercice 3

Parmi les assertions suivantes lesquelles sont des tautologies, des contradictions, ni l'une ni l'autre ? Justifier.

1. $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$
2. $(p \implies (q \implies r)) \iff ((p \wedge q) \implies r)$
3. $((p \implies q) \wedge (\neg p \implies q)) \iff q$
4. $((p \implies q) \wedge q) \implies p$
5. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \iff (p \vee \neg q)$
6. $p \wedge \neg p$

Exercice 4

A l'aide des lois de De Morgan et des propriétés classiques de logique, simplifier au mieux les expressions suivantes :

1. $(p \implies q) \implies (p \vee q)$
2. $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)) \implies \neg(q \vee \neg r)$
3. $\neg(\neg((p \vee q) \implies (p \wedge \neg q)) \iff r)$

Exercice 5

Pour chacune des phrases assertives suivantes, identifier celles qui utilisent une implication logique. On donnera, dans ce cas, la réciproque, la contraposée et la négation. Pour les autres donner uniquement la négation.

1. S'il pleut, mon jardin est mouillé
2. S'il fait froid, et seulement dans ce cas, je reste à la maison
3. Il suffit que a soit un réel strictement positif, pour que $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$
4. Pour trouver un stage à l'international, il faut parler anglais
5. Arrive à l'heure ou tu seras exclu
6. Si f et g sont deux fonctions réelles croissantes, alors $f + g$ est une fonction croissante

Exercice 6

Les différents connecteurs logiques : $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et $\Longrightarrow$ sont redondants, c'est-à-dire qu'ils peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre plus petit de connecteurs.

1. Montrer que $p \wedge q$ et $p \Longrightarrow q$ peuvent s'exprimer à l'aide des connecteurs $\neg$ et $\vee$
2. Montrer que l'on peut exprimer tous les connecteurs logiques à l'aide des connecteurs $\neg$ et $\wedge$
3. Montrer que la barre de Sheffer est un connecteur universel

Exercice 7

Ecrire une expression à l'aide d'une petit nombre de connecteurs logiques permet d'obtenir une écriture normalisée des propositions.

1. Ecrire $p \Longleftrightarrow q$ à l'aide des connecteurs $\neg$ et $\vee$
2. **Forme normale conjonctive** : écrire $p \Longleftrightarrow q$ comme conjonction de disjonctions
3. **Forme normale disjonctive** : écrire $p \Longleftrightarrow q$ comme disjonction de conjonctions

Exercice 8

On considère une expression propositionnelle bien formée. L'évaluer c'est indiquer les valeurs qu'elle prend pour toute combinaison de valeurs de vérité des variables propositionnelles qu'elle comporte.

1. Soit l'expression propositionnelle E : $(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg(p \Longrightarrow q) \wedge q)$

   a. Donner l'arbre associé à E

b. Evaluer E, donner les résultat dans un tableau.
Le raisonnement E est-il valide (à savoir est-ce une tautologie) ? Si non, donner une situation dans lequel il est faux.

2. On considère le raisonnement suivant :
"Daniel est toujours bouleversé lorqu'il commence à l'EPITA à 8 AM. Or Daniel est bouleversé, donc Daniel commence à 8 AM à l'EPITA".
On donne pour formaliser le raisonnement les assertions suivantes :
. p : "Daniel est bouleversé"
. q : "Daniel commence à 8 AM à l'EPITA"

   a. Donner l'expression propositionnelle formalisant le raisonnement

   b. Evaluer cette expression

   c. Le raisonnement est-il valide ? Si non, donner une situation dans lequel il est faux.

Exercice 9

On considère le raisonnement suivant :
"Si Samia prend son cours de logique, c'est qu'elle va à l'EPITA. Or Samia ne va pas à l'EPITA, donc elle n'a pas son cours de logique"

1. Identifier la condition nécessaire et la condition suffisante dans la première phrase. Reformuler-la.

2. A l'aide de deux assertions choisies, formaliser le raisonnement

3. Evaluer le raisonnement

4. Le raisonnement est-il valide ? Si non, donner une situation dans lequel il est faux.

Exercice 10

Arthur vagabonde dans la forêt de l'amnésie où il est incapable de se souvenir du jour de la semaine. Il rencontre le lion et la licorne. Le lion ment toujours les lundis, mardis et mercredis tandis que la licorne ment toujours les jeudis, vendredis et samedis. Tous les autres jours de la semaine les deux bêtes disent toujours la vérité.
"Hier était un jour où je mentais" dit le lion.
"Hier était un jour où je mentais" dit la licorne.
Dire si :

A) Le lion et la licorne disent la vérité

B) Le jour de la semaine est dimanche

C) Le jour de la semaine est jeudi ou dimanche

D) Le lion ment

Exercice 11

Isabella confie à une amie d'enfance les renseignements suivants :

. Si je suis en vacances alors je fais du sport

. Si je ne suis pas en vacances alors je ne fais pas de régime

. Je suis détendue ou je ne fais pas de sport

. Je fais un régime

A partir de ces informations, on peut conclure que :

A) Isabella fait du sport

B) Isabella n'est pas détendue

C) Isabella n'est pas en vacances

D) Si Isabella n'est pas détendue alors elle n'est pas en vacances

Exercice 12

Trois suspects Mory, Benjamin et Jocelyn s'expriment ainsi :

– Mory : "Benjamin est coupable"

– Benjamin : "Mory vient de mentir"

– Jocelyn : "Mory est coupable "

– Mory : "la prochaine phrase de Jocelyn sera vraie"

– Benjamin : "la dernière phrase de Mory est fausse"

– Jocelyn : "les deux dernières phrases de Mory sont fausses"

Qui est coupable ? Attention, on ne connait pas la véracité des différents propos des suspects.
Conseil : établir des raisonnements avec Si ... alors ...

2 Ensembles, quantificateurs, prédicats

2.1 Ensembles : définitions et notations

1) De façon intuitive, un **ensemble** est une collection (finie ou infinie) d'objets (qui peuvent être de nature différente). Les objets regroupés en un ensemble sont désignés comme les **éléments** de cet ensemble.

   - Pour signifier que x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$ et on lit "x appartient à E"
   - Si x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$ et on dit que "x n'appartient pas à E"
   - Soient x, y deux éléments de E.
     On note $x = y$, si les deux éléments sont **égaux**
   - Soient x, y deux éléments de E.
     On note $x \neq y$, si les deux éléments sont **différents**

2) Deux ensembles E et F sont considérés comme **identiques** si et seulement si ils comprennent exactement les mêmes éléments. On note dans ce cas $E = F$

3) Exemples d'**ensembles numériques** :

   - **l'ensemble des entiers naturels**, $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$
   - **l'ensemble des entiers relatifs**, $\mathbb{Z} = \{...,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ ...\}$
   - **l'ensemble des rationnels**, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \text{ avec } \mathrm{pgcd}(a,\ b) = 1\}$.
     $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions irréductibles
   - **l'ensemble des réels** $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels, c'est à dire des rationnels et des irrationnels (nombres ne pouvant se mettre sous la forme d'une fraction, ex : e, π, $\sqrt{2}$)
   - **l'ensemble des complexes**, $\mathbb{C} = \{a + ib,\ avec\, a \in \mathbb{R}\ ,\ b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$

   Si E est un ensemble numérique, on note E^* l'ensemble $E \backslash \{0\}$: E privé de 0.

4) Un ensemble peut se définir de deux manières :

   - **en extension** (ou **par énumération**) : on dresse la liste de tous les éléments.

     Exemples : . $A = \{\spadesuit,\ \heartsuit,\ \diamondsuit,\ \clubsuit\}$
     . $B = \{a,\ b,\ c\}$

     Remarque : l'ordre et la répétition d'éléments sont sans influence. Par exemple, $B = \{b,\ c,\ a\} = \{a,\ a,\ c,\ b,\ b,\ b\}$

   - **en compréhension (ou par description)** : on énonce une propriété caractéristique sur les éléments le constituant.

     Exemple : $C = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 - 7x + 10 = 0\}$

5) Un ensemble E est **fini** lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel. Dans ce cas le nombre d'éléments est appelé **cardinal** de l'ensemble E et on le note card(E) ou $|E|$. Un ensemble qui n'est pas fini est **infini**.

   Exemples :

   - $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont infinis
   - card(A)=4 et card(B)=3
   - Après calcul des solutions de l'équation définie dans C, on trouve $C = \{2,\ 5\}$. Ainsi card(C)=2
   - $D = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -3 \leqslant x < 4\} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, donc card($D$)=7

6) L'**ensemble vide** noté $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On a donc card($\emptyset$)=0.

7) On appelle **singleton** un ensemble qui ne contient qu'un seul élément. Ex : $\{1\}$.

2.2 Quantificateurs

Remarque : **quantificateur** est un mot de la famille de quantité, quantitatif, quantum.

A partir d'une proposition $P(x)$ à une variable x dans un ensemble E, on peut construire trois assertions :

1) $\forall x \in E,\ P(x)$ qui se lit "**pour tout** élément x de E, on a $P(x)$".
   Cette assertion est vraie lorsque $P(a)$ est vraie quel que soit l'élément a de E.
   Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

   Exemples :

   - $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ est une assertion fausse. Il suffit de prendre le contre-exemple $x = 0$
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ est une assertion vraie

2) $\exists x \in E,\ P(x)$ qui se lit "**il existe** un élément x de E tel que $P(x)$".
   Cette assertion est vraie lorsque $P(a)$ est vraie pour au moins un élément a de E.
   Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

   Remarque $\exists x \in E,\ P(x)$ qui se lit aussi "certains x de E vérifient $P(x)$"

   Exemples

   - $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ est une assertion vraie. Il suffit de prendre l'exemple $x = 1$
   - $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x < 0$ est une assertion fausse

3) $\exists! x \in E,\ P(x)$ qui se lit "**il existe un unique** élément x de E tel que $P(x)$".
   Cette assertion est équivalente à :
   $(\exists x \in E,\ P(x))$ et $(\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (P(x) \text{ et } P(y)) \Longrightarrow x = y)$

Exemples

- $\exists! x \in \mathbb{R},\ \ln(x) = 0$ est une assertion vraie. Il suffit de prendre l'unique exemple $x = 1$
- $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$ est une assertion fausse, car -1 et 1 sont solutions

Remarques importantes :

1) $(\forall x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow (\forall y \in E,\ P(y))$ et $(\exists x \in E,\ P(x)) \Longleftrightarrow (\exists y \in E,\ P(y))$.
Le nom des variables x et y n'ont pas de signification particulière.

2) Si l'on change l'ordre des quantificateurs dans une proposition qui s'écrit avec $\forall$ et $\exists$, sa signification en est totalement changée.
En effet, considérons la proposition $P(x,\ y)$: "$y = -x$" avec x, y des réels. On peut construire les deux propositions :

- "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = -x$" : qui est vraie
- "$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = -x$" : qui est fausse car elle signifie que "tous les réels ont le même opposé"

3) Dans une phrase du type : $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x,\ y)$: y s'exprime en fonction de x. En effet le sens de cette phrase est parmi tous les éléments x de E, il existe certains $y \in E$, tel que l'on a $P(x,\ y)$.

2.3 Proposition quantifiée et négation

L'utilisation de propositions à une variable limite l'étude de la quantification à l'étude de la possibilité de manipuler dans le raisonnement des propositions susceptibles d'être caractérisées comme :

1. **universelles affirmatives**, paraphrasables comme "la propriété P est vérifiée par toutes les entités vérifiant la propriété Q", en abrégé, on dit aussi "tout P est Q"
Formalisation : $\forall x\ (P(x) \Longrightarrow Q(x))$

2. **universelles négatives**, paraphrasables comme "la propriété P n'est vérifiée par aucune entité vérifiant la propriété Q", en abrégé, on dit aussi "aucun P n'est Q"
Formalisation : $\forall x\ (P(x) \Longrightarrow \neg Q(x))$

3. **particulières affirmatives**, paraphrasables comme "il y a au moins une entité vérifiant la propriété P qui vérifie la propriété Q", en abrégé, on dit aussi "un P au moins est Q"
Formalisation : $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$

   Remarque :
   une particulière affirmative est la négation d'une universelle négative, et réciproquement.
   En effet, $\neg(\forall x\ (P(x) \Longrightarrow \neg Q(x))) \Longleftrightarrow \exists x\ \neg(P(x) \Longrightarrow \neg Q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$

4. **particulières négatives**, paraphrasables comme "il y a au moins une entité vérifiant la propriété P qui ne vérifie pas la propriété Q", en abrégé, on dit aussi "un P au moins n'est pas Q"
Formalisation : $\exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

   Remarque :
   une particulière négative est la négation d'une universelle affirmative, et réciproquement.
   En effet, $\neg(\forall x\ (P(x) \Longrightarrow Q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ \neg(P(x) \Longrightarrow Q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Exemple :

On pose E l'ensemble des êtres vivants, $P(x)$: "x est un chat" et $Q(x)$: "x est gris". **Alors** :

– "tous les chats sont gris" se formalise par : $\forall x \in E,\ (P(x) \Longrightarrow Q(x))$.

– "aucun chat n'est gris" se formalise par : $\forall x \in E,\ (P(x) \Longrightarrow \neg Q(x))$.

– "certains chats au moins sont gris" se formalise par : $\exists x \in E,\ (P(x) \wedge Q(x))$.

– "certains chats au moins ne sont pas gris" se formalise par : $\exists x \in E,\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

2.4 Logique des prédicats : langage

Un prédicat permet d'exprimer une relation entre plusieurs objets, comme père(Jean,Pierre) ou plusPetitQue(3,7). Un prédicat a 0, 1, ou plusieurs arguments. Les variables propositionnelles (ou formules atomiques, ou encore atomes) de la logique propositionnelle peuvent être vus comme des prédicats à 0 arguments. Ceci justifie le nom logique des prédicats. La logique des prédicats est aussi appelée logique du premier ordre, par opposition à la logique de second ordre et aux logiques d'ordre supérieur. En particulier la logique du second ordre permet de quantifier sur des fonctions (vues comme des cas particuliers de relations). La logique propositionnelle peut alors être vue comme logique d'ordre 0.

Ainsi le syllogisme : "tout être humain est mortel, or Socrates est un être humain, donc Socrates est mortel", se modélise par :

$$((\forall x, (\text{êtreHumain}(x) \Longrightarrow \text{mortel}(x))) \wedge \text{êtreHumain}(\text{Socrate})) \Longrightarrow \text{mortel}(\text{Socrate})$$

Remarque : $\forall$ rappelle la similarité avec la conjonction $\wedge$. Si on se limite à un ensemble fini d'objets O_1,..., O_n, alors $(\forall x, p(x))$ correspond à la conjonction $(p(O_1) \wedge ... \wedge p(O_n))$

Définition : l'alphabet de la logique des prédicats est constitué de

- un ensemble dénombrable de symboles de prédicats à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés $p,\ q,\ r,\ ...,$ homme, mortel, père, ...
- un ensemble dénombrable de variables d'objets (ou variables d'individu), notées $x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2,\ ...$
- un ensemble dénombrable de prédicats (ou fonctions) à 0, 1, ou plusieurs arguments, notés $f,\ g,\ ...$, pèreDe, ...
- les quantificateurs $\forall$, $\exists$
- les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, ... ainsi que les parenthèses de la logique propositionnelle.

Les fonctions à 0 arguments sont appelées constantes (souvent notées a, b, ..., Socrates, ...). Les prédicats à 0 arguments ne sont rien d'autre que des variables propositionnelles.

Définition : terme
L'ensemble des termes est le plus petit ensemble de mots construits sur l'alphabet de la logique des prédicats tel que

- toute variable est un terme
- $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme si f est une fonction à n arguments et $t_1, ..., t_n$ sont des termes

Définition : formule
Si P est un prédicat à n arguments et $t_1, ..., t_n$ sont des termes alors $P(t_1, ..., t_n)$ est une formule atomique. L'ensemble des formules (ou formules bien formées) de la logique des prédicats est alors défini de la même manière qu'en logique propositionnelle, en rajoutant une clause pour les quantificateurs.

Exemples de traduction d'énoncés en formules :

- "Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir."
  $(\exists x,\ \text{peine}(x)) \wedge (\exists x,\ \text{plaisir}(x)) \wedge (\forall x,\ (\text{peine}(x) \Longrightarrow \neg\text{plaisir}(x)))$
- " Il existe un plus grand entier."
  $(\exists x,\ (\text{entier}(x)) \wedge (\forall y,\ (\text{entier}(y) \Longrightarrow \text{plusGrand}(x, y)))$

2.5 Quantification, négation, prédicat

Exercice 1

Modéliser les propositions suivantes et donner leurs négations :

A : "Tous les étudiants doivent passer le toeic"
Poser $P(x)$: "x est un étudiant" et $Q(x)$: "x passe le toeic"

B : "Un carré est un losange et un rectangle"
Poser $P(x)$: "x est un carré", $Q(x)$: "x est un losange" et $R(x)$: "x est un rectangle"

C : "Certains élèves de l'EPITA veulent devenir logicien", poser 2 prédicats

D : "$\forall \varepsilon \geqslant 0,\ \exists q \in \mathbb{Q},\ 0 \leqslant q \leqslant \varepsilon$"

E : "Aucun étudiant ne sera absent à la dernière séance de logique", poser 2 prédicats

F : "Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant de l'EPITA qui ne travaille pas régulièrement", poser 3 prédicats

Exercice 2

Traduire en toutes lettres les huit propositions suivantes lorsque x désigne un homme, y un film et que $p(x, y)$ est le prédicat "l'individu x a vu le film y". Donner les propositions qui sont équivalentes.

1. $\forall x,\ \forall y,\ p(x, y)$
2. $\forall x,\ \exists y,\ p(x, y)$
3. $\exists x,\ \forall y,\ p(x, y)$
4. $\exists x,\ \exists y,\ p(x, y)$
5. $\forall y,\ \forall x,\ p(x, y)$
6. $\forall y,\ \exists x,\ p(x, y)$
7. $\exists y,\ \forall x,\ p(x, y)$
8. $\exists y,\ \exists x,\ p(x, y)$

Exercice 3

Modéliser les propositions suivantes :

1. A : "Une personne n'a qu'un seul père biologique"
   Toutes les variables représentent des individus, utiliser le prédicat PereBio(x,y) : x est le père biologique de y. Ne pas utiliser $\exists!$

2. B : "Un habit ne peut être que de taille S, M, L, XL"
   Utiliser les prédicats Habit(h) : h est un habit et Taille(h, x) : h est de taille x

3. C : "Les étudiants et les enseignants sont des personnes"
   Utiliser les prédicats enseignant(x), étudiant(x) et personne(x)

4. D : "Seuls les étudiants peuvent s'inscrire 'a des cours."
   Utiliser les prédicats inscription(x, y) et étudiant(x)

5. E : "On ne peut s'inscrire 'a un cours que s"il est enseigné par quelqu'un
   Utiliser inscription(x, y), personne(z) et enseigne(z, y)

Exercice 4

On considère les prédicats à une variable sur $\mathbb{R}$ $P(x):\ x+1=x$, $Q(x):\ x=x^2$ et les prédicats à deux variables sur $\mathbb{R}$ $P(x,\,y):\ y>2x$, $Q(x,\,y):\ x+y=y+x$

1. Expliciter $\neg(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x))$, donner sa valeur de vérité.

2. Expliciter $\neg(\exists x \in \mathbb{R},\ Q(x))$, donner sa valeur de vérité.

3. Expliciter $\neg(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ P(x,\,y))$, donner sa valeur de vérité.

4. Expliciter $\neg(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ Q(x,y))$, donner sa valeur de vérité.

Exercice 5

Soit la proposition $P : \forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2)$.

1. Donner la valeur de vérité de P.

2. Existe-t-il un contre-exemple ?.

3. Présenter un exemple.

4. Présenter un hors-sujet.

3 Opérations entre ensembles et propriétés

3.1 Inclusion

1) **Définition**

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** de E ou que F est **inclus** dans E ou que F est **une partie** de E ou encore que E **contient** F si tout élément de F appartient à E. C'est à dire :

$$\forall x \in F,\ x \in E \text{ qui se note aussi } \forall x\ (x \in F \Longrightarrow x \in E)$$

On écrira, dans ce cas, $F \subset E$ (F est inclus dans E) ou $E \supset F$ (E contient F) . On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2) **Sous-ensembles définis par une proposition à variable :**

Si P est une proposition à une variable et si E est un ensemble, on peut définir la partie de E constituée des éléments de E vérifiant P. On la note :

$$F = \{x \in E \,/\, P(x)\}.$$

Cette partie est donc caractérisée par l'équivalence suivante :

$$\forall x \in E,\ (x \in F \Longleftrightarrow P(x)).$$

Exemple : l'ensemble des entiers naturels pairs peut se définir en extension par :

$$\{n \in \mathbb{N} \,/\, \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$$

Remarque

- Si A et B sont deux parties de E, définies respectivement par les propositions $P(x)$ et $Q(x)$,
  $A \subset B$ est équivalente à l'assertion $\forall x \in E,\ (P(x) \Longrightarrow Q(x))$
  $A = B$ est équivalente à l'assertion $\forall x \in E,\ (P(x) \Longleftrightarrow Q(x))$

3) **Propriétés**

Prop 1 : Soient E, F et G trois ensembles, on a :

$A \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E$

$E \in \mathscr{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$

$E = F \Longleftrightarrow (E \subset F$ et $F \subset E)$

$(E \subset F$ et $F \subset G) \Longrightarrow E \subset G$

Exemple : Soit $A = \{1,\ 2,\ 3\}$
On a $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}\}$
Ne pas confondre $\{1,\ 2\} \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ et $\{1,\ 2\} \in \mathscr{P}(\{1,\ 2,\ 3\})$

Prop 2 : Soit A un ensemble fini à n éléments, alors $\mathscr{P}(A)$ est fini, on a card($\mathscr{P}(A)$)=2^n

Démonstration :

Rappel : une combinaison de p éléments de A (constitué de n éléments) est une partie de A de p éléments.
On note C_n^p ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ le nombre de combinaisons de p éléments dans un ensemble à n éléments.
C'est aussi le nombre de façons de choisir p éléments parmi n éléments. On a $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Dans l'**exemple précédent**, on a $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$ ce qui donne : 1+3+3+1=8=2^3, OK

En généralisant pour un ensemble A à n éléments, on a card($\mathscr{P}(A)$)=$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$
Donc card($\mathscr{P}(A)$)=$\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p = (1+1)^n = 2^n$, par la formule du binôme de Newton, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p\, b^{n-p}$

3.2 Opérations dans $\mathscr{P}(E)$

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On définit les parties suivantes :

$C_E(A) = \{x \in E,\ x \notin A\}$, le **complémentaire** de A dans E, notée aussi $\overline{A}$

$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$, l'**intersection** de A et B

$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$, la **réunion** de A et B

$A \backslash B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$, la **différence** de A et B, notée aussi $A - B$

$A \bigtriangleup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$, la **différence symétrique** de A et B

$A \cap B = \emptyset$ signifie que A et B sont **disjoints**

Propriétés

1. Soient A et B deux ensembles finis, on a :
   $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
2. Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E fini. On a :
   . Si $A \subset B$ et $\text{card}(A) = \text{card}(B)$, alors $A = B$
   . $\text{card}(C_E(A)) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

Remarque

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions à variable. On définit les ensembles :

$$A = \{x \in E \,/\, P(x)\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in E \,/\, Q(x)\}$$

On a ($P(x)$ et $Q(x)$), ($P(x)$ ou $Q(x)$) et (non($P(x)$)) qui sont alors associés respectivement aux ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $C_E(A)$

3.3 Propriétés

Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. On a :

- $C_E(\emptyset) = E$, $C_E(E) = \emptyset$, $C_E(C_E(A)) = A$
- $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$, $A \cup A = A$, $A \cup E = E$
- $(A \cup B = B) \iff A \subset B$, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \cap E = A$
- $(A \cap B = A) \iff A \subset B$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$, $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$
- $C_E(A) = E \backslash A$, $A \backslash \emptyset = A$
- $(A \backslash B = \emptyset) \iff A \subset B$, $A \backslash B = A \cap C_E(B) = A \backslash (A \cap B)$
- $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$, $A \bigtriangleup \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

3.4 Couples, produit cartésien

Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble des **couples** $(x,\, y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F$. On écrit $E \times F = \{(x,\, y) \,/\, x \in E,\, y \in F\}$.
L'ensemble $E \times E$ se note aussi E^2. Ex : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, le plan 2D.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E_i des ensembles pour tout $i = 1, \ldots, n$. On définit l'ensemble des $n-$uplets par $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \,/\, x_i \in E_i,\ i = 1,\, \ldots,\, n\}$. On note $E_1 \times \ldots \times E_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} E_i$.
On a $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n)$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout $i = 1,\, \ldots,\, n$.

Exemple

Soient $E = \{0, 1\}$ et $F = \{a, b, c\}$. On a :
$E \times F = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$
Attention, $E \times F \neq F \times E = \{(a, 0), (b, 0), ...\}$.

Remarques

Soient E et F deux ensembles. Si $x \in E$ et $y \in F$, on a $(x, y) \in E \times F$ et $\{x, y\} \in P(E \cup F)$.
En particulier, $\{x, y\} = \{y, x\}$, en revanche, $(x, y) \in E \times F \iff (y, x) \in F \times E$.

Propriétés

Soient E, F, G et H quatre ensembles, on a :

- $E \times F = \emptyset \iff (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset)$
- $E \times F = F \times E \iff (E = \emptyset \text{ ou } F = \emptyset \text{ ou } E = F)$
- $(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G)$, $(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F)$
- $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$

3.5 Exercices

Exercice 1

Soit $A = \{0, 1, 2\}$. Déterminer $\mathscr{P}(A)$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels et $A = \{a,\ b\}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1. $a \in A$
2. $\{a\} \in A$
3. $\emptyset \in A$
4. $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$
5. $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$

Exercice 3

Soit $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ et soient les parties suivantes de E

1. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
2. $B = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
3. $C = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
4. $D = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

Calculer $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D)$, $\overline{\overline{A} \cap D} \cap \overline{B \cup C}$

Exercice 4

1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ et que $\overline{\overline{A}} = A$
2. Simplifier les expressions suivantes : $A \cup (A \cap B)$, $A \cap (A \cap B)$, $A \cup (A \cup B)$, $A \cap (A \cup B)$.

Exercice 5

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cup (A \cap B)) \cap B$
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
3. $\overline{(A \cup B)} \cap (C \cup \overline{A})$

Exercice 6

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

1. $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$
2. $(A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C) = A \cap (B \bigtriangleup C)$
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
4. $(A \cup B = A \cap C \text{ et } B \cup C = B \cap A \text{ et } C \cup A = C \cap B) \Longrightarrow A = B = C$

Exercice 7

Dessiner les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

1. $\overline{[-1,\, 1] \times [-1,\, 1]}$
2. $\overline{[-1,\, 1]} \times \overline{[-1,\, 1]}$
3. $\{(a,\, b) \in \mathbb{Z}^2,\ a^2 + b^2 \leqslant 4\}$

Exercice 8

Pour la question 1, calculer l'ensemble des solutions, pour les deux autres, dessiner les parties de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

1. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y = 1 \text{ et } -3x + 2y = 2\}$
2. $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \text{ et } 2x + y \leqslant 1\}$
3. $\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$

4 Dénombrement

4.1 Définitions

- Une **p-liste** d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E distincts ou non. Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est n^p.
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors $(a, b, c), (a, a, b), (e, e, e)$ sont des 3-listes d'éléments de E. Il y en a $5^3 = 125$

- Un **arrangement** à p éléments d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée de p éléments de E distincts. On a obligatoirement $p \leqslant n$. Le nombre d'arrangements à p éléments d'un ensemble E à n éléments est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)...(n-p+1)$.
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors $(a, b, c), (a, c, b), (c, d, e)$ sont des arrangements à 3 éléments de E. Il y en a $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

- Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un arrangement à n éléments de E. C'est un cas particulier d'arrangement avec $p = n$. Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est $A_n^n = n!$
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$, alors $(a, b, c, d, e), (b, c, a, e, d), (c, a, b, d, e)$ sont des permutations de E. Il y en a $5! = 120$

- On appelle **combinaison** de p éléments d'un ensemble E à n éléments toute partie de E à p éléments. On a obligatoirement $p \leqslant n$.
  rq : il y a A_n^p arrangements de p éléments pris parmi n. Toute permutation de p éléments donne la même combinaison. Pour chaque combinaison, il y a $p!$ arrangements. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons.
  Ainsi, le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n est $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
  Ex : $E = \{a, b, c, d, e\}$ alors $(a, b, c), (a, b, d), (a, b, e)$ sont des combinaisons à 3 éléments de E. Il y en a $C_5^3 = \dfrac{60}{3!} = 10$

Convention : $0! = 1$

Exemple à savoir : $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$ et $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

4.2 Propriétés liées aux combinaisons

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. On a :

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$
2. avec $n, p \neq 0$, $\quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
3. avec $n, p \neq 0$, $\quad pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

4.3 Exercices

Exercice 1

1. Combien de chaînes de n lettres peut-on construire avec des lettres prises dans l'alphabet $E = \{a, b, c\}$?
2. Étant donné un ensemble de n lettres différentes, combien peut-on construire de sous-ensembles ?
3. Étant donné une chaîne de $n \geqslant 5$ lettres différentes, combien peut-on construire de sous-chaînes de 5 lettres ?
   Rq : une sous-chaîne hérite de la chaîne principale, donc conserve les mêmes caractéristiques.
4. Donner le nombre d'anagrammes du mot FACILE, puis du mot DIFFICILE. Ici, les anagrammes sont considérés comme des mots quelconques obtenus par permutation de lettres.

Exercice 2

Le digicode ci-dessous se trouve à l'entrée d'un immeuble. Pour ouvrir, il faut composer un code formé d'abord de deux lettres, puis de trois chiffres. Par exemple : CB445.

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1. Déterminer le nombre total de codes possibles.
2. Parmi ces codes, combien y en a-t-il qui :
   a. ont leur trois chiffres pairs ?
   b. ont trois chiffres distincts ?
   c. ont deux lettres distinctes et trois chiffres distincts, sans que les chiffres ne soient ordonnés ?
3. A l'aide du même digicode, déterminer le nombre total de codes en composant 2 lettres et 3 chiffres quelconques sans contrainte d'ordre d'apparition. Par exemple B44C5 et 445CB deviennent possibles.

Exercice 3

Une entreprise fabrique 3 types de pièces différentes. On dispose d'un stock de 20 pièces de type A, 10 pièces de type B et 10 pièces de type C. Le service de vente se propose de faire des lots de pièces.

1. Combien de lots de 4 pièces ayant au moins une pièce A peut-on former ?
2. Combien de lots de 4 pièces ayant au moins une pièce A et au moins une pièce B peut-on former ?

Exercice 4

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On appelle "main" toute combinaison de 5 cartes.

1. Donner le nombre de mains contenant exactement 2 rois.
2. Donner le nombre de mains contenant un carré.
3. Donner le nombre de mains contenant un full.
4. Donner le nombre de mains contenant exactement une paire.
5. Donner le nombre de mains contenant une double paire.

5 Somme, produit, logarithme, exponentielle

5.1 Somme

5.1.1 Définition

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \begin{cases} a_p + a_{p+1} + ... + a_n, & \text{si } p \leqslant n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette somme comporte $n-p+1$ termes, on peut la noter aussi $\displaystyle\sum_{p \leqslant i \leqslant n} a_i$ ou bien $\displaystyle\sum_{i \in [\![p,n]\!]} a_i$

Remarque :

- La variable i est muette, on a $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{k=p}^{n} a_k$

5.1.2 Règles de calcul et méthodes

1) **Linéarité** :

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=p}^{n} a_i + \sum_{i=p}^{n} b_i \quad \textbf{et} \quad \sum_{i=p}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=p}^{n} a_i$$

Ce qui se résume par $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i=p}^{n} a_i + \mu \sum_{i=p}^{n} b_i$

2) **Attention**, en général :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i b_i \neq \sum_{i=p}^{n} a_i \sum_{i=p}^{n} b_i$$

3) **Télescopage** :

$$\sum_{i=p}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p$$

4) **Changement d'indice**, par exemple :

$$\sum_{i=p}^{n} a_{i+m} = \sum_{k=p+m}^{n+m} a_k$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = i + m$, avec $k : p + m \longrightarrow n + m$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $k - m$

$$\sum_{i=p}^{n+p} a_i = \sum_{k=0}^{n} a_{k+p}$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = i - p$, avec $k : 0 \longrightarrow n$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $k + p$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$\hookrightarrow$ Ici, on effectue le chgt d'indice $k = n - i$, avec $k : 0 \longrightarrow n$ et on doit remplacer tous les i de la première somme par $n - k$

5) **Sommation par séparation** :

$$\sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{i=p}^{q} a_i + \sum_{i=q+1}^{n} a_i \ , \quad \text{avec } p \leqslant q \leqslant n$$

Par exemple, séparation des termes suivant les restes possibles r modulo b des indices. On pose : $i = bq + r$, avec $i, q, r \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $r < b$, c'est à dire $r \in \{0, 1, ..., b-1\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=p}^{n} a_i &= \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ i=bq}} a_i + \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ i=bq+1}} a_i + ... + \sum_{\substack{p\leqslant i\leqslant n\\ i=bq+b-1}} a_i \\
&= \sum_{p\leqslant bq\leqslant n} a_{bq} + \sum_{p\leqslant bq+1\leqslant n} a_{bq+1} + ... + \sum_{p\leqslant bq+b-1\leqslant n} a_{bq+b-1} \\
&= \sum_{q=\lceil \frac{p}{b} \rceil}^{\lfloor \frac{n}{b} \rfloor} a_{bq} + \sum_{q=\lceil \frac{p-1}{b} \rceil}^{\lfloor \frac{n-1}{b} \rfloor} a_{bq+1} + ... + \sum_{q=\lceil \frac{p-b+1}{b} \rceil}^{\lfloor \frac{n-b+1}{b} \rfloor} a_{bq+b-1}
\end{aligned}$$

On notera la partie entière par défaut $\lfloor\ \rfloor$ et la partie entière par excès $\lceil\ \rceil$, on vérifie :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lceil x \rceil - 1 \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil$
$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z},\ m \leqslant x\}$ et $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z},\ x \leqslant n\}$

5.1.3 Sommes classiques

1) Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}
\end{aligned}$$

2) Soient (a_n) une suite arithmétique et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = N\frac{a_p + a_n}{2}$$

avec $N = n - p + 1$ le nombre de termes de la somme.

3) Soient (a_n) une suite géométrique de raison q et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $p \leqslant n$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \begin{cases} a_p\dfrac{1-q^N}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ Na_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

avec $N = n - p + 1$ le nombre de termes de la somme.

5.1.4 Sommes binomiales

On rappelle pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} & \text{, si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases}$$

C_n^k qui se note aussi $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre de combinaisons de k éléments choisis parmi n. Voir cours **dénombrement**.

Propriété : Formule du binôme de Newton :

Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

5.2 Doubles sommes

5.2.1 Définition et notations

Pour $p \leqslant n$ et $q \leqslant m$ des entiers positifs, une double somme est du type $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij}$, c'est à dire :

$$\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{i=p}^{n} S_i \text{ , avec } S_i = \sum_{j=q}^{m} a_{ij}$$

Autre notation $\displaystyle\sum_{\substack{p \leqslant i \leqslant n \\ q \leqslant j \leqslant m}} a_{ij}$. Si $n = m$ et $p = q$, on la notera $\displaystyle\sum_{p \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$

Attention
Les bornes de la deuxième somme peuvent dépendre de l'indice de la première, mais jamais l'inverse. Par exemple :

- Valide : $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij}$
- Non valide : $\displaystyle\sum_{i=2}^{j}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

5.2.2 Règles de calculs et méthodes

1) Factorisation à bornes quelconques. Cas 1 : le premier terme ne dépend pas du deuxième indice :

$$\sum_{i}\sum_{j} a_i b_{ij} = \sum_{i} a_i (\sum_{j} b_{ij})$$

2) Factorisation à bornes quelconques. Cas 2 : termes d'indices **séparables** :

$$\sum_i \sum_j a_i b_j = (\sum_i a_i)(\sum_j b_j)$$

3) Inversion des sommes. Cas 1 : les bornes ne dépendent pas d'indices :

$$\sum_{i=p}^{n} \sum_{j=q}^{m} a_{ij} = \sum_{j=q}^{m} \sum_{i=p}^{n} a_{ij}$$

4) Inversion des sommes. Autre cas, utiliser éventuellement un tableau, par ex :

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} a_{ij}$$

5.3 Produit

5.3.1 Définition et notations

Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$\prod_{i=p}^{n} a_i = \begin{cases} a_p a_{p+1} ... a_n, & \text{si } p \leqslant n \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

Cet produit comporte $n-p+1$ facteurs, on peut le noter aussi $\prod_{p \leqslant i \leqslant n} a_i$ ou bien $\prod_{i \in [\![p,n]\!]} a_i$

5.3.2 Règles de calculs et méthodes à bornes quelconques

1) $\prod_i a_i b_i = (\prod_i a_i)(\prod_i b_i)$

2) Par **récurrence** du 1), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\prod_i (a_i)^n = (\prod_i a_i)^n$

3) **Déduction** de 2), $\forall i,\ a_i \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\prod_i (a_i)^n = (\prod_i a_i)^n$

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

5) **Produit télescopique** :

$$\forall i \in [\![p,n]\!],\ a_i \neq 0,\ \prod_{i=p}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

5.4 Exponentielle et logarithme

5.4.1 Exponentielle

- On définit la fonction exponentielle :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$$

En utilisant la formule de Taylor, $f(1) = e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \approx 2.71828$ un irrationnel.

- f est continue, dérivable, strictement croissante et positive sur $\mathbb{R}$. On a $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

- **Propriétés**

1) $\forall a \in \mathbb{R},\ e^a > 0$, en particulier $e^0 = 1$
2) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^a e^b = e^{a+b}$
3) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (e^a)^b = e^{ab}$
4) $\forall a \in \mathbb{R},\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
5) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
6) $\forall (n,p) \times \mathbb{N}^2$ et $\forall k \in [\![p, n]\!],\ a_k \in \mathbb{R},\ \prod_{k=p}^{n} e^{a_k} = e^{(\sum_{k=p}^{n} a_k)}$

5.4.2 Logarithme

- On définit la fonction logarithme Népérien :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array} \right.$$

- f est continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. f est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$. On a $\lim_{0^+} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

- **Propriétés**

1) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ \ln(x)$ n'existe pas
2) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3) $\forall (a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N},\ \ln(a^n) = n \ln(a)$
4) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
5) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

6) $\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(X)} = X$ et $\forall X \in \mathbb{R},\ \ln(e^X) = X$

7) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall X \in \mathbb{R}_+^*,\ X^n = e^{\ln(X^n)} = e^{n\ln(X)}$

8) $\forall (n,p) \times \mathbb{N}^2$ et $\forall k \in [\![p,n]\!]$ $, a_k \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\prod_{k=p}^{n} a_k) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$

5.5 Exercices

Exercice 1

Calculer les sommes et produits suivants en fonctions de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} 1, \qquad \prod_{i=0}^{n-42} 2, \qquad \prod_{i=8}^{2n-3} \frac{i}{i+1}, \qquad \prod_{k=1}^{n-2} 2k, \qquad \sum_{j=0}^{n} j, \qquad \sum_{k=3}^{n} 2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$$

Exercice 2

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k})$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ en calculant a, b tels que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, en calculant a, b, c tels que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

Exercice 3

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$, pour le second, dériver $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$

Exercice 4

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$
2. Écrire de deux manières différentes $\displaystyle\sum_{3 \leqslant i < j < n} a_{ij}$
3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k$, puis la calculer en inversant les deux sommes

Exercice 5

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1 + \frac{1}{k})$
2. En utilisant la fonction ln, montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

Exercice 6

Calculer

$$\prod_{k=12}^{87} \frac{2k+1}{2k-1} \text{ puis } \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}} \text{ et enfin } \forall x > 0,\ \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$$

6 Relations entre ensembles

6.1 Définitions et propriétés

Déf 1

Soient E et F deux ensembles

1) On appelle **graphe** de E vers F toute partie du produit cartésien $E \times F$.
   Si $E = F$, on dira graphe de E (ou de F).

2) On appelle **relation** (ou **correspondance**) de E vers F tout triplet $R = (E,\, F,\, \Gamma)$ où $\Gamma \subset E \times F$ (graphe de E vers F). On note xRy au lieu de $(x,\, y) \in \Gamma$. R est un prédicat, en fait xRy représente le prédicat $R(x,\, y)$ à deux variables x et y.

Remarques

1) E est **l'ensemble de départ** de R, F est **l'ensemble d'arrivée** de R et Γ le graphe de R

2) On dit que la relation R est une relation **binaire** sur E (ou F) si $E = F$

3) $\{x \in E \,/\, \exists y \in F,\, xRy\}$ est appelé **l'ensemble de définition** de la relation R
   $\{y \in F \,/\, \exists x \in E,\, xRy\}$ est appelé **l'ensemble image** de la relation R

4) Pour figurer graphiquement une relation, on peut utiliser un tableau à double entrée qui énumère les éléments de E, F et faire apparaître les couples de $E \times F$ vérifiant la relation (les éléments de Γ). On peut aussi la représenter par un diagramme sagittale mettant en jeu les deux ensembles E et F reliés par des flèches traduisant la relation.

Exemples

1) Soient $E = \{1,\, 2,\, 3\}$ et $F = \{a,\, b,\, c,\, d\}$. Soit R la relation définie par son graphe $\Gamma = \{(1,\, a), (1,\, b), (2,\, d)\}$, c'est à dire $1Ra$, $1Rb$, $2Rd$.

   On a :

$E \times F$	a	b	c	d
1	$(1,\, a)$	$(1,\, b)$	$\times$	$\times$
2	$\times$	$\times$	$\times$	$(2,\, d)$
3	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

2) Soient E l'ensemble des villes françaises et F l'ensemble des départements français. On établit une relation de E vers F définie par : "une ville x est la préfecture du département y".
   Cette relation entre E et F (prédicat à deux variables x et y) se défini par la donnée d'un sous-ensemble de $E \times F$, Γ liant les villes vers les départements (liens : préfecture).
   Ex : (Cergy-Pontoise, Val d'Oise)$\in \Gamma$, mais (Mantes-la-Jolie, Yvelines)$\notin \Gamma$

Propriétés

1) Deux relations R et S sont **égales** si et seulement si R et S ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et $\forall(x,\, y) \in E \times F$, $(xRy \iff xSy)$.

2) Si R est une relation de E vers F et S une relation de F vers G, on définit la **relation composée** de R et S, que l'on note $S \circ R$ de E vers G par : $\forall(x,\, z) \in E \times G$, $(xS \circ Rz \iff (\exists y \in F,\, (xRy \quad \text{et} \quad ySz)))$. $S \circ R$: se lit "S rond R".

   Exemple : Soient $E = F = G$ l'ensemble des droites du plan affine euclidien. Soit $R = S = \perp$ (orthogonalité). Alors, $S \circ R = //$ (parallélisme).

3) Si E, F, G, H sont des ensembles et R, S, T sont des relations respectivement de E vers F, F vers G et G vers H, alors on a $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$, (associativité).

4) Si E et F sont deux ensembles et R une relation de E vers F, on définit la relation **réciproque** de R, notée R^{-1}, de F vers E, par : $\forall(x,\, y) \in E \times F$, $(yR^{-1}x \iff xRy)$.

5) Soit E un ensemble, R une relation binaire sur E et $A \in P(E)$. La relation bianire dans A notée R_A est définie par : $\forall(x,\, y) \in A^2$, $(xR_Ay \iff xRy)$. On dit que R_A est la relation binaire **induite** par R sur A.

Déf 2

Soit R une relation binaire sur E. On dit que :

- la relation est **réflexive** si et seulement si $\forall x \in E,\ xRx$
- la relation est **antiréflexive** si et seulement si $\forall x \in E,\ \neg(xRx)$
- la relation est **symétrique** si et seulement si $\forall(x,\, y) \in E^2,\ (xRy \Longrightarrow yRx)$
- la relation est **antisymétrique** si et seulement si $\forall(x,\, y) \in E^2,\ ((xRy \text{ et } yRx) \Longrightarrow x = y)$
- la relation est **asymétrique** si et seulement si la relation est antiréflexive et antisymétrique
- la relation est **transitive** si et seulement si $\forall(x,\, y,\, z) \in E^3,\ ((xRy \text{ et } yRz) \Longrightarrow xRz)$

6.2 Relation d'ordre

Une relation binaire R sur un ensemble E est une **relation d'ordre** sur E si R est réflexive, antisymétrique et transitive.
On appelle ensemble ordonné un couple $(E,\, R)$ où R est une relation d'ordre sur E.

Exemples

1) La relation $\perp$ dans l'ensemble des droites du plan affine euclidien est symétrique mais n'est ni réflexive, ni antisymétrique, ni transitive.

2) Les relations d'ordre usuelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ sont notées $\leqslant$ ou $\geqslant$.

3) L'inégalité stricte $<$ utilisée habituellement sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre : elle est antisymétrique et transitive, mais pas réflexive.

4) La relation d'inclusion sur $P(E)$ est une relation d'ordre sur $P(E)$.

5) La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$x|y \iff \exists k \in \mathbb{N},\ y = kx$$

   est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

   En revanche, la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique.

6) L'ordre lexicographique défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(a,\, c) \leqslant (b,\, d) \iff (a < b \quad \text{ou} \quad (a = b \quad \text{et} \quad c \leqslant d))$$

   est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

7) L'ordre alphabétique sur l'ensemble des mots de la langue française est un relation d'ordre sur cet ensemble. C'est en fait une généralisation de l'ordre lexicographique défini ci-dessus sur $\mathbb{R}^2$.

Définition

On dit que la relation d'ordre R définit un ordre total sur E si :

$$\forall (x,\, y) \in E^2,\ (xRy \quad \text{ou} \quad yRx)$$

Dans le cas contraire, c'est à dire :

$$\exists (x,\, y) \in E^2,\ (\text{non}\, xRy \quad \text{et} \quad \text{non}\, yRx),$$

on dit que c'est un ordre partiel.

Exemples d'ordre total

1) Les relations d'ordre usuelles sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

2) L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$

3) L'ordre alphabétiques dans un dictionnaire

Exemples d'ordre partiel

1) La relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$

2) La relation d'inclusion sur $P(E)$ lorsque E contient au moins deux éléments

3) Sur $\mathbb{R}^2$, la relation définie par $(a,\, c) \leqslant (b,\, d) \Longleftrightarrow (a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d)$

Dans la suite de la partie 4.3, on notera la relation d'ordre R dans le sens $\leqslant$.

Définition

Soient $(E,\, R)$ un ensemble ordonné, A une partie de E et $a \in A$.
- On dit que a est le plus grand élément de A si $\forall x \in A,\ xRa$.
  Quand il existe, le plus grand élément de A se note $\max(A)$.
- On dit que a est le plus petit élément de A si $\forall x \in A,\ aRx$.
  Quand il existe, le plus petit élément de A se note $\min(A)$.

Exemples

1) Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, munis de leur ordre usuel, il n'y a pas de plus grand élément.

2) Dans $[0,\, 1]$ muni de l'ordre usuel, 1 : plus grand élément, 0 : plus petit élément.

3) Dans $]0,\, 1]$ muni de l'ordre usuel, 1 : plus grand élément, pas de plus petit élément.

4) $P(E)$ possède pour l'inclusion un plus grand élément E et un plus petit $\emptyset$.

5) Si E possède au moins deux éléments, $P(E) \backslash E$ ne possède pas de plus grand élément.

6) Dans $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité, le plus petit élément est 1, le plus grand est 0.

Définition

Si A est une partie d'un ensemble ordonné $(E,\, R)$, un élément $a \in E$ est :
- un majorant de A si $\forall x \in A,\ xRa$.
- un minorant de A si $\forall x \in A,\ aRx$.

Exemples

1) Dans Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, l'intervalle $[0,\, 1]$ a pour majorant tout élément de $[1,\, +\infty[$.

2) Dans Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, l'intervalle $[0,\, 1[$ a pour majorant tout élément de $[1,\, +\infty[$.

3) Dans $(P(E), \subset)$, la partie $\{X,\, Y\}$ est majorée par tout ensemble contenant $X \cup Y$.

4) Dans $(\mathbb{N}, |)$, les majorants de $\{8,\, 18,\, 12\}$ sont les multiples de 72.

Définition

Si A est une partie d'un ensemble ordonné $(E,\, R)$,

- la borne supérieure de A dans E est, s'il existe, le plus petit des majorants de A. Elle se note $\sup(A)$.
- la borne inférieure de A dans E est, s'il existe, le plus grand des minorants de A. Elle se note $\inf(A)$.

Exemples

1) Dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, on a $\sup([0,\, 1])=\sup([0,\, 1[)=1$.
2) Dans $(P(E), \subset)$, on a $\sup(\{X,\, Y\})=X \cup Y$.
3) Dans $(\mathbb{N}, |)$, on a $\sup(\{8,\, 18,\, 12\})=\ 72$.
4) Quand une partie A d'un ensemble ordonné admet un plus grand élément a, ce dernier est aussi la borne supérieure de A.

6.3 Relation d'équivalence

Une relation binaire R sur un ensemble E est une **relation d'équivalence** sur E si R est réflexive, symétrique et transitive.

Si R est une relation d'équivalence sur E, alors pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x **modulo** R l'ensemble noté $\mathrm{cl}_R(x)$ ou $\widehat{x}$ défini par $\mathrm{cl}_R(x) = \{y \in E \,/\, xRy\}$.

Tout élément de $\mathrm{cl}_R(x)$ est appelé représentant de $\mathrm{cl}_R(x)$.

On appelle ensemble quotient de E par R que l'on note E/R, l'ensemble des classe d'équivalence modulo R soit $E/R = \{\widehat{x},\ x \in E\}$. On a $E/R \subset P(E)$.

Exemples

1) Si $n \in \mathbb{N}$, la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$xRy \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = kn$$

   est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$, appelée congruence modulo n.
   Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{Z}$ en relation pour la congruence modulo n, on dit que x est congru à y modulo n et on écrit $x \equiv y\ [n]$.

2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$xRy \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = k\alpha$$

   est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, appelée congruence modulo α.
   La relation "x est congru à y modulo α" se note $x \equiv y\ [\alpha]$.
   Pour la mesure des angles, on utilise la congruence modulo 2π et la congruence modulo π

6.4 Exercices

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}$ la relation R définie par $xRy \iff (x^2 - y^2 = x - y)$. Montrer que R est une relation d'équivalence. Calculer $\hat{x}$, la classe d'équivalence de x modulo R et préciser le nombre d'éléments de la classe de x modulo R.

Exercice 2

On note $|$ la relation divise dans $\mathbb{N}$ définie par $a|b \iff (\exists q \in \mathbb{N},\ b = aq)$. Montrer que $|$ est une relation d'ordre et donner son élément maximal et minimal.
Trier $\{0, 1, 2, 4\}$ pour la relation $|$.

Exercice 3

Étudier la relation R dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : $(x,\ y)R(x',\ y') \iff (x \leqslant x'$ et $x \leqslant y'$ et $y \leqslant x'$ et $y \leqslant y')$ où $\leqslant$ est l'ordre usuel de $\mathbb{N}$.

Exercice 4

Étudier les relations sur $E = \{0, 1, 2\}$ admettant les graphes suivants :

1. $\Gamma = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$
2. $\Gamma = \{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$
3. $\Gamma = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
4. $\Gamma = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Exercice 5

On munit $\mathbb{R}^2$ de l'ordre déduit de l'ordre usuel de $\mathbb{R}$, c'est à dire $(x,\ y)R(x',\ y') \iff (x \leqslant x'$ et $y \leqslant y')$. On note $A = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Est-ce que A admet des éléments maximaux ? A admet-il une borne supérieure dans $\mathbb{R}^2$? Si oui, laquelle ?

Exercice 6

Dans $\mathbb{Z}$ on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ \ x\mathcal{R}y \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ y - x = 4k),$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Quelle est la classe d'équivalence de 8 ?
3. Donner l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

7 Les applications

7.1 Définitions

- Soient E et F deux ensembles, une **application** de E dans F est une relation de E vers F telle que, pour chaque $x \in E$, il existe un unique $y \in F$ telle que la relation en question soit vérifiée. On dit que la fonction applique l'ensemble E sur l'ensembles F. Plus formellement, on note l'application f de E dans F par $f = (E,\, F,\, \Gamma)$ où Γ est un graphe de E vers F vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \exists!\, y \in F,\ (x,\, y) \in \Gamma$$

Remarques

1) E **ensemble de départ** de f, F **ensemble d'arrivée** de f.

2) pour $x \in E$, on définit l'unique $y \in F$ tel que $(x,\, y) \in \Gamma$ qui se note aussi $y = f(x)$, (remplacement de la notation xRy, avec R : application f).
y : **image** de x par f et x **antécédent** de y.

3) On a $\Gamma = \{(x,\, f(x)) \,/\, x \in E\}$, graphe de l'application f.

4) L'ensemble $\{y \in F \,/\, \exists x \in E,\ y = f(x)\}$ est **l'ensemble image** de f.

5) $f : E \longrightarrow F$ signifie que f est une application de E dans F
$x \mapsto f(x)$ signifie qu'à x on associe $f(x)$. $f(x)$ correspond à l'ordonnée y image de x par f.

6) Une application $f : E \longrightarrow F$ est une **fonction** si $x \mapsto f(x)$, avec $x \in E$, définie une équation mathématique.

7) Le graphe d'une fonction se nomme aussi **représentation graphique** de la fonction.

8) On note F^E l'ensemble de toutes les applications qui appliquent E dans F.

Exemples

1) La relation dans $\mathbb{N}$ définie par "x a pour multiple y" n'est pas une fonction car à chaque nombre x correspond une infinité de multiples y. En revanche la relation dans $\mathbb{R}$ définie par "x a pour carré y" est bien une fonction car à chaque nombre x on associe un seul nombre y. On a $x \mapsto f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Soient E l'ensemble des préfectures et F l'ensembles des départements, la relation de E vers F définie une application car à chaque préfecture on fait correspondre un unique département.

- **Égalité de deux applications**

Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et si $f(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble de départ commun.

- **Restriction d'applications**

  Soit f une application de E vers F. Si $A \subset E$, la **restriction de f à A**, notée $f|_A$, est l'application de A vers F définie par :
  $$\forall x \in A, \quad f|_A(x) = f(x)$$

7.2 Applications particulières

- On appelle **application identité** de E, l'application notée Id_E de E dans E définie par :
$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Id}_E(x) = x$$

- Si A est une partie de E, on appelle **fonction caractéristique** de A, la fonction χ_A de E dans $\{0,\, 1\}$ définie par :
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Propriétés

Si A et B sont deux parties de E, on a :

1) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$

2) $\chi_{A\cup B} = \sup(\chi_A,\, \chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$

3) $\chi_{E\setminus A} = 1 - \chi_A$

En effet, toutes les fonctions sont définies sur E à valeurs dans $\{0,\, 1\}$. Le troisième résultat est clair par définition. Pour les deux premiers résultats, on montre que les fonctions prennent les mêmes valeurs quand x appartient à $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$ et $E \setminus (A \cap B)$:

	χ_A	χ_B	$\chi_{A\cap B}$	$\chi_A\chi_B$	$\chi_{A\cup B}$	$\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$
$x \in A \setminus B$	1	0	0	0	1	1
$x \in B \setminus A$	0	1	0	0	1	1
$x \in A \cap B$	1	1	1	1	1	1
$x \notin A \cup B$	0	0	0	0	0	0

7.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Soit f une application de E vers F. On dit que f est :

- une **injection** (ou **injective**) si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :
  1) Tout élément de F a au plus un antécédent par f
  2) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution
  3) $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)$

Remarque : en informatique, on dit que l'injection fourni in **identifiant** à chaque élément de l'ensemble de départ, et on appelle parfois les injections des **codages fonctionnels**

- une **surjection** (ou **surjective**) si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :
  1) Tout élément de F a au moins un antécédent par f
  2) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution
  3) $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$
- une **bijection** (ou **bijective**) si elle est à la fois injective et surjective, c'est à dire si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :
  1) Tout élément de F a un unique antécédent par f
  2) Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution
  3) $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$

Exemples

1) L'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$:
   - est injective, car tout élément de $\mathbb{R}$ a 0 ou 1 antécédent dans $\mathbb{R}^+$
   - n'est pas surjective car -1 n'a pas d'antécédent.
2) L'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$:
   - est surjective, car tout élément de $\mathbb{R}^+$ au moins un antécédent dans $\mathbb{R}$
   - n'est pas injective car -1 et 1 ont même image.
3) L'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est bijective car tout élément de $\mathbb{R}^+$ admet un unique antécédent qui est sa racine carrée.

Application réciproque

Si $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors on peut définir **l'application réciproque** de f, notée $f^{-1} : F \longrightarrow E$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad (y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)).$$

Exemple : l'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est bijective et sa réciproque est notée $\sqrt{}$, est définie par $t \mapsto \sqrt{t}$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

7.4 Composée d'applications, Images directes et images réciproques

1. **Composée d'applications**

   Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle $g \circ f$ **l'application composée** des applications g et f définie de E vers G. On a $x \mapsto g(f(x))$, avec $x \in E$.

En fait $g \circ f$ est le triplet $(E,\, G,\, \Gamma)$ avec $\Gamma = \{(x,\, g(f(x)))\,/\, x \in E\}$.

Propriétés

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ deux applications bijectives. Alors :

1) $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

2) $f^{-1} : F \longrightarrow E$ et $g^{-1} : G \longrightarrow F$ sont des bijections. Elles vérifient : $(f^{-1})^{-1} = f$ et $(g^{-1})^{-1} = g$.

3) $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et on a : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2. **Images directes, images réciproques**

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. On appelle :

- **image directe** de A par f, l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in F\,/\,\exists x \in A,\, y = f(x)\} = \{f(x),\, x \in A\},$$

- **image réciproque** de B par f, l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E\,/\,f(x) \in B\}.$$

Remarques

1) $f^{-1}(B)$, représente l'ensemble des éléments de E qui ont une image dans B par f. Cela ne suppose donc pas que l'application f est bijective.

2) Lorsque f est bijective, $f^{-1}(B)$ représente aussi bien l'image directe de B par l'application f^{-1} que l'image réciproque de B par f car on a alors :

$$\{x \in E\,/\,f(x) \in B\} = \{f^{-1}(y),\, y \in B\}$$

Exemples

1) Si l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f([-2,\, 2]) = [0,\, 4]$, $f([-1,\, 2]) = [0,\, 4]$, $f^{-1}([0,\, 4]) = [-2,\, 2]$,
$f([-2,\, 4]) = [-2,\, 2]$, $f([-3,\, -1]) = \emptyset$,

2) Si $f \in F^E$ une application, alors on a :
$f^{-1}(F) = E$, mais l'inclusion $f(E) \subset F$ n'est une égalité que si f est surjective.

7.5 Ensembles en bijection, ensembles dénombrables

- Soient E, F deux ensembles. On dit que E et F sont **en bijection** s'il existe une bijection de E vers F.

- Soit E un ensemble. On dit que E est **dénombrable** s'il est en bijection avec un ensemble fini ou avec $\mathbb{N}$.

- **Propriété** : Soient E et F deux ensembles finis. E et F sont en bijection si et seulement si $\text{card}(E)=\text{card}(F)$

- **Exemples** :

1) $\mathbb{N}$ est dénombrable

2) $\mathbb{Z}$ est dénombrable, en effet il est en bijection avec $\mathbb{N}$. On peut poser l'application f suivante bijective :

$$\begin{gathered} f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ 0 \mapsto 0 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto -1 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto -2 \\ \ldots \end{gathered}$$

3) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, comme le montre la fonction bijective f suivante :

$$\begin{gathered} f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ 0 \mapsto (0,\, 0) \\ 1 \mapsto (0,\, 1) \\ 2 \mapsto (1,\, 0) \\ 3 \mapsto (0,\, 2) \\ 4 \mapsto (1,\, 1) \\ 5 \mapsto (2,\, 0) \\ 6 \mapsto (0,\, 3) \\ \ldots \end{gathered}$$

7.6 Exercices

Exercice 1

Soient les ensembles suivants : $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{0, 1, 2\}$ et $G = \{a, b, c\}$.

1. Donner $\text{card}(E \times F)$, puis expliciter l'ensemble $E \times F$.
2. Soit l'application $f : E \longrightarrow F$, telle que 0 admet 1 et 2 comme antécédents, 1 admet 3 comme antécédent et 2 admet 4 comme antécédent.
   Donner le diagramme sagittal (du latin sagitta = flèche) de l'application f, puis expliciter son graphe.
3. Soit l'application $g : F \longrightarrow G$, telle que l'image de 0 est b ; l'image de 1 et 2 est c. Donner le diagramme sagittal de l'application g, puis expliciter son graphe.
4. En déduire le diagramme sagittal et le graphe de l'application $h = g \circ f : E \longrightarrow G$.
5. Donner $f(\{1, 3\})$, $f^{-1}(\{0, 1\})$, $g(F)$, $g^{-1}(\{c\})$, $g \circ f(\{2, 3, 4\})$ et $(g \circ f)^{-1}(\{b, c\})$

Exercice 2

Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application $f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ dans les cas suivants :

1. $E = F = \mathbb{N}$
2. $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{N}$
3. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}^+$
4. $E = F = \mathbb{R}^+$

Exercice 3

1. Montrer que la composée de deux injections est une injection.
2. Montrer que la composée de deux surjections est une surjection.

Exercice 4

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$. Montrer que :

1. $g \circ f$ injective implique f injective.
2. $g \circ f$ surjective implique g surjective.
3. $g \circ f$ injective et f bijective implique g injective.

Exercice 5

Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow E$, où E, F et G sont trois ensembles. On considère les applications composées $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$. On suppose que soit deux d'entre elles sont injectives et la troisième surjective soit, deux d'entre elles sont surjectives et la troisième injectives. Montrer alors que f, g et h sont bijectives.

Exercice 6

Par un certain canal, on communique des "0" et des "1". Par suite d'un bruit parasite (foudre, manipulation d'un commutateur électrique, ...) l'émission d'un "0" est parfois reçue comme un "1" et vice versa.

Soit $E = \{0, 1\}$. On note f la transmission correcte de E dans E et g la transmission erronée (inversion binaire).

1. Qualifier f par le terme le plus précis parmi application, injection, surjection, bijection.
   Qualifier ensuite g
2. Simplifier $f \circ f$, $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$
3. On note $f^{(n)} = f \circ f \circ ... \circ f$, (n fois), de même pour $g^{(n)}$
   a. Au départ, on a un signal codé 0100010. Pour chacun des sept éléments du signal, la perturbation correspond à $f^{(4)} \circ g^{(5)}$.
   Écrire le code du signal reçu.
   b. Simplifier $f^{(26)} \circ g^{(12)} \circ g^{(8)} \circ f^{(3)}$

8 QCM1

1. Soient p et q deux propositions. La relation $p \Longrightarrow q$ se lit "si p alors q", que signifie-t-elle ?
   a. p est une condition suffisante de q
   b. q est une condition nécessaire de p
   c. Pour que q, il faut que p
   d. Pour que p, il suffit que q

2. Soient p, q, r des propositions, donner les tautologies :
   a. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longrightarrow q)$
   b. $((p \Longrightarrow q) \wedge (r \Longrightarrow q)) \Longleftrightarrow ((p \vee r) \Longrightarrow q)$
   c. $((p \Longrightarrow q) \wedge (p \Longrightarrow \neg q)) \Longrightarrow p$
   d. $(p \downarrow q) \Longrightarrow ((r \downarrow q) \vee \neg p)$, $\downarrow$ étant l'opérateur de Pierce qui correspond au Nor

3. Soient p, q, r des propositions, donner les contradictions :
   a. $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (\neg p \Longrightarrow q)$
   b. $((\neg p \Longrightarrow q) \vee r) \Longleftrightarrow \neg(p \vee q \vee r)$
   c. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \Longleftrightarrow (p \vee \neg q)$
   d. $(p \Longrightarrow (\neg q \Longrightarrow r)) \Longleftrightarrow ((\neg p \Longrightarrow q) \Longrightarrow \neg r)$

4. Dans chaque cas, dire si B est une présupposition de A
   a. A : "Il n'est pas surprenant que le pouvoir d'achat n'augmente pas"
      B : "le pouvoir d'achat n'augmente pas"
   b. A : "Quand êtes entré dans la chambre, la fenêtre était ouverte ?"
      B : "Vous êtes entré dans la chambre"
   c. A : "Au lieu de travailler, Rémy préfère jouer à la PS4"
      B : "Rémy joue à la PS4"
   d. A : "Vous devriez sauter sur l'occasion de prendre ce prêt immobilier à 1,10%"
      B : "Prendre ce prêt à 1,10 % est une occasion".

5. Soit la proposition E : "Tous les étudiants d'AppIng1 réfléchissent à cette question".
   On pose les prédicats $P(x)$:"x est un étudiant d'AppIng1" et $Q(x)$: "x réfléchit à cette question".
   Alors on peut dire que :
   a. "$\exists x, (P(x) \wedge Q(x))$" est une modélisation de E
   b. "$\forall x, (P(x) \Longrightarrow Q(x))$" est une modélisation de E
   c. "$\exists x, (P(x) \vee \neg Q(x))$" est une modélisation de $\neg E$

d. "$\forall x, (P(x) \implies \neg Q(x))$" est une modélisation de $\neg E$

e. Rien de ce qui précède

6. On note les prédicats $P(x)$:"x vérifie P" et $Q(x,y)$:"x vérifie Q pour y".
Dire si les modélisations des propositions suivantes sont correctes :

a. A : "Tous les chemins mènent à Rome"
$\forall x, (chemin(x) \implies mène\grave{a}Rome(x))$

b. B : " Il y a des peines, il y a des plaisirs, mais aucune peine n'est un plaisir"
$(\exists x, peine(x)) \wedge (\exists x, plaisir(x)) \wedge (\forall x, (peine(x) \implies \neg plaisir(x)))$

c. C : " Il existe un plus grand entier "
$\exists x, \exists y,\ (entier(x) \wedge entier(y) \wedge plusgrand(x,y))$

d. D : "Pour tout entier il existe un entier plus grand"
$\forall x, (entier(x) \implies (\exists y, (entier(y) \wedge plusgrand(y,x)))$

7. Dans chaque cas, dire si le raisonnement met en jeu un syllogisme valide :

a. Aucun docteur n'est enthousiaste. Vous êtes enthousiaste. Donc vous n'êtes pas docteur.

b. Tout homme prudent évite les hyènes. Aucun banquier n'est imprudent. Donc les banquiers évitent les hyènes.

c. Aucun ministre n'est ignorant. Les gens ignorants sont vaniteux. Aucun ministre n'est vaniteux.

d. Quelques footballeurs manquent de logique. Tous les étudiants de l'EPITA ont de la logique. Les étudiants de l'EPITA ne sont pas des footballeurs.

8. On suspecte Ronaldo, Giroud et Evra d'avoir piqué la copine de Benzema. Nous savons que :

. Si Evra est coupable, alors Giroud est coupable
. Si Ronaldo n'est pas coupable, alors Evra est coupable
. Si Ronaldo est coupable, alors Giroud n'est pas coupable
. Si Evra est coupable, alors Ronaldo est coupable

Dire si :

a. Evra est coupable

b. Giroud est coupable

c. Ronaldo est coupable

d. On ne peut pas savoir qui est coupable

9. Les formules en Forme Normale Conjonctive (FNC) sont utilisées dans le cadre de démonstration automatique de théorèmes ou encore dans la résolution du problème SAT (problème de décision visant à savoir s'il existe une solution à une série d'équations logiques données).
Une expression logique est en FNC si et seulement si elle est une conjonction d'une ou plusieurs disjonction(s), d'un ou plusieurs littéraux (variables propositionnelles), de la forme $\bigwedge_{i=0}^{n}(\bigvee_{j=0}^{m}(\neg)p_{ij})$,

p_{ij} étant les littéraux. Tout comme dans une forme normale disjonctive (FND), de la forme $\bigvee_{i=0}^{n}(\bigwedge_{j=0}^{m}(\neg)p_{ij})$, les seuls opérateurs dans une FNC sont le et logique $\wedge$, le ou logique $\vee$ et la négation $\neg$. L'opérateur non ne peut être utilisé que dans un littéral, c'est-à-dire qu'il ne peut que précéder une variable.

Par exemple, toutes les expressions suivantes sont en FNC :
1) $p \wedge q$, $p \wedge q \wedge r$, ...
2) $p \vee q$, $p \vee q \vee r$, ... pouvant toujours être liées avec une expression vraie (type $p \vee \neg p$)
3) p, pouvant toujours être lié avec p
4) $p \wedge (q \vee r)$
5) $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s)$

Contre exemples de formules en FNC :
1) $\neg(p \wedge q)$, la négation s'applique à toute la parenthèse plutôt que directement à une variable
2) $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$, un et est imbriqué dans un ou

Dire si :

a. $(p \vee q \vee \neg r) \wedge s \wedge t$ est en FNC

b. $(p \vee q \vee \neg r) \wedge s \wedge (t \vee u)$ est en FNC

c. La FNC de $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$ est : $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

d. La FNC de $p \iff \neg q$ est : $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

10. La FNC de $\neg(p \iff (q \implies r))$ est :

a. $(p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p)$

b. $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee p)$

c. $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p)$

d. Rien de ce qui précède

9 QCM2

1. Soient a, b et c trois réels et $A = \{a,\ b,\ c\}$. Alors on peut dire que :

   a. $\text{card}\,(P(A)) = 6$

   b. $(a, b) \in A \times A$

   c. $A \in P(A)$

   d. $\{a,\ c\} \subset A$

   e. $\emptyset \in P(A)$

   f. $\text{card}(A^3) = 27$

2. Soient A, B et C trois ensembles. On note $\triangle$ la différence symétrique définie par :

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

   Dire si :

   a. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, avec $\setminus$: "privé de"

   b. $(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) = A \cap B \cap \overline{C}$

   c. $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C)$

   d. $(A \cup B) \triangle (A \cup C) = A \cup (B \triangle C)$

3. On dispose d'un jeu de 32 cartes. On appelle "main" toute combinaison de 5 cartes. Alors :

   a. $C_4^2 C_{28}^5$ est le nombre de mains contenant exactement 2 rois

   b. $C_8^1 C_4^2 C_{28}^3$ est le nombre de mains contenant exactement 1 paire

   c. $8 \times C_4^3 \times 7 \times C_4^2$ est le nombre de mains contenant un full (une paire et un brelan : trois cartes identiques)

   d. Le nombre de brelans est plus grand que le nombre de double paires

4. On dispose d'un alphabet de 42 symboles distincts. Dire si :

   a. 42^{42} est le nombre de sous-ensembles que l'on peut construire à l'aide d'un ensemble constitué de ces 42 symboles

   b. C_{42}^{12} est le nombre de mots de 12 lettres distinctes que l'on peut construire à l'aide de cet alphabet

   c. On décide d'extraire des lettres de cet alphabet. Le nombre d'anagrammes du mot $\xi\pi\rho\varepsilon\pi\pi\kappa\kappa\psi\psi\psi$ est $11.C_{10}^3.7.6.C_5^2.C_3^3$

   d. Rien de ce qui précède.

5. On considère qu'une année est non bissextile, on exclut les natifs du 29 février. Sur une classe de 60 élèves, qu'elle est la probabilité pour que les 60 étudiants aient tous des jours d'anniversaire distincts ?

   a. $\dfrac{60!}{365!}$

   b. $\dfrac{1}{A_{365}^{60}}$

   c. $\dfrac{A_{365}^{60}}{365^{60}}$

   d. $\dfrac{C_{365}^{60}}{365^{60}}$

6. Soient E un ensemble fini non vide et x un élément de E. Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur l'ensemble des parties de E : $\mathcal{P}(E)$?

   a. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A = B)$

   b. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \subset B)$

   c. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow x \in A \cap \overline{B})$

   d. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow x \in A \cup \overline{B})$

7. Soient un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{R}$ une relation sur E telle que :
   $a\mathcal{R}a$, $a\mathcal{R}b$, $b\mathcal{R}b$, $c\mathcal{R}a$, $c\mathcal{R}c$, $d\mathcal{R}d$. On peut dire que :

   a. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

   b. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

   c. $\mathcal{R}$ devient une relation d'équivalence en ajoutant les correspondances $a\mathcal{R}c$ et $b\mathcal{R}a$

   d. $\mathcal{R}$ devient une relation d'ordre en ajoutant la correspondance $b\mathcal{R}c$

   e. Rien de ce qui précède

8. Soit $\mathcal{R}$ la relation "être de la même espèce que" s'appliquant sur l'ensemble E défini par
   $E = \{$Médor, Plutot, Rufo, Gargamel$\}$ où Médor, Plutot, Rufo sont des chiens et Gargamel un chat. On peut dire que :

   a. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

   b. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

   c. Rien de ce qui précède

9. Soit $f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$

   a. Si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{N}$, alors f est surjective

   b. Si $E = [1, 9]$ et $F = \mathbb{R}^+$, alors f est bijective

   c. Si $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{R}$, alors f est surjective

   d. Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \mathbb{Z}$, alors f est injective

10. Soient E un ensemble et $f, g : E \longrightarrow E$ deux applications. Dire si :

    a. f, g injectives $\Longrightarrow f \circ g$ injective

    b. $f \circ g$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective

    c. $f \circ g$ injective $\Longrightarrow g$ injective

    d. $f \circ g$ injective et f bijective $\Longrightarrow g$ injective