EPITA AppIng1
Mathématiques

Méthodes numériques

1 Equations non linéaires: méthodes itératives

Cette section présente deux recherches itératives de solutions de l'équation $f(x) = 0$, avec f strictement monotone et continue sur $[a, b]$, avec $f(a)f(b) < 0$

1.1 Méthode de Lagrange

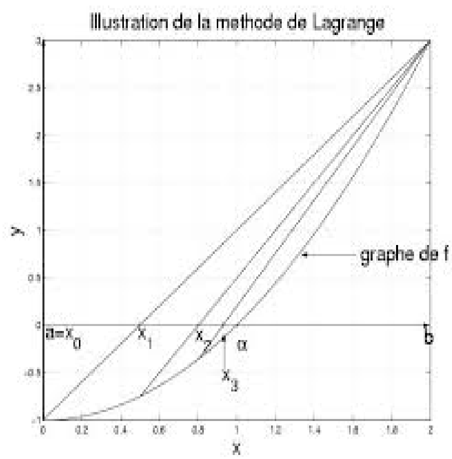

Figure 1: Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange consiste à trouver une valeur approche de α telle que $f(\alpha) = 0$. Cette méthode appelée aussi méthode de la corde est un schéma itératif.

- A partir des deux points $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, on construit la corde les reliant, puis on calcule $x_1 = \{y = 0\} \cap (AB)$.
- Situation $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$
  · Si f est concave et $C^2_{[a,b]}$, $f''(x) < 0$, (on a $f(x_1) > 0$), on trace une nouvelle corde reliant A et $A_1(x_1, f(x_1))$ puis on calcule $x_2 = \{y = 0\} \cap (AA_1)$.

· Si f est convexe et $C^2_{[a,b]}$, $f''(x) > 0$, (on a $f(x_1) < 0$), on trace la corde reliant $A_1(x_1, f(x_1))$ et B puis on calcule $x_2 = \{y = 0\} \cap (A_1B)$.
· On réitère le processus, si la distance entre les deux abscisses x_n est x_{n+1} n'est pas suffisamment petite par rapport à une erreur fixée, alors on continue et on construit une nouvelle corde reliant $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ qui coupe la droite $y = 0$ en x_{n+2} . Si la distance entre x_{n+1} et x_{n+2} n'est pas suffisamment petite, on continue, sinon on arrête et x_{n+2} sera une valeur approchée de la valeur α avec une erreur que l'on s'était fixée.

- Situation $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, même procédé en échangeant A avec B

Par exemple, l'quation d'une corde passant par $B(b, f(b))$ et $(x_n, f(x_n))$ est

$$y = m(x - x_n) + f(x_n), \qquad \text{avec } m = \frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}$$

et l'on calcule x_{n+1}

1. Si A est fixe, on a:
$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \end{cases}$$
.
On a (x_n) décroissante et bornée par a et b, avec $x_n \longrightarrow \alpha$

2. Si B est fixe, on a:
$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \end{cases}$$
.
On a (x_n) croissante et bornée par a et b, avec $x_n \longrightarrow \alpha$

1.2 Méthode de Newton

L'idée consiste cette fois-ci à remplacer la corde passant par A, B par la tangente la courbe au points A ou B, l'intersection de cette dernire avec l'axe des abscisses dtermine le second élément x_1 de la suite cherche. On réitère le procédé en construisant la tangente en x_1 qui coupe l'axe des abscisses en x_2 et ainsi de suite.

L'équation d'une tangente f, dérivable, au point d'abscisse x_n est

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

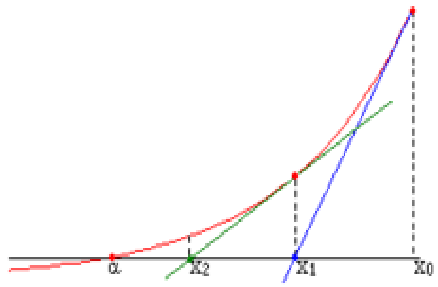

Figure 2: Méthode de Newton

qui s'annule en x_{n+1}. On déduit, pour $f \in C^2_{[a,b]}$ telle que $f(a)f(b) < 0$

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b],\ f'(x) \neq 0 \text{ (monotonie stricte)} \\ \forall x \in [a,b],\ f''(x) \neq 0 \text{ (concavité dans le même sens)} \end{cases}$$

.

Alors pour $x_0 \in [a,b]$ telle que $f(x_0)f''(x_0) > 0$, les itérations de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

convergent vers une limite α, telle que $f(\alpha) = 0$.

2 Interpolation polynômiale

2.1 Présentation

On a déjà vu le cas de l'interpolation polynômiale d'un nuage de points $\{(x_i, y_i),\ i = 0, ..., n\}$, avec $\forall i, j = 0, ..., n,\ i \neq j$, à l'aide de la matrice de Vandermonde.

On présentera dans cette partie deux types d'interpolation des points

$$(x_i, f(x_i)),\ i = 0, ..., n,\ \text{avec f une fonction réelle}$$

par un polynôme P_n de degré n.

Proposition :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe P_n unique interpolant polynômial de f est que les points d'interpolation (ou d'appui) $(x_i, f(x_i))$ aient tous des abscisses distinctes.

2.2 Interpolation de Lagrange

On suppose que $x_0 < x_1 < ... < x_n$ triés.

Interpolation linéaire, $n = 1$
Connaissant deux points d'appui $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$, on approche f sur $[x_0, x_1]$ à l'aide la droite passant par les deux points d'appui définie par

$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Interpolation quadratique, $n = 2$
Connaissant trois points d'appui $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, on approche f sur $[x_0, x_2]$ à l'aide la parabole passant par les trois points d'appui définie par

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Cas général, $n \geqslant 1$
Soient $\{(x_i, f(x_i)),\ i = 0, ..., n\}$, $n + 1$ points d'appui à interpoler. On note

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},\ k = 0, ..., n$$

la base polynômiale de Lagrange des polynômes de degré n. On a $L_k(x_k) = 1$ et $L_k(x_i) = 0$. Le polynôme de Lagrange d'interpolation est

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) f(x_k)$$

2.3 Interpolation de Newton

On suppose que $x_0 < x_1 < ... < x_n$ triés.

Un point d'interpolation x_0

$$P(x) = f(x_0) = a_0$$

Deux points d'interpolation à x_0, on ajoute x_1

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

Calcul de a_1

$$P(x_1) = f(x_1) \Longrightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0}$$

Trois points d'interpolation à x_0, x_1, on ajoute x_2

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Calcul de a_2

$$P(x_2) = f(x_2) \Longrightarrow a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Cas général interpolation de $x_0, x_1, ..., x_n$

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$$

Ayant calculé $a_0, a_1, ..., a_{i-1}$, on a

$$P(x_i) = f(x_i) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})$$

et on déduit

$$a_i = \frac{f(x_i) - a_0 - a_1(x_i - x_0) - ... - a_{i-1}(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-2})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})}$$

a_i ne dpend que des points $x_0, ...x_i$, on note

$$\forall k \in \{1, ..., n\},\ a_k = f[x_0, ..., x_k]$$

Ainsi, avec cette notation,

$$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n] \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$$

2.4 D'autres procédés

L'interpolation polynomiale par morceaux permet d'éviter les erreurs d'approche trop importantes qui se produisent pour un nombre élevé de points à interpoler.

On utilise alors des courbes polynomiales paramétriques définies par morceaux comme les splines ou les NURBS. Les splines cubiques se raccordent C^2 (continuité de la courbure), les splines de degré 4 se raccordent C^3 (continuité de la torsion)... Les NURBS quant à elles sont des B-splines rationnelles non uniformes qui permettent de décrire tout type de courbes contrairement aux splines.

On peut généraliser ce traitement et créer des surfaces d'interpolation à l'aide des splines ou NURBS.

3 Approximation par moindres carrés

3.1 Principe et critère des moindres carrés

Soient $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ un ensemble de $n+1$ points du plan. On cherche à construire une courbe qui approxime (ou approche) cet ensemble de points. Ces points pouvant provenir de mesures (donc contenir des erreurs expérimentales) ne nécessitent pas forcément d'être interpolés, comme dans la partie précédente.

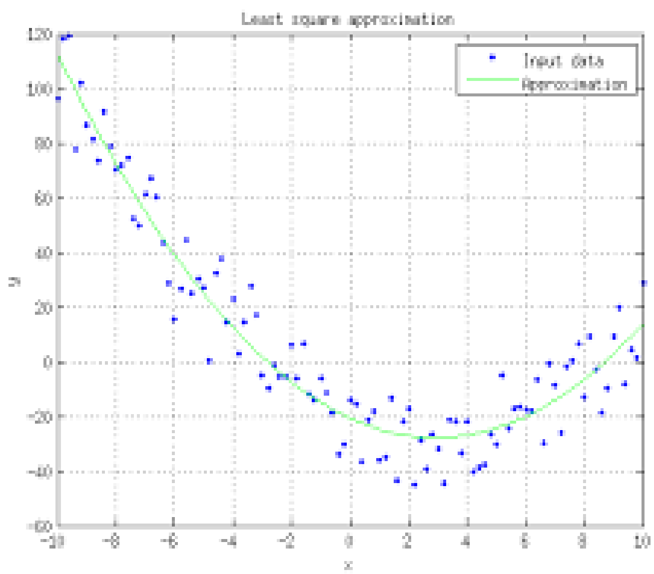

Figure 3: Approximation polynômiale

On note $p(x)$ la fonction d'approximation appelée aussi modèle qui dépend de paramètres (dans la cas polynômial, ce sont les coefficients). Il s'agit donc de déterminer les paramètres les mieux adaptés afin que le modèle soit le plus précis possible (passe au plus près des points donnés).

La recherche de la meilleure approximation $p(x)$ est déterminée par le critère des moindres carrés qui consiste à rechercher le minimum de la fonction

$$\sum_{i=0}^{n} (c_i - p(x_i))^2$$

qui permettra le calcul des paramètres de $p(x)$ correspondant ainsi à l'ajustement du modèle par rapport aux points donnés.

3.2 Régression linéaire

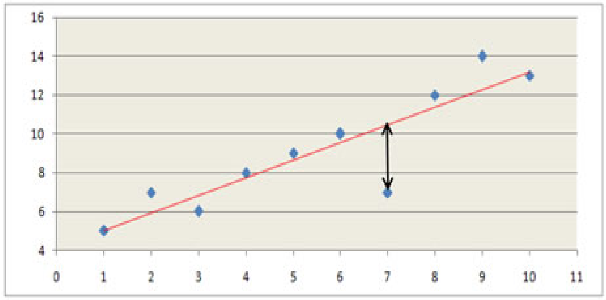

Figure 4: Regression linéaire

On recherche la droite d'équation $y = ax + b$ la plus proche de $\{(x_i, c_i),\ i = 0, ..., n\}$ au sens des moindres carrés. En notant $e_i = c_i - (ax_i + b)$ l'erreur d'approche pour $x = x_i$, on cherche le minimum de

$$Q(a, b) = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (c_i - ax_i - b)^2$$

afin d'obtenir a et b les paramètres du modèle. Le minimum est atteint si

$$\frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = 0 \text{ et } \frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = 0$$

Résolution du système linéaire d'ordre 2:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(a,b)}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i(c_i - ax_i - b) = 0 \\ \frac{\partial Q(a,b)}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=0}^{n} (c_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

. C'est à dire

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=0}^{n} x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i c_i \\ a\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + (n+1)b = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \end{cases}$$

En notant $\overline{x}$ et $\overline{c}$ les moyennes des x_i et c_i, de la dernière équation, on a

$$b = \overline{c} - a\overline{x}$$

En substituant dans la première équation, on a

$$a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + (\overline{c} - a\overline{x})\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i c_i$$

En utilisant la variance,

$$V_x = \frac{1}{n+1}(\sum_{i=0}^{n} (x_i - \overline{x})^2) = \frac{1}{n+1}(\sum_{i=0}^{n} x_i^2) - \overline{x}^2$$

on a

$$a(n+1)V_x = (\sum_{i=0}^{n} x_i c_i) - (n+1)\overline{x}\,\overline{c}$$

et on déduit

$$a = \frac{(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i c_i) - (n+1)\overline{x}\,\overline{c}}{(n+1)V_x}$$

3.3 Généralisation aux modèles linéaires

A partir des données (x_i, c_i), $0 \leqslant i \leqslant n$, on introduit un modèle d'approximation linéaire plus général du type:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x)$$

Les fonctions ϕ_j sont connues (ex: ln, exp, cos, monôme,...) alors que les coefficients α_j sont les paramètres à ajuster par rapport aux données concernées.
Un tel modèle est appelé linéaire de par son expression linéaire par rapport aux paramètres α_j.

Remarque: on retrouve le modèle de régression linéaire en posant $m = 1$, $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_1(x) = x$. On a bien $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$.

Comme pour le calcul de regression linéaire, on applique le critère des moindres carrés qui consiste à rechercher le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} S(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m) &= \sum_{i=0}^{n} (c_i - p(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n} (c_i - \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i))^2 \end{aligned}$$

Ce minimum est atteint lorsque les dérivées partielles de S par rapport à chaque coefficient α_k, $k = 0, ..., m$, sont nulles. On a

$$\begin{array}{l} \frac{\partial S(\alpha_0, ..., \alpha_m)}{\partial \alpha_k} = 0 \\ 2\sum\limits_{i=0}^{n} (c_i - \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i))(-\phi_k(x_i)) = 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \phi_k(x_i) \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) c_i \end{array}$$

En faisant varier $k = 0, ..., m$, on a un système linéaire de $m+1$ équations à $m+1$ inconnues α_j, $j = 0, ..., m$. D'où

$$\sum_{j=0}^{m}\alpha_j\sum_{i=0}^{n}\phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n}\phi_k(x_i)c_i, \text{ pour } k = 0, ..., m$$

signifie

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j\sum\limits_{i=0}^{n}\phi_0(x_i)\phi_j(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n}\phi_0(x_i)c_i \\ ... \\ \sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j\sum\limits_{i=0}^{n}\phi_m(x_i)\phi_j(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n}\phi_m(x_i)c_i \end{cases}$$

En posant la matrice $F = (F_{ji})_{\substack{0\leqslant j\leqslant m\\ 0\leqslant i\leqslant n}} = (\phi_j(x_i))_{\substack{0\leqslant j\leqslant m\\ 0\leqslant i\leqslant n}}$, on constate que

$$F({}^tF) = (\sum_{i=0}^{n}\phi_j(x_i)\phi_k(x_i))_{\substack{0\leqslant j\leqslant m\\ 0\leqslant k\leqslant m}}$$

En posant les vecteurs ${}^tX = (\alpha_0 \; ... \; \alpha_m)$ et ${}^tC = (c_0 \; ... \; c_n)$, on obtient finalement

$$F({}^tF)X = FC$$

Et avec $A = F({}^tF)$, symétrique d'ordre $m+1$ et $Y = FC$, si A est inversible, on déduit

$$X = A^{-1}Y$$

4 Intégration numérique

Les méthodes d'intégration numériques sont mises en place lorsqu'une primitive de la fonction f est compliquée à calculer ou inconnue, ou lorsque f est connue sous forme d'échantillon de points, par exemple si elle résulte de mesures physiques, on peut l'approcher par interpolation (section 2) et ainsi intégrer numériquement l'interpolée. Dans cette section, on traitera les intégrales du type:

$$\int_a^b f(x)dx$$

où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction connue et continue sur $[a, b]$.

On considère une subdivision de $[a, b]$ en sous intervalles égaux. On pose

- $[a, b] = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1}[x_i, x_{i+1}]$, avec $x_0 = a$, $x_n = b$
- le pas est $h = \frac{b-a}{n}$
- $\forall i = 0, ..., n$, on a $x_i = a + ih$

4.1 Méthode des rectangles inférieurs et supérieurs

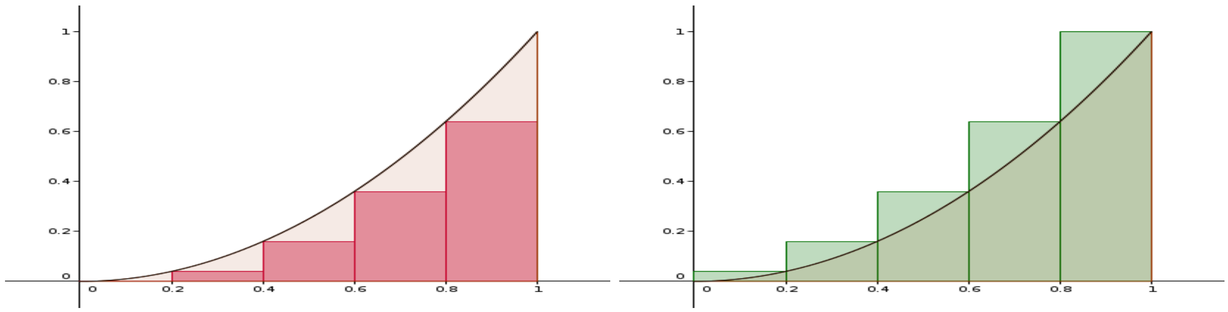

Figure 5: Rectangles inférieurs et supérieurs

Pour les rectangles inférieurs, on a:

$$\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx \simeq hf(x_i), \qquad \text{d'où}, \qquad \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx \simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Pour les rectangles supérieurs, on a:

$$\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx \simeq hf(x_{i+1}), \qquad \text{d'où}, \qquad \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx \simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$$

4.2 Méthode des rectangles points-milieux

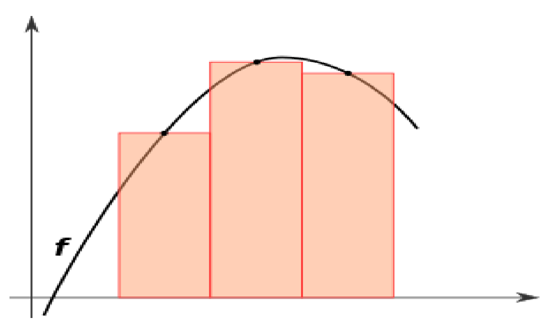

Figure 6: Rectangles points-milieux

Afin de réduire l'erreur d'approche liée à la première méthode, cette fois-ci, on prend pour chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la hauteur du milieu du rectangle $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$. On a

$$\int_{x_i}^{x_i+1} f(x)dx \simeq hf(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$$

D'oú

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{a + ih + a + (i+1)h}{2}) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a + (i + \frac{1}{2})h)$$

4.3 Méthode des trapèzes

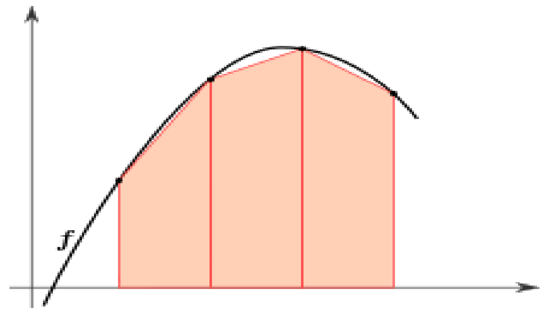

Figure 7: Méthode des trapèzes

Cette méthode est plus précise que la méthode des rectangles points-milieux. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on considre la droite d'équation:

$$y = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

formant le haut du trapèze.

L'aire sous la courbe f sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est approchée par l'aire du trapèze T_i correspondant. L'aire d'un trapèze pouvant se décomposer en l'aire d'un rectangle et de deux triangles, on a pour $f \geqslant 0$

$$T_i = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Ainsi,

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) = T_h$$

Remarque: T_h peut être rendu aussi proche que l'on veut de I pourvu que le pas h soit suffisamment petit et que f soit assez régulière (dérivable, de dérivée absolument intégrable).

4.4 Méthode de Simpson

Dans cette méthode, suppose que $n = 2s$ est pair, ce qui signifie un nombre impair de points $x_0, ..., x_n$ à traiter. On considère une subdivision de $[a, b]$ en s sous intervalles égaux $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ de longueur $2h$. On pose

- $x_0 = a$, $x_n = b$ et $h = \frac{b-a}{n}$ le pas
- $[a, b] = \bigcup_{i=1,\text{ i: impair}}^{n-1} [x_{i-1}, x_{i+1}] = \bigcup_{1 \leqslant 2k+1 \leqslant n-1} [x_{2k}, x_{2k+2}] = \bigcup_{k=0}^{s-1} [x_{2k}, x_{2k+2}]$
- $x_{i+1} = x_i + h$ et $x_i = a + ih$

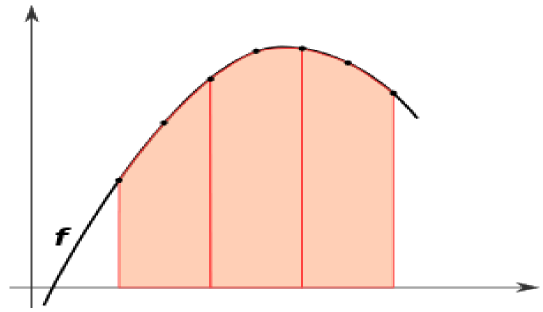

Figure 8: Méthode de Simpson

On considère sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ une parabole interpolant les points

$$(x_{i-1}, f(x_{i-1})),\ (x_i, f(x_i)),\ (x_{i+1}, f(x_{i+1})).$$

Par la méthode de Lagrange (section 2) on détermine P_i le polynôme d'interpolation quadratique de ces trois points:

$$P_i(x) = f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} + f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{-h^2} + f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2}$$

La surface S_i bordée par $x = x_{i-1}$, $x = x_{i+1}$, l'axe des abscisses et P_i est

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_i(x)dx$$

et vaut

$$S_i = \frac{h}{3}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Lemme: soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $c < d$, alors

$$A = \int_c^d P(x)dx = \frac{d-c}{6}[P(c) + 4P(\frac{c+d}{2}) + P(d)]$$

Démonstration: changement de variable $x = ud + (1-u)c = (d-c)u + c$, pour se ramener à une intégrale sur $[0,1]$. On a

$$A = (d-c)\int_0^1 P((d-c)u+c)du$$

Les polynômes de Lagrange aux abscisses $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$ sont $L_0(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $L_1(x) = 4x - 4x^2$ et $L_2(x) = 2x^2 - x$. Leurs intégrales valent respectivement $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{6}$ et $\frac{1}{6}$.

En posant $Q(u) = P((d-c)u+c)$, de degré 2, on vérifie par Lagrange également que

$$Q(u) = Q(0)L_0(x) + Q(\frac{1}{2})L_1(x) + Q(1)L_2(x)$$

Ainsi

$$A = (d-c)\int_0^1 Q(u)du = [Q(0)(\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x) + Q(\frac{1}{2})(\frac{4}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3) + Q(1)(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2)]_0^1$$

On trouve

$$A = \frac{1}{6}(Q(0) + 4Q(\frac{1}{2}) + Q(1)) = \frac{d-c}{6}[P(c) + 4P(\frac{c+d}{2}) + P(d)], \quad \text{CQFD}$$

En constatant que x_i est le milieu de $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, on applique le Lemme au calcul de S_i et on obtient

$$S_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{3}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Finalement, $I = \int_a^b f(x)dx$ est approchée par S_h

$$I \simeq S_h = \sum_{i=1,\text{ i: impair}}^{n-1} S_i = \sum_{1 \leqslant 2k+1 \leqslant n-1} S_{2k+1} = \sum_{k=0}^{s-1} S_{2k+1}$$

On obtient

$$S_h = \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{s-1}(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})) = \frac{h}{3}(\sum_{k=0}^{s-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{s-1} f(x_{2k+1}) + \sum_{k=0}^{s-1} f(x_{2k+2}))$$

D'où

$$S_h = \frac{h}{3}(f(x_0) + f(x_{2s}) + \sum_{k=1}^{s-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{s-1} f(x_{2k+1}) + \sum_{k=0}^{s-2} f(x_{2k+2}))$$

Conclusion

$$I \simeq S_h = \frac{h}{3}(f(x_0) + f(x_{2s}) + 4\sum_{k=0}^{s-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{s-1} f(x_{2k}))$$

5 Exercices

1) Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. Démontrer que f admet une solution dans l'intervalle $[-1, 2]$. Par la méthode de Lagrange, déterminer la solution à 10^{-2} près. Faire un dessin.

2) Reprendre l'exercice précédent avec la méthode de Newton.

3) Soit $f(x) = x - e^{-x}$. Déterminer la méthode de Newton, fixer x_0 et montrer que la méthode converge. Faire de mme avec lagrange.

4) Appliquer la méthode de Newton pour $f(x) = 1 - x^2,\ x_0 = 0$; $g(x) = x^3 - 2x + 3,\ x_0 = 0$ et $h(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 1$. Que constate-t-on? Faire des dessins et corriger x_0, si possible.

5) Soit f une fonction rélle vérifiant

$$f(1) = 1,\ f(2) = 8,\ f(3) = 27,\ f(4) = 64$$

Que vaut $P_3(x)$ le polynôme de degré 3 interpolant ces points? Ecrire sa forme de Lagrange puis sa forme de Newton.

6) Soient les points $\{(1,1), (2,3), (4,-1), (6,5), (7,0)\}$. A l'aide de la base de Newton de polynôme, construire une matrice triangulaire traduisant l'interpolation de ces points. Déterminer alors le polynôme d'interpolation de Newton. Utiliser la matrice de Vandermonde afin d'interpoler ces points. Quelle méthode il vaut mieux utiliser, Newton ou Vandermonde?

7) Soient les points $\{(1,1), (2,3), (4,5), (6,10), (7,15)\}$. A l'aide du critère des moindres carrés, calculer la droite d'approximation affine de cet ensemble de points. Retrouver ce résultat en traduisant le problème matriciellement.

8) Soient les points $\{(0,7), (1,4), (2,2), (4,4), (6,12)\}$. Placer les points et choisir un modèle d'approximation linéaire. A l'aide du critère des moindres carrés, calculer les paramètres du modèle choisi.

9) Déterminer par les méthodes d'intégration vues dans le cours une approximation de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ sur la base du tableau suivant:

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

Ces points d'appui sont ceux donnant $sin(x)$, comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte.

10) On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les 80 premières secondes l'accélération γ. Voici les mesures:

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ (en m/s^2)	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80\ s$, par la méthode des trapèzes, puis par la méthode de Simpson.

11) Calculer à l'aide de la méthode des trapèzes l'intégrale $I = \int_0^{\pi} sin(x^2)dx$, avec $N = 5$, puis $N = 10$ points d'appui.

12) On donne $E(h)$ les erreurs d'approche pour le calcul d'intégrales de f sur $[a, b]$ avec un pas de $h = \frac{b-a}{N}$, N le nombre de subdivisions.

Pour les trapèzes, $E(h) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c)$, $c \in [a, b]$

Pour Simpson, $E(h) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c)$, $c \in [a, b]$

a) Trouver le nombre N de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à 0.510^{-3}, grâce à Simpson, l'intégrale $I = \int_{-\pi}^{\pi} cos(x)dx$

b) Soit $F(x) = \int_0^x te^{-t}dt$. Combien faut-il de subdivisions de $[0, 1]$ pour évaluer $F(1)$ à 10^{-8} près en utilisant la méthode des trapèzes, puis Simpson.