4ème

Cours : Calcul littéral

Table des matières

Compétences travaillées		MI	MF	MS	TBM
• Connaître le vocabulaire lié au calcul littéral					
• Identifier les variables d'une expression littérale					
• Evaluer une expression littérale	$C4L13$				
• Déterminer la nature d'une égalité	$C4L14$				
• Connaître la formule de distributivité simple					
• Développer une expression littérale	$C4L21$				
• Réduire une expression littérale	$C4L22$				
• Factoriser une expression littérale	$C4L23$				
• Connaître la formule de distributivité double					
• Développer ou factoriser une expression à l'aide de la double distributivité	$C4L24$				
• Résoudre des problèmes en utilisant les règles du calcul littéral					

Vocabulaire utilisé

- **expression littérale** (p. 2)
- **variables** (p. 2)
- **Évaluer une expression** (p. 3)
- **membres** (p. 3)
- **Nature de l'égalité** (p. 4)
- **distributivité** (p. 5)
- **Développer** (p. 5)
- **produit** (p. 6)
- **Réduire** (p. 6)
- **Factoriser** (p. 7)
- **somme** (p. 7)
- **différence** (p. 7)
- **facteurs** (p. 7)
- **simplifier** (p. 7)

1. Expression littérale

Définition — **Expression littérale**

Une **expression littérale** est une expression mathématique contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Les lettres sont appelées des **variables**.

Exemple(s) — **Expression numérique**

$A = 5 + 7 = 12$

$B = (-5) \times 7 = -35$

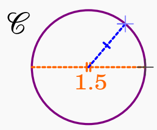
$C = \dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5 \times 3}{2 \times 3} - \dfrac{2 \times 2}{3 \times 2} = \dfrac{15}{6} - \dfrac{4}{6} = \dfrac{11}{6}$

$D = 10^2 \times 10^5 = 10^7$

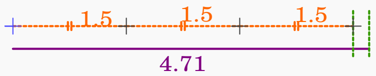
Toutes ces expressions sont composées uniquement de **nombres**, ce sont des **expressions numériques**

Exemple(s) — **Expression littérale**

1 La longueur c d'un cercle de rayon r est donnée par :
$c = 2 \times \pi \times r$ où $\pi \approx 3{,}14\ldots$

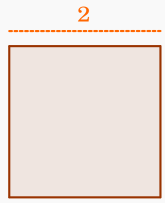


Circonférence du cercle $\mathscr{C}$
$r = 0.75$
$c = r \times \pi \approx 4.71$



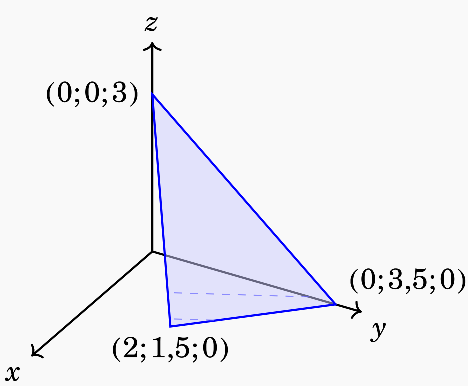
Cette formule comporte **une variable**

2 L'aire d'un carré est donné par $\mathbf{c \times c}$ où $\mathbf{c}$ représente le **côté du carré**.



$\mathscr{A}_{\text{Carré}} = c \times c$
$\mathscr{A}_{\text{Carré}} = 2 \times 2 = 4$

3 Dans l'égalité $6x + 6y + 7z = 21$, il y a **trois variables** : $x;y$ et z.



2. Valeur d'une expression littérale

2.1 Évaluer une expression littérale

Définition — **Évaluer une expression littérale**

Évaluer une expression littérale signifie **attribuer** une **valeur numérique** à une ou plusieurs **variables**.
Il s'agit ensuite de **remplacer** ces variables par les valeurs numériques, puis d'**effectuer les calculs** rendus possibles.

Méthode

Évaluer l'expression suivante pour $x = 5$

$$A = 2x + t + 3$$

Solution :
On **remplace** les variables x par 5 :

$$A = 2\times5 + t + 3 \quad \text{t n'est pas évaluée}$$
$$A = 10 + t + 3$$
$$A = 13 + t$$

Evaluer l'expression suivante pour $x = -1$

$$B = x + (1 - x) + 3x$$

Solution :
On **remplace** les variables x par -1 :

$$B = -1 + (1 - (-1)) + 3\times(-1)$$
$$B = -1 + (1 + 1) - 3$$
$$B = -1 + 2 - 3$$
$$B = -2$$

Remarques :

⚠ Penser à rajouter les signes × lorsqu'on remplace une variable qui est multipliée à un nombre.

⚠ Les variables ayant des valeurs négatives peuvent être placées **entre parenthèses** pour éviter les erreurs de calcul.

■ Exercice 1 – Évaluer une expression littérale ★☆☆ / 8

Calculer la valeur des expressions suivantes pour les valeurs données :

1 $A = 6\times(x+3)$ lorsque $x = 5$

2 $B = l \times L$ lorsque $l = 3{,}5$ et $L = 7$

3 $C = 5\times(6-x) + 3x - 7y$ lorsque $x = 2$ et $y = 1$

C4L13

2.2 Nature d'une égalité

Définition

Une égalité est constituée de deux expressions mathématiques appelées « **membres** » séparées par un signe « = ».

Vocabulaire — Nature d'une égalité

Une égalité peut être :			
Nature de l'égalité	**Vraie**	**Fausse**	**Parfois vraie, parfois fausse**
Exemple 1	$3^2 = (-3)^2$	$\frac{1}{3} = 0{,}33$	$2x = 10$
Exemple 2	$x + x = 2x$	$x^2 = -1$	$3x + 1 = 5x - 4$

Exemple(s)

1. L'égalité $5 \times 2 = 6 + 4$ est ...., car ....
2. L'égalité $4 \times 6 = 24 + 3$ est ...., car ....
3. L'égalité $4x + 6 + 2x = 2x \times 3 + 2 \times 3$ est .... car :

■ Exercice 2 – Déterminer la nature d'une égalité ★★☆ / 6

$3x + 6 = 2(x + 5)$ est .... car :

$x^2 = 2x$ est .... car :

Remarques :

Parfois ces égalités, par exemple $3x + 5 = 7$ ou $4x + 4 = 7x + 2$, peuvent être égales pour certaines valeurs de x, on parle d'équation.

C4L14

3. Développement

3.1 Introduction

Activité — **Les bouteilles**

Un restaurateur a commandé 3 caisses de jus d'orange et 5 caisses de jus de raisin.
Chaque caisse contient 24 bouteilles de jus.

1 Répondre à la question suivante de **deux façons différentes** :
Combien a-t-il commandé de bouteilles en tout ?

2 Que remarque-t-on ?

1 **Première solution :** **Seconde solution :**

2 On remarque que...

3.2 Distributivité

Propriété — **Distributivité simple**

On considère trois expressions (numériques ou littérales) a, b et c.
Les égalités suivantes sont **toujours vérifiées** :

$$a(b+c)=ab+ac \qquad a(b-c)=ab-ac$$

Exemple(s) — **Calculs astucieux**

Pour calculer astucieusement, on peut utiliser la **distributivité**.

Puisque $101=100+1$, on peut écrire :

$$32\times101=32\times(100+1)=32\times100+32\times1=3\,200+32=3\,232$$

$32\times99=$

$13\times102=$

$29\times999=$

Définition — **Développer une expression**

Développer, c'est transformer un **produit** en **somme** (ou **différence**).
Dans la pratique, développer c'est lire la formule de distributivité **de la gauche vers la droite**.

Exemple(s)

Pour **développer** une expression, il suffit de lire la formule de distributivité **de la gauche vers la droite**.
L'expression $A = 4(5+x)$ est un **produit**.
On peut le développer en : $A = 4(5+x) = 4\times 5 + 4\times x$

■ Exercice 3 – Développer avec la simple distributivité ★☆☆ / 4

Développe les expressions suivantes :

1 $A = 5(x-2)$

2 $B = -6(-2x+4)$

3 $C = -x(2-3x)$

4 $D = -(5-x)$

C4L21

3.3 Réduire une expression

Définition — **Réduire une expression**

Réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes ou de facteurs possibles.
Pour cela on **regroupe** les termes de **même nature**.

Exemple(s)

Réduire les expressions suivantes :

1 $A = 4x + 3x =$ ……

2 $B = 2a + 4 - 3a + 6 - 2a + 8a - 8$

$B =$ …… $\times a +$ ……

3 $C = x^2 + 8x - 7 - 8x + 15 - 2x^2 + 3x =$ ……

■ Exercice 4 – Développer et réduire des expressions ★★☆ / 6

Développer et réduire les expressions suivantes :

C4L22

1 $A = 7(x+2) + 6(x+3)$

$A =$

$A =$

$A =$

2 $B = -2(-x+3) + 2(x-5)$

$B =$

$B =$

3 $C = 7 - 2(x-2) =$

$C =$

4. Factorisation

Définition

Factoriser, c'est transformer une **somme** (ou **différence**) en **produit**.
Une expression factorisée est formée de **facteurs**.
Dans la pratique, **factoriser** c'est lire la formule de distributivité **de la droite vers la gauche** :

$$ab + ac = a(b+c) \qquad ab - ac = a(b-c)$$

Exemple(s)

Factoriser c'est lire de droite à gauche la formule de distributivité !

$$24 \times (3+5) = 24 \times 3 + 24 \times 5$$

Factoriser les expressions suivantes puis les **simplifier** le plus possible :

■ Exercice 5 – Factoriser des expressions ★★☆ / 6

1 $A = 131 \times 13 + 131 \times 87$

$A =$

$A = \qquad =$

2 $B = 37 \times 13 - 37 \times 3$

$B =$

$B = \qquad =$

C4L26

3 $C = 4x - 4 \times 5 =$

4 $D = 24 - 8x =$

5 $E = 7x + 42 =$

6 $F = 3x - 3 =$

7 $G = x^2 + 3x =$

8 $H = 3x^2 + 6x =$

5. Distributivité double

Propriété — **Double distributivité**

Lorsqu'on utilise la distributivité et que les deux facteurs sont des sommes ou des différences de plusieurs termes, il est **utile** de connaître l'égalité suivante :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration

Remarques :

Comme pour la formule de distributivité simple, il est possible de lire ces formules :

— De la gauche vers la droite pour **développer**.

— De la droite vers la gauche pour **factoriser**.

On a aussi les formules suivantes, qu'il est possible de démontrer en utilisant **les règles des signes**.

1 $(a-b)(c+d) = ac + ad - bc - bd$

2 $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$

■ Exercice 6 – Utiliser la double distributivité ☆☆☆ / 8

Développe et réduis les expressions suivantes :

1 $A = (2x+3)(x+8)$

$A =$

$A =$

2 $B = (-3+x)(4-5x)$

$B =$

$B =$

3 $C = 2(3+x)(3-2x)$

$C =$

$C =$

$C =$

4 $D = 2x(1-x) - (x-3)(3x+2)$

$D =$

$D =$

$D =$

C4L24