Cours : Calcul littéral

Table des matières

Compétences travaillées		MI	MF	MS	TBM
• Connaître le vocabulaire lié au calcul littéral					
• Identifier les variables d'une expression littérale					
• Evaluer une expression littérale	$C4L13$				
• Déterminer la nature d'une égalité	$C4L14$				
• Connaître la formule de distributivité simple					
• Développer une expression littérale	$C4L21$				
• Réduire une expression littérale	$C4L22$				
• Factoriser une expression littérale	$C4L23$				
• Connaître la formule de distributivité double					
• Développer ou factoriser une expression à l'aide de la double distributivité	$C4L24$				
• Résoudre des problèmes en utilisant les règles du calcul littéral					

Vocabulaire utilisé

— **expression littérale** (p. 2)
— **variables** (p. 2)
— **Évaluer une expression** (p. 3)
— **membres** (p. 3)
— **Nature de l'égalité** (p. 4)
— **distributivité** (p. 5)
— **Développer** (p. 5)
— **produit** (p. 6)
— **Réduire** (p. 6)
— **Factoriser** (p. 7)
— **somme** (p. 7)
— **différence** (p. 7)
— **facteurs** (p. 7)
— **simplifier** (p. 7)

1. Expression littérale

Définition — **Expression littérale**

Une **expression littérale** est une expression mathématique contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Les lettres sont appelées des **variables**.

Exemple(s) — **Expression numérique**

$A = 5 + 7 = 12$

$B = (-5) \times 7 = -35$

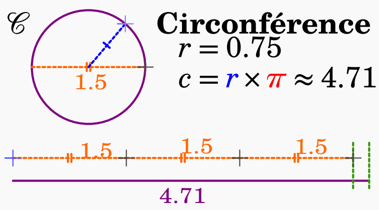
$C = \dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5 \times 3}{2 \times 3} - \dfrac{2 \times 2}{3 \times 2} = \dfrac{15}{6} - \dfrac{4}{6} = \dfrac{11}{6}$

$D = 10^2 \times 10^5 = 10^7$

Toutes ces expressions sont composées uniquement de **nombres**, ce sont des **expressions numériques**

Exemple(s) — **Expression littérale**

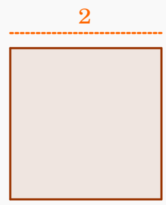
1 La longueur c d'un cercle de rayon r est donnée par :
$c = 2 \times \pi \times r$ où $\pi \approx 3{,}14\ldots$



Circonférence du cercle $\mathscr{C}$
$r = 0.75$
$c = r \times \pi \approx 4.71$

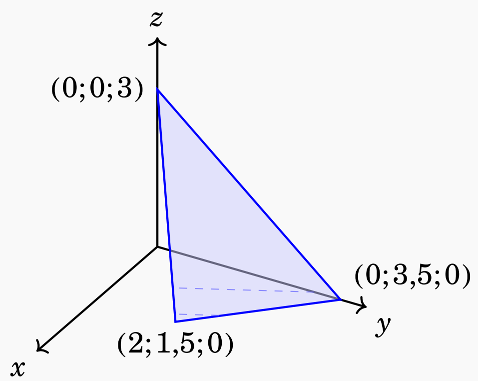
Cette formule comporte **une variable**

2 L'aire d'un carré est donné par $\mathbf{c \times c}$ où $\mathbf{c}$ représente le **côté du carré**.



$\mathscr{A}_{\text{Carré}} = c \times c$
$\mathscr{A}_{\text{Carré}} = 2 \times 2 = 4$

3 Dans l'égalité $6x + 6y + 7z = 21$, il y a **trois variables** : x;y et z.



2. Valeur d'une expression littérale

2.1 Évaluer une expression littérale

Définition — **Évaluer une expression littérale**

Évaluer une expression littérale signifie **attribuer** une **valeur numérique** à une ou plusieurs **variables**.
Il s'agit ensuite de **remplacer** ces variables par les valeurs numériques, puis d'**effectuer les calculs** rendus possibles.

Méthode

Évaluer l'expression suivante pour $x = 5$

$$A = 2x + t + 3$$

Solution :
On **remplace** les variables x par 5 :

$A = 2 \times 5 + t + 3$ t n'est pas évaluée

$A = 10 + t + 3$

$A = 13 + t$

Evaluer l'expression suivante pour $x = -1$

$$B = x + (1 - x) + 3x$$

Solution :
On **remplace** les variables x par -1 :

$B = -1 + (1 - (-1)) + 3 \times (-1)$

$B = -1 + (1 + 1) - 3$

$B = -1 + 2 - 3$

$B = -2$

Remarques :

⚠ Penser à rajouter les signes × lorsqu'on remplace une variable qui est multipliée à un nombre.

⚠ Les variables ayant des valeurs négatives peuvent être placées **entre parenthèses** pour éviter les erreurs de calcul.

■ Exercice 1 – Évaluer une expression littérale ★☆☆ / 8

Calculer la valeur des expressions suivantes pour les valeurs données :

1 $A = 6 \times (x + 3)$ lorsque $x = 5$

$A = 6 \times (5 + 3)$

$A = 6 \times 8$

$A = 48$

2 $B = l \times L$ lorsque $l = 3{,}5$ et $L = 7$

$B = l \times L$

$B = 3{,}5 \times 7$

$B = 24{,}5$

3 $C = 5 \times (6 - x) + 3x - 7y$ lorsque $x = 2$ et $y = 1$

$C = 5 \times (6 - 2) + 3 \times 2 - 7 \times 1$

$C = 5 \times (4) + 6 - 7$

$C = 20 - 1$

$C = 19$

C4L13

2.2 Nature d'une égalité

Définition

Une égalité est constituée de deux expressions mathématiques appelées « **membres** » séparées par un signe « = ».

Vocabulaire — **Nature d'une égalité**

Une égalité peut être :			
Nature de l'égalité	**Vraie**	**Fausse**	**Parfois vraie, parfois fausse**
Exemple 1	$3^2 = (-3)^2$	$\frac{1}{3} = 0{,}33$	$2x = 10$
Exemple 2	$x + x = 2x$	$x^2 = -1$	$3x + 1 = 5x - 4$

Exemple(s)

1. L'égalité $5 \times 2 = 6 + 4$ est **vraie**, car $5 \times 2 = 10$ **et** $6 + 4 = 10$.
2. L'égalité $4 \times 6 = 24 + 3$ est **fausse**, car $4 \times 6 = 24$ **mais** $24 + 3 = 27$.
3. L'égalité $4x + 6 + 2x = 2x \times 3 + 2 \times 3$ est **vraie** car :

D'une part : $4x + 6 + 2x = 6x + 6$

D'autre part : $2x \times 3 + 2 \times 3 = 6x + 6$

Les membres de gauche et de droite sont tous les deux égaux à la même expression littérale $6x + 6$.

On en déduit que cette égalité est vraie quelle que soit la valeur de x.

■ Exercice 2 – Déterminer la nature d'une égalité ★★☆ / 6

$3x + 6 = 2(x + 5)$ est **fausse** car :

D'une part : $2(x + 5) = 2x + 10$

D'autre part : $3x + 6 \neq 2x + 10$

Les deux membres ne sont pas égaux.

$x^2 = 2x$ est **fausse** car :

Les deux membres ne sont pas égaux pour toutes les valeurs de x :

Si x = 3 par exemple, alors : $x^2 = 3^2 = 9$ **mais** $2x = 2 \times 3 = 6$

C4L14

Remarques :

Parfois ces égalités, par exemple $3x + 5 = 7$ ou $4x + 4 = 7x + 2$, peuvent être égales pour certaines valeurs de x, on parle d'équation.

3. Développement

3.1 Introduction

Activité — **Les bouteilles**

Un restaurateur a commandé 3 caisses de jus d'orange et 5 caisses de jus de raisin.
Chaque caisse contient 24 bouteilles de jus.

1. Répondre à la question suivante de **deux façons différentes** :
   Combien a-t-il commandé de bouteilles en tout ?
2. Que remarque-t-on ?

1. **Première solution :**

   Le restaurateur a commandé $3 \times 24 = 72$ **bouteilles de jus d'orange.**
   Il a également commandé $5 \times 24 = 120$ **bouteilles de jus de raisin.**
   Le nombre total de bouteilles s'écrit :
   $3 \times 24 + 5 \times 24 = 72 + 120 = 192$ **bouteilles.**

   Seconde solution :

   Puisque les caisses contiennent le même nombre de bouteilles, il suffit de multiplier le nombre de caisses au total par le nombre de bouteilles par caisse :
   $(3+5) \times 24 = 8 \times 24 = 192$ **bouteilles.**

2. On remarque que...

   L'égalité suivante est vraie :
   $(3+5) \times 24 = 3 \times 24 + 5 \times 24$

3.2 Distributivité

Propriété — **Distributivité simple**

On considère trois expressions (numériques ou littérales) a, b et c.
Les égalités suivantes sont **toujours vérifiées** :

$$a(b+c) = ab + ac \qquad a(b-c) = ab - ac$$

Exemple(s) — **Calculs astucieux**

Pour calculer astucieusement, on peut utiliser la **distributivité**.

Puisque $101 = 100 + 1$, on peut écrire :

$32 \times 101 = 32 \times (100+1) = 32 \times 100 + 32 \times 1 = 3\,200 + 32 = 3\,232$

$32 \times 99 = 32 \times (100-1) = 32 \times 100 - 32 \times 1 = 3\,200 - 32 = 3\,168$

$13 \times 102 = 13 \times (100+2) = 13 \times 100 + 13 \times 2 = 1\,300 + 26 = 1\,326$

$29 \times 999 = 29 \times (1000-1) = 29 \times 1000 - 29 \times 1 = 29\,000 - 29 = 28\,971$

Définition — **Développer une expression**

Développer, c'est transformer un **produit** en **somme** (ou **différence**).
Dans la pratique, développer c'est lire la formule de distributivité **de la gauche vers la droite**.

Exemple(s)

Pour **développer** une expression, il suffit de lire la formule de distributivité **de la gauche vers la droite**.
L'expression $A = 4(5+x)$ est un **produit**.
On peut le développer en : $A = 4(5+x) = 4\times5+4\times x$

■ Exercice 3 – Développer avec la simple distributivité ★☆☆ / 4

Développe les expressions suivantes :

1 $A = 5(x-2)$

$A = 5(x-2)$

$= 5\times x - 5\times 2$

$= 5x - 10$

2 $B = -6(-2x+4)$

$B = -6(-2x+4)$

$= -6\times(-2x) + (-6)\times 4$

$= 12x - 24$

3 $C = -x(2-3x)$

$C = -x(2-3x)$

$= -x\times 2 - -x\times(-3x)$

$= -2x - 3x^2$

4 $D = -(5-x)$

$D = -(5-x)$

$= -1\times 5 - (-1)\times x$

$= -5 + x$

C4L21

3.3 Réduire une expression

Définition — **Réduire une expression**

Réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes ou de facteurs possibles.
Pour cela on **regroupe** les termes de **même nature**.

Exemple(s)

Réduire les expressions suivantes :

1 $A = 4x + 3x =$ $7x$

2 $B = 2a + 4 - 3a + 6 - 2a + 8a - 8$

$B =$ 5 $\times a +$ 2

3 $C = x^2 + 8x - 7 - 8x + 15 - 2x^2 + 3x =$ $-x^2 + 3x + 8$

■ Exercice 4 – Développer et réduire des expressions ★★☆ / 6

C4L22

Développer et réduire les expressions suivantes :

1 $A = 7(x+2) + 6(x+3)$

$A = 7x + 7\times 2 + 6x + 6\times 3$

$A = 13x + 14 + 18$

$A = 13x + 32$

2 $B = -2(-x+3) + 2(x-5)$

$B = 2x - 6 + 2x - 10$

$B = 4x - 16$

3 $C = 7 - 2(x-2) = 7 - 2x + 4$

$C = -2x + 11$

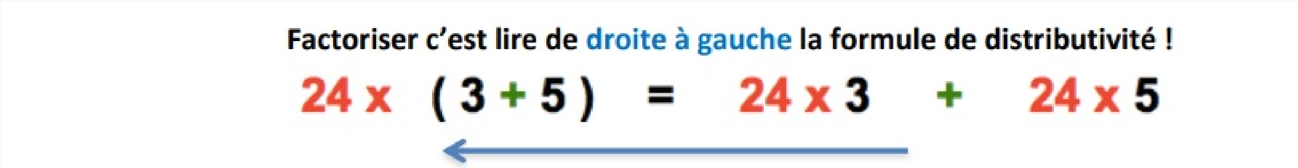
4. Factorisation

Définition

Factoriser, c'est transformer une **somme** (ou **différence**) en **produit**.
Une expression factorisée est formée de **facteurs**.
Dans la pratique, **factoriser** c'est lire la formule de distributivité **de la droite vers la gauche** :

$$ab + ac = a(b+c) \qquad\qquad ab - ac = a(b-c)$$

Exemple(s)



Factoriser les expressions suivantes puis les **simplifier** le plus possible :

■ Exercice 5 – Factoriser des expressions ★★☆ / 6

C4L26

1 $A = 131\times 13 + 131\times 87$

$A = 131\times(13+87)$

$A = 131\times 100 = 13\,100$

2 $B = 37\times 13 - 37\times 3$

$B = 37\times(13-3)$

$B = 37\times 10 = 370$

3 $C = 4x - 4\times 5 = 4\times(x-5)$

4 $D = 24 - 8x = 8\times(3-x)$

5 $E = 7x + 42 = 7\times(x+6)$

6 $F = 3x - 3 = 3\times(x-1)$

7 $G = x^2 + 3x = x\times(x+3)$

8 $H = 3x^2 + 6x = 3x\times(x+2)$

5. Distributivité double

Propriété — **Double distributivité**

Lorsqu'on utilise la distributivité et que les deux facteurs sont des sommes ou des différences de plusieurs termes, il est **utile** de connaître l'égalité suivante :

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Démonstration

Notons $m=a+b$.

On a alors : $(a+b)(c+d)=m(c+d)$

On applique la distributivité simple au membre de droite de l'égalité :

$$m(c+d)=m\times c+m\times d=\underbrace{(a+b)\times c}_{\text{terme 1}}+\underbrace{(a+b)\times d}_{\text{terme 2}}$$

On développe une nouvelle fois en utilisant la distributivité pour les termes $(a+b)\times c$ **et** $(a+b)\times d$ **:**

$$(a+b)\times c+(a+b)\times d$$

$$=a\times c+b\times c+a\times d+b\times d$$

Finalement, on a montré que :

$$(a+b)(c+d)=a\times c+b\times c+a\times d+b\times d$$

Remarques :

Comme pour la formule de distributivité simple, il est possible de lire ces formules :

— De la gauche vers la droite pour **développer**.

— De la droite vers la gauche pour **factoriser**.

On a aussi les formules suivantes, qu'il est possible de démontrer en utilisant **les règles des signes**.

1 $(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$

2 $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$

■ Exercice 6 – Utiliser la double distributivité ★★★ / 8

Développe et réduis les expressions suivantes :

1 $A=(2x+3)(x+8)$

$A=2x\times x+2x\times 8+3\times x+3\times 8$

$A=2x^2+19x+24$

2 $B=(-3+x)(4-5x)$

$B=-3\times 4+(-3)\times(-5x)+x\times 4+x\times(-5x)$

$B=-5x^2+19x-12$

3 $C=2(3+x)(3-2x)$

$C=(6+2x)(3-2x)$

$C=6\times 3+6\times(-2x)+2x\times 3+2x\times(-2x)$

$C=-4x^2-6x+18$

4 $D=2x(1-x)-(x-3)(3x+2)$

$D=2x-2x^2-(3x^2+2x-9x-6)$

$D=-2x^2+2x-3x^2-2x+9x+6$

$D=-5x^2+9x+6$

C4L24