Deuxième partie

Variable aléatoire discrète
Distributions de référence.

1 Variable aléatoire-Définition.

1.1 Notion de tribu de $\mathbb{R}$ ou tribu borélienne.

Soit $(U, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé modélisant une expérience aléatoire.
On s'intéresse ici à décrire numériquement les évènements de cette expérience aléatoire.

Exemple 1.1. usuel :

- ⋆ *«gain »* lors d'un jeu de cartes
- ⋆ *«nombre de succès »* lors d'une d'une expérience de Bernoulli répétée répétée n fois
- ⋆ *«rang de la première occurrence "succès" »*
- ⋆ *«longueur »* d'un chemin aléatoire

Définition 1.1.
On appelle *tribu borélienne*, la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de type $]-\infty,\, x\,]$, avec $x \in \mathbb{R}$

- ⋆ par union dénombrable d'intervalles
- ⋆ par passage au complémentaire.

La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est notée $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

Tout intervalle $]-\infty,\, x\,]$ est appelé *générateur* de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. Toute élément de $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ est dit *partie borélienne*.

Exemple 1.2. : calcul de parties boréliennes.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le singleton $\{x\}$ est une partie borélienne.
Par stabilité par intersection dénombrable : soient $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{]-\infty,\, x - \frac{1}{n}\,]} \cap\,]-\infty,\, x + \frac{1}{n}\,] = \{x\}\,.$$

(2) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. L'intervalle semi-ouvert $[x, y[$ est-il une partie borélienne ?
Par stabilité par union : soient $x,\ y \in \mathbb{R}\ /\ y < x$.

$$]-\infty,\, x\,] \cap \overline{]-\infty,\, y\,]} = \,]\,y,\, x\,]\,.$$

(3) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. L'intervalle fermé $[x, y]$ est-il une partie borélienne ?

$]-\infty, y] \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$	car cette partie de $\mathbb{R}$ est un générateur
$]x, +\infty[\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$	par passage au complémentaire dans $\mathbb{R}$ du générateur $]-\infty, x]$
$]x, y] \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$	par union de deux parties boréliennes
$[x, y] \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$	par union de deux parties boréliennes :$\{x\}\cup]x, y]$

1.2 Variable aléatoire réelle.(V.A.R.)

Définition 1.2. : soit $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Soit $X : U \to \mathbb{R}$, une application.
L'application X est appelée *variable aléatoire réelle* si et seulement si l'image réciproque de toute partie borélienne de $\mathbb{R}$ est un évènement, c-à-d un élément de $\mathcal{T}$.

1.3 Loi de probabilité d'une V.A.R.

Définition 1.3. : loi de probabilité.
Soit X, une V.A.R.sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$.
On appelle *loi de probabilité de* X (ou *distribution de* X), l'application :

$$\mathbb{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{\mathbb{R}} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & p(X^{-1}(A)) \end{array} \right.$$

Théorème 1.1. $\mathbb{P}$ est une probabilité.

Démonstration. $\mathbb{P}$ est positive, additive et totale. À faire seule. □

Remarque 1.1. Abus de notation à bien comprendre
⋆ Soit $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. $\mathbb{P}(A) = p(X \in A)$.
⋆ Soit $a \in \mathbb{R}$. $\mathbb{P}(\{a\}) = p(X = a)$.

Exemple 1.3. lancer deux dés équilibrés.
Définissons deux VAR X et G sur le même espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$.

— Modèle : tirer deux fois avec remise dans une urne à 6 boules.
— Univers fini : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et $\mathrm{card}(U) = 36$.
— Tribu : $\mathcal{T} = \mathcal{P}(U)$.
— Probabilité uniforme : $p \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & [0,1] \\ \{(a,b)\} & \mapsto & \frac{1}{36} \end{array} \right.$.
— V.A.R *somme* :
$X \left| \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \right.$

V.A.R *gain* :
$G \left| \begin{array}{cccl} U & \to & \mathbb{R} & \\ (a,b) & \mapsto & 1 & \text{si } (a,b) \in C \\ & & -1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$.
avec
$C = \{(1,1), (1,2), (2,1), (5,6), (6,5), (6,6)\}$.

— Images directes de U par chacune des V.A.R. :

$X(U) = [\![2, 12]\!]$

$G(U) = \{-1, 1\}$

— Exemples de calculs de probabilité :

$p(X = 4) = p(\{(1,3), (3,1), (2,2)\}) = \dfrac{3}{36}$

$p(X = 1) = p(\emptyset) = 0$

$p(G = 4) = p(\emptyset) = 0$

$p(G = 1) = p(C) = \dfrac{6}{36}$

2 Quelques lois de référence sur un univers discret.

2.1 Loi de Bernoulli.

Définition 2.1. Soit $q \in]0,1[$
Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre q sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$ si sa loi de probabilité est :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ p(X = x) = \begin{cases} q & \text{si } x = 1 \\ 1-q & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, q)$.
Modèle d'urne : un tirage d'une boule dans une urne contenant des boules blanches selon la proportion q et des boules noires selon la proportion $(1-q)$.

Signification du paramètre : q : probabilité de l'événement *succès* dans le schéma de Bernoulli.
Rôle de la V.A.R. X compte *les* boules blanches.

Exemple 2.1. La probabilité de panne du réacteur n°i d'un avion multi-réacteur lors d'un vol transatlantique est $q(0 < q < 1)$.
Soit $(U, \mathcal{P}(U), p)$ avec $U = \{en\ panne,\ fonctionnel\}$ $\quad p \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(U) & \to & \mathbb{R} \\ \{en\ panne\} & \mapsto & q \end{array} \right.$

$$\begin{array}{rcl} U & \xrightarrow{X_i} & \mathbb{R} \\ & & \\ en\ panne & \mapsto & 1 \\ fonctionnel & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccll} \mathcal{T}_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\mathbb{P}} & \mathbb{R} & \\ & & 0 & \text{si } A \cap \{0,1\} = \emptyset \\ A & \mapsto & q & \text{si } A \cap \{0,1\} = \{1\} \\ & & 1-q & \text{si } A \cap \{0,1\} = \{0\} \\ & & 1 & \text{si } A \cap \{0,1\} = \{0,1\} \end{array}$$

2.2 Loi binomiale.

Définition 2.2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\ q \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et q sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$ si sa loi de probabilité est :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ p(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x} & \text{si } x \in [\![0, n]\!] \\ & \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$.
Modèle d'urne : n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant des boules blanches selon la proportion q et des boules noires selon la proportion $(1-q)$.

Signification des paramètres :
q : probabilité de l'événement *succès* dans un schéma de Bernoulli.
n : nombre de répétitions indépendantes de ce même schéma de Bernoulli.
Rôle de la V.A.R. X compte les boules blanches.

Exemple 2.2. Un avion quadri-réacteur a besoin de deux moteurs pour voler.
La probabilité de panne d'un réacteur lors d'un vol transatlantique est $q(0 < q < 1)$, en supposant les pannes des réacteurs indépendantes les unes des autres.
Soit $(U, \mathcal{P}(U), p)$, pour $i \in [\![1, 4]\!]$, la V.A.R. de Bernoulli $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, q)$ indique si le réacteur n°i est en panne.
Sur $(U^4, \mathcal{P}(U^4), p_4)$ avec $p_4 \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(U^4) & \to & \mathbb{R} \\ \{(e_1, e_2, e_3, e_4)\} & \mapsto & p(\{e_1\})p(\{e_2\})p(\{e_3\})p(\{e_4\}) \end{array} \right.$

La variable $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$ compte le nombre de panne pour 4 répétitions indépendantes de la même expérience de Bernoulli.

$$\begin{aligned}
X(U^4) &= [\![0, 4]\!] \\
\text{Evenement} \quad A : & \quad \textit{"l'avion ne tombe pas en panne"} \\
p_4(A) &= p_4(X \leq 2) = p_4(X=0) + p_4(X=1) + p_4(X=2) \\
&= \binom{4}{0} q^0 (1-q)^4 + \binom{4}{1} q^1 (1-q)^3 + \binom{4}{2} q^2 (1-q)^2 \\
&= (1-q)^4 + 4q(1-q)^3 + 6q^2(1-q)^2 = (1-q)^2(1+2q+3q^2)
\end{aligned}$$

2.3 Loi de Poisson.

Définition 2.3. Soit $\lambda > 0$.
Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$ si sa loi de probabilité est :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
Signification du paramètre λ : .... nombre moyen de l'événement *succès* sur une période donnée.

Rôle de la V.A.R. X compte les boules blanches.

Exemple 2.3. Dans une journée, environ 50 voyageurs se trompent de sens en prenant une ligne de métro à Paris.
Quelle est la probabilité que 20 personnes se trompent aujourd'hui ?
Le nombre de voyageurs n'est pas borné : on répète donc indéfiniment le même schéma de Bernoulli *se tromper/ ne pas se tromper*
Les voyageurs sont supposés se déplacer indépendamment les uns des autres.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(50)$ totalise le nombre de voyageurs s'étant trompé de sens.

$$p(X = 20) = e^{-50} \frac{50^{20}}{20!} \sim 7.5 \times 10^{-7}$$

2.4 Loi hypergéométrique.

Définition 2.4. Soient $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $n \in [\![0, N]\!]$ $q \in]0, 1[$.
Une variable aléatoire X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et q si sa loi de probabilité est :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{Nq}{x}\binom{N(1-q)}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{si } x \in [\![0, \ Nq]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, q)$.
Modèle d'urne :
n tirages <u>simultanés</u> d'une boule dans une urne contenant N boules dont des boules blanches selon la proportion initiale q et des boules noires selon la proportion initiale $(1 - q)$.
Signification des paramètres :

N : borne finie du nombre de répétitions possibles.
q : probabilité de l'événement *succès* au premier tirage.
n : nombre de répétitions non indépendantes de schémas de Bernoulli différents.
Rôle de la V.A.R. X compte les boules blanches.

Exemple 2.4.
Un comité ministériel de 15 experts doit décider s'il faut, ou non, imposer un stage en cycle prépa.intégrée comme dans les autres prépa. Trois d'entre eux y sont favorables mais le ministre de l'Éducation ignore lesquels. Il demande à quatre spécialistes de lui expliquer leurs positions et il se rangera à l'avis de la majorité.
Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de majorité ?
Quelle est la probabilité que le ministre opte pour l'introduction d'un stage en prépa. intégrée ?

Soit X la V.A.R. comptant les avis favorables : $X \hookrightarrow \mathcal{H}(15, 4, \frac{1}{5})$.
L'univers U est l'ensemble des 15-listes dont 3 composantes sont égales à "oui".
U étant l'univers des parties de 4 réponses parmi 15, $X(U) = [\![0, 3]\!]$

$$\text{Évènement} \quad \textit{Pas de majorité} \quad p(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{12}{2}}{\binom{15}{4}} \sim 0.145$$

$$\text{Évènement} \quad \textit{Stage opté} \quad p(X>2) = p(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{12}{1}}{\binom{15}{4}} = \frac{12}{\binom{15}{4}} \sim 0.009$$

2.5 Loi géométrique.

Définition 2.5. Soit $q \in]0,1[$.
Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $q \in]0,1[$ sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$ si sa loi de probabilité est : **Notation :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$.

Modèle d'urne :
tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant N boules dont des boules blanches selon la proportion initiale q et des boules noires selon la proportion initiale $(1-q)$.
Signification du paramètre : q probabilité de l'événement *succès* du même schéma de Bernoulli lors des répétitions indépendantes.
Rôle de la V.A.R. X donne le rang d'apparition de la première boule blanche.

Exemple 2.5. Chouchou ne mange que des smarties de couleur verte.
Si un bonbon d'une autre couleur sort du tube, Chouchou le remet dans le tube, agite le tube et ressaie.
Il est quasi-certain d'être satisfait en trois ou quatre fois.

www.generation-souvenirs.com

- ⋆ Modèle d'urne : tirer n fois successivement avec remise dans une urne ayant une proportion de $\frac{2}{11}$ boules vertes. Une éventualité résulte de n répétitions indépendantes du schéma de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{11}$.
- ⋆ Univers : $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0,1\}^n$ ensemble des $n-$uplets 1 codant l'éventualité *"boule verte"* et 0 sinon.
- ⋆ Tribu : $\mathcal{T} = \mathcal{P}(U)$
- ⋆ Probabilité : $p \left| \begin{array}{l} \mathcal{T} \to \mathbb{R} \\ \{(x_1, \dots, x_n)\} \mapsto \left(\frac{2}{11}\right)^{\sum x_k} \left(\frac{9}{11}\right)^{n-\sum x_k} \end{array} \right.$
- ⋆ V.A.R : X indique le rang d'apparition de la première boule verte : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{2}{11})$
  $X \left| \begin{array}{l} U \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \min\{k \ / \ \sum_{i=1}^{k} x_i = 1\} \end{array} \right.$
- ⋆ Image directe : $X(U) = \mathbb{N}$
- ⋆ Probabilité de l'événement $(X \leq 4)$:

$$\begin{aligned} p(X \leq 4) &= p\left(\bigsqcup_{x=1}^{4} (X = x)\right) = \sum_{x=1}^{4} p(X = x) \\ &= \sum_{x=1}^{4} \left(\frac{9}{11}\right)^{x-1} \frac{2}{11} = \frac{2}{11} \sum_{x=0}^{3} \left(\frac{9}{11}\right)^{x} \\ &= 1 - \left(\frac{9}{11}\right)^{4} \sim 0,45 \end{aligned}$$

- ⋆ Conclusion : un évènement est quasi-certain si sa probabilité est supérieur à 0.9.
  Chouchou se trompe car $p(X \leq 4) \ll 0.9$.

2.6 Approximation d'une loi par une autre.

Dans cette section, on justifie comment les répétitions indépendantes d'une même expérience de Bernoulli, selon certaines contraintes sur les paramètres, permet d'approcher une loi hypergéométrique par une loi binomiale puis une loi binomiale par une loi de Poisson.

2.6.1 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale.

Théorème 2.1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, q)$ sur un espace probabilisé par p.
Si n est négligeable devant N alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, q)$ peut être approchée par $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$

$$\boxed{p(X = k) = \frac{\binom{Nq}{k}\binom{N(1-q)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \sim \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}}$$

Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, q)$ sur un espace probabilisé par p.

$$\begin{aligned}
p(X = k) &= \frac{\binom{Nq}{k}\binom{N(1-q)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{(N-n)!}{N!} \times \frac{(Nq)!}{(Nq-k)!} \times \frac{(N(1-q))!}{(N(1-q)-n+k)!} \\
&= \binom{n}{k} \times \frac{N^{N-n}\prod_{j=0}^{N-n-1}(1-\frac{n-j}{N})}{N^N\prod_{j=0}^{N-1}(1-\frac{j}{N})} \times \frac{(Nq)^{Nq}\prod_{j=0}^{Nq-1}(1-\frac{j}{Nq})}{(Nq)^{Nq-k}\prod_{j=0}^{Nq-k-1}(1-\frac{k+j}{Nq})} \times \frac{(N(1-q))^{N(1-q)}\prod_{j=0}^{N(1-q)-1}(1-\frac{j}{N(1-q)})}{(N(1-q))^{N(1-q)-n+k}\prod_{j=0}^{N(1-q)-n+k-1}(1-\frac{n-k+j}{N(1-q)})} \\
&\underset{N\to+\infty}{\sim} \binom{n}{k} \times N^{-n} \times (Nq)^k \times (N(1-q))^{n-k} \\
&\underset{N\to+\infty}{\sim} \binom{n}{k} \times q^k \times (1-q)^{n-k} \\
&\underset{N\to+\infty}{\sim} p(Y = k) \quad \text{avec } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.6. Approximation de $X \hookrightarrow \mathcal{H}(120, 10, 0.12)$ par $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0.12)$.

Un tapuscrit de 120 pages a 12% de ses pages qui contiennent une erreur.
Un extrait de 10 pages est diffusé auprès des annonceurs.
Quelle est la probabilité qu'au plus 2 pages de l'extrait contiennent une erreur ? La variable X dénombre les pages erronées dans l'extrait. Donc la probabilité cherchée est : $p(X \leq 2)$.

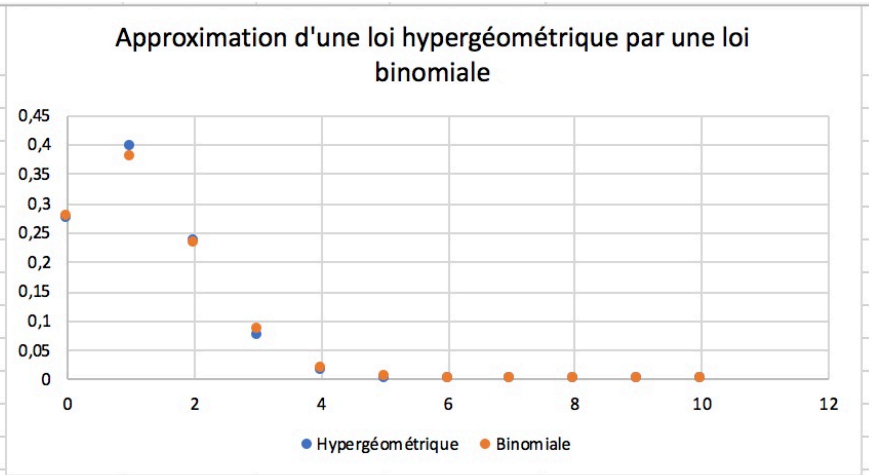
Calcul exact

$$\begin{aligned}
p(X \leq 2) &= p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) \\
&= \frac{\binom{14}{0}\binom{106}{10} + \binom{14}{1}\binom{106}{9} + \binom{14}{2}\binom{106}{8}}{\binom{120}{10}} \\
&\sim 0.907
\end{aligned}$$

Calcul approché

$$\begin{aligned}
p(X \leq 2) &\sim p(Y=0) + p(Y=1) + p(Y=2) \\
&\sim \binom{10}{0}0.88^{10} + \binom{10}{1}0.12 \times 0.88^9 + \binom{10}{2}0.12^2 0.88^8 \\
&\sim 0.891
\end{aligned}$$

k	Hypergéométrique	Binomiale
0	0,274437893	0,27850098
1	0,396095928	0,37977406
2	0,236445018	0,23304317
3	0,076426673	0,08474297
4	0,014712134	0,02022275
5	0,001747976	0,00330918
6	0,000128528	0,00037604
7	5,70442E-06	2,9302E-05
8	1,43982E-07	1,4984E-06
9	1,82834E-09	4,5406E-08
10	8,62424E-12	6,1917E-10



2.6.2 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Théorème 2.2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$ sur un espace probabilisé par p.

Si $\begin{cases} n \geq 30 \\ q \leq 0.1 \\ nq \leq 15 \end{cases}$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$ peut être approchée par $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(nq)$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$

$$\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \sim e^{-nq}\frac{(nq)^k}{k!}}$$

Démonstration. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$ sur un espace probabilisé par p.

$$\begin{aligned}
p(X=k) &= \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} q^k (1-q)^{n-k} \qquad = \frac{q^k}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}(1-q)^{n-k} \\
&= \frac{q^k}{k!}\frac{n^n \prod_{j=0}^{n-1}(1-\frac{j}{n})}{n^{n-k}\prod_{j=0}^{n-k-1}(1-\frac{k+j}{n})}(1-q)^{n-k} \\
&= \frac{q^k}{k!}\frac{n^n \prod_{j=0}^{n-1}(1-\frac{j}{n})}{n^{n-k}\prod_{j=0}^{n-k-1}(1-\frac{k+j}{n})}(1-q)^{n(1-\frac{k}{n})} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{q^k}{k!} n^k e^{n\ln(1-q)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(nq)^k}{k!} e^{-nq} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nq}\frac{(nq)^k}{k!} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} p(Y=k) \quad \text{avec } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(nq)
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.7. Approximation de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(120, 0, .08)$ par $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(9.6)$.

Un manuscrit comporte 120 pages. La probabilité de trouver au moins une erreur dans une page est égale à 0.08.
Quelle est la probabilité de dénombre 10 pages contenant au moins une erreur ?
La variable X dénombre les pages contenant au moins une erreur.
Les pages étant supposées indépendantes les unes des autres, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(120, 0.08)$. La probabilité cherchée est : $p(X = 10)$.

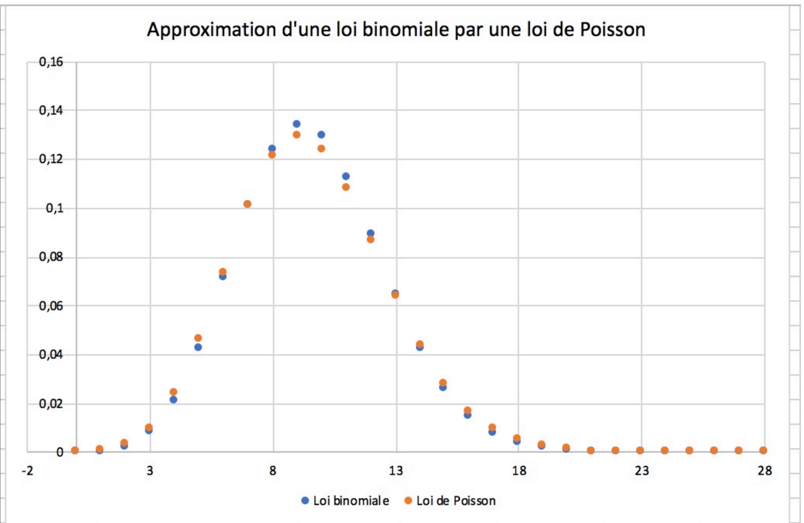
Calcul exact

$$\begin{aligned} p(X = 10) &= \binom{120}{10} 0.08^{10} \times 0.92^{110} \\ &\sim 0.1295 \end{aligned}$$

Calcul approché

$$\begin{aligned} p(X = 102) &\sim p(Y = 10) \\ &\sim e^{-9.6} \times \frac{9.6^{10}}{10!} \\ &\sim 0.1241 \end{aligned}$$

k	Loi binomiale	Loi de Poisson
0	4,51377E-05	6,77287E-05
1	0,000471002	0,000650196
2	0,002436923	0,00312094
3	0,008334983	0,009987009
4	0,021199848	0,023968821
5	0,04276839	0,046020135
6	0,07128065	0,073632217
7	0,100944026	0,100981326
8	0,123985597	0,121177591
9	0,134167989	0,129256097
10	0,129501276	0,124085853
11	0,112609805	0,108293108
12	0,088945426	0,086634487
13	0,06425489	0,063976236
14	0,04270356	0,043869419
15	0,026241028	0,028076428
16	0,0149745	0,016845857
17	0,007965974	0,009512955
18	0,003963746	0,005073576
19	0,001850353	0,002563491
20	0,000812546	0,001230476
21	0,000336458	0,000562503
22	0,000131657	0,000245456



3 Variables aléatoires indépendantes

Définition 3.1. Soient X, Y, deux V.A.R. sur un e.p. $(U, \mathcal{T}, p)$.

- ⋆ X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toutes parties boréliennes A et B :

$$p((X \in A) \cap (Y \in B)) = p(X \in A) \times p(Y \in B)$$

- ⋆ L'application $\left| \begin{array}{c} (\mathcal{T}_{\mathbb{R}})^2 \to \mathbb{R} \\ (A, B) \mapsto p((X \in A) \cap (Y \in B)) \end{array} \right.$ est appelée **loi conjointe du couple** (X, Y).

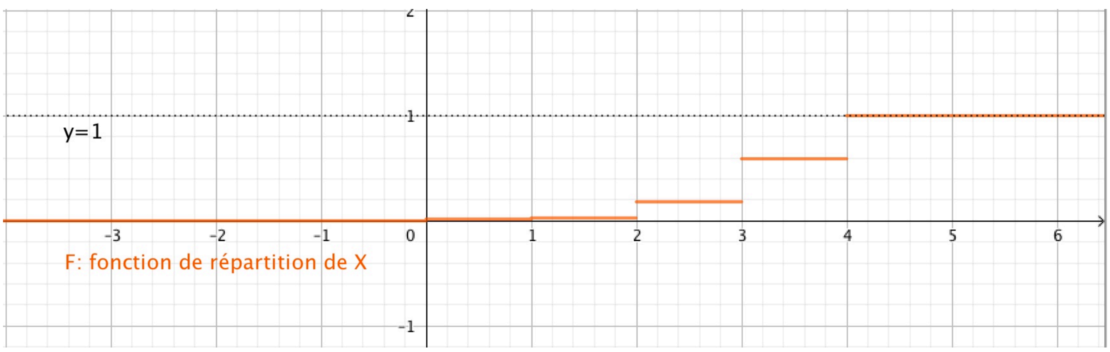
4 Caractérisation d'une variable aléatoire.

Définition 4.1. : fonction de répartition.
Soit X, une V.A.R. sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$ de loi $\mathbb{P}$.

L'application $F \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0, 1] \\ x & \mapsto & \underbrace{\mathbb{P}(] - \infty, x])}_{p(X \leq x)} \end{array} \right.$ est appelée *fonction de répartition de X*.

Exemple 4.1. $\star$ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{8}{10})$, une V.A.R. sur $(U, \mathcal{T}, p)$ qui compte les invités. $X(U) = [\![0, 4]\!]$. Déterminons F sa fonction de répartition. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= p(X \leq x) = p(X \in]-\infty, x] \cap [\![0,4]\!]) \\
\text{Si } x < 0 \quad \text{alors} \quad & F(x) = p(\emptyset) = 0 \\
\text{Si } 0 \leq x < 1 \quad \text{alors} \quad & F(x) = p(X = 0) = \left(\frac{2}{10}\right)^4 = 0.0016 \\
\text{Si } 1 \leq x < 2 \quad \text{alors} \quad & F(x) = p(X \in \{0,1\}) = F(0) + p(X = 1) \\
& = 0.0016 + 4\left(\frac{8}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right)^3 = 0.0272 \\
\text{Si } 2 \leq x < 3 \quad \text{alors} \quad & F(x) = F(1) + p(X = 2) \\
& = 0.0272 + 6\left(\frac{8}{10}\right)^2\left(\frac{2}{10}\right)^2 = 0.1808 \\
\text{Si } 3 \leq x < 4 \quad \text{alors} \quad & F(x) = p(X \in \{0,1,2,3\}) = F(2) + p(X = 3) \\
& = 0.1808 + 4\left(\frac{8}{10}\right)^3\left(\frac{2}{10}\right) = 0.5904 \\
\text{Si } 4 \leq x \quad \text{alors} \quad & F(x) = p(X \in \{0,1,2,3,4\}) = F(3) + p(X = 4) \\
& = 0.5904 + \left(\frac{8}{10}\right)^4 = 1
\end{aligned}
$$



Courbe de F, fonction de répartition de la V.A.R. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{8}{10})$

Propriété 4.1. de la fonction de répartition.
Soit F, la fonction de répartition de X, une V.A.R. sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$.
L'application F vérifie les propriétés suivantes :

(1) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

(3) Pour tout réel x, F est continue à droite de x :
i.e. : $\lim\limits_{h \to 0^+} F(x + h) = F(x)$;

(4) Pour tout réel x, F admet une limite à gauche de x :
$p(X = x) = F(x) - \lim\limits_{t \to x^-} F(t)$.

Démonstration. (1) Montrons que F est croissante sur $\mathbb{R}$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= p(X \in]-\infty, y]) - F(x) \\ &= p(X \in]-\infty, x] \sqcup \underbrace{]x, y]}_{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}}) - F(x) \\ &= \underbrace{p(X \in]-\infty, x])}_{F(x)} + p(X \in]x, y]) - F(x) \\ &= p(X \in]x, y]) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)}$$

(2) Montrons que $\lim\limits_{+\infty} F = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} F = 0$.
Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ une suite réelle croissante divergente.

La suite d'événements boréliens $(]-\infty, x_n])_n$ est croissante pour l'inclusion.

On a montré que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(]-\infty, x_n]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}]-\infty, x_n]\right) \quad \text{c-à-d} \quad \lim_{n \to +\infty} F(x_n) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$$

Soit $(y_n)_n \in \mathbb{R}$ une suite réelle décroissante divergente.

La suite d'événements boréliens $(]-\infty, y_n])_n$ est décroissante pour l'inclusion.

On a montré que : $\lim\limits_{n \to -\infty} \mathbb{P}(]-\infty, y_n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{-\infty}]-\infty, y_n]\right) \quad$ c-à-d $\quad \lim\limits_{n \to -\infty} F(y_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(3) On admet que, $x \in \mathbb{R}$ étant fixé, $\lim\limits_{h \to +0} F(x+h) = F(x)$
Il faut considérer une suite $(]x, x+h_n])_n$ décroissante pour l'inclusion et appliquer le théorème.

(4) Montrons que, pour tout x, F admet une limite finie à gauche et qu'on retrouve la loi de X.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = p(]-\infty, x]) = p(]-\infty, x[\cup \{x\})$$

$$\begin{aligned} \text{D'une part} \quad p(]-\infty, x[) &= \underbrace{F(x) - p(X = x)}_{\in \mathbb{R}} \\ \text{D'autre part} \quad p(]-\infty, x[) &= \lim_{t \to x^-} \underbrace{p(]-\infty, t])}_{F(t)} \\ \text{Donc :} \quad \lim_{t \to x^-} F(t) &= F(x) - p(X = x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad p(X = x) = F(x) - \lim_{t \to x^-} F(t)}$$

□

Exemple 4.2. Soient X, Y deux V.A.R. sur $(U, \mathcal{T}, p)$

⋆ X une V.A.R. constante.

Définition	Image directe	Loi	Répartition
$X \left\vert \begin{array}{l} U \to \mathbb{R} \\ e \mapsto 1 \end{array} \right.$	$X(U) = \{1\}$	$\mathbb{P}_X \left\vert \begin{array}{l} \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ \{x\} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin X(U) \\ p(X = x) \text{ si } x \in X(U) \end{cases} \end{array} \right.$	$F_X \left\vert \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases} \end{array} \right.$

⋆ Y une V.A.R. de Bernoulli. Soit $A \in \mathcal{T} \setminus \{U, \emptyset\}$

$Y \left\vert \begin{array}{l} U \to \mathbb{R} \\ e \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } e \in \overline{A} \\ 1 \text{ si } e \in A \end{cases} \end{array} \right.$	$Y(U) = \{0, 1\}$	$\mathbb{P}_Y \left\vert \begin{array}{l} \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ \{x\} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin Y(U) \\ p(\overline{A}) \text{ si } x = 0 \\ p(A) \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$	$F_Y \left\vert \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ p(\overline{A}) \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leq x \end{cases} \end{array} \right.$

5 $\mathbb{R}$-algèbre des variables aléatoires

Théorème 5.1.
Soit F, l'ensemble des V.A.R. définies sur le même espace $(U, \mathcal{T}, p)$.

- ⋆ $(F, +, \times)$ est un anneau.
- ⋆ $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-ev.
- ⋆ $(F, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

$$\forall X, Y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ (\lambda.X) \times (\mu.Y) = (\lambda \times \mu).(X \times Y)$$

5.1 Addition de variables aléatoires.

Définition 5.1. Addition de variables aléatoires.
La loi interne d'addition de V.A.R. est notée $+$: $\underbrace{p(X + Y \leq x)}_{\text{fonction de répartition de } X+Y} = p(\{e \in U / X(e) + Y(e) \leq x\})$

$$p(X + Y \leq x) = p(\bigcup_{y \in \mathbb{R}} (Y \leq y) \cap (X \leq (x - y)))$$

Exemple 5.1. Expérience aléatoire : lancer de trois dés équilibrés.

- ⋆ Univers : $U = [\![1, 6]\!]^3$.
- ⋆ Espace uniformément probabilisé : $(U, \mathcal{P}(U), p)$ où $\forall e = (x_1, x_2, x_3) \in U, p(\{e\}) = \dfrac{1}{216}$.
- ⋆ VAR pour chaque dé : X_k indique si la face "6" est sortie ou non sur le dé n°k($k \in \{1, 2, 3\}$)

$$X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \frac{1}{6}) \qquad \text{Loi de } X_k : \left\vert \begin{array}{ll} \mathcal{T}_{\mathbb{R}} & \to \mathbb{R} \\ \{x\} & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{6} \text{ si } x = 1 \\ \frac{5}{6} \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

- ⋆ **Question :** exprimer en fonction de X_1, X_2, X_3 la V.A.R. Y qui dénombre les "6" sur les 3 dés et donner sa loi.

  Variable de loi binomiale *somme* : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

5.2 Multiplication externe d'une variable aléatoire par un réel.

Définition 5.2. Multiplication externe d'une variable aléatoire par un réel.
La loi externe de multiplication de V.A.R. par un scalaire est notée . :

$$\text{Si } \lambda > 0 \text{ alors } \qquad \underbrace{p(\lambda.X \leq x)}_{\text{fonction de répartition de} \lambda.X\times Y} \qquad = p(X \leq \frac{x}{\lambda})$$

$$\text{Si } \lambda = 0 \text{ alors } \mathbb{P}(\tilde{0} \leq x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemple 5.2. Expérience aléatoire : lancer de trois dés équilibrés.

- ⋆ Univers : $U = [\![1, 6]\!]^3$
- ⋆ Espace uniformément probabilisé : $(U, \mathcal{P}(U), p)$
- ⋆ VAR pour chaque dé : X_k indique le nombre de points sur le dé n°$k (k \in \{1, 2, 3\})$

$$X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 6]\!]) \qquad \text{Loi de } X_k : \left| \begin{array}{ll} \mathcal{T}_{\mathbb{R}} & \to \mathbb{R} \\ \{x\} & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{6} \text{ si } x \in [\![1, 6]\!] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

- ⋆ **Question :** exprimer en fonction de X_1, X_2, X_3 la V.A.R. Y qui calcule le nombre moyen de points sur les 3 dés puis calculer $p(Y = 2)$.

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{3} \cdot (X_1 + X_2 + X_3) \\ p(Y = 2) &= p\left(\frac{1}{3} \cdot (X_1 + X_2 + X_3) = 2\right) = p(X_1 + X_2 + X_3 = 6) \\ &= p\left(\underbrace{\{(2, 2, 2)\}}_{\text{card=1}} \sqcup \underbrace{\{(4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4)\}}_{\text{card=4}} \sqcup \underbrace{\{(3, 2, 1), (3, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)\}}_{\text{card=6}}\right) \\ &= \frac{10}{216} \end{aligned}$$

5.3 Multiplication de variables aléatoires.

Définition 5.3. Multiplication de variables aléatoires.
La loi interne de multiplication de V.A.R. est notée $\times$: $\underbrace{\mathbb{P}(X \times Y \leq x)}_{\text{fonction de répartition de } X \otimes Y} \quad = p(\{e \in U / X(e) \times Y(e) \leq x\})$

$$p(X \times Y \leq x) = p(\bigcup_{a \times b \leq x} (X \leq a) \cap (Y \leq b))$$

Exemple 5.3. Même espace et même V.A.R. X_k que dans l'exemple précédent.

- ⋆ La valeur moyenne d'un dé est $\frac{7}{2}$.

⋆ La V.A.R. Z calcule l'écart quadratique à cette valeur moyenne du dé n°1. Calculer $p(Z = 1)$.

$$\begin{aligned} Z &= \left(X_1 - \frac{7}{2}\cdot\tilde{1}\right)^2 \underbrace{=}_{\text{Abus de notation}} \left(X_1 - \frac{7}{2}\right)^2 \\ p(Z=1) &= p\left((X_1 - \frac{7}{2}\cdot\tilde{1})^2 = 1\right) = p\left((X_1 - \frac{9}{2}\cdot\tilde{1}) \times (X_1 - \frac{5}{2}\cdot\tilde{1}) = 0\right) \\ &= p\left(\underbrace{(X_1 = \frac{9}{2}) \cup (X_1 = \frac{5}{2})}_{\text{Incompatibles}}\right) \\ &= p\left(X_1 = \frac{9}{2}\right) + p\left(X_1 = \frac{5}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

6 Paramètres d'une variable aléatoire discrète : espérance, variance, covariance.

Définition 6.1. Espérance d'une V.A.R. discrète.
Soit X, une V.A.R. discrète sur $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé. Soit I est une partie de $\mathbb{N}$ et $X(U) = (x_i)_{i\in I}$.

⋆ Si la série $\sum_{i\in I} x_i p(X = x_i)$ converge commutativement alors on appelle *espérance* de X sa somme.

⋆ L'espérance de X est notée $E(X)$.

Remarque 6.1. À propos de l'espérance.

⋆ Si I fini alors $\sum_{i\in I} x_i p(X = x_i)$ toujours définie : $E(X)$ existe.

⋆ Si I infini alors, si $E(X)$ est définie, nécessairement elle est invariante pour toute permutation des termes de la série $\sum_{i\in I} x_i p(X = x_i)$. Or les termes de $\sum_{i\in I} x_i p(X = x_i)$ ne sont pas nécessairement positifs. D'où la condition de convergence commutative.

⋆ Interprétation géométrique de l'espérance : soit la famille pondérée : $\mathcal{F} = \{(x_i, p(X = x_i)), i \in I\}$.
$E(X) = \sum_{i\in I} x_i p(X = x_i)$ est le **barycentre** de $\mathcal{F}$.
Si X donne la mesure d'une grandeur dans une unité choisie alors $E(X)$ donne la **mesure** moyenne de cette **même grandeur**.

Théorème 6.1. Soit X, une V.A.R. discrète sur $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Soit I une partie de $\mathbb{N}$ indiçant les éléments de $X(U)$.
$E(X)$ existe si et seulement si $\sum_{i\in I} x_i p(X = x_i)$ converge absolument.

Exemple 6.1.

⋆ V.A.R. suivant une loi de Bernoulli : soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, q)$ $(0 < q < 1)$.
$X(U) = [\![0, 1]\!]$ (fini) donc $\boxed{E(X) \text{ existe}}$. **Calculons** $E(X)$ **:**

$$\begin{aligned} E(X) &= 0p(X = 0) + 1p(X = 1) \\ &= 0 + q \\ E(X) &= q \end{aligned}$$

Ex. : soit X indiquant l'évènement *naissance d'un garçon.* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, 0.48)$.

$E(X)$ mesure le taux moyen de naissance d'un garçon.
⋆ V.A.R. suivant une loi de Poisson : soit $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

$X(U) = \mathbb{N}$ donc il faut étudier la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} kp(Y=k) = \sum_{k\geq 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
Pour $k > 0$, le terme général est strictement positif. Appliquons le critère de D'Alembert :

$$\frac{(k+1)p(Y=k+1)}{kp(Y=k)} = (1+\frac{1}{k})\frac{\lambda}{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{k} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Donc $\boxed{E(Y) \text{ existe}}$. **Calculons $E(Y)$:**

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda\lambda^{k-1}}{k(k-1)!} \\ &= \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}_{1} \\ E(Y) &= \lambda \end{aligned}$$

Ex : Y mesure la durée d'attente au péage. $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(20s)$.
$E(Y)$ mesure la durée moyenne d'attente au péage.

Définition 6.2. Variance d'une V.A.R.
Soit X, une V.A.R. discrète sur l'espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$ telle que $X(U) = \{x_i, i \in I\}$ et $E(X)$ existe.

- ⋆ Si la série $\displaystyle\sum_i (x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$ converge alors on appelle *variance* de X sa somme.
- ⋆ La variance de X est notée $V(X)$.
- ⋆ Le réel $\sqrt{V(X)}$ est appelé *écart type* de X et est noté $\sigma(X)$.

Remarque 6.2. À propos des grandeurs et unités.
Si X donne la mesure d'une grandeur algébrique exprimée dans une certaine unité alors $\sigma(X)$ et $E(X)$ donnent des mesures théorique de cette même grandeur dans la même unité.

6.1 Théorèmes relatifs aux paramètres d'une V.A.R.

Théorème 6.2. Théorème des bornes.
Soit X,une V.A.R. discrète sur $(U, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.
Si $X(U)$ est borné alors $E(X)$ existe.

Démonstration. Supposons que X soit bornée.
Donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall e \in U \qquad |X(e)| \leq M$.
Dans le cas où X est discrète, alors toute somme partielle est majorée et :

$$\sum_{x\in X(U)} |x|p(X=x) \leq M \underbrace{\sum_{x\in X(U)} p(X=x)}_{1}$$

□

Exemple 6.2. Soit $(U, \mathcal{T}, p)$ un e.p.
Soit X V.A.R. sur U telle que $X(U) = \mathbb{N}$.
On pose : $Y = \dfrac{1}{(X+1)(X+2)}$.
Y est un e V.A.R. car l'ens. des V.A.R. sur $(U, \mathcal{T}, p)$ forme une $\mathbb{R}$-algèbre.
On sait : $X(U) = \mathbb{N}$. On déduit : $Y(U) = \left\{ \dfrac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
$Y(U)$ est infini dénombrable borné (entre 0 et $\dfrac{1}{2}$).
Donc $E(Y)$ existe.

Définition 6.3. Moment d'ordre 2.

- ⋆ S'il existe, le réel $\sum_{i \in I} {x_i}^2 p(X = x_i)$ est appelé *moment d'ordre* 2 de X.
- ⋆ Il est noté $E(X^2)$ désignant aussi l'espérance de la V.A.R. X^2.

Théorème 6.3. Théorème du moment d'ordre 2.
Soit X,une V.A.R. discrète sur $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé
$E(X)$ et $V(X)$ existent si et seulement si $E(X^2)$ existe.

Démonstration. Soit X discrète.
Cas où $X(U)$ est fini : $X(U) = x_1, \ldots, x_N$**.**

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=1}^{N} p(X = x_k)(x_k - E(X))^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} p(X = x_k)x_k^2 - 2E(X)\sum_{k=1}^{N} p(X = x_k)x_k + E^2(X)\sum_{k=1}^{N} p(X = x_k) \\
&= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) \\
&= E(X^2) - E^2(X) \Leftrightarrow \boxed{E(X^2) = V(X) + E^2(X)}
\end{aligned}$$

Cas où $X(U)$ est fini : $X(U) = (x_k)\mathbb{N}$**.**
On combine des suites des sommes partielles convergentes.

- ⋆ Supposons l'existence de $E(X)$ et de $V(X)$.

$$\begin{aligned}
V(X) &= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p(X = x_k)(x_k - E(X))^2}_{V_n} \\
E(X) &= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p(X = x_k)x_k}_{E_n}
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum_{k=1}^{n} p(X = x_k)x_k^2 = V_n + E_n^2$: terme de suite convergente vers $E(X^2)$.

⋆ Supposons l'existence de $E(X^2)$.

$$\forall x_k \in X(U) \qquad |x_k| \leq x_k^2 + 1 \text{ donc } p(X = x_k)|x_k| \leq p(X = x_k)(x_k^2 + 1)$$

$$\text{donc} \sum_{k=1}^{n} p(X = x_k)|x_k| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p(X = x_k)x_k^2}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(X^2)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p(X = x_k)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

$$\text{donc} \sum_{k\in\mathbb{N}}^{n} p(X = x_k)|x_k| \text{ converge.}$$

donc $E(X)$ existe.

donc $V(X)$ existe. (par combinaison linéaire de 2 suites convergentes.)

□

Théorème 6.4. Relation de Huygens.
Soit X,une V.A.R. discrète sur $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Si $E(X^2)$ existe alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Démonstration. Corollaire du théorème précédent. □

Théorème 6.5. Théorème de linéarité.
Soient X, Y,deux V.A.R. discrètes sur $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé. Soient a, b, deux réels.
Si $E(X)$, $E(Y)$ existent alors $E(a.X + b.Y) = aE(X) + bE(Y)$
Si $E(X^2)$ existe alors $V(a.X) = a^2V(X)$.

Remarque 6.3. Applications de la linéarité de l'espérance à des cas particuliers.

1. Espérance d'une loi binomiale.
   Soient $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$ et $(X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1, q))_{1\leq i\leq n}$ telles que : $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   On sait : $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $E(X_i) = q$.
   Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nq$.
2. Espérance d'une V.A.R. centrée.
   Soit X d'espérance $E(X)$.
   La V.A.R. $Y = X - E(X).\tilde{1}$ est notée par abus $X - E(X)$. On dit que Y est une V.A.R. centrée.
   Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = E(X - E(X)) = 0$.
   La V.A.R. Y est dite **centrée**, i.e. son espérance est nulle.
3. Espérance d'une V.A.R. au carré.
   Soit X de paramètres $E(X)$ et $V(X)$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Par linéarité de l'espérance : $\forall a \in \mathbb{R}$, $E(a.X) = a \times E(X)$ et $V(a.X) = a^2 \times V(X)$.
4. Espérance d'une V.A.R. réduite.
   Soit X de variance $V(X)$ non nulle.
   La V.A.R. $Y = \frac{1}{\sigma(X)}.X$ est dite **réduite**.
   Par linéarité de l'espérance : $V(\frac{1}{\sigma(X)}.X) = 1$.
   La V.A.R. $\frac{1}{\sigma(X)}.X$ est dite **réduite**, i.e. sa variance est l'unité.
5. Espérance d'une V.A.R. centrée et réduite.
   Soit X de paramètres $E(X)$ et $V(X)$.
   La V.A.R. $\frac{1}{\sigma(X)}.(X - E(X))$ est dite **centrée et réduite**.

6.2 Indépendance de deux V.A.R. discrètes. Covariance.

Définition 6.4. : V.A.R. discrètes indépendantes.
Soient X, Y deux V.A.R. sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$.
X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toutes parties boreliennes A et B :

$$p((X \in A) \cap (Y \in B)) = p(X \in A) \times p(Y \in B).$$

Définition 6.5. Cas des V.A.R. discrètes.
X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tous réels a et b :

$$p((X = a) \cap (Y = b)) = p(X = a) \times p(Y = b).$$

Théorème 6.6. Théorème d'indépendance.
Soient X et Y deux V.A.R. sur $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Définition 6.6. Covariance.
Soient X et Y, deux V.A.R. sur $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé d'espérance $E(X)$ et $E(Y)$.

- ⋆ On appelle *covariance de* la différence $E(XY) - E(X)E(Y)$.
- ⋆ On note $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Remarque 6.4. Reformulation du théorème d'indépendance.
Si X et Y sont indépendantes alors $\text{cov}(XY) = 0$.
La réciproque est fausse.

6.3 Exemples de calculs de covariance dans le cas discret.

Exemple 6.3. Contre-exemple à la réciproque.
On lance deux fois une pièce équilibrée : $0 \equiv\ face$ et $1 \equiv\ pile$.
On pose : $U = \{0,1\}^2$ $\mathcal{T} = \mathcal{P}(U)$ p uniforme.
On considère deux variables aléatoires X, Y V.A.R. sur $(U, \mathcal{T}, p)$.

- ⋆ X rend le nombre de pile moins 1.
- ⋆ Y rend la différence entre les nombres de pile au 2^d et au 1^r lancer.
- ⋆ XY est constante. En effet :

éventualité	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
image par X	-1	0	0	1
image par Y	0	1	-1	0
image par XY	0	0	0	0

- ⋆ Covariance nulle : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \times 0 = 0$.
- ⋆ X, Y liées :
  $p((X = -1) \cap (Y = 0)) = p(\{(0,0)\}) = \dfrac{1}{4}$
  $p(X = -1)p(Y = 0) = p(\{(0,0)\})p(\{(0,0),(1,1)\}) = \dfrac{1}{8}$
  On a montré qu'il existe deux évènements, $(X = -1)$ et $(Y = 0)$ dont la probabilité conjointe diffère du produit des probabilités.

Exercice 6.1. On lance deux dés équilibrés.
Soit $(U, \mathcal{T}, p)$ l'espace probabilisé uniformément :

$$U = [\![1,6]\!]^2 \qquad \mathcal{T} = \mathcal{P}(U) \qquad p \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & \mathbb{R} \\ E & \mapsto & \dfrac{\operatorname{card}(E)}{36} \end{array} \right.$$

Soient X, X_1, X_2 des variables aléatoires définies sur $(U, \mathcal{T}, p)$:

$$X \left| \begin{array}{c} U \to \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto |a-b| \end{array} \right. \qquad X_1 \left| \begin{array}{c} U \to \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto \dfrac{|a-b|+(a-b)}{2} \end{array} \right. \qquad X_2 \left| \begin{array}{c} U \to \mathbb{R} \\ (a,b) \mapsto \dfrac{|a-b|-(a-b)}{2} \end{array} \right.$$

(1) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
(2) Déterminer la loi de $X_1 X_2$.
(3) Justifier que X admet une espérance puis calculer $E(X)$.
(4) Par symétrie des rôles des dés, on admet que : $E(X_2) = E(X_1)$.
Déduire l'espérance de X_1 puis la covariance de (X_1, X_2). Interpréter.

Théorème 6.7. Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$.
On suppose que X et Y admettent une variance non nulle.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $E(Y - (a \cdot X + b)) = 0$.
$V(Y - (a \cdot X + b))$ est minimale pour :

$$\boxed{\begin{cases} a = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)} \\[2ex] b = E(Y) - aE(X) \end{cases}}$$

Par souci de symétrie, on introduit le coefficient ρ, dit *coefficient de régression linéaire* :

$$\boxed{\begin{cases} a = \dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\rho \\[2ex] b = E(Y) - aE(X) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \\[2ex] \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \\[1ex] \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \end{cases}}$$

Démonstration. D'abord on exprime $V(Y - (aX + b))$ puis on minimise.

$$V(Y - (aX+b)) = \underbrace{E[\,(Y-(aX+b))^2\,]}_{(1)} - \underbrace{(\,E(Y-(aX+b))\,)^2}_{(2)}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{E[\,(Y-(aX+b))^2\,]}_{(1)} &= E(Y^2 - 2Y(aX+b) + (aX+b)^2) \\
&= \underbrace{E(Y^2)}_{V(Y)+E(Y)^2} -2a \underbrace{E(XY)}_{\operatorname{cov}(X,Y)+E(X)E(Y)} -2bE(Y) + \underbrace{E((aX+b)^2)}_{V(aX+b)+E(aX+b)^2} \\
&= V(Y) + E(Y)^2 - 2a\,[\operatorname{cov}(X,Y) + E(X)E(Y)] - 2bE(Y) + a^2V(X) + a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2 \\
&= [V(X) + E(X)^2]a^2 + 2[bE(X) - \operatorname{cov}(X,Y) - E(X)E(Y)]a + [V(Y) + E(Y)^2 - 2bE(Y) + b^2] \\
&\quad \text{trinôme en } a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(\,E(Y-(aX+b))\,)^2}_{(2)} &= (E(Y) - aE(X) - b)^2 \\
&= E(X)^2a^2 + 2[\,bE(X) - E(X)E(Y)\,]a + [E(Y)^2 + b^2 - 2bE(Y)] \quad \text{trinôme en } a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{V(Y-(aX+b))}_{(1)-(2)} &= V(X)a^2 - 2\operatorname{cov}(X,Y)a + V(Y) \\
&= V(X)\left[\left(a - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}\right)^2 + \underbrace{V(Y) - \frac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{V^2(X)}}_{\text{terme constant}}\right] \quad \text{mise sous forme canonique}
\end{aligned}$$

La variance $V(Y - (aX + b))$ est minimale pour :

$$\boxed{a = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{V(X)}}$$

Il reste à déterminer b en continuant d'utiliser la linéarité de l'espérance.
Par hypothèse : $E(Y - (a \cdot X + b)) = 0$.
Donc :

$$\boxed{b = E(Y) - aE(X)}$$

Finalement, la combinaison linéaire réduite en Y de X et Y dont la variance est minimale est :

$$\boxed{\underbrace{(Y - E(Y))}_{\text{centration}} - \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\rho \times \underbrace{(X - E(X))}_{\text{centration}} \qquad \text{avec } \rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$$

Remarque 6.5. Si on réduit la combinaison linéaire réduite en X de X et Y, on obtient de façon analogue :

$$\boxed{(X - E(X)) - \frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}\rho \times (Y - E(Y)) \qquad \text{avec } \rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}}$$

□

6.4 Paramètres de V.A.R. suivant une loi de de référence.

Théorème 6.8. Espérance et variance.
Soit X une V.A.R. définie sur un espace probabilisé $(\mathcal{U}, \mathcal{T}, p)$.

⋆ Lois de Rademacher ($a \in \mathbb{R}^*, q \in]0,1[$).
Soit une expérience de Bernoulli :

$$U = \{e, s\} \qquad \mathcal{T} = \mathcal{P}(U) \qquad p \left| \begin{array}{ll} \mathcal{T} & \to \mathbb{R} \\ \{s\} & \mapsto q \\ \{e\} & \mapsto (1-q) \end{array} \right. \qquad X \left| \begin{array}{ll} U & \to \mathbb{R} \\ s & \mapsto a \\ e & \mapsto -a \end{array} \right.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{R}(a,q)$ alors : $X(U) = \{a, -a\}$ et $E(X) = a(2q-1)$ et $V(X) = 4a^2q(1-q)$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{R}(a, \frac{1}{2})$ alors : $X(U) = \{a, -a\}$ et $E(X) = 0$ et $V(X) = a^2$.

⋆ Lois de Bernoulli ($q \in]0,1[$).
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,q)$ alors : $X(U) = \{0,1\}$ et $E(X) = q$ et $V(X) = q(1-q)$.

⋆ Lois binomiales.($n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ q \in]0,1[$)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$ alors : $X(U) = [\![0,n]\!]$ et $E(X) = nq$ et $V(X) = nq(1-q)$.

⋆ Lois de Poisson ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).
Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors : $X(U) = \mathbb{N}$ et $E(X) = V(X) = \lambda$.

⋆ Lois hypergéométriques ($q \in]0,1[$).
Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,q)$ alors : $X(U) = [\![0,Nq]\!]$ et $E(X) = nq$ et $V(X) = \dfrac{N-n}{N-1}nq(1-q)$.

⋆ Lois géométriques ($q \in]0,1[$).
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ alors : $X(U) = \mathbb{N}$ et $E(X) = \dfrac{1}{q}$ et $V(X) = \dfrac{1-q}{q^2}$.

Exercice 6.2. Tentatives téléphoniques. EXERCICE RÉSOLU.
Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
On suppose que les correspondants répondent indépendamment les uns des autres et on pose q, la probabilité qu'un correspondant réponde $(0 < q < 1)$.
La secrétaire rappelle les correspondants qu'elle ne réussit pas à joindre au cours du premier appel.
Elle se demande combien elle peut espérer joindre effectivement de correspondants par cette procédure.

— **Modélisation de l'expérience**.
Un appel téléphonique est un schéma de Bernoulli. Posons : $U = \{oui, non\}, \mathcal{T} = \mathcal{P}(U), p \left| \begin{array}{ll} \mathcal{T} & \to [0,1] \\ \{oui\} & \mapsto q \end{array} \right.$.

— **Répétition de ce schéma de Bernoulli**.
Le schéma de Bernoulli est répété n fois à la première étape. L'espace probabilisé est $(U^n,\ \mathcal{P}(U^n),\ p_X = p^n)$.

Si k correspondants ont répondu à la 1^e étape, le schéma de Bernoulli est répété $n-k$ fois à la seconde étape. L'espace probabilisé est $(U^{n-k},\ \mathcal{P}(U^{n-k}),\ p_Y = p^{n-k})$

— **Définition de deux V.A.R**.
Soit X la V.A.R. comptant les correspondants ayant répondu à la première étape : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$.
Soit Y la V.A.R. comptant les correspondants ayant répondu à la seconde étape : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n-k,q)$ si k correspondants ont répondu à la première étape.

— **Définition de la V.A.R somme**.
On appelle Z la V.A.R qui dénombre tous les correspondants ayant répondu.
Par le sens donné à X et Y, on a : $Z = X+Y$. Z prend ses valeurs dans $\{0,\cdots,n\}$.

— **Détermination de la loi de Z**.
Soit $k \in \{0,\cdots,n\}$: $$p(Z=k) = p(\bigcup_{j=0}^{k}(X=j)\cap(Y=k-j)).$$

$$p(Z=k) \underbrace{=}_{\text{proba. conditionnelle}} \sum_{j=0}^{k} p((Y=k-j)|(X=j))p(X=j).$$

$$p(Z=k) \underbrace{=}_{\text{lois binomiales}} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\binom{n-j}{k-j} q^{k-j}(1-q)^{n-k}}_{\text{Loi de } Y} \underbrace{\binom{n}{j} q^j(1-q)^{n-j}}_{\text{Loi de } X}.$$

$$p(Z=k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} q^{k-j}(1-q)^{n-k} \frac{n!}{(n-j)!j!} q^j(1-q)^{n-j}.$$

$$p(Z=k) = q^k(1-q)^{2n-k} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!(n-k)!} \frac{n!}{k!j!}(1-q)^{-j} = q^k(1-q)^{2n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(1-q)^{-j}.$$

$$p(Z=k) = \binom{n}{k} q^k(1-q)^{2n-k} \underbrace{\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-q)^{-j}}_{\text{binôme de Newton}} = \binom{n}{k} q^k(1-q)^{2n-k} \underbrace{(1+\frac{1}{1-q})^k}_{\text{binôme de Newton}}.$$

$$p(Z=k) = \binom{n}{k} q^k(1-q)^{2n-k}(\frac{2-q}{1-q})^k = \binom{n}{k}(q(2-q))^k((1-q)^2)^{n-k}.$$

En remarquant que : $1-q(2-q) = (1-q)^2$, il apparaît que Z suit une loi binomiale : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ q(2-q))$.

— Conclusion : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q(2-q))$ donc $E(Z) = nq(2-q)$ et $V(Z) = nq(2-q)(1-q)^2$.
Si $n = 100$ et $q = 0.3$, on peut espérer joindre de vive voix 51 correspondants après deux séries d'appels téléphoniques. Cette espérance varie d'environ 5 personnes lorsqu'on répète la procédure. Ainsi, on peut *le plus souvent* espérer joindre entre 46 et 56 personnes sur 100 par une procédure de deux appels enchaînés.

7 Intervalle de fluctuation.

7.1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Théorème 7.1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Soit X une V.A.R. sur l'espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$ telle que X est non constante et admet un moment d'ordre 2.
Soit k dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$p(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Démonstration. Soit la partie borélienne $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x - E(X)| \geq k\sigma\}$

$$\forall x \in A \qquad |x - E(X)| \geq k\sigma \Leftrightarrow |x - E(X)|^2 \geq k^2 V(X)$$

$$\forall x \in A \qquad |x - E(X)|^2 \geq k^2 V(X) \Leftrightarrow \underbrace{p(X = x)\,|x - E(X)|^2 \geq k^2 V(X) p(X = x)}_{\text{positivité de } p}$$

$$\underbrace{\sum_{x \in A} p(X = x)\,|x - E(X)|^2}_{\text{Variance restreinte à } A} \geq k^2 V(X) \underbrace{\sum_{x \in A} p(X = x)}_{\text{additivité de } p}$$

$$V(X) \geq \sum_{x \in A} p(X = x)\,|x - E(X)|^2 \geq k^2 V(X) p(X \in A)$$

$$V(X) \geq k^2 V(X) p(X \in A)$$

$$p(X \in A) \leq \frac{1}{k^2}$$

□

7.2 Loi faible des grands nombres et intervalle de fluctuation.

Théorème 7.2. Loi faible des grands nombres.
Soient n V.A.R. $X_1, \cdots, X_n$ sur le même espace probabilisé.
Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, de même espérance μ et de même variance σ^2 alors :

$$\forall a > 0 \qquad p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq a\right) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}$$

Si n tend vers $+\infty$ alors la probabilité que la V.A.R. moyenne s'écarte de μ de plus de a tend vers 0.
L'intervalle complémentaire est appelé **intervalle de fluctuation de la variable** $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$:

$$[\mu - a \quad \mu + a]$$

Démonstration. Soit la partie borélienne $A = \{x \in \mathbb{R} \;/\; \left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq a\}$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} E\left(X_k\right) \qquad \text{(linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{1}{n}\times n\mu = \mu \\
V\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= E\left(\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right) - E^2\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + 2\sum_{1\leq k<j\leq n}^{n} E(X_kX_j)\right) - \mu^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + 2\sum_{1\leq k<j\leq n}^{n} E(X_k)E(X_j)\right) - \mu^2 \qquad \text{par indépendance de } X_k \text{ et } X_j \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n(\sigma^2+\mu^2) + 2\binom{n}{2}\mu^2\right) - \mu^2 \qquad \text{par indépendance des } X_k \text{ et } X_j \\
&= \frac{1}{n}\left((\sigma^2+\mu^2) + (n-1)\mu^2\right) - \mu^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Il reste à appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev en posant : $a = \underbrace{\frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}}_{k} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$\begin{aligned}
p(A) &\leq \frac{\sigma^2}{na^2} \qquad \text{ce qui équivaut à } p(\bar{A}) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{na^2} \\
p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq a\right) &\leq \frac{\sigma^2}{na^2}
\end{aligned}$$

□

7.3 Intervalle de fluctuation : le problème du Duc de Toscanne.

Exemple 7.1. Intervalle de fluctuation de la variable *moyenne* d'un échantillon de taille n.
Soient n V.A.R. X_i suivant $\mathcal{B}(1, q)$ indépendantes deux à deux.
On a donc : $\forall i, E(X_i) = q$, $V(X_i) = q(1-q)$. On applique le théorème précédent :
$Y = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i$ vérifie : $E(Y) = q$ et $V(Y) = \frac{q(1-q)}{n}$.
On cherche le réel k tel que $p(|Y - q| \geq k\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}) \leq 0.05$.
Par l'inégalité de Tchebychev, il suffit de prendre k vérifiant $\frac{1}{k^2} \leq 0.05$ donc $k \geq \sqrt{20}$.
Avec $k \approx 5$ et $V(X_i) = q(1-q) \leq \frac{1}{4}$, on obtient : $p(q - \frac{5}{2\sqrt{n}} \leq Y \leq q + \frac{5}{2\sqrt{n}}) > 0.95$.
Ce qui signifie que plus de 95 fois sur 100, la variable prend une valeur entre les deux bornes de l'intervalle.

Exercice 7.1. Le problème du duc de Toscane.

> *Pourquoi quand on effectue trois lancers de dé, obtient-on plus souvent la somme dix que la somme neuf bien que celles -ci soient pareillement obtenues de six manières différentes ?*

$$\begin{aligned}
\text{Univers} &: \quad U = [\![1,6]\!]^3 \\
\text{Tribu} &: \quad \mathcal{T} = \mathcal{P}(U) \\
\text{Probabilité} &: \quad \forall (a,b,c) \in U \;\; p(\{(a,b,c)\}) = \frac{1}{216} \\
\text{V.A.R.} &: \quad \forall (a,b,c) \in U \;\; S((a,b,c)) = a+b+c \\
{\color{blue}(S=9)} &= \quad \{(a,b,c) \in U \;/\; S((a,b,c)) = 9\} \\
{\color{red}(S=10)} &= \quad \{(a,b,c) \in U \;/\; S((a,b,c)) = 10\}
\end{aligned}$$

Point de vue de Galilée.

$${\color{blue}9 = \underbrace{6+2+1}_{\text{... éventualités}} = \underbrace{5+3+1}_{\text{...}} = \underbrace{5+2+2}_{3} = \underbrace{4+4+1}_{\text{...}} = \underbrace{4+3+2}_{\text{...}} = \underbrace{3+3+3}_{\text{...}}}$$

$${\color{red}10 = \underbrace{6+3+1}_{\text{... éventualités}} = \underbrace{6+2+2}_{\text{...}} = \underbrace{5+4+1}_{\text{...}} = \underbrace{5+3+2}_{\text{...}} = \underbrace{4+4+2}_{\text{...}} = \underbrace{4+3+3}_{\text{...}}}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(S=9) &= \ldots \\
p(S=9) &= \ldots \\
nF_9 &\hookrightarrow \ldots \\
E_9 = E(F_9) &= \ldots \\
\sigma_9 = \sigma(F_9) &= \frac{\sqrt{25 \times 191}}{216\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(S=10) &= \ldots \\
p(S=10) &= \ldots \\
(U, <(S=10)>, p) &: \quad n \text{ itérations} \\
nF_{10} &\hookrightarrow \ldots \\
E_{10} = E(F_{10}) &= \ldots \\
\sigma_{10} = \sigma(F_{10}) &= \ldots
\end{aligned}$$

Point de vue BT.

Combien de fois faut-il répéter l'expérience pour distinguer $(S=9)$ et $(S=10)$?
Appliquons IBT sur chaque V.A.R. :

$${\color{blue}p(F_9 \in [E_9 - a\sigma_9; \underbrace{E_9 + a\sigma_9}_{\sup_9}]) \geq 1 - \frac{1}{a^2}}$$

$${\color{red}p(F_{10} \in [\underbrace{E_{10} - a\sigma_{10}}_{\inf_{10}}; E_{10} + a\sigma_{10}]) \geq 1 - \frac{1}{a^2}}$$

Résolvons : pour $1 - \dfrac{1}{a^2} = 0.9$, on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\sup_9 < \inf_{10}$$

(1) On résout en a sur $\mathbb{R}_+^*$: $1 - \dfrac{1}{a^2} = 0.9$. $\boxed{a = \ldots\ldots}$

(2) On résout en n sur $\mathbb{N}$: $\sup_9 < \inf_{10}$

$$a(\sigma_9 + \sigma_{10}) < E_{10} - E_9 \Leftrightarrow \boxed{n > 74100}$$

Peu plausible que, même passionné par le lancer de dé, un duc répète 74100 fois l'expérience. Il y a un phénomène de convergence en loi qui *accélère* la tendance de F vers $E(F)$: ... vers le TCL !

8 Composition d'une variable aléatoire discrète par une fonction.

8.1 Cas d'une variable aléatoire.

Théorème 8.1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$.
Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective. Alors la variable aléatoire composée $\Phi \circ X$, vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{R} \qquad p\left(\Phi \circ X = z\right) = p\left(X = \Phi^{-1}(z)\right)$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que Φ est injective.
Il suffit de comparer les ensembles images réciproques $X^{-1}(\{\Phi^{-1}(z))\})$ et $\Phi \circ X)^{-1}(\{z\})$.

$$\begin{array}{rcl}
\exists ! a \in \mathbb{R} & / & \Phi(a) = z \Leftrightarrow \Phi^{-1}(z) = a \quad \text{par bijectivité de } \Phi \\
X^{-1}(\{\Phi^{-1}(z))\}) & = & \{e \in U \ / X(e) = a\} \\
\text{Soit } e \in X^{-1}(\{\Phi^{-1}(z))\}) & & \Phi \circ X(e) = \Phi(a) = z \text{ donc } e \in \Phi \circ X)^{-1}(\{z\}) \\
\text{c-à-d} & & X^{-1}(\{\Phi^{-1}(z))\}) \subset \Phi \circ X)^{-1}(\{z\}) \\
\Phi \circ X)^{-1}(\{z\}) & = & \{e \in U \ /\Phi \circ X(e) = z\} \\
\text{Soit } e \in \Phi \circ X)^{-1}(\{z\}) & & \Phi \circ X(e) = z \Leftrightarrow X(e) = \Phi^{-1}(z) \Leftrightarrow X(e) = a \text{ donc } e \in X^{-1}(\{\Phi^{-1}(z)\}) \\
\text{c-à-d} & & \Phi \circ X)^{-1}(\{z\}) \subset X^{-1}(\{\Phi^{-1}(z))\}) \\
\text{Conclusion :} & & (\Phi \circ X)^{-1}(\{z\}) = X^{-1}(\{\Phi^{-1}(z))\})
\end{array}$$

□

Exemple 8.1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$ avec $(n, q) \in \mathbb{N} \times]0, 1[$. Soit $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
p(5X + 2 = z) & = & p\left(X = \dfrac{z-2}{5}\right) \qquad \text{car } t \mapsto 5t + 2 \text{ est bijective sur } \mathbb{R} \\
& = & \begin{cases} \binom{n}{\frac{z-2}{5}} q^{\frac{z-2}{5}} (1-q)^{n - \frac{z-2}{5}} & \text{si } \dfrac{z-2}{5} \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
& = & \begin{cases} \binom{n}{\frac{z-2}{5}} q^{\frac{z-2}{5}} (1-q)^{n - \frac{z-2}{5}} & \text{si } z \in \{5k + 2, k \in [\![0, n]\!]\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{array}$$

8.2 Cas d'un couple de variables aléatoires discrètes.

Théorème 8.2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(U, \mathcal{T}, p)$.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijective.
Alors la loi conjointe du couple de variables aléatoires $\Phi(X, Y)$ est ainsi définie :

$$\forall (z, t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \Phi(x, y) = (z, t) \text{ et } p\left((Z, T) = (z, t)\right) = p\left((X, Y) = \Phi^{-1}(z, t)\right)$$