Automatique
5. Stabilité des systèmes asservis

Sylvie Icart
icart@unice.fr

ELEC 3
Polytech'Nice-Sophia

octobre 2018

Définition

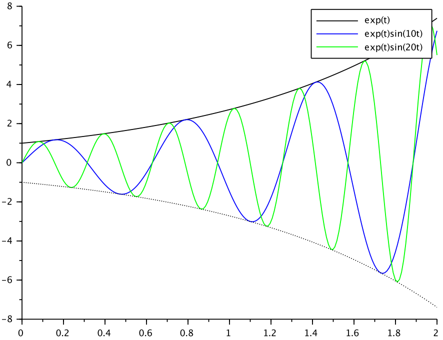
Stabilité EBSB : à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Système de fonction de transfert $G(p)$ est stable

ssi les pôles sont à partie réelle négative.

Réponse impulsionnelle :

$$g(t) = \sum_i \sum a_{i,l} t^l e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \text{ avec } \sigma_i = \Re(p_i), \omega_i = \Im(p_i)$$



Réponse à une entrée quelconque $e(t)$:

$$S(p) = G(p)E(p)$$

$$s(t) = g \star e(t) \text{ avec } \star \text{ produit de convolution}$$

$$f \star g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

- pôles de $S(p) = \{\text{pôles de } G(p)\} \cup \{\text{pôles de } E(p)\}$
- si l'entrée est bornée, les pôles de $E(p)$ sont à $\Re$ négative,
- $s(t)$ ne diverge que si (au moins) un pôle de G(p) est à $\Re > 0$.

Le système *en* BO est EBSB stable ssi pôles de $G(p)$ à $\Re < 0$

Problèmes de ce critère de stabilité :

- critère binaire
- nécessite la connaissance parfaite de la FT
- suppose qu'on sait calculer les pôles (système d'ordre élevé...)
- si le système "vieillit" quid de la validité du critère ?

$\rightarrow$ notion de marge de stabilité

2. Critère algébrique de Routh

Applicable aux systèmes d'ordre élevé, mais pas de marge de stabilité.
Permet de connaître le nombre de racines à partie réelle positive d'un polynôme.
Polynôme de degré 2 :
$a_2(p-p_1)(p-p_2) = a_2(p^2-(p_1+p_2)p+p_1p_2) = a_2p^2-a_2(p_1+p_2)p+a_2p_1p_2$

- p_1p_2 est le produit des racines : si les racines sont complexes conjuguées $p_1p_2 = |p_1|^2 = |p_2|^2$
  si racines réelles, produit positif si racines de même signe
- produit des racines $< 0 \Rightarrow$ un racine réelle positive !
- produit des racines > 0 racines même signe ou complexes conjugués $\Rightarrow$ on regarde la somme.
- $(p_1 + p_2) = 2\Re(p_1) > 0$ si les racines sont à $\Re > 0$.

Polynôme de degré 3 : $a_3(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3) = \dots$

Tableau de Routh

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \quad + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_2	a_0	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_1		a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	*si n pair*		*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}						
p^1							
p^0							

Tableau de Routh1

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \quad + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_2	a_0	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_1		a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	*si n pair*		*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}						
p^1							
p^0							

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

Tableau de Routh2

Soit $D(p) = a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \quad + a_1.p + a_0$, avec $a_n > 0$.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_2	a_0	a_3	a_1
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_1		a_2	a_0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	*si n pair*		*si n impair*	
p^{n-3}	c_{n-3}						
p^1							
p^0							

$$b_{n-2} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad b_{n-4} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

Calcul des éléments du tableau (déterminants)

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \qquad b_{\mathbf{n-i}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{\mathbf{n-i}} \\ a_{n-1} & a_{\mathbf{n-i-1}} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix} \qquad c_{\mathbf{n-j}} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{\mathbf{n-j}} \\ b_{n-2} & b_{\mathbf{n-j-1}} \end{vmatrix}$$

Nombre de racines à $\Re$ positive $=$ nombre de changements de signe dans la première colonne

Exemples :
Problème de la stabilité d'un système en boucle fermée corrigé par un correcteur proportionnel :

$$G_{BF}(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)} = \frac{Kn(p)}{d(p) + Kn(p)}$$

système stable en BF : pôles du système en BF sont à $\Re < 0$
on s'intéresse aux racines de $d(p) + Kn(p) = 0$

Code scilab
`p=poly(0,'p')` // définition de la variable de Laplace
`G=syslin('c',1/(p+3))` // définition de la fonction de transfert G
`K=poly(0,'K'))` // définition de la variable gain K
`routh_t(G,K)` // la table "formelle" de Routh

si on donne une valeur à K, on peut obtenir le nombre de racines à $\Re$ positive : `[rt,rsign]=routh_t(G,3)`

Exemple : Soit $G(p) = \dfrac{K}{p(p^2+p+3)}$. Déterminer la stabilité du sytème en boucle fermée en fonction du gain K.

- on détermine le dénominateur de la FTBF : $D(p) = Kn(p) + d(p) = p^3 + p^2 + 3p + K$
- on forme le tableau de Routh de $D(p)$:

$$
\begin{array}{cccl}
1 & 3 & 0 & \text{(coeff. puissances impaires, ordre décroissant)} \\
1 & K & 0 & \text{(coeff. puissances paires, ordre décroissant)} \\
-\frac{K-3}{1} & -\frac{1\times 0-1\times 0}{1} & & \\
-\frac{1\times 0-(3-k)\times K}{3-K} & 0 & &
\end{array}
$$

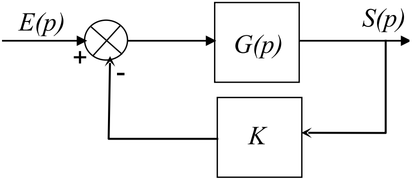
- signe des éléments de la première colonne ...

Le système est stable en BF si $3 - K > 0$.
un trop grand gain déstabilisera le système.

Le critère de Routh appliqué au polynôme $n(p) + d(p)$ (ou $Kn(p) + d(p)$) donne la stabilité du système (corrigé par K) en boucle fermée.

$$G(p) = \frac{n(p)}{d(p)} \qquad G_{BF}(p) = \frac{Kn(p)}{Kn(p) + d(p)}$$

Rmq : K peut-être dans la boucle de retour car même dénominateur pour le système asservi :



3. Critère du revers (critère fréquentiel)

Ce critère est un cas particulier du critère de Nyquist pour les systèmes qui n'ont aucun pôle à $\Re > 0$ en BO.

On se place dans le cas d'un retour unitaire :

$$\{\text{pôles de la FTBF}\} = \{\text{racines de } 1 + G(p) = 0\}$$

On s'intéresse donc aux solutions de $G(p) = -1$

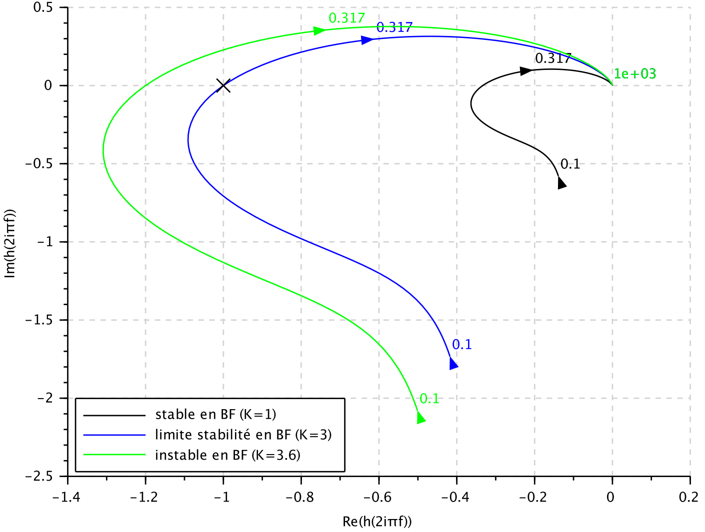
On définit le point critique comme le point $-1 = -1 + 0j = |1|e^{-j\pi}$

On utilise les lieux fréquentiels $p = j\omega$

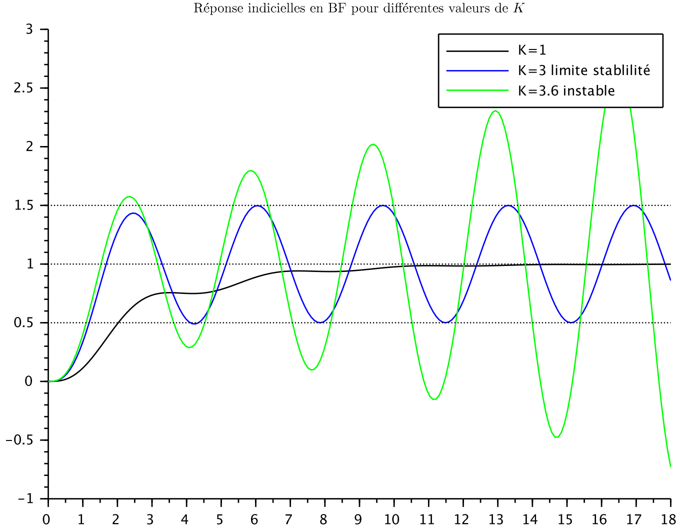
Critère du revers : plan de Nyquist

Soit un système stable en boucle ouverte, alors ce système est stable en boucle fermée à retour unitaire si, en parcourant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des ω croissants, on laisse toujours le point critique à gauche de la courbe.

$$\text{Nyquist}, G(p) = \frac{1}{p(p^2+p+3)}, K = 1; 3; 3.6$$



Réponses indicielles correspondantes



Déterminer les gains statiques en boucle fermée à retour unitaire du système dont la FTBO est $G(p) = \dfrac{1}{3p + p^2 + p^3}$

- si $K = 1$, $H_1(p) = \dfrac{1}{1 + 3p + p^2 + p^3}$
- si $K = 3$, $H_2(p) = \dfrac{3}{3 + 3p + p^2 + p^3}$
- si $K = 3.6$, $H_3(p) = \dfrac{3.6}{3.6 + 3p + p^2 + p^3}$

Tous les $H_i(0)$ existent. Qu'est-ce qui ne va pas ?

`roots(denom(Hi))`

- pôles de H_1 : $\begin{pmatrix} -0.3194485 + 1.6331702i \\ -0.3194485 - 1.6331702i \\ -0.3611031 \end{pmatrix}$
- pôles de H_2 : $\begin{pmatrix} 8.327 \times 10^{-17} + 1.7320508i \\ 8.327 \times 10^{-17} - 1.7320508i \\ -1 \end{pmatrix}$
- pôles de H_3 : $\begin{pmatrix} 0.0697895 + 1.7760042i \\ 0.0697895 - 1.7760042i \\ -1.1395790 \end{pmatrix}$

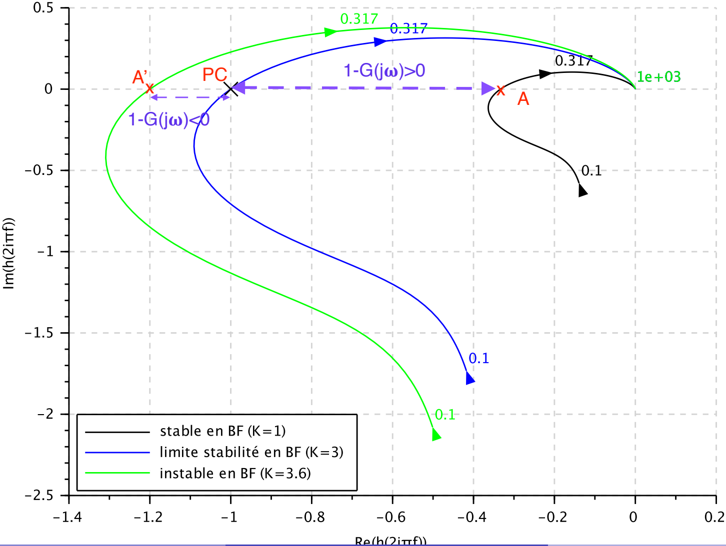
H_1 : tous les pôles à $\Re < 0$,
H_2 : 2 pôles imaginaires purs ...(précision scilab près...)
H_3 : deux pôles à $\Re > 0$!

Une petite variation de K peut entrainer la perte de stabilité en BF !

- ➜ Notion de marge de gain et de phase
  - Marge de gain : "distance en gain" par rapport au point critique
  - Marge de phase : "distance en phase" par rapport au point critique

une marge de gain et une marge de phase positives (pour la BO) garantissent un système stable en BF à retour unitaire !

$$\text{Nyquist}, G(p) = \frac{1}{p(p^2+p+3)}, K = 1; 3; 3.6$$



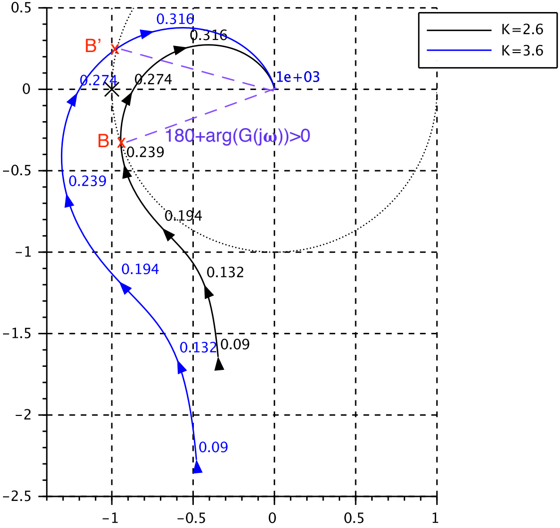
Soit ω_π la pulsation pour laquelle $\arg(G(j\omega_\pi)) = -180°$ (point A)
En valeur algébrique ("naturelle"), il faut regarder si $1 - G(j\omega_\pi) \lesseqgtr 0$.
Plus facile de regarder le rapport des distances : $\dfrac{1}{|G(j\omega_\pi)|} \lesseqgtr 1$;
la "distance en gain" au point critique est définie en dB par :

$$\Delta G = -20 \log |G(j\omega_\pi)|$$

Et la phase ? on regarde quand $|G(j\omega_1)| = 1$ (point B)

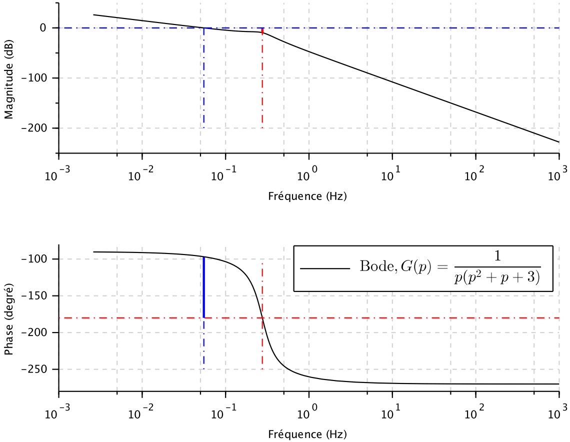
$$\Delta\varphi = 180 + \arg(G(j\omega_1))$$

$$\text{Nyquist}, G(p) = \frac{1}{p(p^2+p+3)}$$



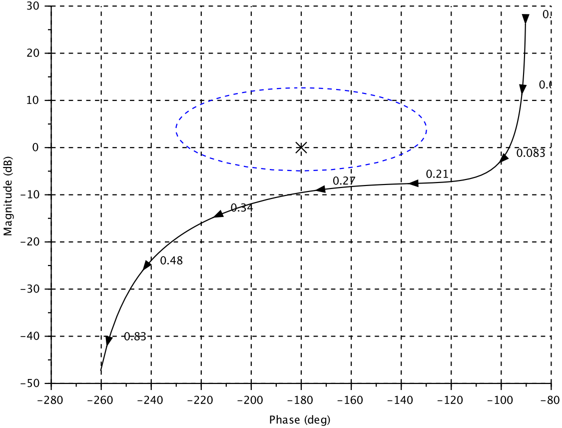
Lecture de marges de gain et phase peu pratiques dans le plan de Nyquist. Quid des plans de Bode et Black ?

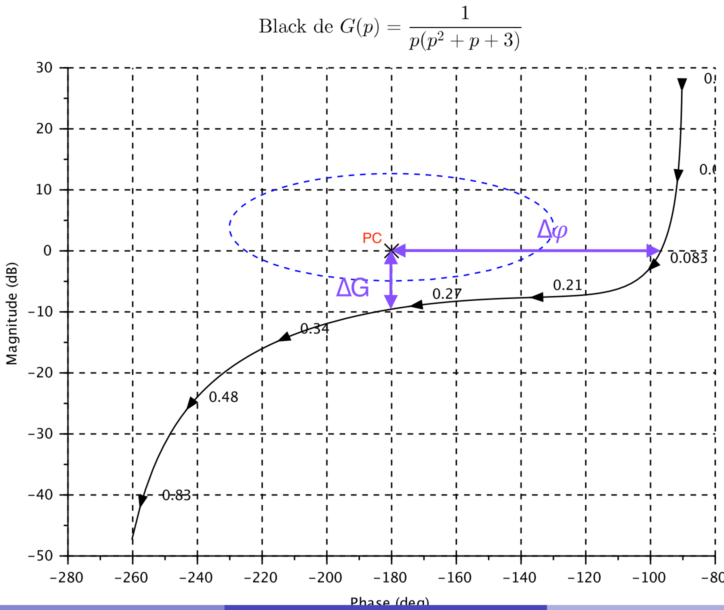
`show_margins(G,'bode')`



Rmq : on ne peut pas choisir f_{min} et f_{max}

Black de $G(p) = \dfrac{1}{p(p^2+p+3)}$




Black de $G(p) = \dfrac{1}{p(p^2+p+3)}$
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
Magnitude (dB)
−280
−260
−240
−220
−200
−180
−160
−140
−120
−100
−80
Phase (deg)
PC
ΔG
Δφ
0.083
0.21
0.27
0.34
0.48
0.83

Marge de gain :

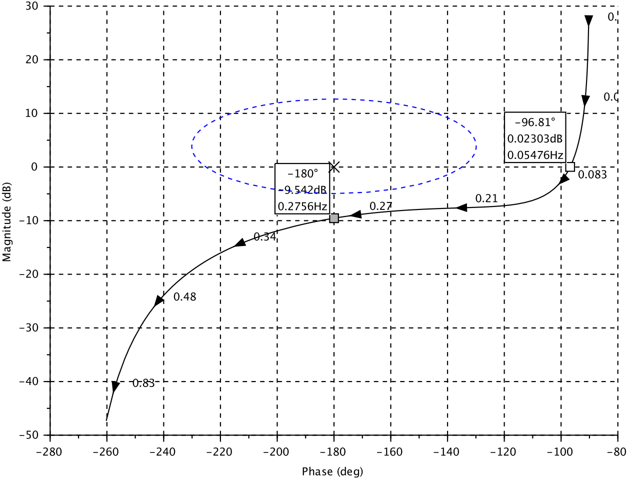
```
[deltaG,frpi]=g_margin(G)
deltaG = 9.5424251
frpi = 0.2756644
```

Marge de phase :

```
[deltaphi,fr1]=p_margin(G)
deltaphi = 83.179421
fr1 = 0.0548474
```

Rmq : Black(G) courbe paramétrée en fréquences (et pas en pulsations)

Black de $G(p) = \dfrac{1}{p(p^2+p+3)}$



Connaissant les lieux de $G(p) = \dfrac{1}{3p + p^2 + p^3}$ et les marges précédentes, calculer la marge de gain et la marge de phase de :

- $G_{0.1}(p) = \dfrac{0.1}{3p + p^2 + p^3}$
- $G_{10}(p) = \dfrac{10}{3p + p^2 + p^3}$
- $G_2(p) = \dfrac{2}{3p + p^2 + p^3}$
- $G_3(p) = \dfrac{3}{3p + p^2 + p^3}$

que pouvez-vous en déduire sur ces sytèmes en BO ? en BF ?

Soit $H(p) = \dfrac{K}{p(p+1)(p+2)}$

- Déterminer pour quelles valeurs de K le système est stable en boucle fermée à retour unitaire.
- Tracer les diagrammes de Bode asymtotiques de $H(p)$ lorsque $K = 1$.
- En déduire l'allure du diagramme de Black. Pourquoi peut-on en déduire que le système est stable en BF pour $K = 1$?

Soit $T(p) = \dfrac{K}{p + 0.2p^2 + p^3}$

- Tracer les diagrammes de Bode asymtotiques de $T(p)$ lorsque $K = 1$.
- En déduire l'allure du diagramme de Black. Pourquoi dans ce cas ne peut-on pas en déduire que le système est stable en BF pour $K = 1$?