DIM. ESPACE V_0 1

- $\varphi_0 \in V_0$

$$\varphi_0(x) = 1_{[0,1[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\varphi_{0,i} : x \longrightarrow \varphi_0(x-i) \qquad (i \in \mathbb{Z})$

$\downarrow$

$$\forall f \in V_0 \qquad f(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \varphi_0(x-i)$$

Demonstration

Montrer que la famille $(\varphi_{0,0}(x), \varphi_{0,1}(x), \dots \varphi_{0,i}(x))$ est une famille libre

$\downarrow$

Definition FAMILLE LIBRE de fonctions

$\{f_m(t)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est libre si

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m f_m(t) = 0 \longrightarrow \text{implique } a_m = 0 \ \forall m$$

Soit $(l_0, l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}$ et supposons que

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \varphi_{0,i}(x) = 0$$

$\downarrow$

Il faut demontrer que

$$l_0 \varphi_{0,0}(x) + l_1 \varphi_{0,1}(x) + \dots + l_i \varphi_{0,i}(x) = 0$$

$\longrightarrow$

Par exemple on prend $i = 0$

$$\varphi_{0,0}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

$\downarrow$

$\lambda_0 \varphi_{0,0} = 0 \longrightarrow \lambda_0 = 0$

$(\lambda_0 \cdot 1 = 0)$

$\Downarrow$

Em general :

Soit $k \in I = [i, i+1[$ et

$$\varphi_{0,k}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [i, i+1[\\ 0 & sinon \end{cases}$$

$\downarrow$

alors

$$f(x) = \sum_k \lambda_k \varphi_{0,k}(x) = 0 \qquad \forall \lambda_k = 0$$

DIM $V_0 \subset V_1$ ②

V_1 sous-espace V_0

Base V_0

$$\varphi_{0,i} : x \longrightarrow \varphi(x-i) \qquad i \in \mathbb{Z}$$

Base V_1

$$\varphi_{0,j} : x \longrightarrow \varphi_0(x - j/2) \qquad j \in \mathbb{Z}$$

On defini la fonction

$$\varphi'_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall\ \varphi_0(x-i)$ avec $i \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\rightarrow \varphi_0(x-i) = \varphi'_0\left(x - \frac{j}{2}\right) + \varphi'_0\left(x - \left(\frac{j+1}{2}\right)\right)$$

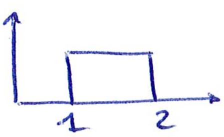
avec $j = 2i$

$\downarrow$

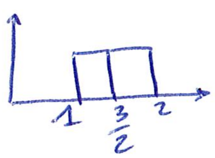
Depuis que chaque $\varphi_{0,i}$ est exprimible à partir de $\varphi'_{0,j}$ alors $\varphi'_{0,j}$ forme une base de V_0

$$\longrightarrow V_0 \subset V_1$$

Exemple



$$\varphi_{0,1} = \varphi_0(x-1) \quad \in V_0$$



$$\varphi_0(x-1) = \varphi'_0(x-1) + \varphi'_0\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Dim 3

Demostrer que

$$\varphi_{m,i}(x) = \varphi_{m+1,2i}(x) + \varphi_{m+1,2i+1}(x) \qquad i \in \mathbb{Z}$$

Demostration

$$\varphi_m(x) = \varphi_0(2^m x)$$

$$\varphi_{m,i}(x) = \varphi_m\left(x - \frac{i}{2^m}\right) = \varphi_0(2^m x - i)$$

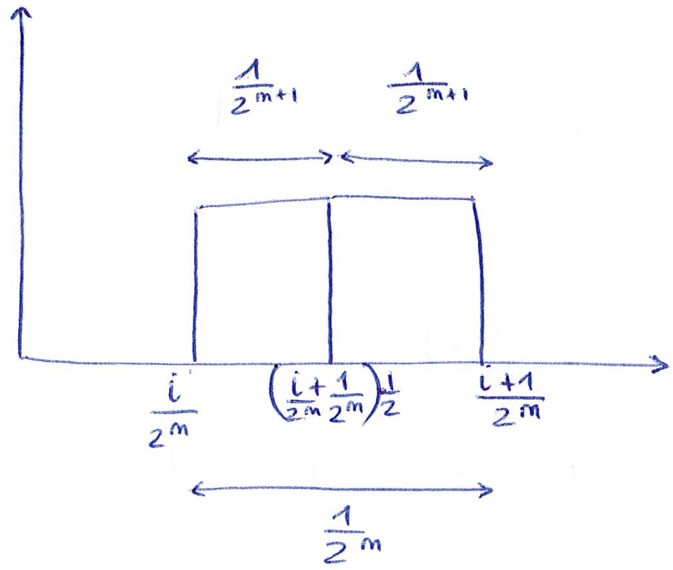
$$\downarrow$$

$$\varphi_{m+1,2i}(x) = \varphi_{m+1}\left(x - \frac{2i}{2^{m+1}}\right)$$

$$\varphi_{m+1,2i+1}(x) = \varphi_{m+1}\left(x - \frac{2i+1}{2^{m+1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{m,i}(x) &= \varphi_{m+1,2i}(x) + \varphi_{m+1,2i+1}(x) \\
&= \varphi_{m+1}\left(x - \frac{2i}{2^{m+1}}\right) + \varphi_{m+1}\left(x - \frac{2i+1}{2^{m+1}}\right) \\
&= \varphi_{m+1}\left(x - \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}\cdot 2^m}\right) + \varphi_{m+1}\left(x - \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}\cdot 2^m} - \frac{1}{2^{m+1}}\right) \\
&= \varphi_{m+1}\left(x - \frac{i}{2^m}\right) + \varphi_{m+1}\left(x - \frac{i}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}}\right) \\
&= \varphi_{m+1}\left(x - \frac{i}{2^m}\right) + \varphi_{m+1}\left(x - \left(\frac{i}{2^m} + \frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \varphi_m\left(x - \frac{i}{2^m}\right) \\
&= \varphi_{m,i}(x)
\end{aligned}$$

Dimostrazione con disegno



lunghezza $\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m}$

DECOMPOSITION VECTEUR

Per ogni iterazione si va a riempire la parte in alto a dx della matrice Wd

K=1 i coefficienti $\pm(1/2)$ remplissent un bloc de taille m

K=2 ils remplissent un bloc de taille m/2

K=3 " " " " " " m/4

J-esima iteration " " " " " $m/2^{(J-1)}$

K=1 Wd taille $m \times m$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

K=2 Wd taille $m/2 \times \frac{m}{2}$

$Wd_{\frac{m}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

W_1

W_2

$Id_{m-\frac{m}{2}}$

$K=3 \quad W_d$ taille $\frac{m}{4} \times \frac{m}{4}$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & +1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} W_0 \\ W_1 \\ \\ W_2 \end{array}$$

$Id_{m-\frac{m}{4}} = \frac{3m}{4}$

DECOMPOSITION

$V_3 = [7 \quad 1 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \quad -5 \quad 4 \quad 2]$

$V_2 + W_2 \qquad \underset{\frac{7+1}{2}}{4} \quad 6 \quad -1 \quad 3 \quad \boxed{\underset{\frac{1-7}{2}}{-3} \quad 0 \quad -4 \quad -1}$ W_2

$V_1 + W_2 \qquad \underset{\frac{4+6}{2}}{5} \quad 1 \quad \boxed{\underset{\frac{6-4}{2}}{1} \quad 2}$ W_1

$V_0 + W_0 \qquad \underset{\frac{5+1}{2}}{3} \quad \boxed{\underset{\frac{1-5}{2}}{2}}$ W_0

RECONSTRUCTION

$V_0 + W_0 \qquad 3 \quad 2$ W_0

$V_1 + W_1 \qquad \underset{3-(-2)}{5} \quad \underset{3-2}{1} \quad 1 \quad 2$ W_1

$V_2 + W_2 \qquad \underset{5-1}{4} \quad \underset{5+1}{6} \quad \underset{1-2}{-1} \quad \underset{1+2}{3} \quad -3 \quad 0 \quad -4 \quad -1$ W_2

$V_3 \qquad \underset{(4-(-3))}{7} \quad \underset{(4-3)}{1} \quad \underset{(6-0)}{6} \quad \underset{(6+0)}{6} \quad \underset{(-1+4)}{3} \quad \underset{(-1-4)}{-5} \quad \underset{(+1-(-3))}{4} \quad \underset{(3-1)}{2}$

RECOMPOSITION VECTEUR

On effectue une itération décroissante car la taille du bloc supérieur gauche est croissant

$\rightarrow k = k_n : -1 : 1$

$$
\begin{array}{cc}
 & 2W_d^t \\
k_n & \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \\
 & Id
\end{array}
\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c}
2W_d^t \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \\
Id
\end{array}
\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$2(W_d)^t$ ~~taille~~ $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vecteur initial !

À chaque itération on remplit le bloc supérieur gauche

le coeff. sont ± 1 car la matrice W_d transposé est multiplié par 2

1ʳᵉ itération (K_n) : le coeff. ± 1 remplissent un bloc de taille $n/2^{(K-1)}$

2ᵉ " (K_n-1) : " " " " " " " " $n/2^{(K-2)}$

3ᵉ " (K_n-2) : " " " " " " " " $n/2^{K-3}$