

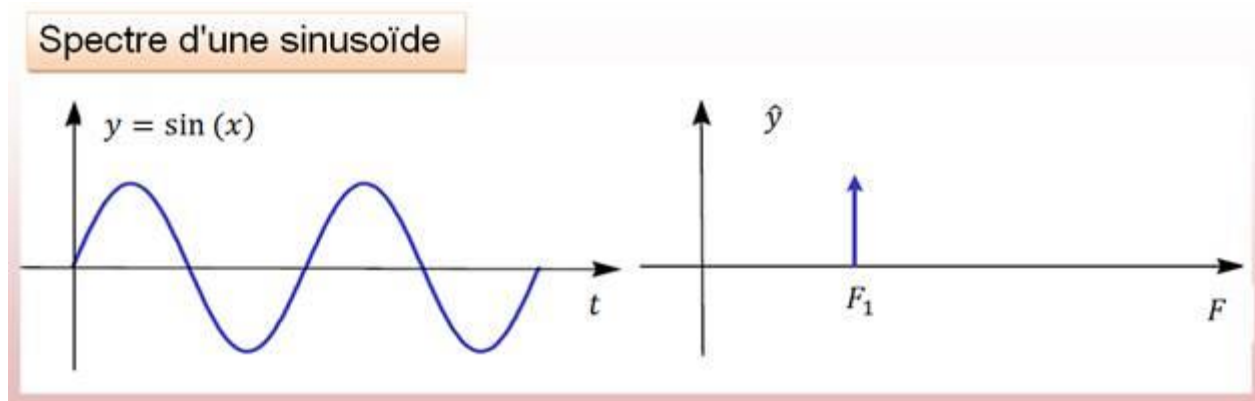
Ondelettes et analyse multirésolution

Images et filtres
ELEC3

Lionel Fillatre
2018-2019

Introduction

- **Question** : pourquoi une transformée des signaux, des images, etc. ?
- **Réponse** : optimiser la description des signaux pour extraire les informations désirées



Sommaire

- Transformée en ondelettes
- Analyse pyramidale
- Analyse multirésolution
- Conclusion

TRANSFORMÉE EN ONDELETTES

Au royaume de Fourier



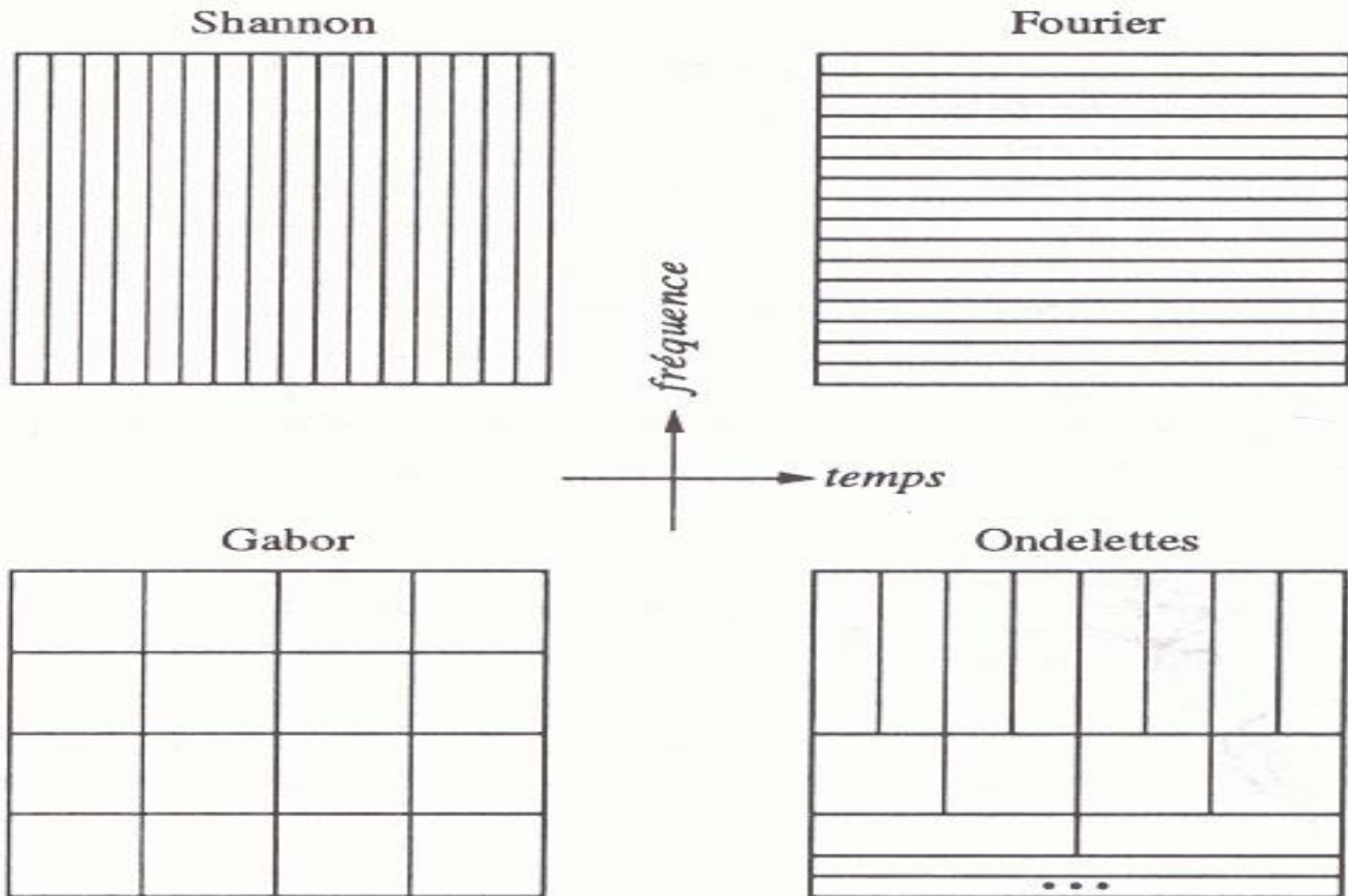
**Toute fonction peut être
représentée par une
somme de sinusoides**

La transformée de Fourier

Analyse $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt$

Synthèse $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \cdot e^{i2\pi\nu t} d\nu$

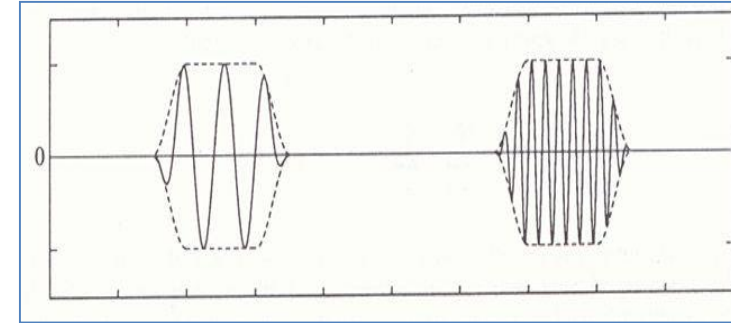
Des classes de représentations



Transformée de Fourier locale (transformée de Gabor)

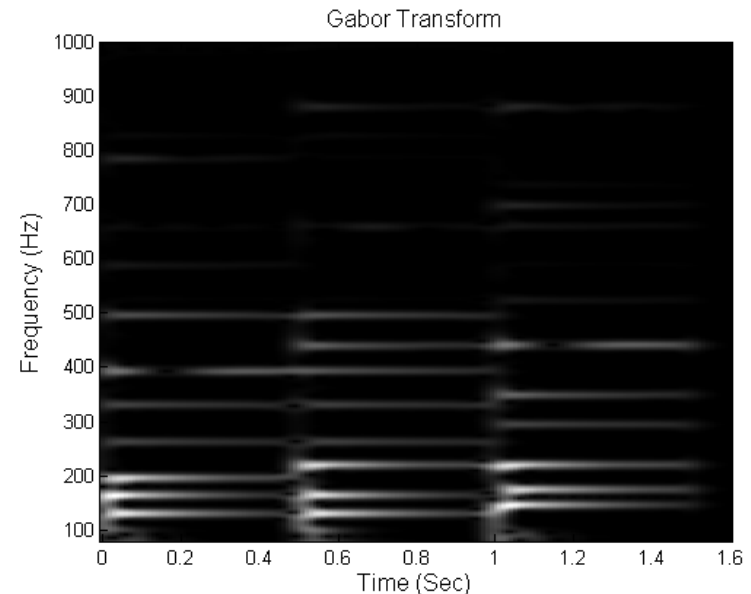
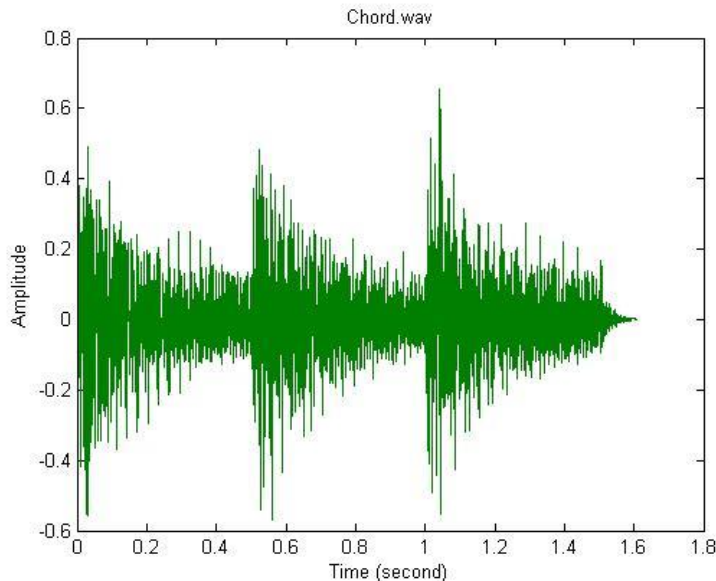
- $$SFT(\nu, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t - b)e^{-i2\pi\nu t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi_{\nu,b}^*(t) dt$$

avec $g(t) = e^{-\pi t^2}$



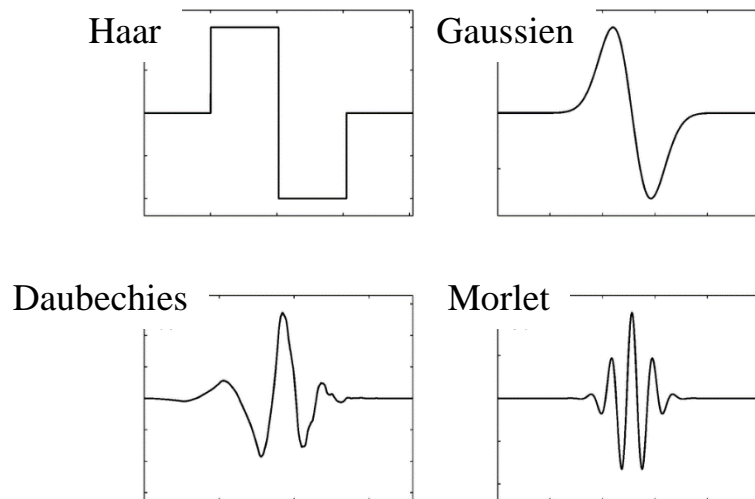
Temps

- $$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} SFT(\nu, b)\phi_{\nu,b}(t) d\nu db$$



Transformée en ondelettes continue

- Notée généralement CWT (Continuous Wavelet Transform)
- Atome de base ψ (ondelette mère)



- Paramètre d'échelle : $a > 0$
- Paramètre de translation : $b \in \mathbb{R}$
- Transformée en ondelettes:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt ,$$

Inversion et conditions d'admissibilité

- On peut montrer que si l'ondelette est convenablement choisie, la transformation en ondelettes est inversible

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} W(a, b) \psi_{a,b}(t) da db$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

où $\hat{\psi}(\omega)$ est la transformée de Fourier de ψ

- La condition d'existence est $C_\psi < \infty$
- Cette condition implique que $\hat{\psi}(0) = 0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$, ce qui signifie que la fonction ψ possède des oscillations.

Ondelettes discrètes

- Une trame d'ondelettes discrètes est

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

- m, n sont des entiers relatifs de \mathbb{Z}
- $a_0 > 0$ et $b_0 \in \mathbb{R}$ (souvent $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$)

- La transformée en ondelettes discrètes d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des coefficients

$$c_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{m,n}(t) dt$$

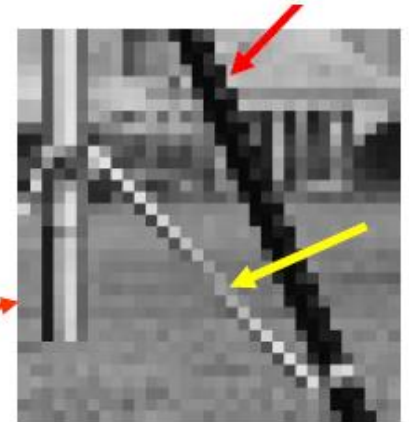
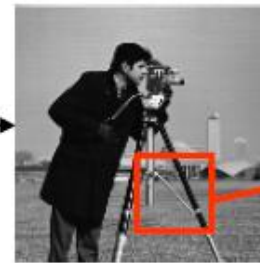
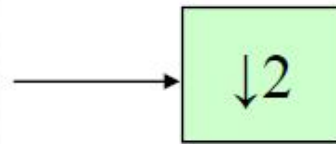
- Il existe une famille de fonctions duales $\bar{\psi}_{m,n}(t)$ telle que

$$f(t) = \sum_{m,n} c_{m,n} \bar{\psi}_{m,n}(t)$$

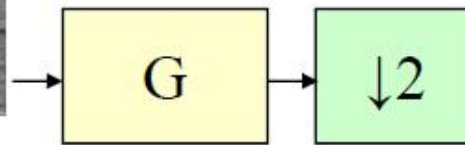
ANALYSE PYRAMIDALE

Repliement de spectre

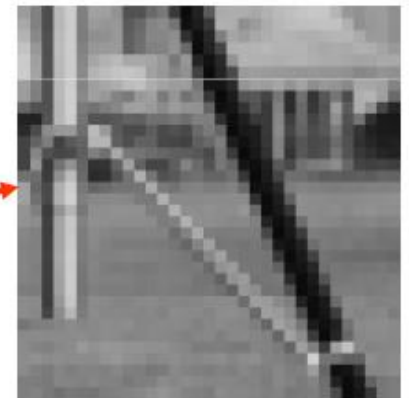
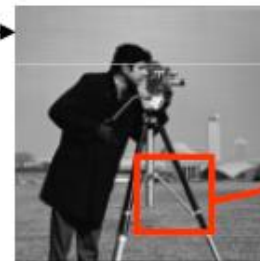
Effet d'escalier



sans filtre



filtre *anti-aliasing*
(anti-repliement)



avec filtre



Repliement de spectre



Réduction de 512
à 128 pixels

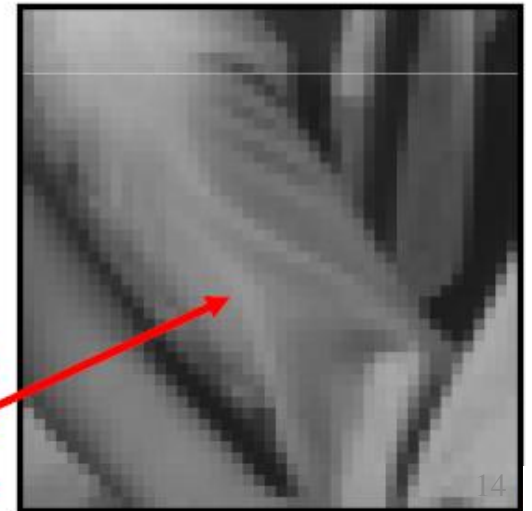


sans filtre



avec filtre

Effet de Moiré



Les rayures ont disparu,
mais elles ne pouvaient pas être
représentées correctement à cette
fréquence d'échantillonnage...

Pyramide d'images



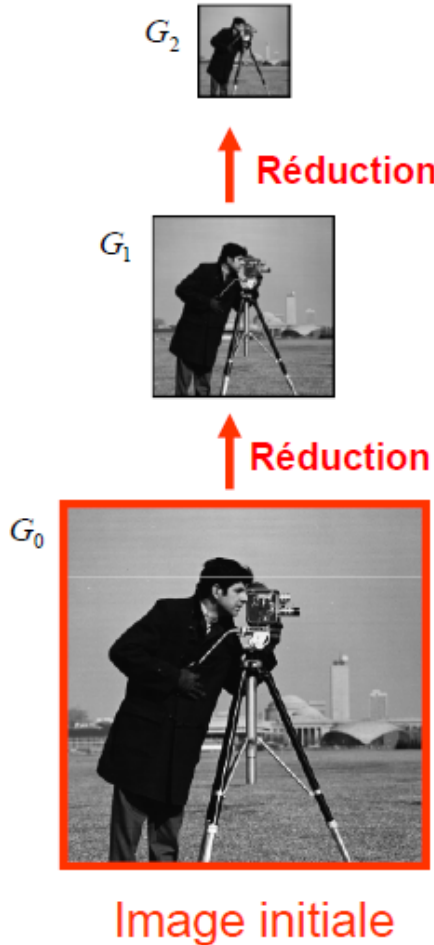
Pyramide gaussienne



512 256 128 64 32 16 8



Pyramide Gaussienne



$$\begin{cases} G_{k+1} = (G_k * h) \downarrow 2 \\ G_0 = I \end{cases}$$

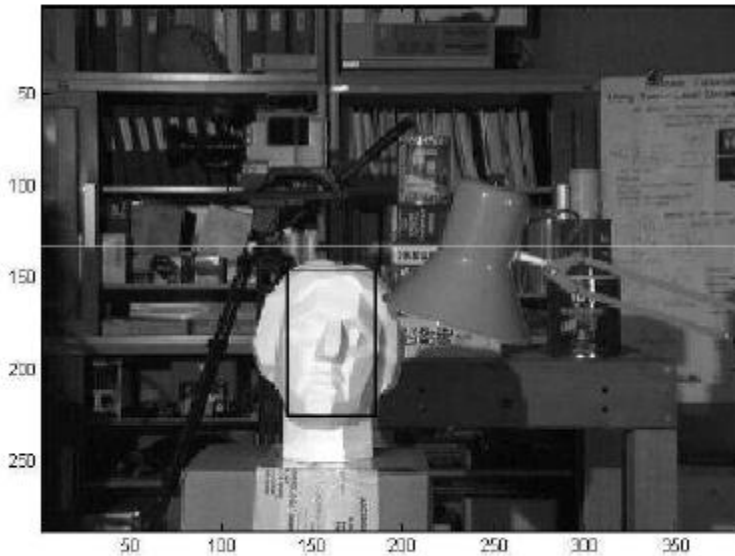
Réduction = Sous-échantillonnage avec filtre anti-repliement

Note: le filtre h n'est pas forcément un filtre gaussien.
On prend classiquement $h = [1 \ 2 \ 1]/4$ ou $h = [1 \ 1]/2$,
mais tout filtre passe-bas « raisonnablement » demi-bande
conviendrait.

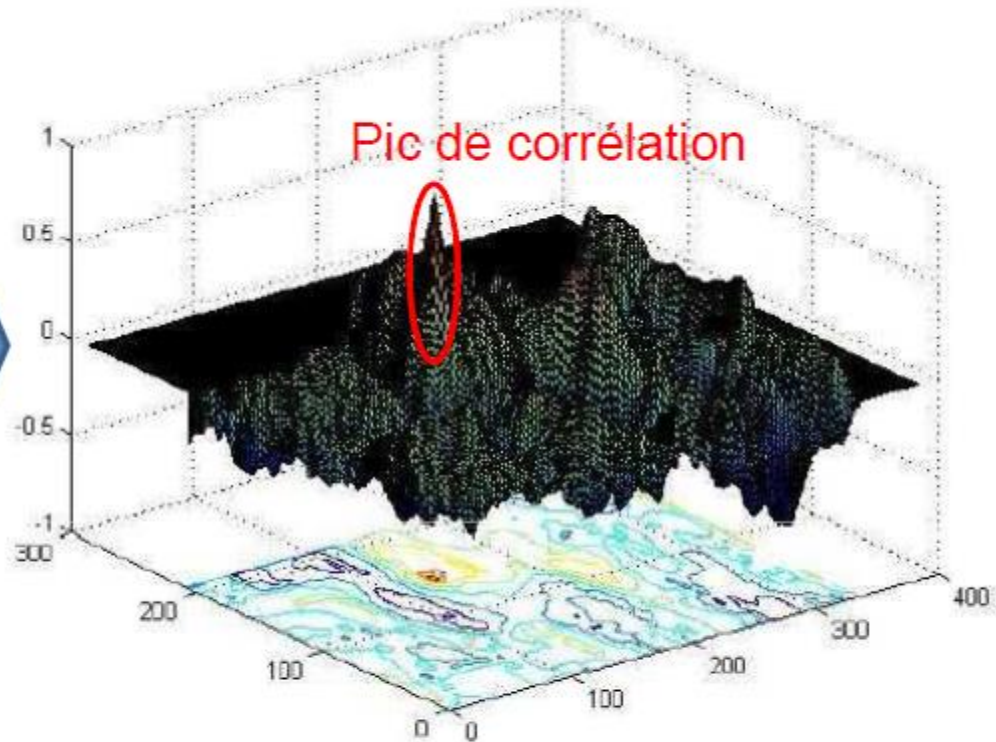
Motivation : recherche d'un motif



Motif



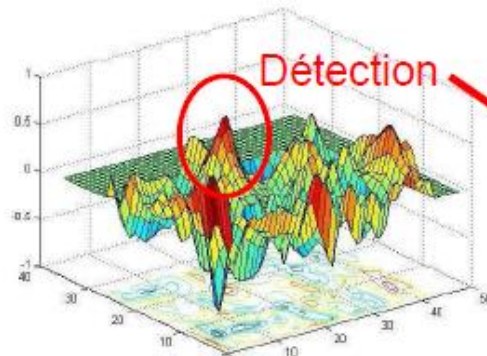
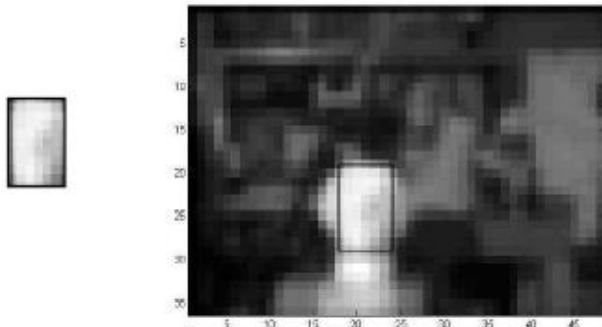
Image



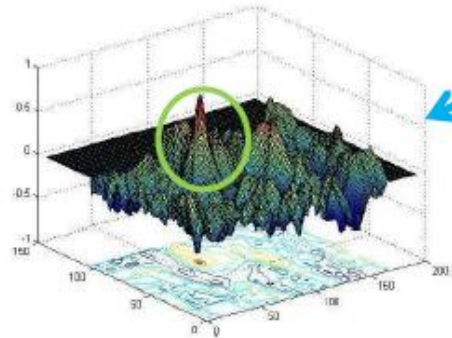
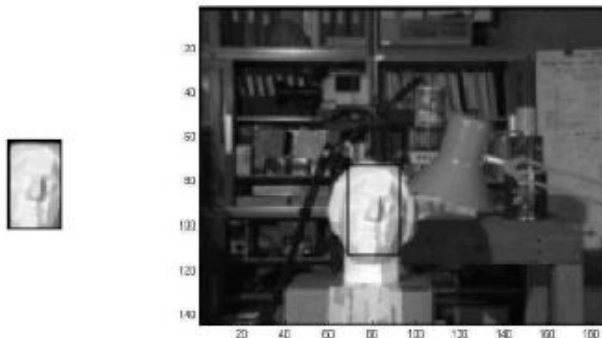
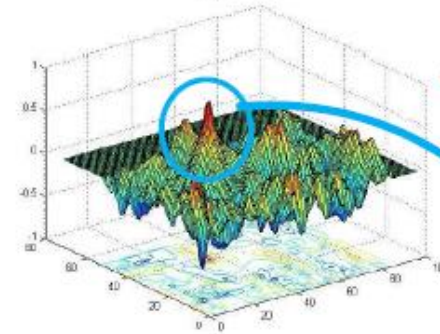
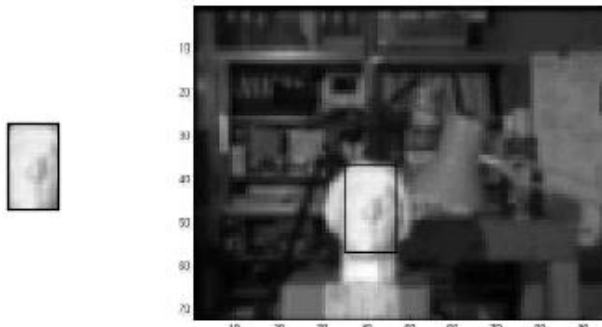
Fonction d'inter-corrélation

Coûteux à calculer

Motivation : recherche d'un motif



Contraint la zone de recherche du niveau suivant

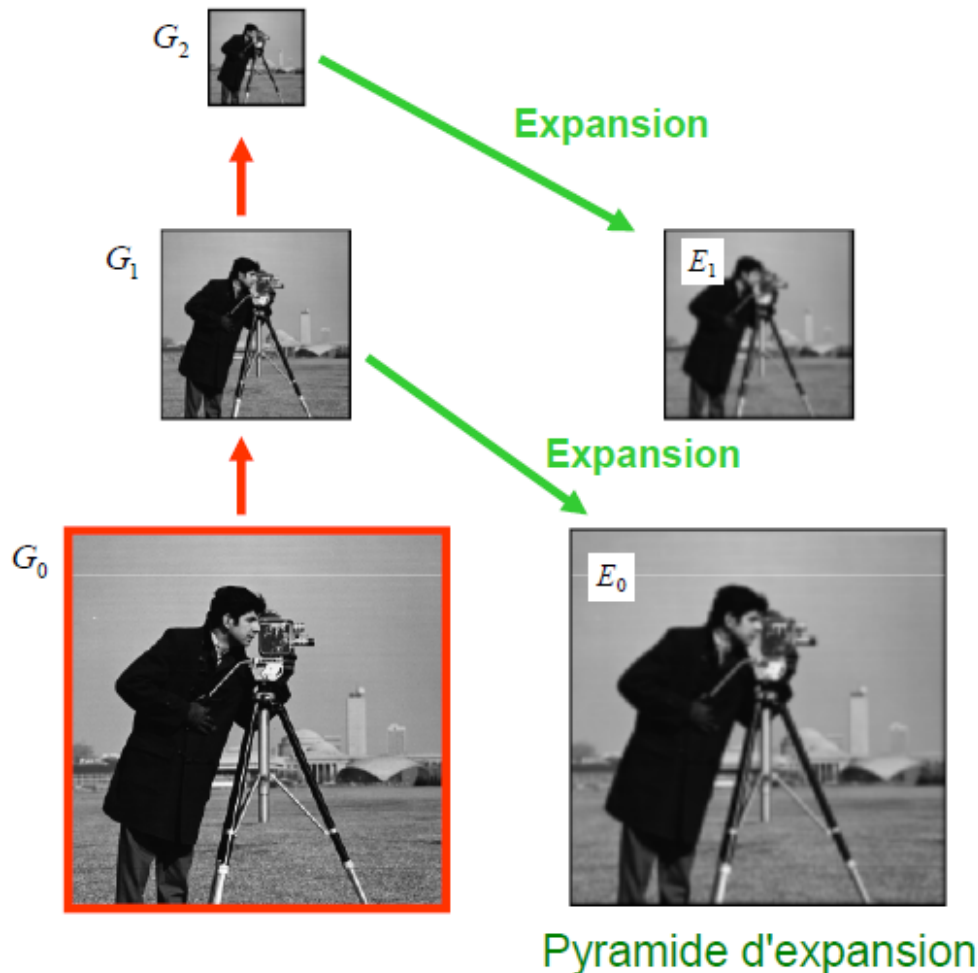


Réduction du temps de calcul:
Sur cet exemple
- mono-résolution: 31 s
- pyramidal : 0.5 s

Pyramide
du motif

Pyramide
de l'image

Pyramide d'expansion



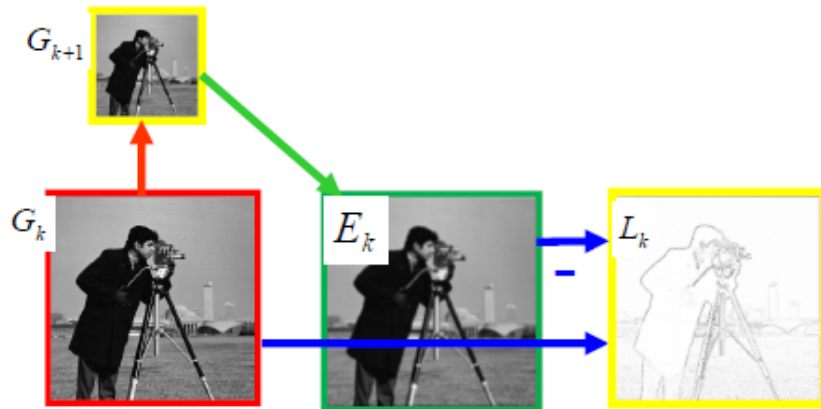
$$E_k = G_{k+1}^{\uparrow 2} * g$$

Expansion = Sur-échantillonnage
avec filtre d'interpolation

Parfois appelée pyramide de
reconstruction :

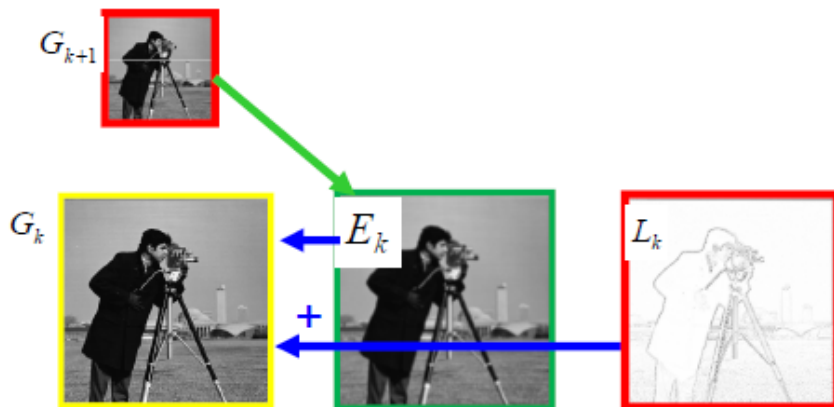
E_k correspond à la reconstruction
de **G_k** à partir de **G_{k+1}** uniquement.

Pyramide Laplacienne



La pyramide laplacienne (ou pyramide d'erreur) capture **l'erreur commise** si l'on reconstruit G_k à partir de G_{k+1} uniquement.

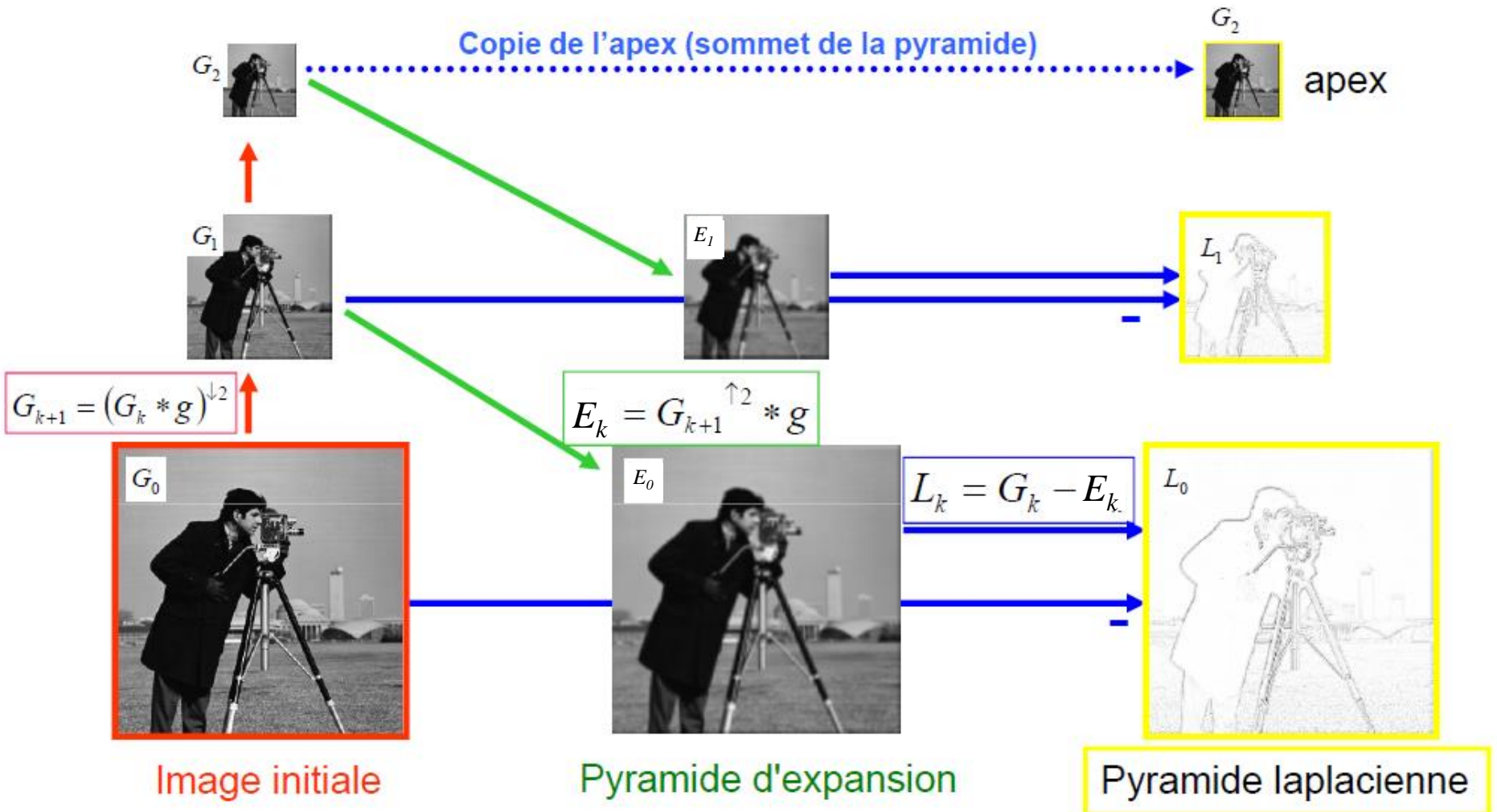
$$L_k = G_k - E_k$$



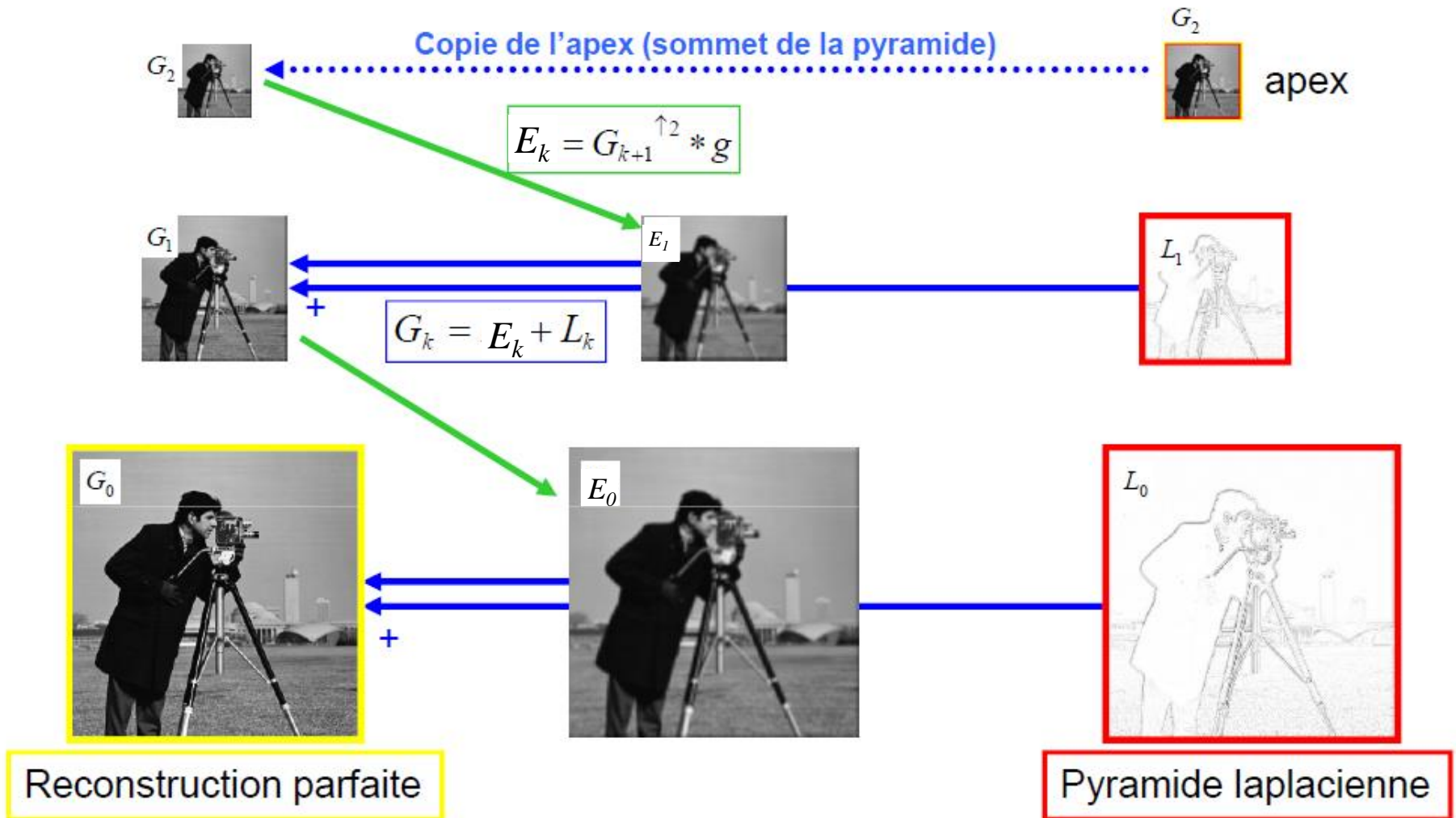
G_{k+1} et L_k permettent de retrouver G_k exactement.

$$G_k = E_k + L_k$$

Analyse multirésolution

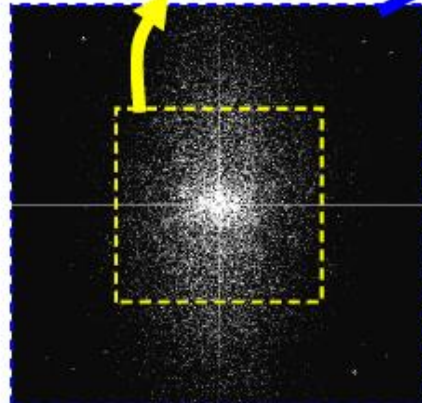
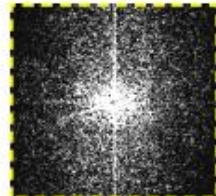


Synthèse

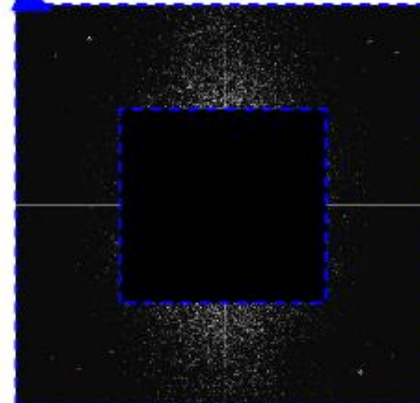
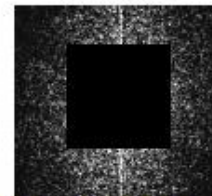
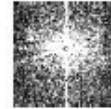


Approche pyramidale : Interprétation fréquentielle

Pyramide gaussienne



Pyramide laplacienne



Domaine spatial

Domaine fréquentiel

Domaine fréquentiel

Domaine spatial

ANALYSE MULTIRÉOLUTION

Analyse multirésolution (cas 1D)

- On construit une analyse multirésolution à l'aide de sous-espaces V_j emboîtés les uns dans les autres,

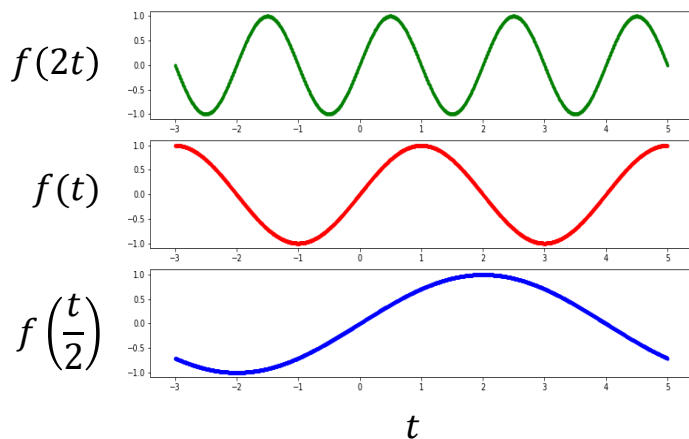
$$\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots,$$

tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle (zoom).

- Par exemple, dans le cas dyadique, on aura :

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \quad \text{ou} \quad f(t) \in V_{j+1} \Leftrightarrow f(2t) \in V_j$$

- L'espace V_{j+1} contient des signaux plus "grossiers" que l'espace V_j donc $V_{j+1} \subset V_j$



Fonction d'échelle (cas 1D)

- On peut construire une fonction dite **fonction d'échelle** $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ qui par dilatation et translation engendre une base orthonormée de V_m .

- Comme pour les ondelettes discrètes, on définit

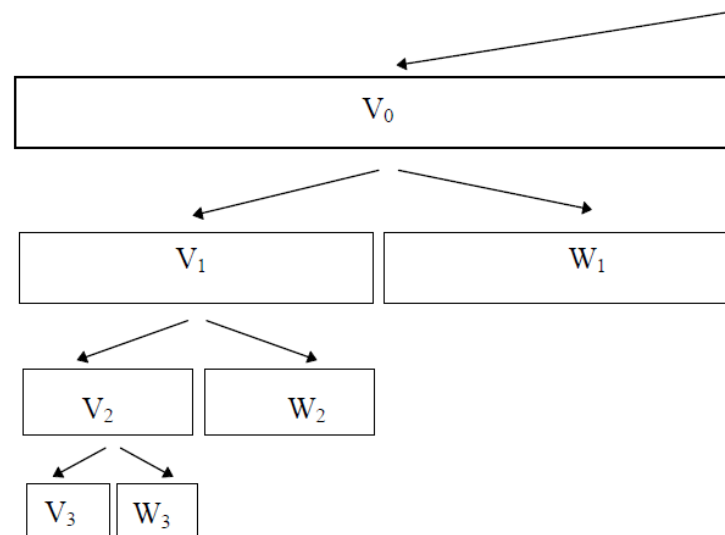
$$\varphi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \varphi(2^{-m}t - n)$$

- Il s'agit d'une base orthonormée de V_m
- L'approximation de $f(t)$ à la résolution 2^{-m} s'écrit

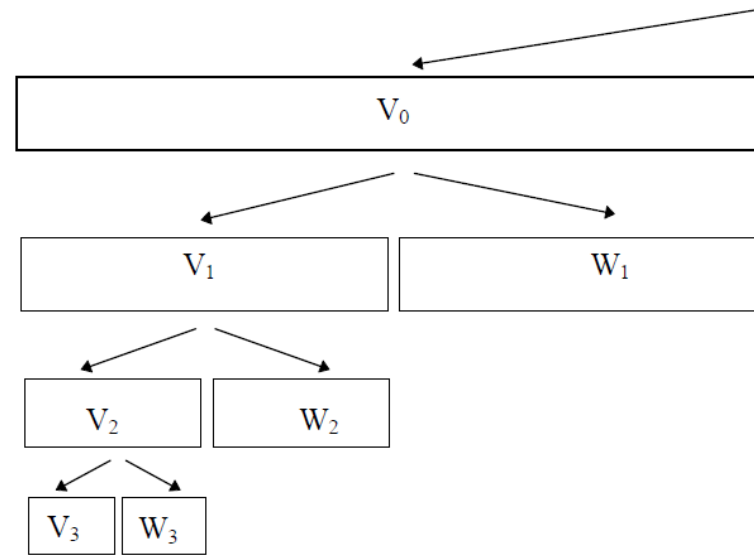
$$\text{Proj}_{V_m}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{m,n} \rangle \varphi_{m,n}(t)$$

Fonction d'ondelette (cas 1D)

- Pour chaque résolution 2^{-m} , on définit le sous-espace W_m tel que
$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m$$
- W_m est le complément orthogonale de V_m ; il contient les détails perdus entre la résolution initiale V_{m-1} et la résolution plus grossière V_m
- On peut associer à l'espace W_m une famille d'ondelette $\psi_{m,n}(t)$ qui forme une base orthonormée de W_m



Fonction d'ondelette (cas 1D)



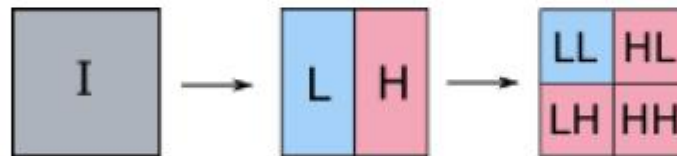
- Les coefficients

$$c_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{m,n}(t) dt = \langle f, \psi_{m,n} \rangle$$

vérifient l'égalité

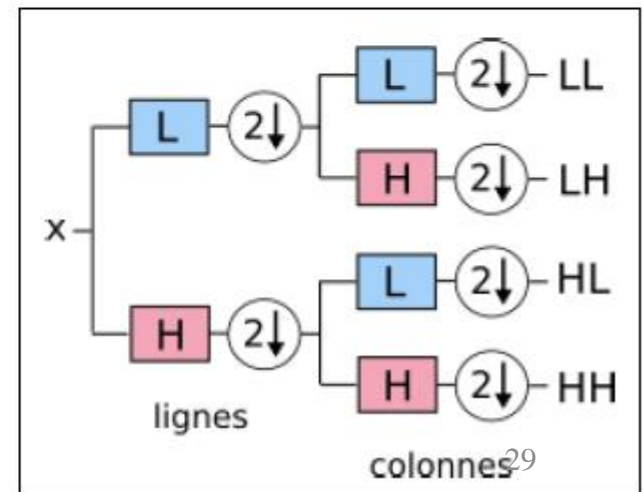
$$\text{Proj}_{V_{m-1}}(f) = \text{Proj}_{V_m}(f) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \psi_{m,n}(t)$$

Cas 2D : Analyse d'une image

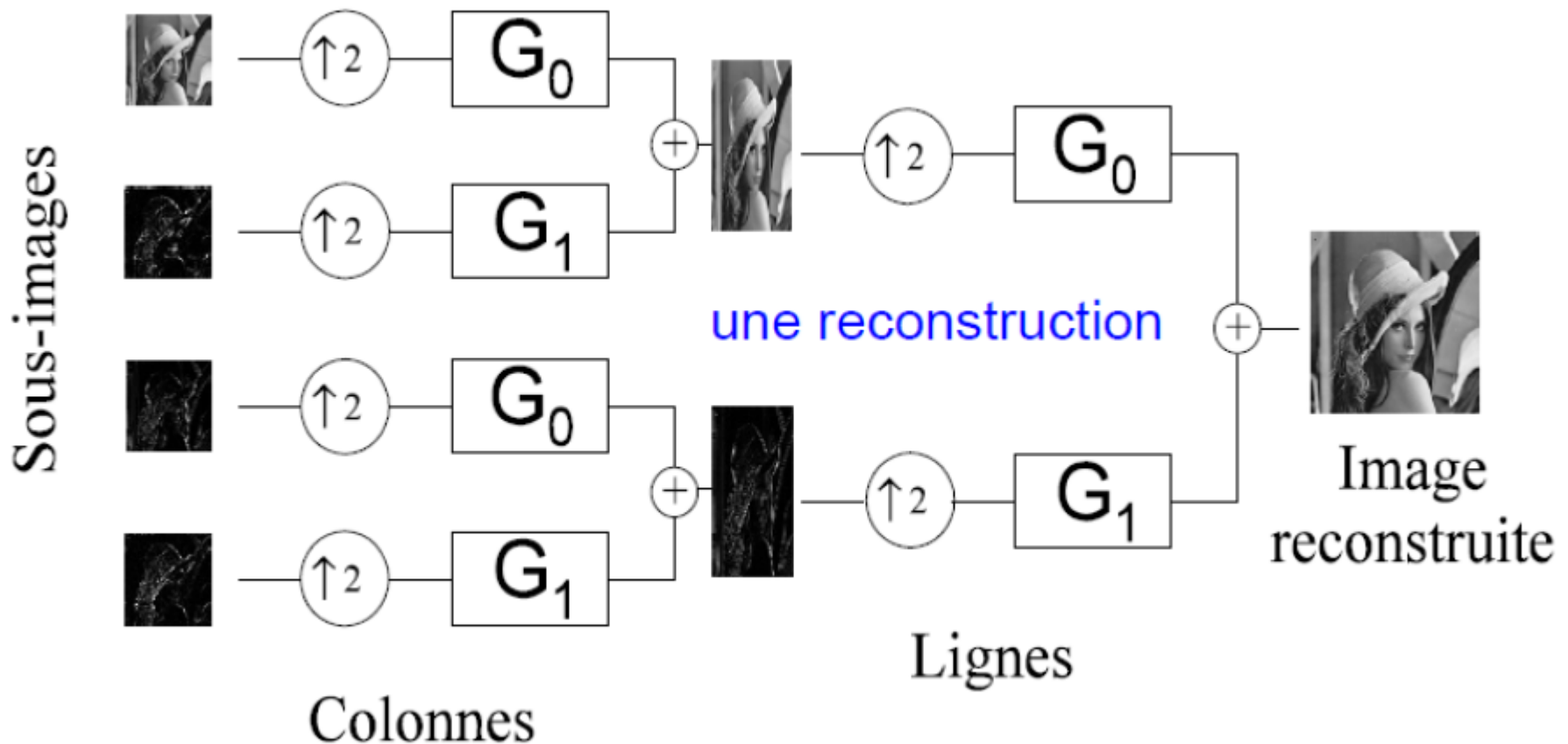


L est un filtre passe-bas associées aux $\varphi_{m,n}$

H est un filtre passe-haut associées aux $\psi_{m,n}$

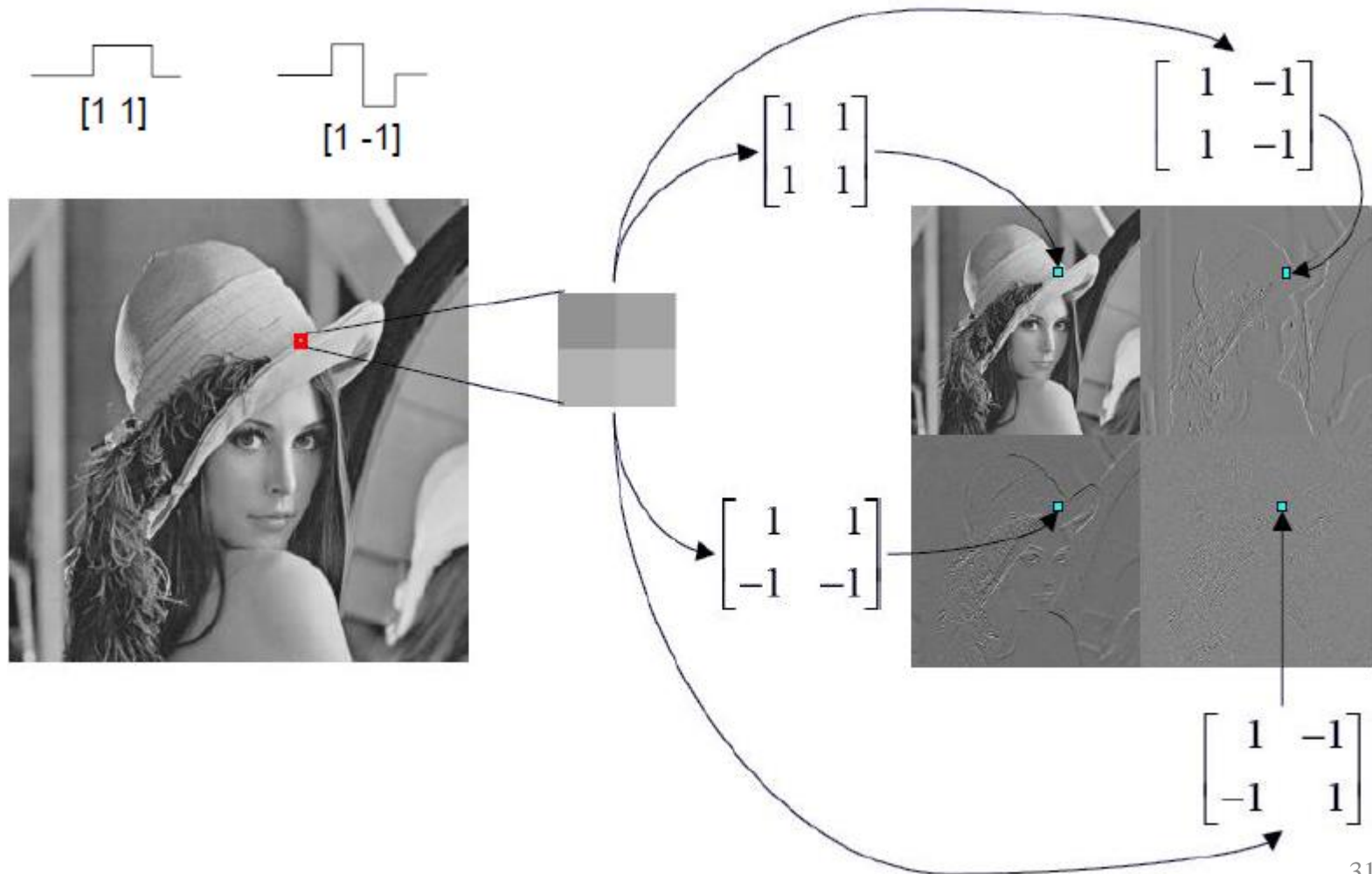


Cas 2D : Synthèse d'une image

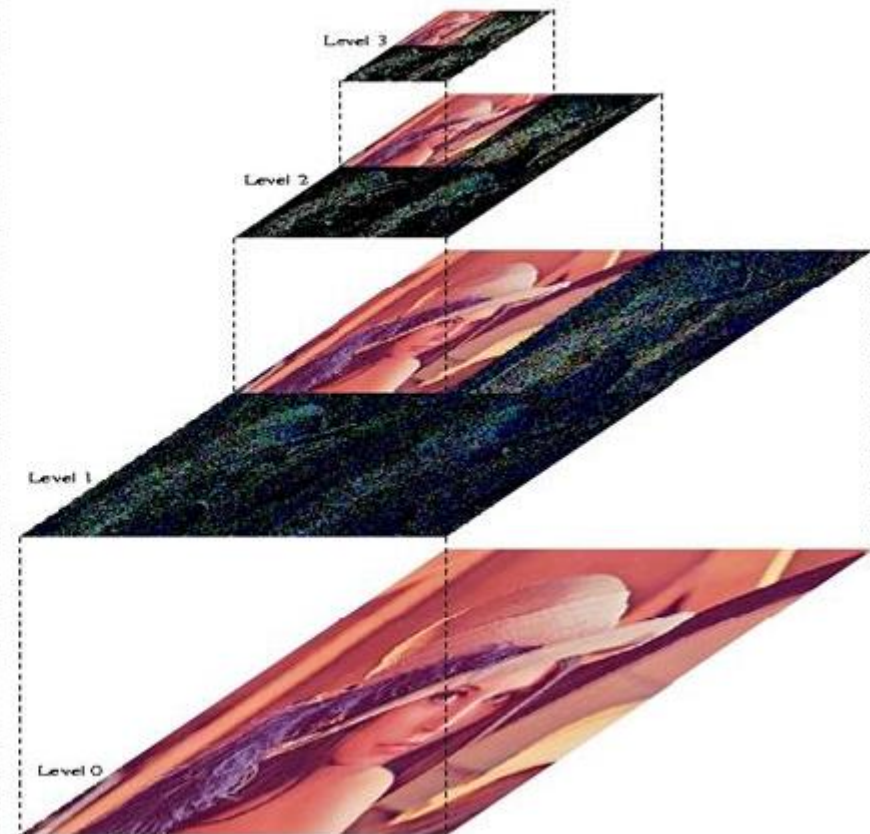
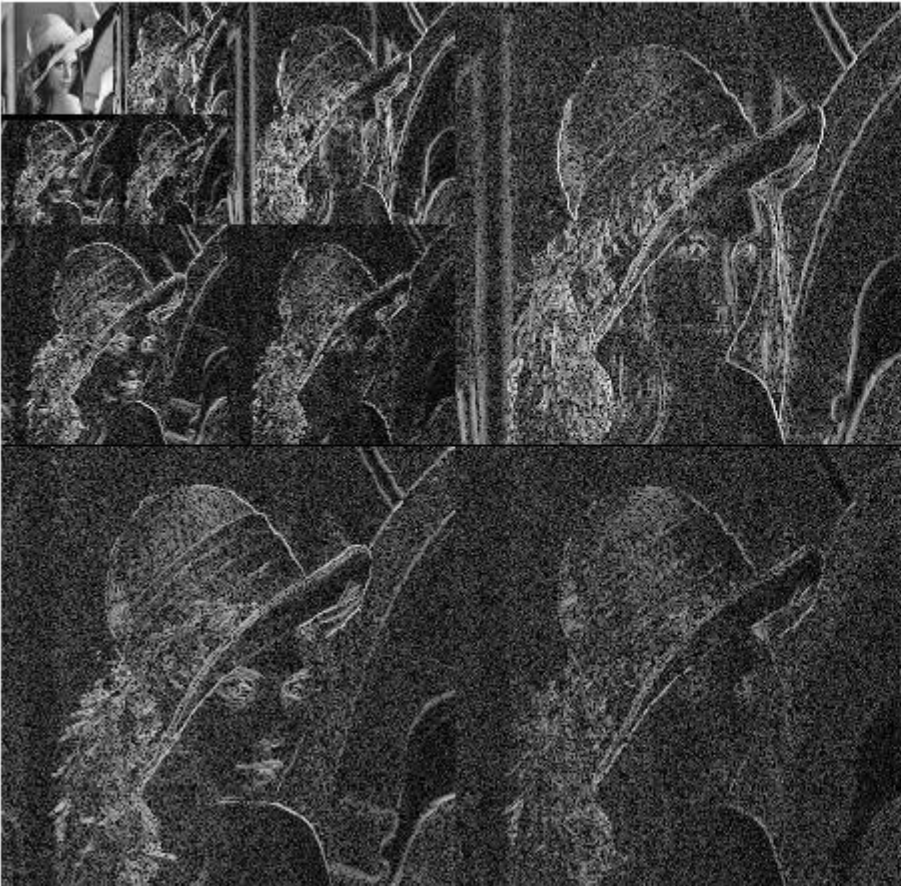


G_0 et G_1 sont des filtres déduits des $\varphi_{m,n}$ et des $\psi_{m,n}$

Exemple : la base de Haar



Plusieurs niveaux de résolution



Intérêt de l'analyse multirésolution

- est bien adaptée aux signaux non-stationnaires
- permet une décomposition spatio-fréquentielle de l'image
- permet une décomposition multirésolution
- pas d'effets de bloc
- permet la transmission progressive

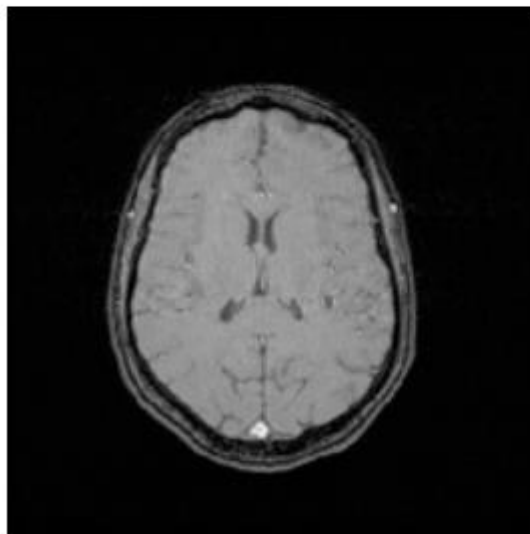


Image originale

Image basse
fréquence

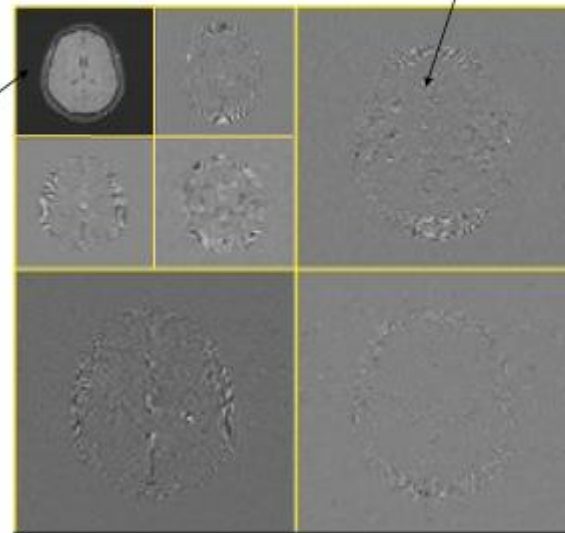


Image transformée

Compression d'images (Haar)

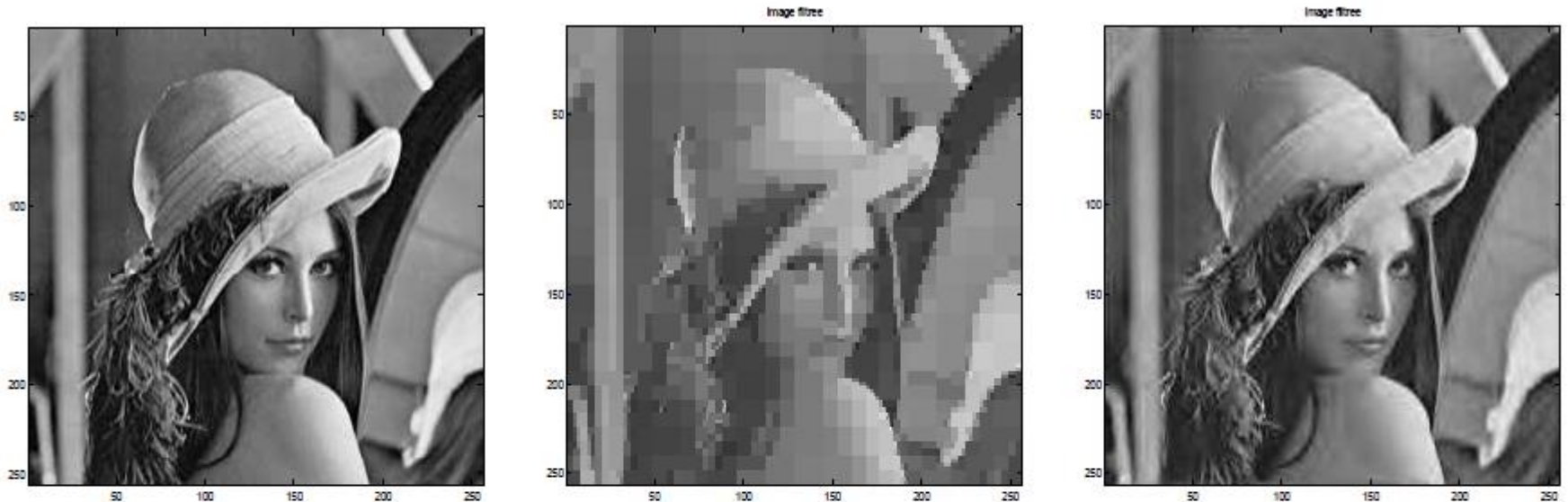


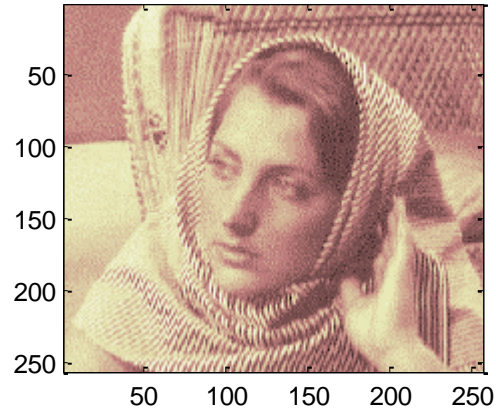
Image originale et images comprimées :

Figure du milieu : en gardant les 1024 plus grands coefficients (soit une compression de 98,4%).

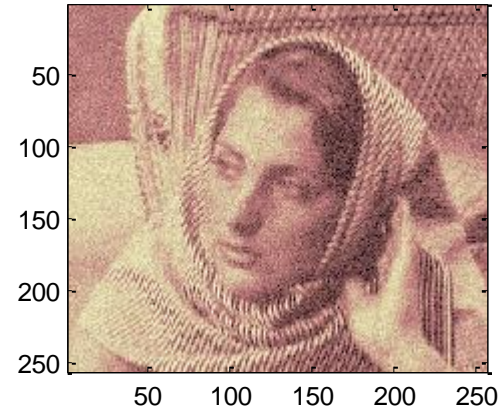
Figure de droite : en gardant les 3467 plus grands coefficients (soit une compression de 94,7%).

Débruitage d'images (symlet)

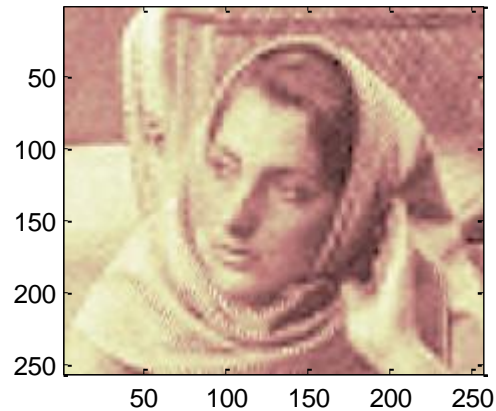
Original Image



Noisy Image



denoised Image



Conclusion

- Un outil très largement répandu
- De très nombreuses applications
- Une grande efficacité numérique
- Des approches concurrentes/complémentaires ne cessent d'apparaître :
 - Acquisition comprimée
 - Apprentissage d'un dictionnaire
 - Etc.

Bases mathématiques pour les TDs

- Produit scalaire entre fonctions : $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$
- Orthogonalité de fonctions : $\langle f, g \rangle = 0$
- Norme d'une fonction : $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$
- Famille libre de fonctions : $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n f_n(t) = 0$ implique $a_n = 0, \forall n$
- Une famille de fonctions orthogonales est libre
- Famille $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ génératrice : toute fonction $g(t)$ s'écrit $g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n f_n(t)$
- Base de fonctions : $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre et génératrice, ce qui implique que toute fonction $g(t)$ s'écrit sous la forme unique $g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n f_n(t)$
- Complémentaire d'un espace vectoriel :
$$H = F \oplus G \Leftrightarrow \forall h(t) \in H, \exists! (f(t), g(t)) \in F \times G, h(t) = f(t) + g(t)$$