
Images et Filtres

Luc Deneire

1 Echantillonnage en 1D et en 2D

1.1 Objectifs

Les objectifs du premier cours, suivi de trois séances de travail, sont les suivants :

1. échantillonner un signal 1D-2D
2. déterminer le spectre de signaux sur- et sous-échantillonnés (1D) ;
3. interpréter un spectre (déduire la fréquence d'échantillonnage, le spectre est-il sur-échantillonné, y a-t-il eu repliement de spectre)
4. éviter le repliement de spectre (1D et 2D)

1.2 Rappels sur l'échantillonnage

Définition L'échantillonnage consiste à prélever un échantillon du signal à des intervalles réguliers. Ces intervalles peuvent être des intervalles de temps (si on travaille sur un signal temporel) ou des intervalles d'espace (si on travaille sur une image par exemple).

Formalisme temporel En travaillant sur un signal temporel (1D), l'échantillonnage consiste à multiplier le signal temporel par un peigne de dirac ($\Pi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$). Un signal échantillonné à la période T_e (ou de fréquence d'échantillonnage T_e) s'écrit alors :

$$x_e(t) = x(t)\Pi_{T_e}(t)$$

Formalisme fréquentiel A partir de cette expression temporelle, l'expression fréquentielle en découle :

$$\begin{aligned} X_e(f) &= X(f) * \widehat{\Pi}_{T_e}(f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f') \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f' - nF_e) df' \\ &= F_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF_e) \end{aligned}$$

Le spectre du signal échantillonné est donc une périodisation du spectre du signal analogique de période F_e .

Quel problème peut se produire en fonction de la fréquence d'échantillonnage choisie ?

1.3 Séance 1 : Echantillonnage 1D - suréchantillonnage - souséchantillonnage

Sous-échantillonnage de sons Dans un premier temps, on s'intéresse d'une façon simple à l'effet du sous-échantillonnage d'un signal. On donne un exemple simple (en Scilab), où un signal chirp est généré (entre le Do4 et le Do5).

```
// Notes sur huit octaves
frnotes(1,:)= [4186.24 4435.2 4698.88 4977.92 5274.24 5587.84
5920. 6272. 6645.12 7040. 7458.56 7902.08 ]/2^7;
for i=2:8
    frnotes(i,:)=frnotes(i-1,:)*2;
end
Do=1; Dod = 2; Re = 3; Red = 4; Mi = 5; Fa = 6; Fad = 7; Sol = 8; Sold= 9; La =
10; Lad = 11; Si = 12;

// Generate chirp from the Do4 to Do5 (10 seconds)
Fs=2000;tmax=10;
t=[1/Fs:1/Fs:tmax];
f=[frnotes(4,1)+1/Fs/tmax:(frnotes(5,1)-frnotes(4,1))/Fs/tmax:frnotes(5,1)];
chirp=sin(t.*f*2*\%pi);
deletefile("chirp.wav")
wavwrite(chirp,Fs,"chirp.wav"); // use sound, or use the native OS player

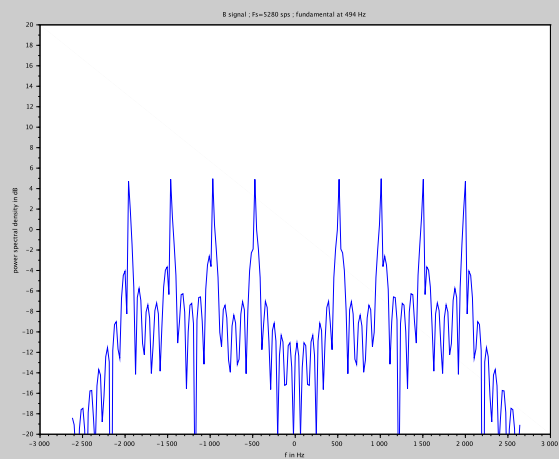
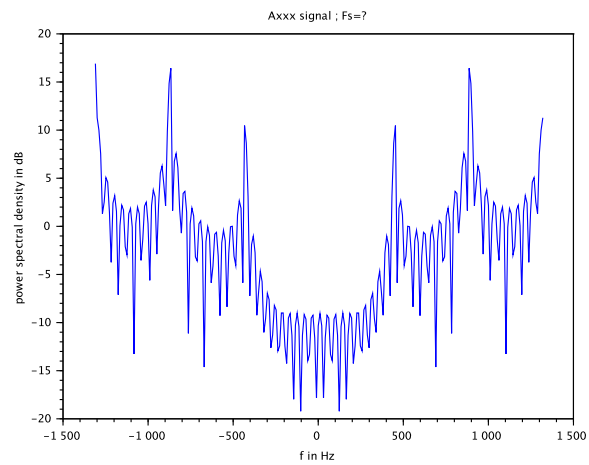
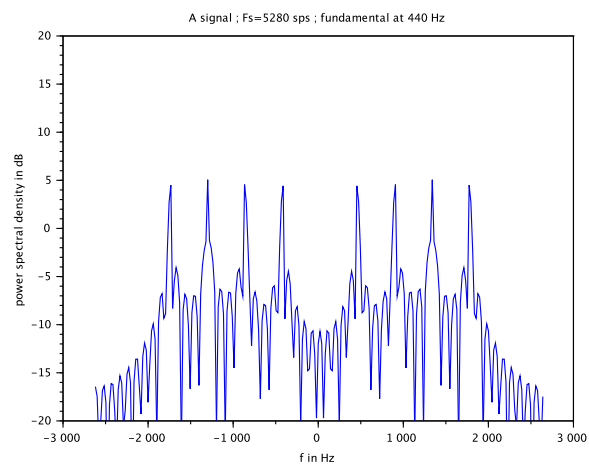
// Downsample by 2 : new sampling frequency is Fs2 = Fs/2;
Fs2=Fs/2;
chirp_downsampled=chirp(1:2:length(chirp));
deletefile("chirp_down.wav")
wavwrite(chirp_downsampled,Fs2,"chirp_down.wav"); // use sound, or use the
native OS player
```

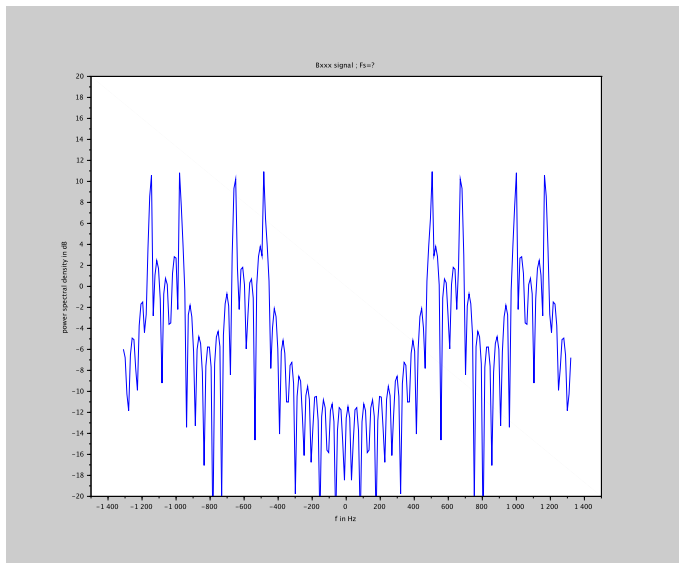
Dans la première partie, on génère simplement le chirp. Dans la deuxième partie, on le sous-échantillonne par deux. Vous devez faire le graphe du spectre du signal en fonction du temps dans les deux cas (mettre le temps en abscisse et la fréquence en ordonnée, comme dans le cas du spectrogramme).

Donnez la justification théorique précise (entre autres avec les documents joints sur Jalon).

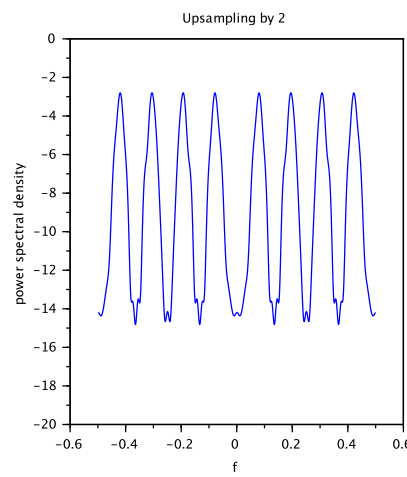
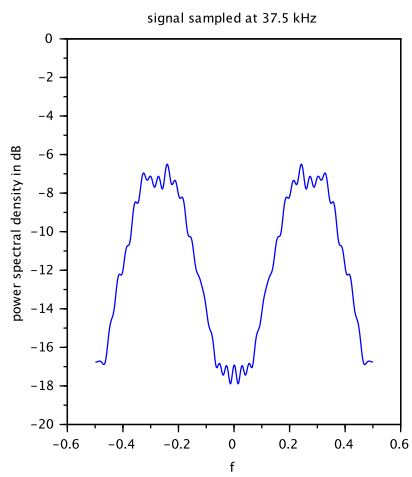
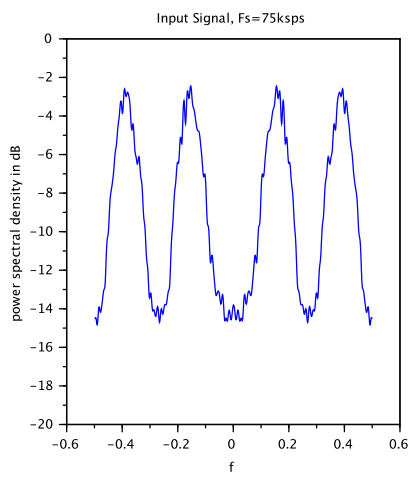
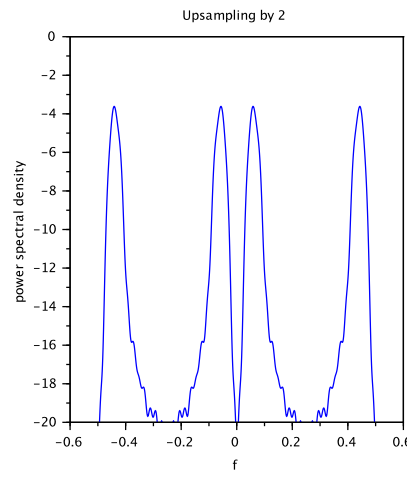
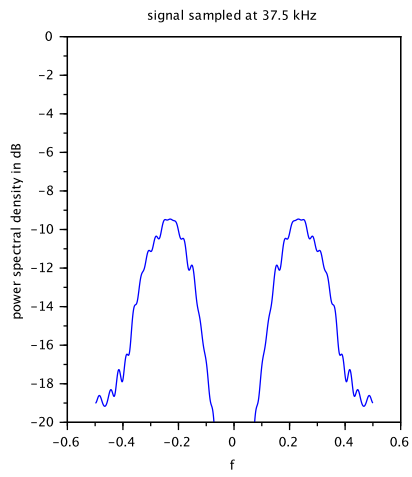
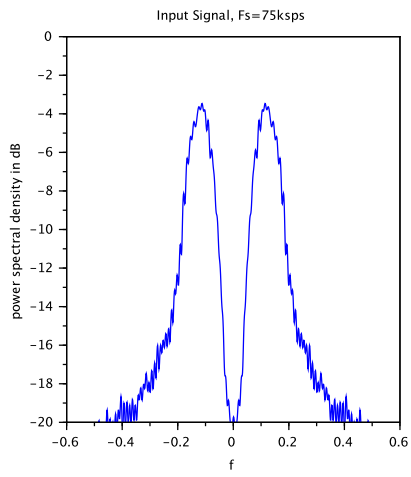
Dans un deuxième temps, on s'intéresse à deux sons, un “La” riche (présent sur 4 octaves) et un “Do” riche également. Ces sons sont générés avec une fréquence d'échantillonnage indiquées dans les figures jointes. On leur fait subir un changement de fréquence d'échantillonnage donné dans les figures également, sous l'appellation *Axx* et *Bxx*. On vous demande d'indiquer l'opération qui a été effectuée ainsi que d'indiquer en quoi le son *A* et sa version modifiée sont particulières.

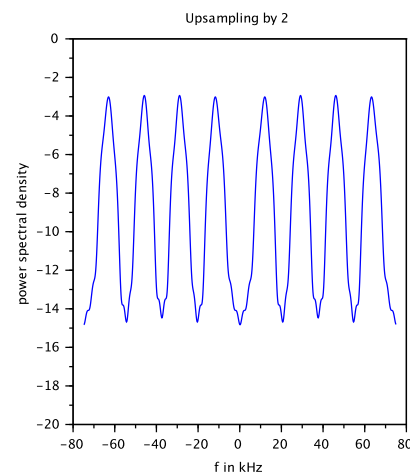
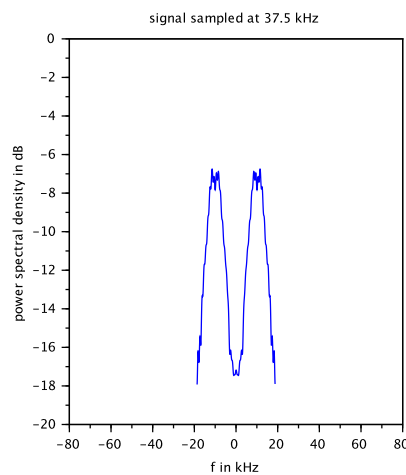
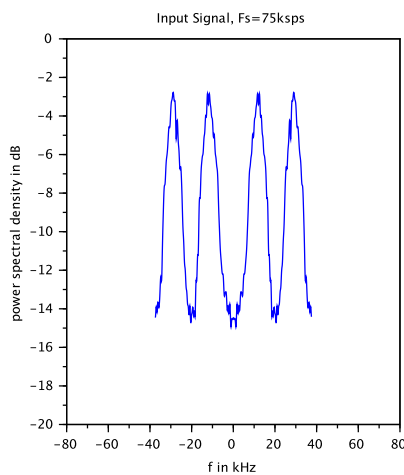
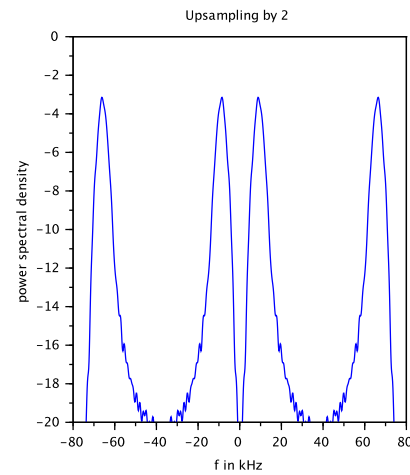
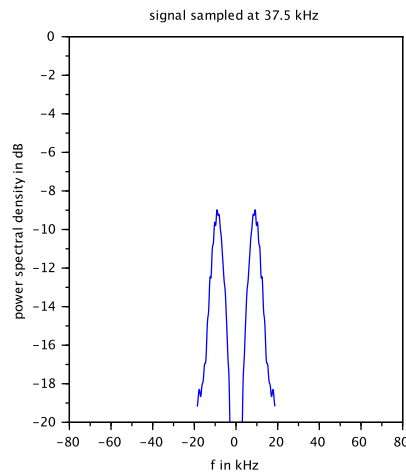
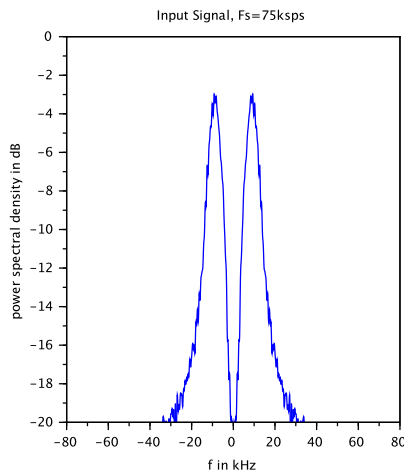
Qu'a t'on choisi "subtilement" pour arriver à ce résultat ?





Changement de cadence Les programmes “down_upsampling.sce” et “down_upsampling2.sce” , sous scilab, génèrent les densités spectrales de puissance ci-dessous :





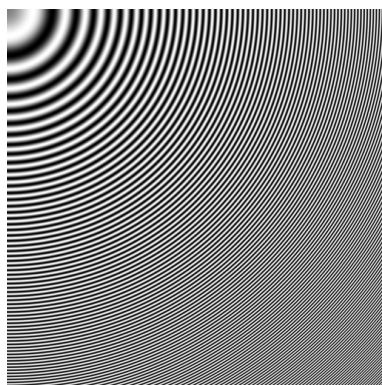
Quelle est la différence entre les deux figures ? Indiquez celle qui vous paraît la plus “naturelle”. Expliquez également les différences d’amplitude des densités spectrales de puissance (avec des arguments solides :).

1.4 Séance 2 : Echantillonnage en 2D

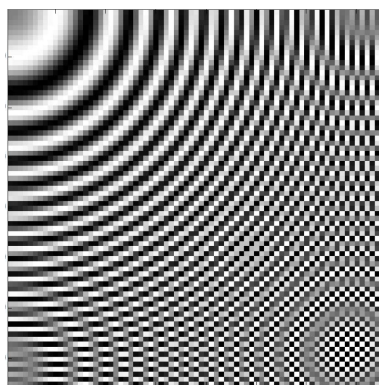
Vous êtes un ingénieur avec peu de moyens ... matériels, et entre autre, peu de mémoire informatique. On vous donne donc des images à stocker sur un ordinateur, et vous souhaitez diminuer la taille nécessaire au stockage. Pour ce faire, vous souhaitez conserver uniquement un pixel sur quatre verticalement et un pixel sur 4 horizontalement (vous effectuer une décimation de l’image).

Si vous faites ça, vous constaterez une altération visuelle sévère de l’image.

Vous devez expliquer l’origine de cette dégradation et proposer un moyen de pallier cette dégradation. Pour vous aider dans votre travail, on vous propose également une image dont le contenu est très simple (il s’agit d’une sinusoïde unidirectionnelle) est également très dégradée après une décimation par 4. Les images avant et après décimation sont données ci-dessous

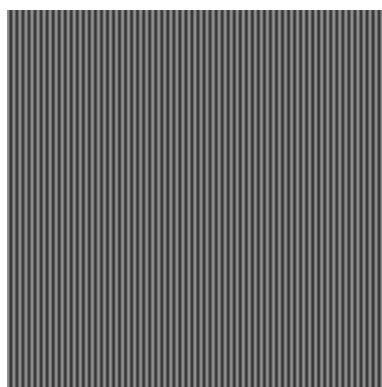


(a) avant

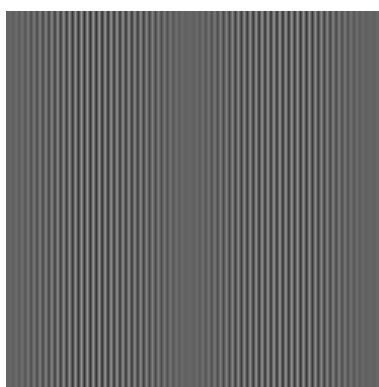


(b) après

FIGURE 1: Images avant et après décimation



(a) avant



(b) après

FIGURE 2: Images avant et après décimation

Pour les deux dernières séances, vous implémenterez toutes les opérations que vous devez décrire en séance 1, en répondant aux questions suivantes :

1. Programmez la décimation proposée par l'ingénieur, identifiez le phénomène observé.
2. Examinez le contenu de l'image avant et après décimation dans le domaine spectral. Indiquez le phénomène en termes mathématiques.
3. Proposez un filtre naïf dans le domaine spectral pour éviter le phénomène observé.
4. Commentez la méthode proposée. Les résultats obtenus présentent-ils des dégradations visibles ? Proposer une explication pour le nouveau phénomène observé.

5. Proposez un ou plusieurs filtres qui permettent d'effectuer une décimation avec des défauts presque négligeables.

6. Consolidation du programme : le programme doit bien fonctionner, montrer les résultats utiles et être commenté en détail. Il sera rendu à la fin de la séance 3. Il devra fonctionner et être très bien commenté.