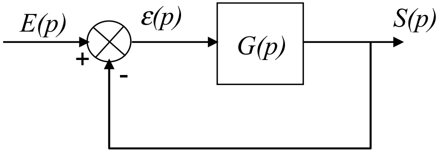
Automatique
4. Précision des systèmes asservis

Sylvie Icart
icart@unice.fr

ELEC 3
Polytech'Nice-Sophia

octobre 2018

Système asservi :



Signal d'erreur : $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$

Fonction de transfert en boucle fermée : $G_{BF}(p) = \dfrac{G(p)}{1 + G(p)}$

$$S(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} E(p) = \frac{n(p)}{n(p) + d(p)} E(p)$$

Si l'entrée est un échelon : $S(p) = \dfrac{n(p)}{n(p) + d(p)} \dfrac{E_0}{p}$

TVF : $\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \lim_{p\to 0} \frac{n(p)}{n(p)+d(p)} E_0$

soit $\lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{n(0)}{n(0)+d(0)} E_0$

Système précis :

$\lim_{t\to\infty} s(t) = E_0$ ssi $p = 0$ est un pôle de $G(p)$

en effet : $\lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{n(0)}{n(0)+d(0)} E_0 = E_0 \Rightarrow d(0) = 0$

Erreur en position normalisée ε_p :

erreur relative en régime permanent lorsque l'entrée est un échelon.

Par définition, $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$,

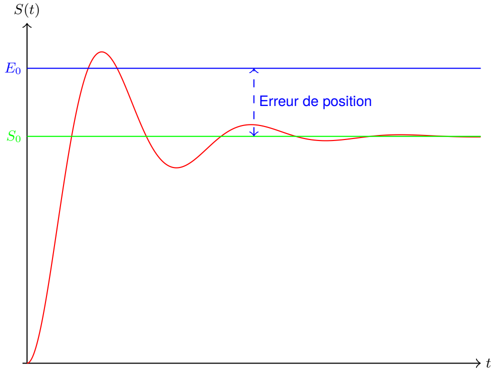
- $\varepsilon_p = 0$ ssi $p = 0$ est un pôle de $G(p)$.
- sinon $\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pG_{BF}(p)\frac{E_0}{p} = \frac{G(0)}{1+G(0)} E_0$ (car $G(0)$ existe)

d'où $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = E_0 - \frac{K}{1+K} E_0 = \frac{1}{1+K} E_0$

Erreur de position normalisée (relative) : $\varepsilon(\infty)/E_0$ (en pourcentage)

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1+K} \text{ avec } K \text{ gain statique en BO}$$

L'erreur en position n'est pas nulle si le gain statique en BF n'est pas unitaire.



$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1 + G(p)}$$

Le précision dépend du gain statique en BO : pour augmenter la précision on peut augmenter le gain statique du sytème en boucle ouverte.

Correcteur proportionnel de gain K_p :

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = E_0 - \frac{K_p K}{1 + K_p K} E_0 = \frac{1}{1 + K_p K} E_0$$

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1 + K_p K}$$

Attention : si K_p " grand ", ε "petit"
mais ... risque de saturation en sortie du correcteur notamment au démarrage !
En effet, à $t = 0^+$, $\varepsilon(t) = KE_0$.

Erreur en vitesse relative ε_v :

erreur relative en régime permanent lorsque l'entrée est une rampe.

L'entrée est une rampe : $e(t) = \alpha t u_h(t), \quad E(p) = \frac{\alpha}{p^2}$

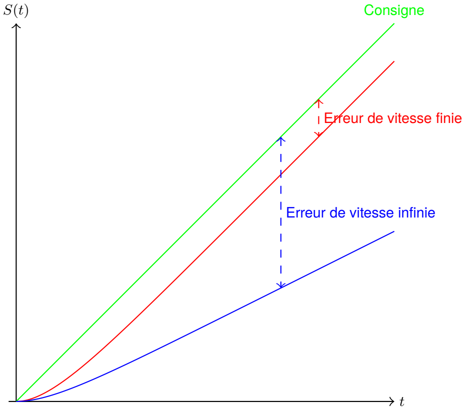
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) &= \lim_{t\to\infty} e(t) - s(t) = \lim_{p\to 0} p(E(p) - S(p)) \\ &= \lim_{p\to 0} p(1 - G_{BF}(p))\frac{\alpha}{p^2} = \lim_{p\to 0} \frac{\alpha}{p}\frac{d(p)}{n(p)+d(p)} \end{aligned}$$

- si $n(0) + d(0) = cte$, $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \infty$
- si $p = 0$ pôle de $G(p)$: posons $d(p) = p^m d'(p)$ avec $d'(0) \neq 0$ (m multiplicité du pôle en zéro)

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \alpha \frac{p^{m-1} d'(p)}{n(p) + p^m d'(p)}$$

  - si $m = 1$ $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \alpha\frac{d'(0)}{n(0)}$ et $\varepsilon_v = \frac{d'(0)}{n(0)}$ (constante)
  - si $m > 1$ $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} \alpha p^{m-1} \frac{d'(p)}{n(p)+p^m d'(p)} = 0$ et $\varepsilon_v = 0$

L'erreur en vitesse est constante si en régime permanent les pentes de l'entrée et de la sortie sont égales :



$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} \frac{1}{pG(p)}$$

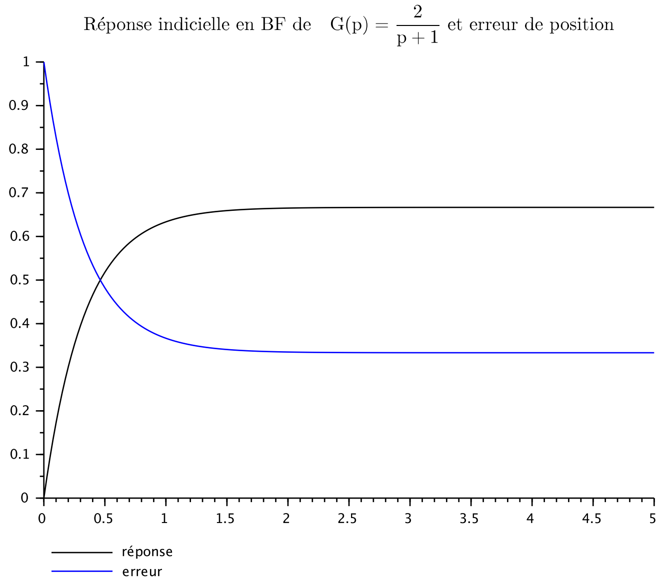
La multiplicité du pôle $p = 0$ *du système en BO* est ce que l'on appelle la classe du sytème.

L'erreur en vitesse ε_v est nulle si la classe du système est $m > 1$.

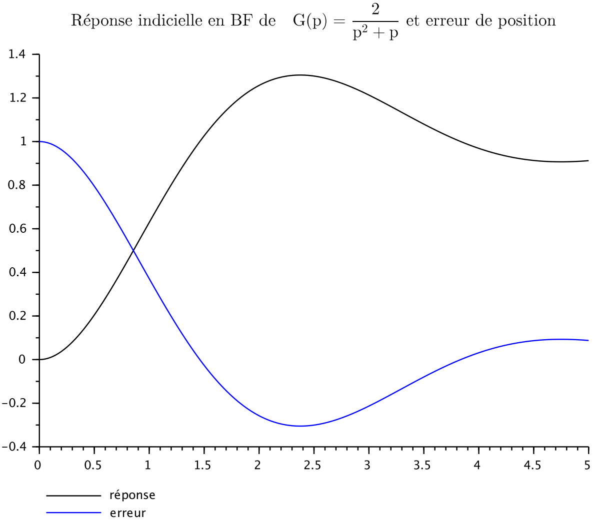
On montre de même que l'erreur en accélération ε_a, c-à-d lorsque $e(t) = \alpha t^2 u_h(t)$ est nulle si la classe du système est $m > 2$.

Exemples :

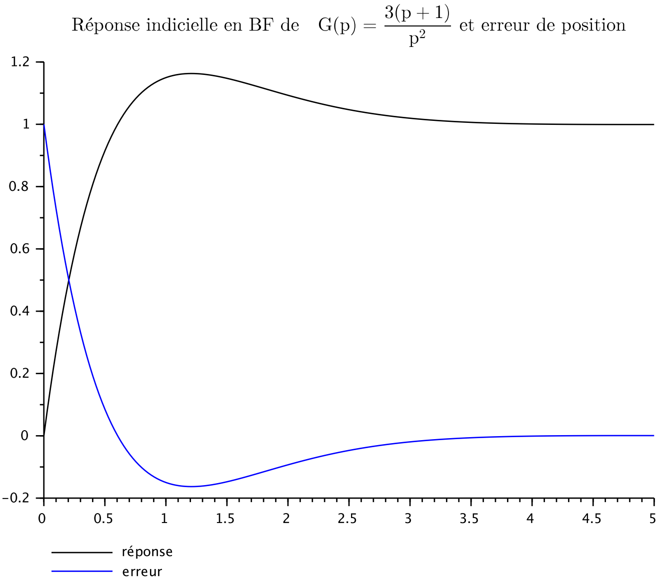
- Si $G(p) = \frac{2}{p+1}$ ($m = 0$, Gain statique=2)
  l'erreur en position vaut $1/3$ et l'erreur en vitesse est infinie
- Si $G(p) = \frac{2}{p^2+p}$ ($m = 1$, Gain statique=∞)
  l'erreur en position vaut 0 et l'erreur en vitesse vaut $1/2$
- Si $G(p) = \frac{3(p+1)}{p^2}$ ($m = 2$, Gain statique=∞)
  l'erreur en position vaut 0 et l'erreur en vitesse vaut 0
- Si $G(p) = \frac{1+4p+p^2}{p^3}$ ($m = 3$, Gain statique=∞)
  l'erreur en position, en vitesse et en accélération sont nulles



Gain statique du sytème en BF . . .

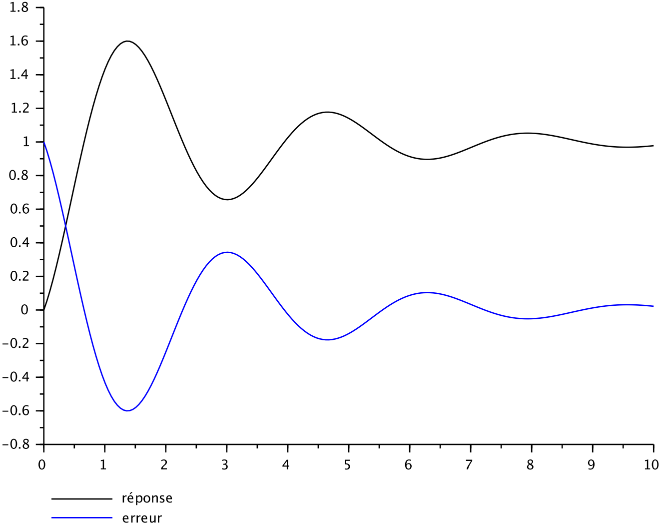


Pourquoi des oscillations ? $G_{BF}(p) = \frac{2}{p^2+p+2}$, pôles de G_{BF} : $-\frac{1}{2}(1 \pm j\sqrt{7})$

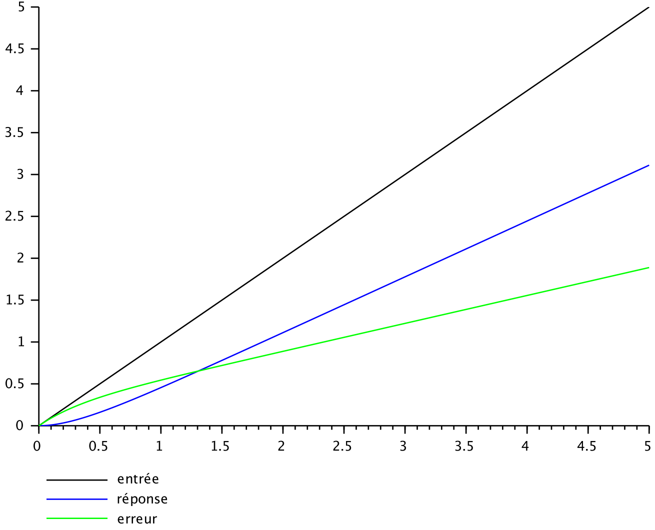


pôles de G_{BF} : complexes conjugués à $\Re < 0$ (-3/2)

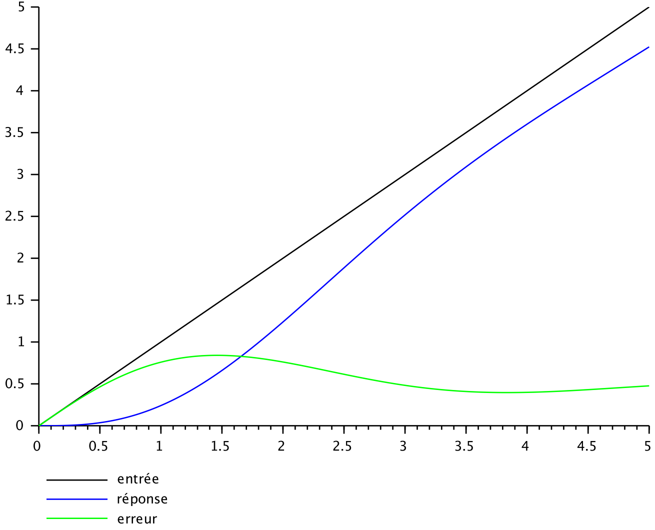
Réponse indicielle en BF de $G(p) = \dfrac{1+4p+p^2}{p^3}$ et erreur de position



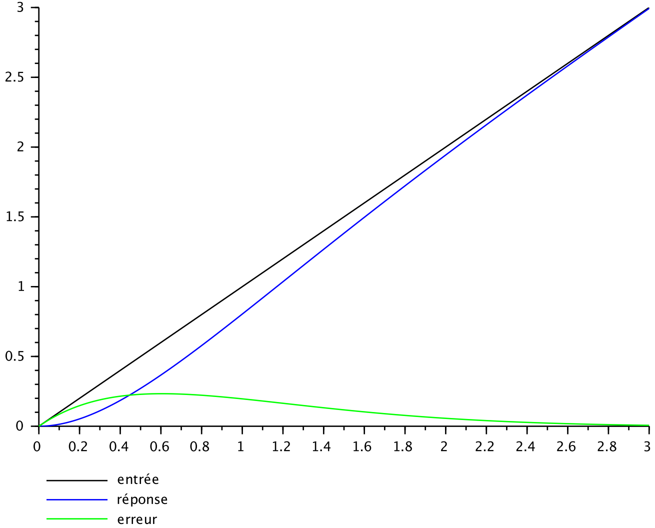
Réponse à une rampe en BF de $G(p) = \frac{2}{p+1}$ et erreur de vitesse



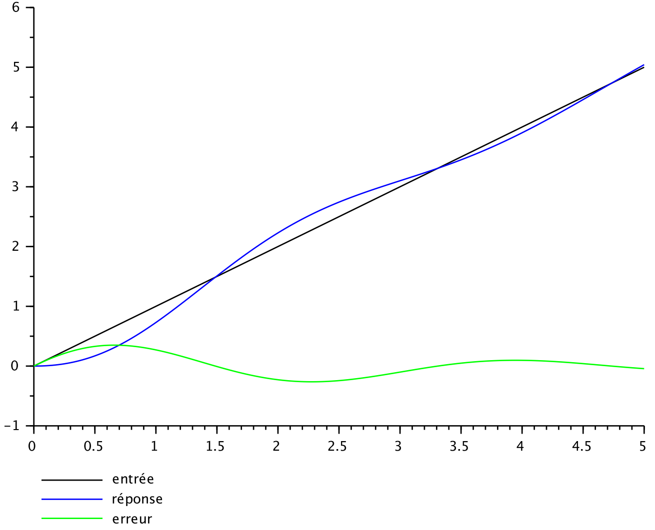
Réponse à une rampe en BF de $G(p) = \dfrac{2}{p^2 + p}$ et erreur de vitesse



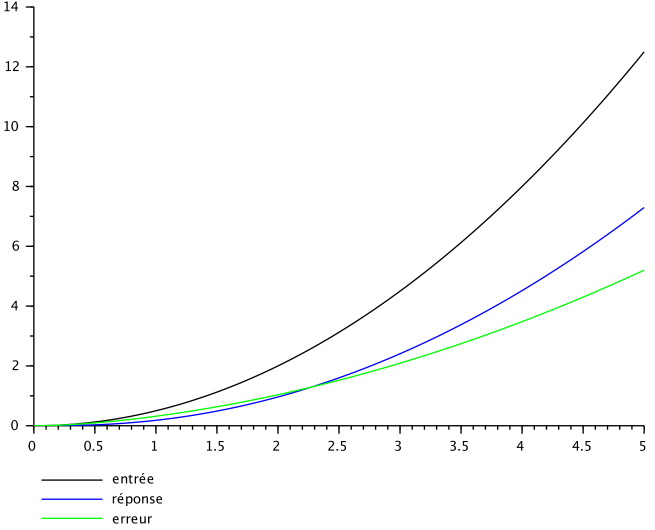
Réponse à une rampe en BF de $G(p) = \dfrac{3(p+1)}{p^2}$ et erreur de vitesse

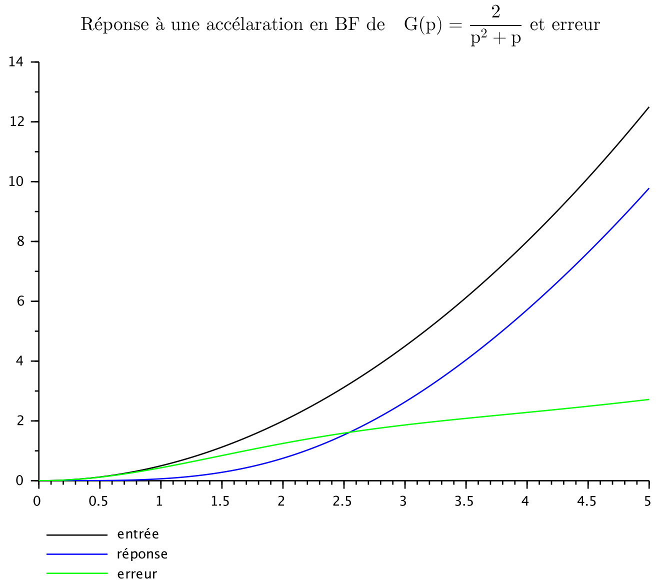


Réponse à une rampe en BF de $G(p) = \dfrac{1 + 4p + p^2}{p^3}$ et erreur de vitesse

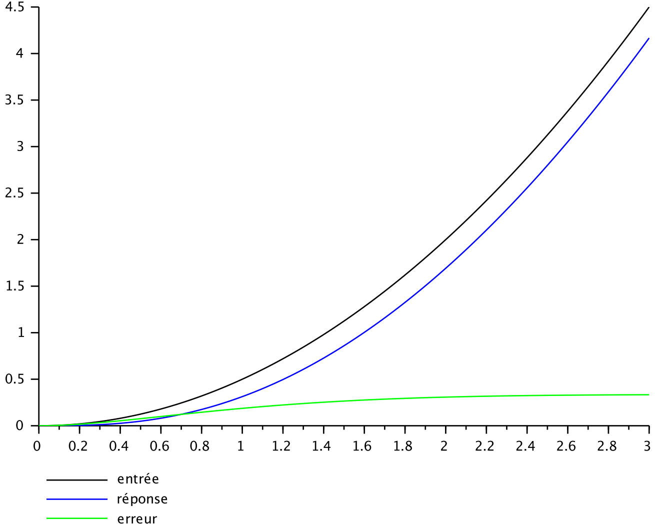


Réponse à une accélération en BF de $G(p) = \dfrac{2}{p+1}$ et erreur




Réponse à une accélaration en BF de $G(p) = \dfrac{2}{p^2 + p}$ et erreur
14
12
10
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
entrée
réponse
erreur

Réponse à une accélération en BF de $G(p) = \dfrac{2}{p^2 + p}$ et erreur



Réponse à une accélération en BF de $G(p) = \dfrac{1+4p+p^2}{p^3}$ et erreur