

Traitement numérique du Signal

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Octobre 2018

Introduction

Informations

- Cours sur Moodle
- Questions par e-mail : deneire@unice.fr

Ressources

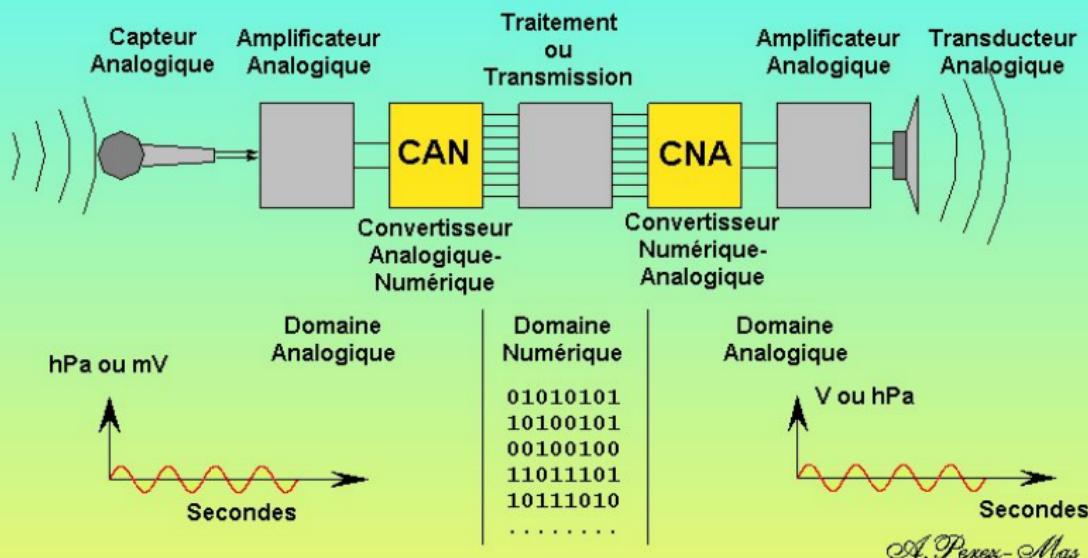
- Le livre de référence “SP4COMM” accessible via Jalon
- Notebooks Jupyter sur <https://jupyter.polytech.unice.fr:8000> (passer par le VPN !)
- Les transparents + transparents sonorisés

Evaluation

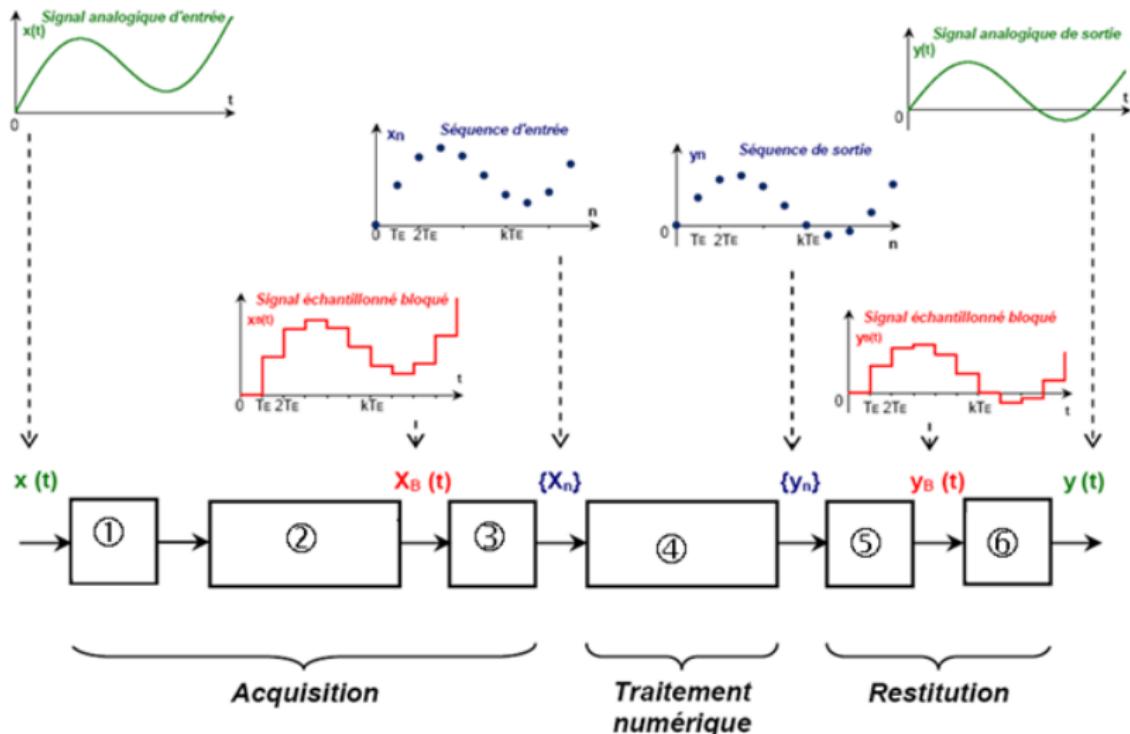
- 1 Quizz avant chaque cycle : 20 %
- 2 Homeworks intermédiaires (écrire un Notebook Jupyter) : 30 %
- 1 DS final (2 heures) : 50 %

Chaîne de traitement de signal

CHAINE DE TRAITEMENT NUMERIQUE

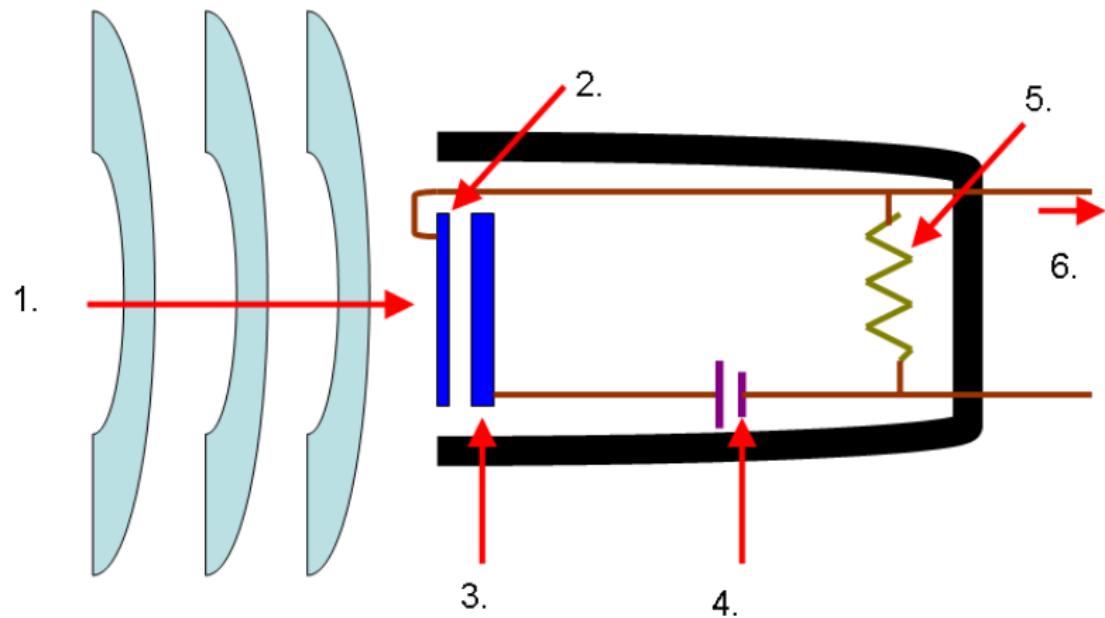


Chaîne de traitement de signal

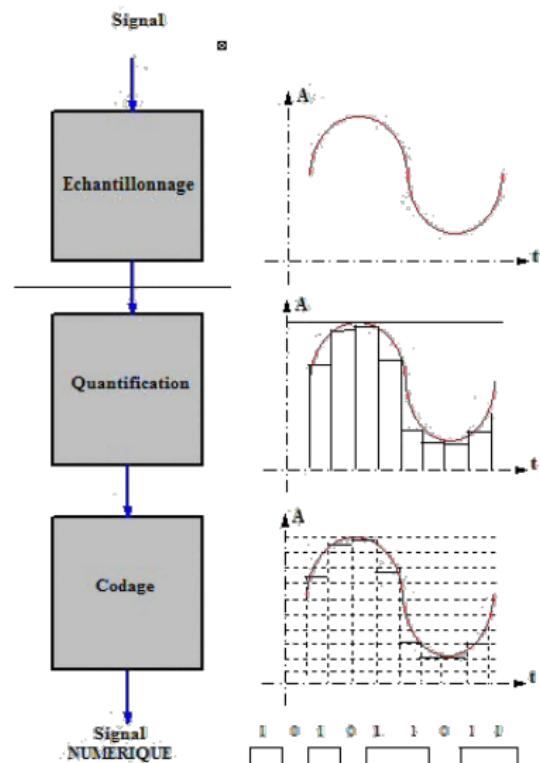


1 : mesure d'une grandeur physique - exemple du micro

Condenser Microphone



2-3 : Bloqueur - Echantillonneur - codage



4 : Traitement de signal proprement dit

- Codage (de parole, d'image,)
- Mise en forme de signaux (compression d'image, de son, ...)
- (dont) Débruitage.
- Extraction d'informations (température, réception d'images/parole, détection de cancers, reconnaissance de la parole, "Intelligence Artificielle")

4 : Outils du traitement de signal

- Analyse fréquentielle
- Analyse temps-fréquence
- Notions théoriques sur le bruit
- Filtrage linéaire

5 : Conversion Numérique - Analogique

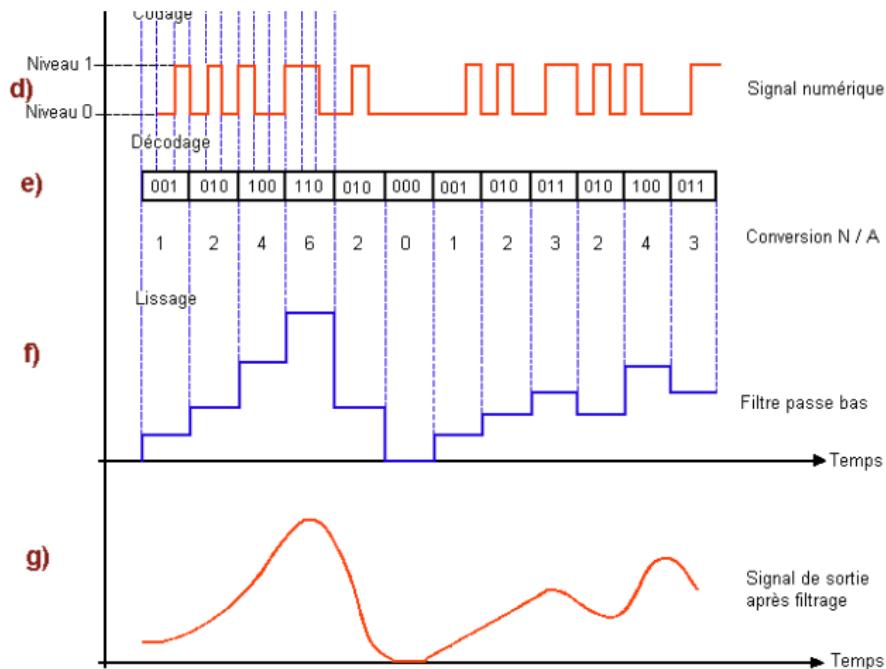
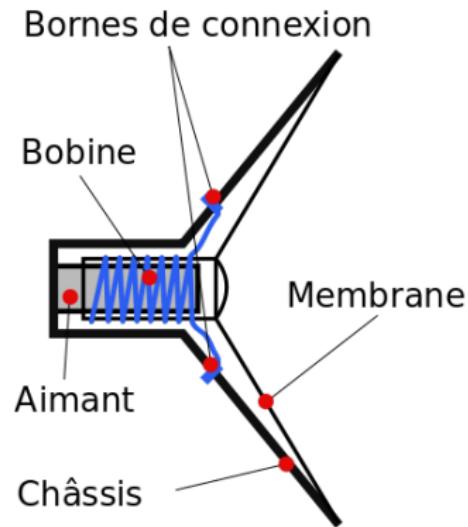


Fig. 5. - Conversion A / N - N / A.

6 :Transducteur - exemple du haut-parleur



En temps discret : comprendre les notions fréquentielles et temporelles

Objectifs

- Savoir ce qu'est un signal (continu), le caractériser, connaître les opérations de base (Cycle I)
- Savoir manipuler l'outil de base : les espaces vectoriels (Cycle II)
- Savoir manipuler un signal à temps discret, éléments de Traitement en Python (Cycle III)
- Comprendre et manipuler le domaine fréquentiel (TFD - Cycle IV)
- Comprendre et manipuler les notions Temps-Fréquence (STFT - Cycle V)

Traitement numérique du Signal

1: Signaux élémentaires

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Septembre 2018

Quelques signaux déterministes

On se limitera ici à quelques signaux déterministes, utilisés principalement dans les systèmes Linéaires Invariant dans le Temps (LTI).

Exponentielle complexe

$$x(t) = e^{st} \quad (1)$$



$$s = \sigma + i\omega$$

- σ : amortissement et ω pulsation
- on peut réécrire $x(t)$:

$$x(t) = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \quad (2)$$

- pour $t > 0$, l'enveloppe est :
 - exponentiellement décroissante en fonction du temps pour $\sigma < 0$,
 - constante pour $\sigma = 0$,
 - exponentiellement décroissante en fonction du temps pour $\sigma > 0$,

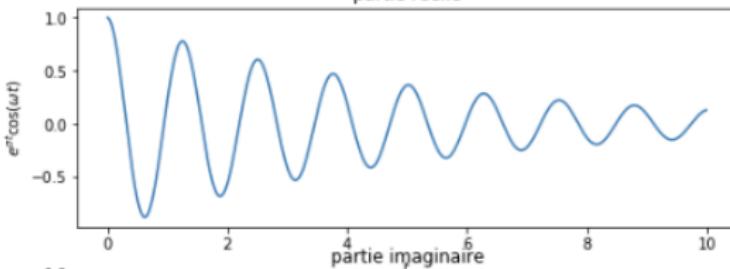
On utilise surtout $x(t) = e^{i\omega t}$ (pour permettre de faire une analyse harmonique du signal).

Exponentielle complexe : partie réelle et imaginaire

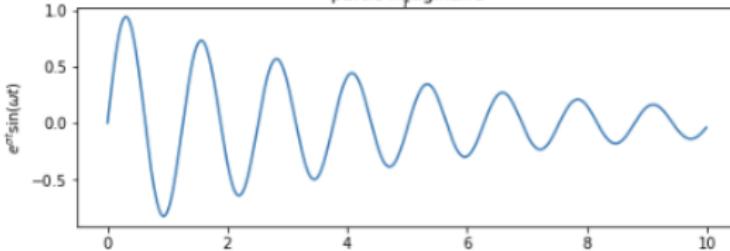
✖

sigma -0.20omega 5.00

partie réelle



partie imaginaire



La distribution de Dirac

Distribution de Dirac - Impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$\delta(t = 0) = \infty$$

$$\delta(t \neq 0) = 0$$

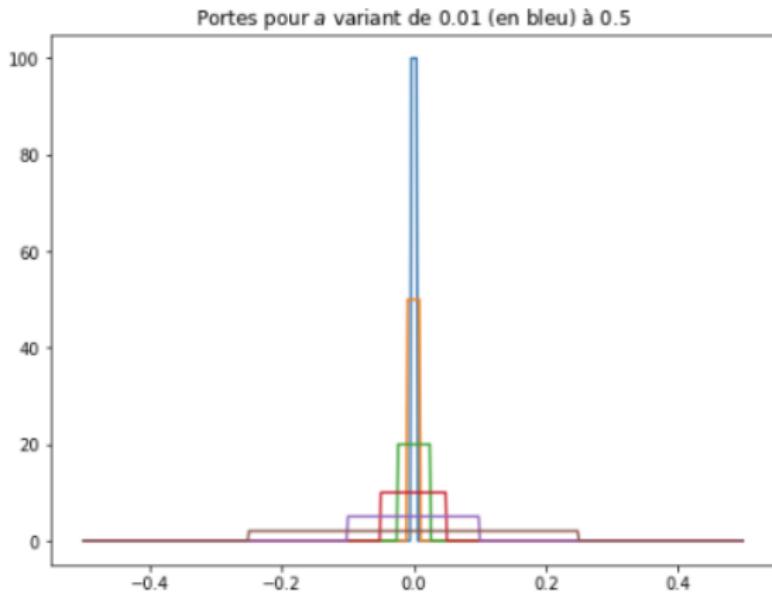
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

En particulier, on peut définir $\delta(t)$ de la façon suivante, soit la fonction porte :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq -\frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

On définit

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi_a(t)$$



Propriété de la distribution de Dirac

1 Propriété de sélection

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t) = x(0) \quad (3)$$

où $x(t)$ est différentiable à $t = 0$.

2 Multiplication

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) \quad (4)$$

où $x(t)$ est différentiable à $t = 0$.

3 Linéarité

$$a \cdot \delta(t) + b \cdot \delta(t) = (a + b) \cdot \delta(t) \quad (5)$$

4 Mise à l'échelle

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (6)$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus 0$. La distribution de Dirac a donc une symétrie paire.

5 Dérivation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(t)}{dt} \cdot x(t) dt = -\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (7)$$

Notez que le produit $\delta(t) \cdot \delta(t)$ de deux Dirac n'est pas défini.

Echelon unité (fonction de Heaviside)

Echelon unité

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (8)$$

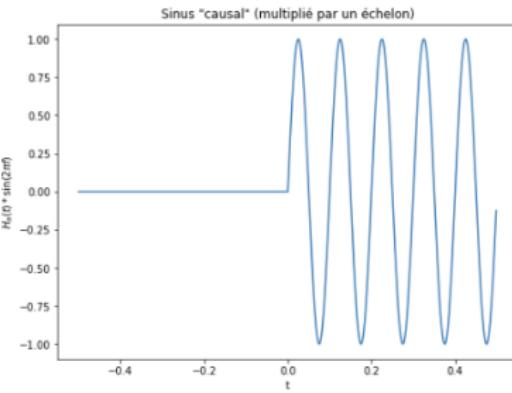
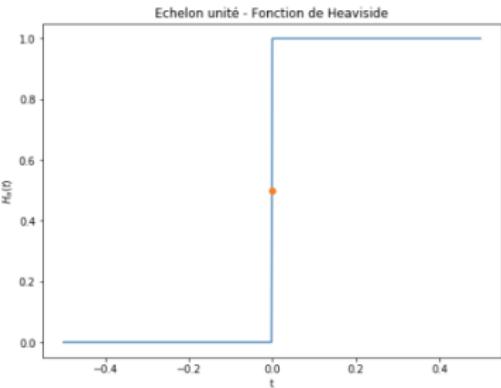
La valeur en $t = 0$ est parfois notée a ($a = \frac{1}{2}$ ci-dessus), et on note l'échelon par $H_a(t)$ (ici $H_{\frac{1}{2}}(t)$).

Relation entre échelon et impulsion de Dirac

Par abus de notation, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = H(t) \quad (9)$$

Notation : $u(t) = H_0(t)$



Fonction Porte (signal rectangulaire)

La fonction porte est définie par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Pi(t) = H_1\left(t + \frac{1}{2}\right) - H_1\left(t - \frac{1}{2}\right) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad (10)$$

On définit une porte "de largeur T " comme étant :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

On remarquera que $\Pi_T(t) = \Pi(\frac{t}{T})$.



Signal “sign”

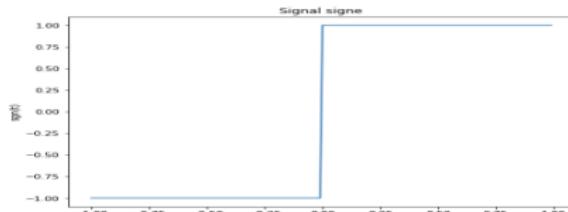
Le signal “sign” est défini par :

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$|x(t)| = x(t) \cdot \operatorname{sgn}(x(t)) \quad (12)$$

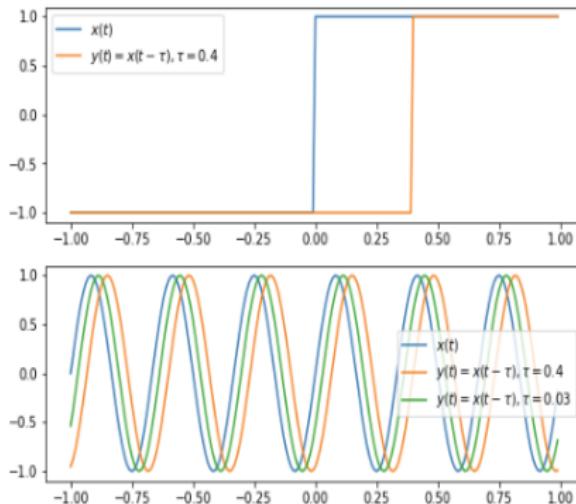
Ce signal est relié à l'échelon de Heaviside par

$$\operatorname{sgn}(t) = 2 \cdot H(t) - 1 \quad (13)$$



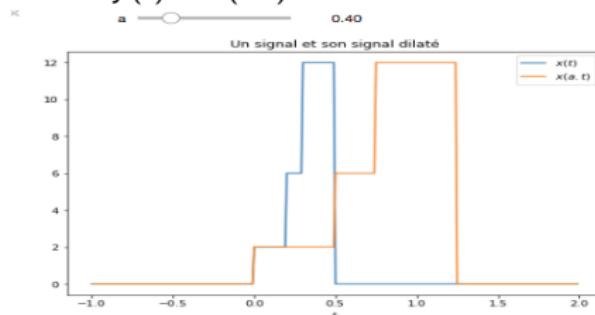
Opérations courantes

- **Superposition** : $y(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$
- **Décalage temporel** : $y(t) = x(t - \tau)$



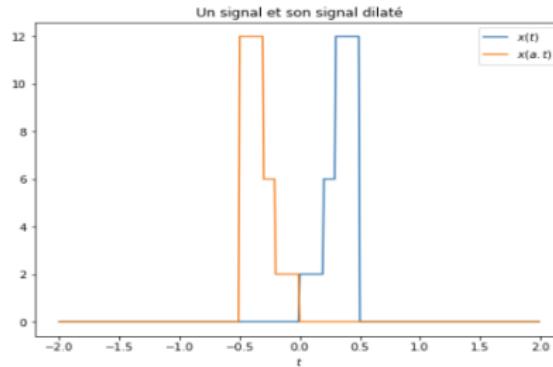
Opérations courantes

■ Dilatation / Contraction : $y(t) = x(a.t)$



Opérations courantes

- Retournement temporel : $y(t) = x(-t)$



Energie, Puissance et corrélation

Energie d'un signal $x(t)$ (réel ou complexe)

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Si E est fini on dit que le signal $x(t)$ est à énergie finie, c'est un **signal d'énergie**;

- L'énergie se mesure en Joules
- La **puissance instantanée** de $x(t)$ est

$$p(t) = x(t)x^*(t);$$

C'est la densité d'énergie : $p(t) = \frac{dE}{dt}$

Puissance moyenne d'un signal

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt$$

Si E est infini et que P , on a un **signal de puissance**.

Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation d'un signal d'énergie $x(t)$ est définie par

$$R_{xx}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

On note que $R_x(0) = E$.

Dans le cas d'un signal de puissance, l'intégrale précédente diverge et on définit :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

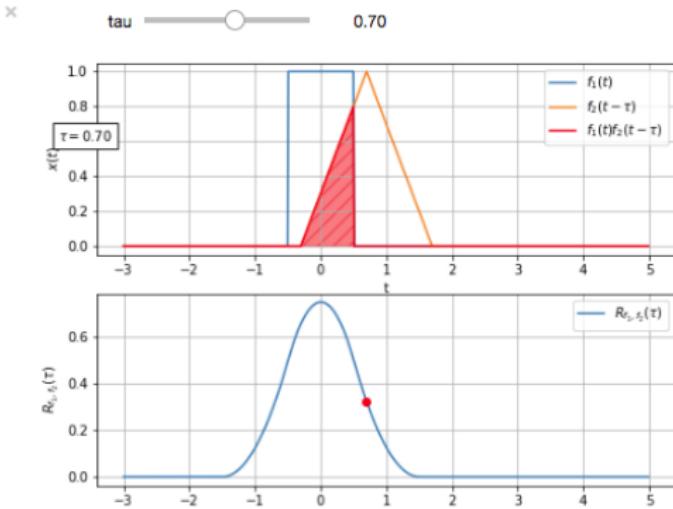
On note que $R_x(0) = P$.

Intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Exemple de fonction d'(inter)-corrélation



Propriétés de l'autocorrélation

- 1** La fonction d'autocorrélation a une symétrie Hermitienne :
De par la définition, on a directement que :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau)$$

Dans le cas de signaux réels on a une symétrie pure et simple :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

En particulier, pour un signal non nul : $R_{xx}(0) > 0$

- 2** Inégalité de Schwartz >

On peut définir la corrélation entre $x(t)$ et $y(t)$ comme étant un produit scalaire

$$\langle x, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt.$$

Alors, l'inégalité de Schwartz nous indique que

$$|\langle x, y_\tau \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y_\tau, y_\tau \rangle,$$

donc :

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0).$$

En particulier :

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0).$$

dans le cas réel $R_{xx}(0)$ est un maximum

Convolution

Convolution de $f_1(t)$ et $f_2(t)$: $(f_1 * f_2)(t)$

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Relation avec l'(inter-)correlation

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

En effet :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(-(\tau - t)) dt \\ &= x(\tau) * y^*(-\tau). \end{aligned}$$

Traitement numérique du Signal

2: Espaces vectoriels

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Novembre 2018

Un signal à temps discret

Un signal à temps discret typique :

$$x[n] = \dots, 1.234, -3.45, 3.4, -1.2, -10, 3.2101, \dots$$

Et ses différentes variantes ...

- de longueur finie ?
- périodique ?
- à support fini ?

Les espaces vectoriels

Un cadre commun pour traiter tous les signaux !

Utilité des espaces vectoriels en traitement de signal

Un cadre mathématique commun pour tout le traitement de signal

- cadre commun pour tous les types de signaux (y compris images, ...)
- Y compris pour les signaux continus,
- Une interprétation simple des transformées (Fourier, ...)
- Une interprétation simple de l'échantillonnage et de l'interpolation
- Un outil pour la compression, l'approximation, la détection
- Fondamental dans la conception de systèmes (bouclés, télécoms, ...)

Trois avantages

- Les espaces vectoriels sont des objets très généraux ... donc très puissants
- Les espaces vectoriels sont définis par leurs propriétés.
- Dès que ces propriétés sont définies, ... on a toute une boîte à outils pour manipuler ces espaces

Quelques exemples que vous connaissez

Les évidents :

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: Espaces euclidiens, géométrie dans l'espace.
- $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$: Espaces euclidiens "généralisés" - algèbre linéaire

Les moins évidents :

- $l_2(\mathbb{Z}^N)$: l'espace des séquences infinies de carré sommable
- $L_2([a, b])$: l'espace des *fonctions* de carré intégrable sur un intervalle.

Les vecteurs peuvent être des fonctions !

Quelques exemples que vous connaissez

Les évidents :

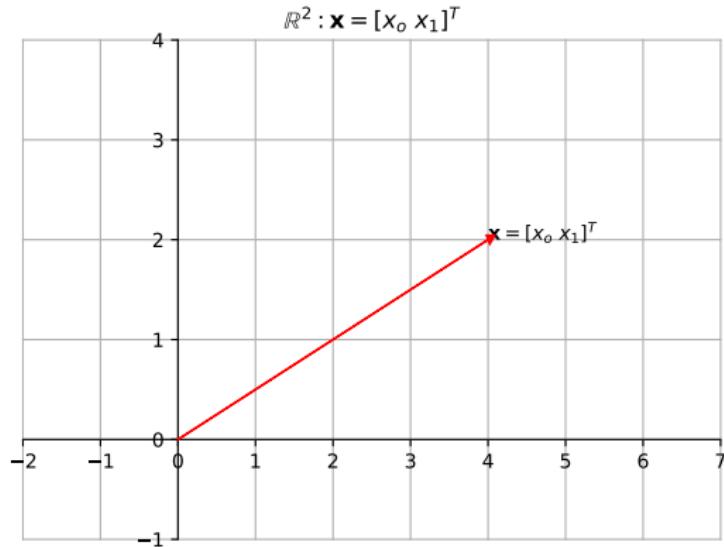
- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: Espaces euclidiens, géométrie dans l'espace.
- $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$: Espaces euclidiens "généralisés" - algèbre linéaire

Les moins évidents :

- $l_2(\mathbb{Z}^N)$: l'espace des séquences infinies de carré sommable
- $L_2([a, b])$: l'espace des *fonctions* de carré intégrable sur un intervalle.

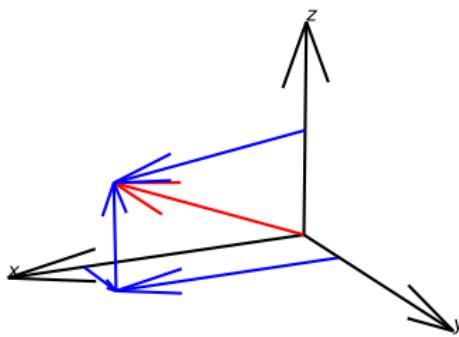
Les vecteurs peuvent être des fonctions !

Ceux qu'on représente graphiquement



Ceux qu'on représente graphiquement

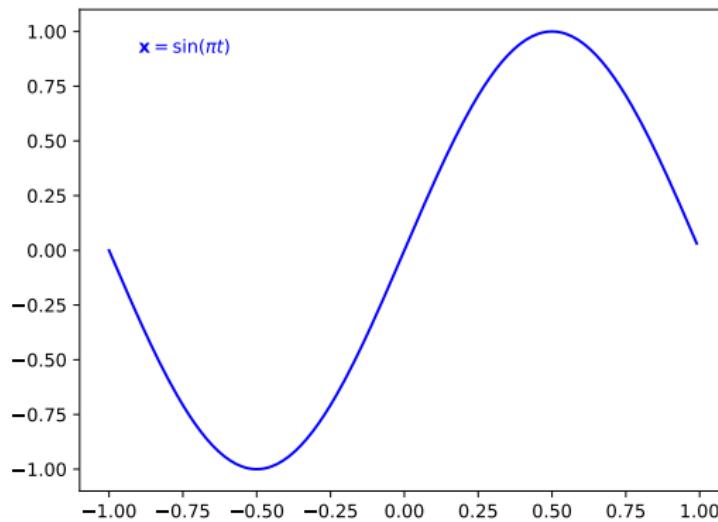
$$\mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ x_2]^T$$



Ceux qu'on représente graphiquement

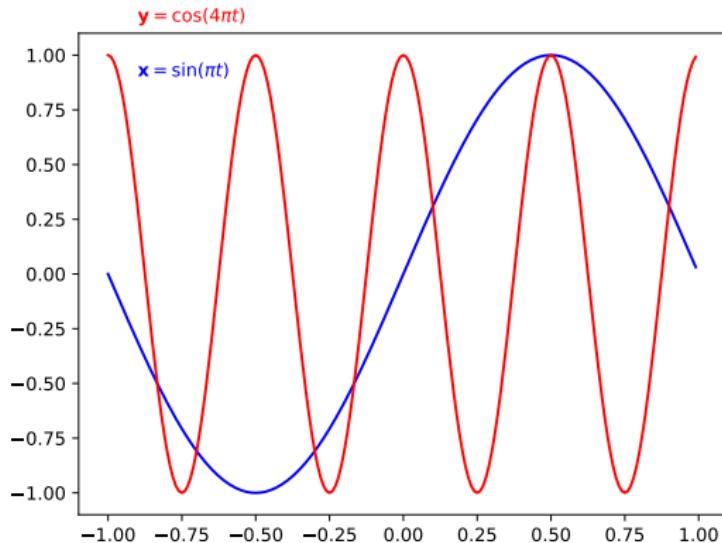
Vecteurs : fonctions de carré intégrable

$$L_2([-1, 1]) : \quad \mathbf{x} = x(t), \quad t \in [-1, 1]$$



Ceux qu'on représente graphiquement

$$L_2([-1, 1]) : \quad \mathbf{x} = x(t), \quad t \in [-1, 1]$$



Espaces vectoriels

vecteurs et scalaires

Un ensemble de vecteurs V et de scalaires (par exemple dans \mathbb{C})

Propriétés

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

commutativité de l'addition $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

associativité de l'addition $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

Distributivité de la multiplication scalaire $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$,
 $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$

Vecteur nul pour l'addition : $\exists \mathbf{0} | \forall \mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Vecteur inverse pour l'addition $\forall \mathbf{x} \in V, \exists (-\mathbf{x}) | \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Identité pour la multiplication scalaire : $\forall \mathbf{x} \in V : 1.\mathbf{x} = \mathbf{x}.1 = \mathbf{x}$

Produit intérieur : mesurer et comparer

Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, on définit un produit intérieur $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ qui représente une distance entre ces deux vecteurs, c'est une fonction de $V \times V$ dans S . Comme c'est une distance, il faut les propriétés suivantes :

distributivité : $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

mise à l'échelle : $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
 $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

commutativité "hermitienne" $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$

produit propre positif $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Orthogonalité, norme et inégalités triangulaires

orthogonalité on dit que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ssi $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$

norme On définit la norme (2) d'un vecteur par $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{-1/2}$

inégalité de Cauchy-Schwarz On en déduit $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (égalité ssi $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$).

inégalités triangulaires : $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (égalité ssi $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$) En particulier, si $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ (Pythagore)

Espace de Hilbert

Définition

Espaces de Hilbert séparables

Un espace vectoriel $H(V, S)$, équipé d'un produit intérieur, et ayant la propriété de complétude, est un espace de Hilbert.

La

Si cet espace admet des bases orthonormales, il est dit **séparable**.

complétude signifie que toute séquence convergente de vecteurs V tend vers un limite qui est dans V .

Exemple d'espace de Hilbert

Vecteurs de nombres complexes :

\mathbb{C}^N avec l'addition classique :

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} : z_n = x_n + y_n$$

et le produit intérieur :

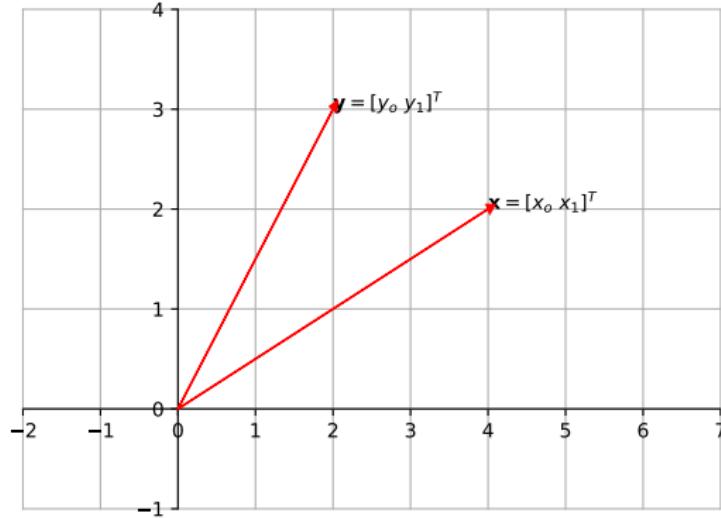
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* y_n$$

Fonctions de carré sommable sur un intervalle fini (par exemple sur $[0,1]$) :

Produit intérieur dans \mathbb{R}^2

Dans \mathbb{R}^2 , on a simplement

$$\langle x, y \rangle = x_0 \cdot y_0 + x_1 \cdot y_1$$

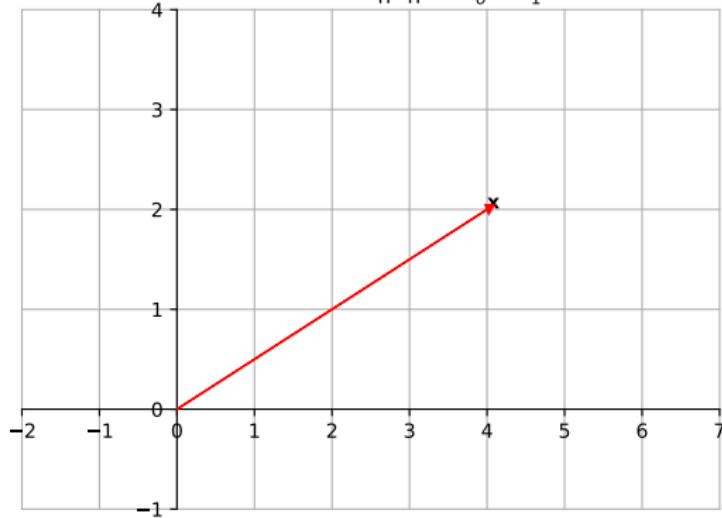
Produit intérieur dans \mathbb{R}^2 

Produit intérieur dans \mathbb{R}^2 : Norme

Dans \mathbb{R}^2 , on a simplement

$$\langle x, x \rangle = x_0^2 + x_1^2 = \|x\|^2$$

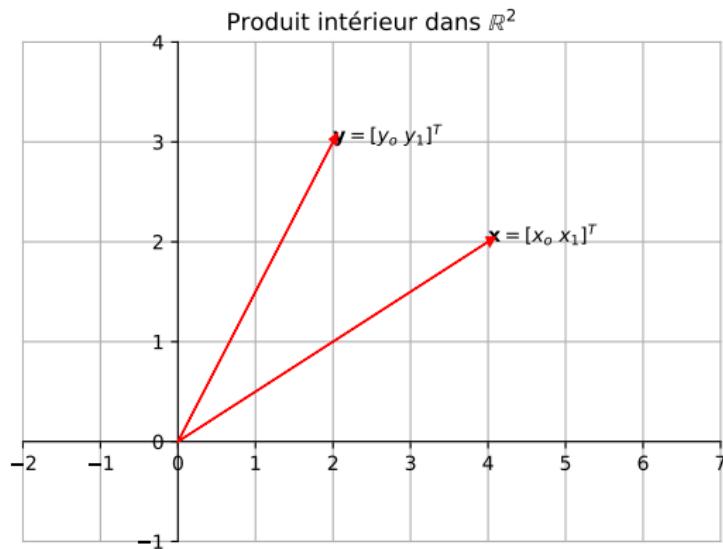
Norme dans \mathbb{R}^2 $\|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2$



Produit intérieur dans \mathbb{R}^2

Dans \mathbb{R}^2 , on a simplement

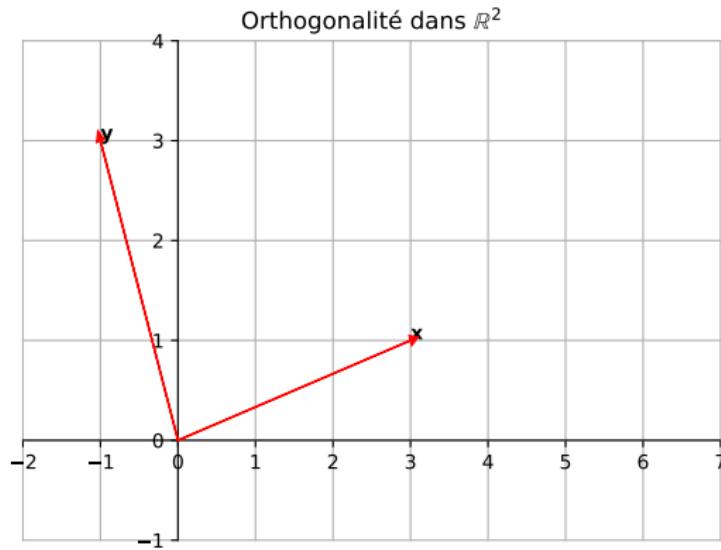
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0 \cdot y_0 + x_1 \cdot y_1 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha$$



Produit intérieur dans \mathbb{R}^2 : orthogonalité

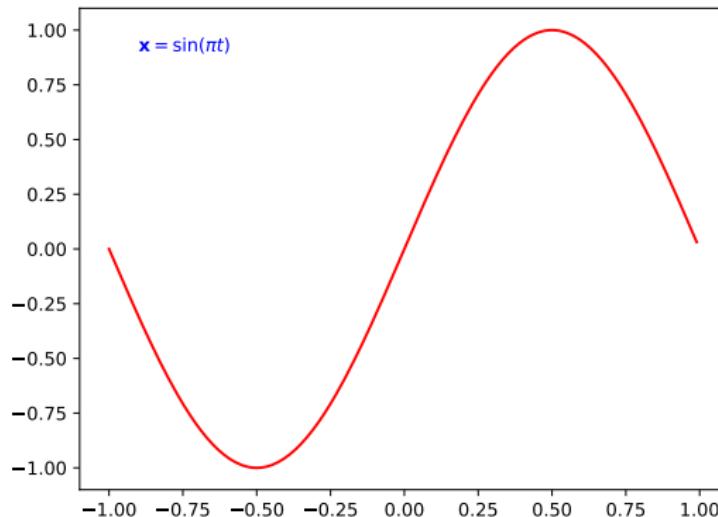
Si α : 90 degrés

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0 \cdot y_0 + x_1 y_1 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha = 0$$



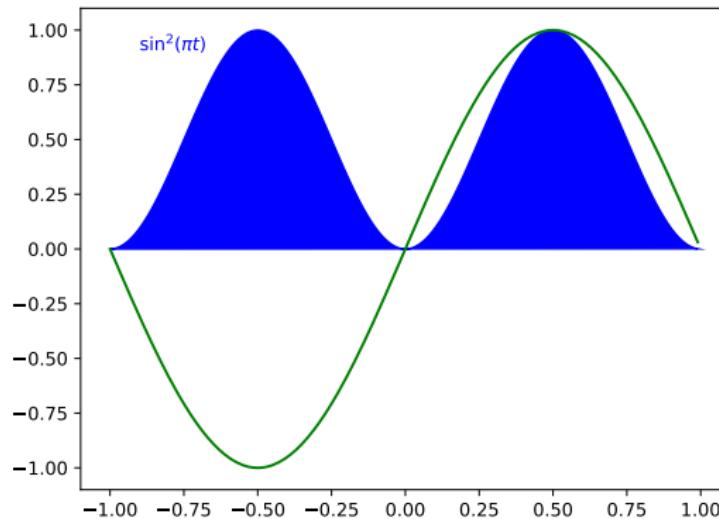
Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$$



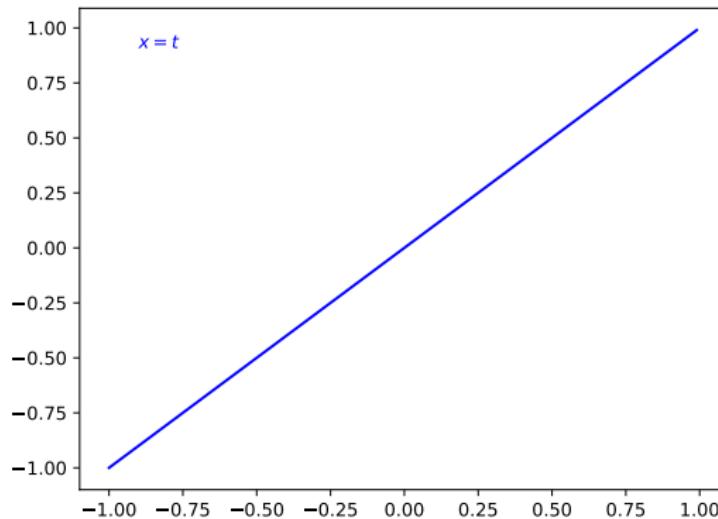
Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi t) dt = 1$$



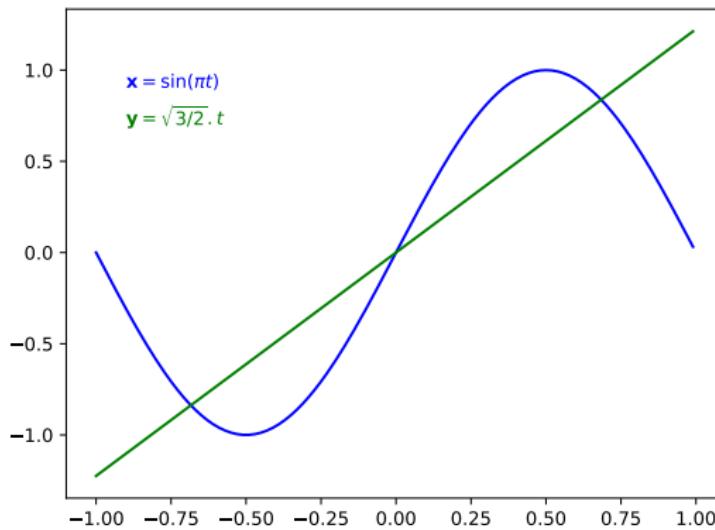
Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

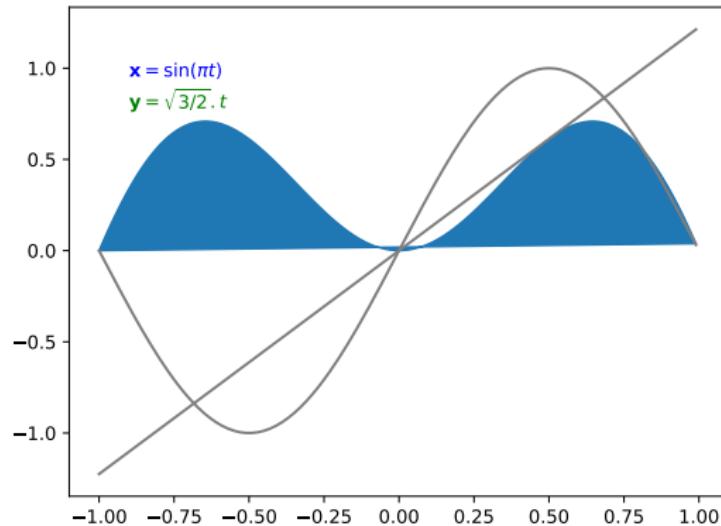
$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3$$



Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

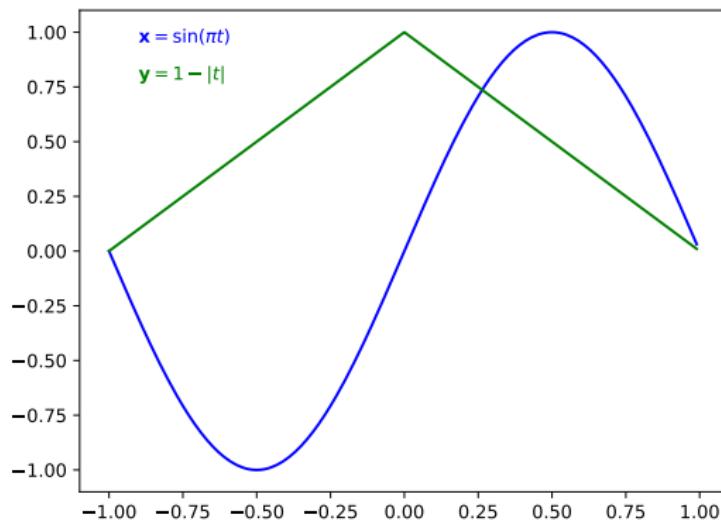
$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3$$



Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

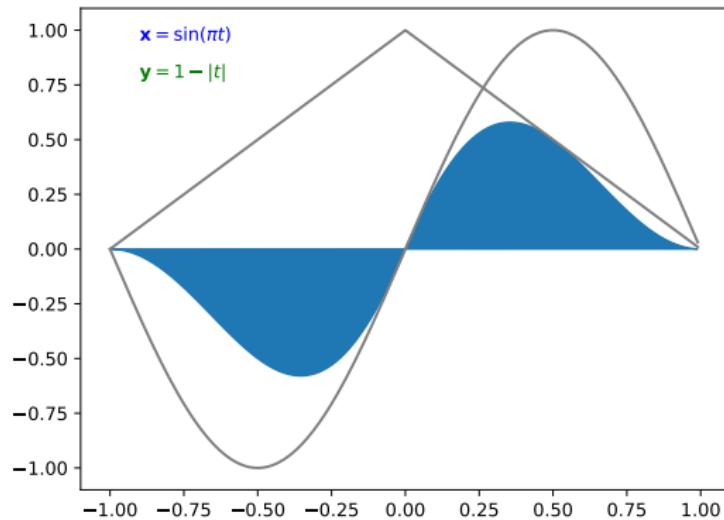
Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

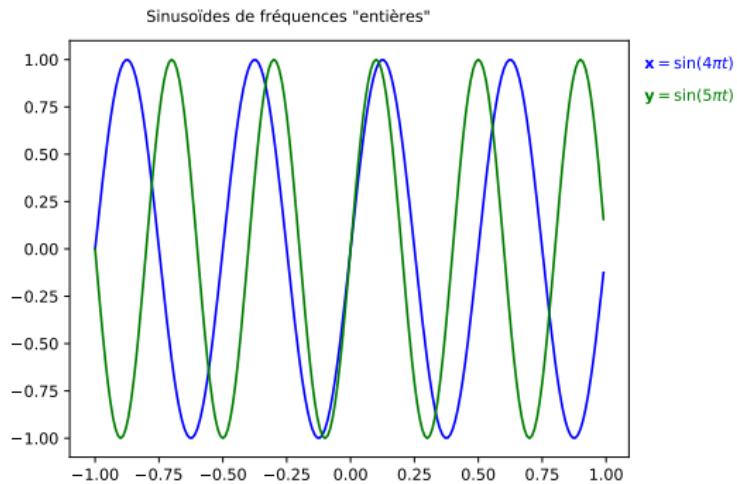
x et y forment des sous-espaces orthogonaux

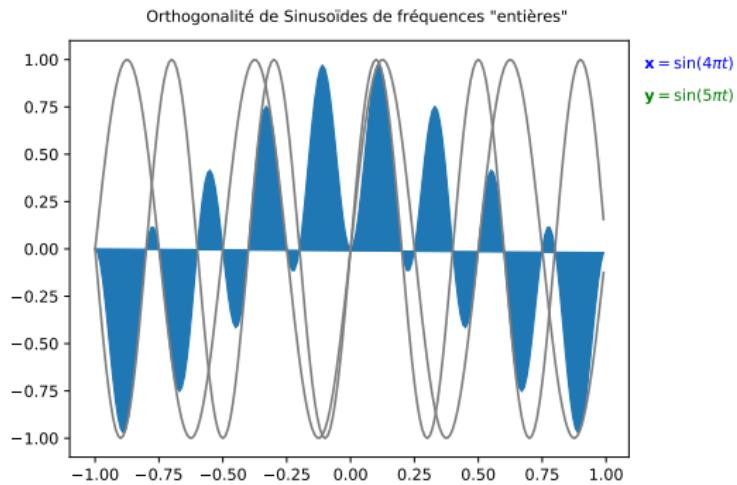


Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

x et y forment des sous-espaces orthogonaux



Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

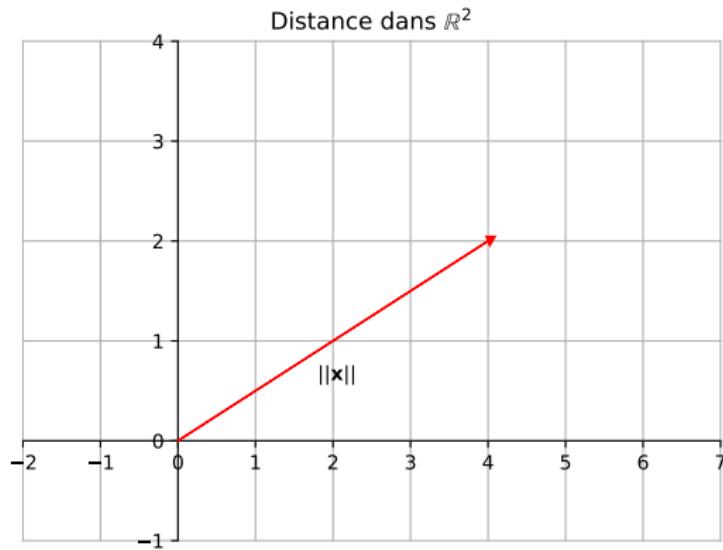
Produit intérieur dans $L_2[-1, 1]$: Norme

De la norme à la Distance

- **Le produit intérieur** définit la norme : $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$
- **La Norme** définit la distance : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

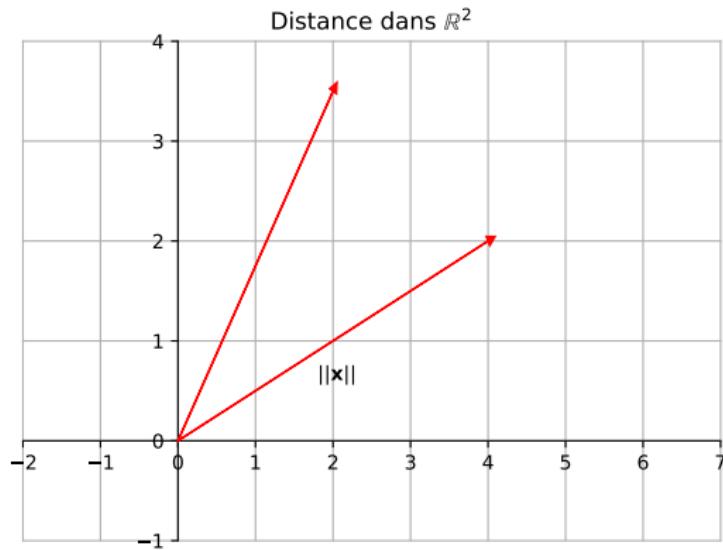
Norme et distance dans \mathbb{R}^2

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$$



Norme et distance dans \mathbb{R}^2

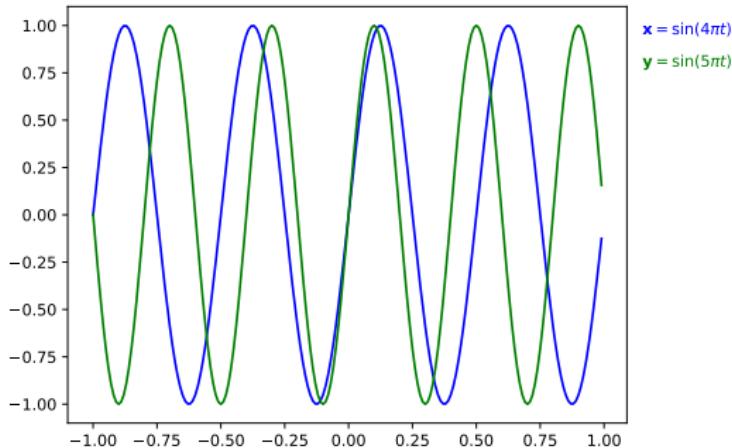
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2}$$



Distance dans $L_2[-1, 1]$: l'erreur quadratique moyenne

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \int_{-1}^1 |x(t) - y(t)|^2 dt$$

Distance entre deux Sinusoïdes de fréquences "entières"

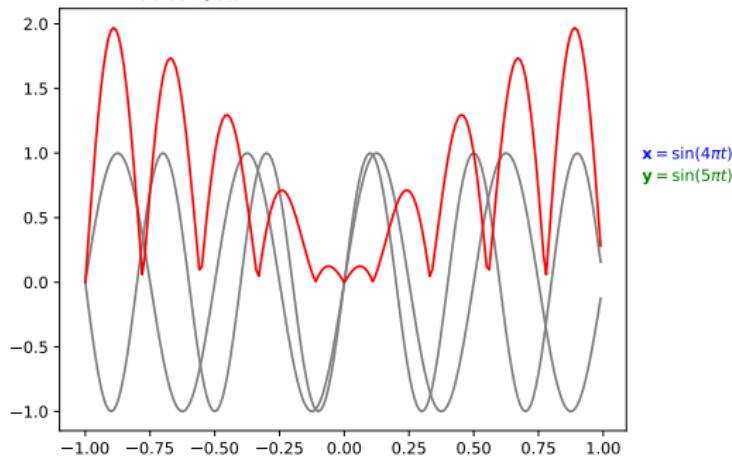


Distance dans $L_2[-1, 1]$: l'erreur quadratique moyenne

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \int_{-1}^1 |x(t) - y(t)|^2 dt = 2$$

Distance entre deux Sinusoïdes de fréquences "entières"

$$\sqrt{(x(t) - y(t))^2}$$



Bases Orthogonales et Orthonormales

Soit un espace de Hilbert de dimension K , alors, on peut décrire tout vecteur de l'espace par :

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \psi_k$$

, où $\{\psi_k\}_{k=1\dots K}$ est la base de l'espace vectoriel, et α_k sont les coefficients (réels ou complexes) qui définissent les coordonnées du vecteur x .

Si on travaille avec des signaux continus, on aura :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \psi_k(t).$$

Si on travaille avec des signaux de carré sommable (à énergie finie) sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, l'espace est noté $L^2(t_1, t_2)$ et l'énergie du signal est le carré de la norme :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle^Z = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

On rappelle que la base est orthonormale si $\{\psi_k\}_{k=1\dots K}$ est une famille de fonctions orthogonales de norme unité.

Construire une base Orthonormale

Procédure de Gram-Schmidt

En entrée, on a : $\{v_1, \dots, v_K\}$, une base quelconque.

- Poser $w_1 = v_1$, calculer $\psi_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$, $k = 1$;
- Itérer : $k = k + 1$

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \psi_i \rangle \cdot \psi_i$$

$$\psi_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$$

- Jusqu'à $k = K$

Traitement numérique du Signal

3: Utilisation de Python

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

Traitements numériques du Signal

4: Transformée de Fourier Discrète

4.1 : Sinusoïdes complexes en tant que bases de la Transformée

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

Un point de vue fréquentiel

Beaucoup de signaux sont “naturellement” périodiques :

- Battements de coeur
- Musique (cordes vibrantes, cavités résonnantes)
- Machines tournantes
- ...

Fourier est l’outil qui décrit le comportement périodique / fréquentiel des signaux :

- La DFT : Discrete Fourier Transform.
Elle fait correspondre un signal discret de dimension N à un ensemble de N fréquences discrètes.
- La DFS : Discrete Fourier Series.
Elle fait correspondre un signal discret *périodique* de dimension N à un ensemble de N fréquences discrètes.
- La DTFT : Discrete Time Fourier Transmorm.
Elle fait correspondre un signal de dimension *infinie* une fonction périodique de période 2π .

L’ensemble de ces fréquences / fonction est appelé *Spectre*.

Signal Sinusoïdal Complexé

Rappels : Formules d'Euler

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

$$e^{j\pi} = \cos(\pi) + j \sin(\pi) = -1 \quad | -1 | = 1; \phi(-1) = \pi$$

$$e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) = j \quad | j | = 1; \phi(j) = \pi/2$$

$$e^{-j\pi/2} = \cos(-\pi/2) + j \sin(-\pi/2) = -j \quad | -j | = 1; \phi(-j) = -\pi/2$$

$$\sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) = \frac{1}{2e^{j\pi/2}} (e^{j\omega_0 n} + e^{j\pi} e^{-j\omega_0 n})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{-j\omega_0 n}$$

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

Signal Sinusoïdal Discret Complexé

Sinusoïde complexe périodique

Soit un signal $x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, $\omega_0 = 2\pi f_0$

Pour que $x[n] = x[n + kT_0]$, $k = 1, 2, \dots$, il faut :

- ($k = 1$) que $e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} = e^{j\phi} e^{j\omega_0(n+T_0)}$, donc T_0 entier et $T_0 = \frac{1}{f_0}$. Donc f_0 , la fréquence fondamentale, est un nombre rationnel.
- Le cas “extrême” est le cas où $T_0 = \infty$, donc $f_0 = 0$, soit un signal continu sur son support, et valant $x[n] = e^{j\phi}$.
- Le cas où le signal est a-périodique correspond à $T_0 = N$ ($f_0 = 1/N$).
- Le cas “suivant” est le cas où $T_0 = N/2$ et donc $f_0 = 2/N$
- On déduit aisément qu'on aura les périodes $T_0 = N/k$, $k = 1, \dots, N/2$, si N/k entier et donc les fréquences $f_0 = k/N$.

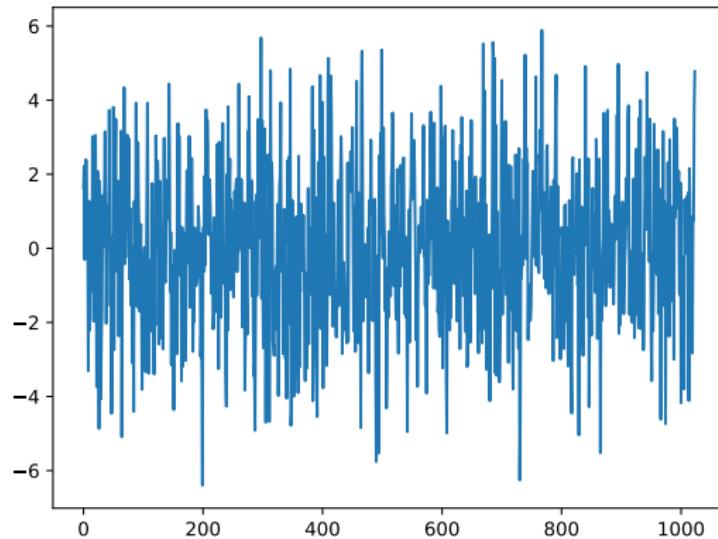
Une sinusoïde discrète complexe peut s'écrire

$$x[n] = e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

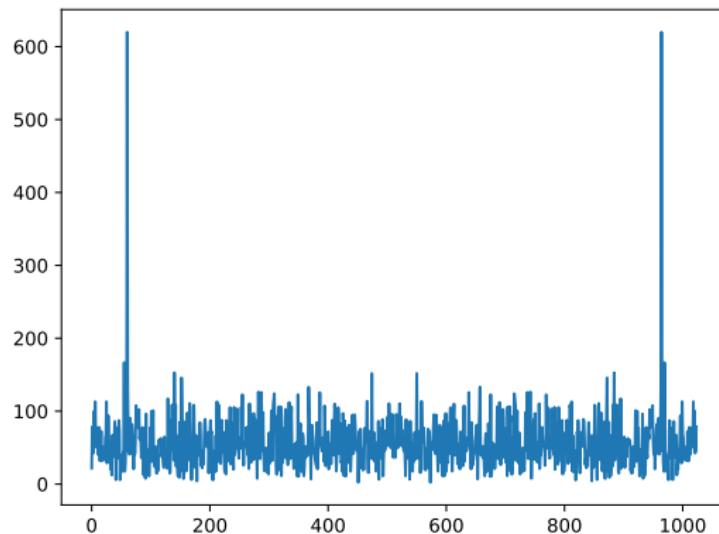
- Si $x[n]$ est de longueur N , il faut $f_0 = \frac{k}{N}$ entier.
- Si $x[n]$ est de dimension infinie, $f_0 = \frac{k}{N}$ est peut être quelconque.



Signal Temporel



Signal Temporel ... et sa vision Fréquentielle



La base de Fourier : les sinusoïdes complexes

On se limite aux signaux de dimension N

- En tant que sinusoïde : $w_k[n] = e^{j2\pi \frac{k}{N}n} \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1$
- En tant que vecteur : $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,N-1}$ et $w_n^{(k)} = e^{j2\pi \frac{k}{N}n}$

Base orthogonale : soit $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i^*$, on a alors

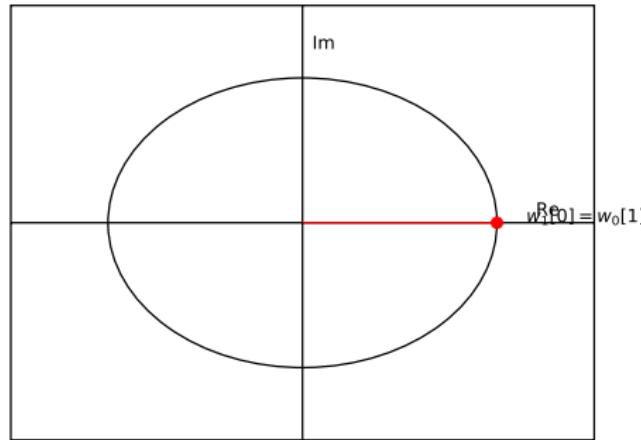
$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k')} \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N}i} e^{-j2\pi \frac{k'}{N}i} = \sum_{i=0}^{N-1} e^0 = N$$

PAS NORMEE: il faudrait un facteur de normalisation $1/\sqrt{N}$.

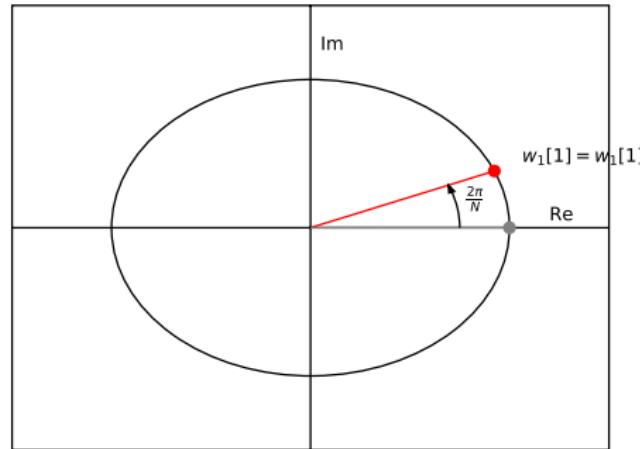
Et pour $k \neq k'$:

$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k')} \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N}i} e^{-j2\pi \frac{k'}{N}i} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k-k'}{N}i} = 0$$

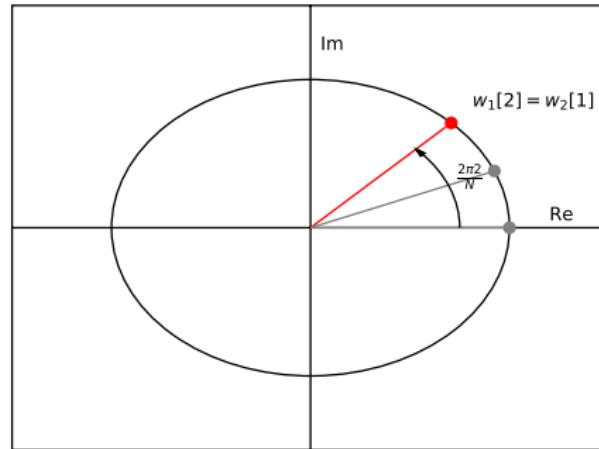
Que veulent dire ces fonctions de base



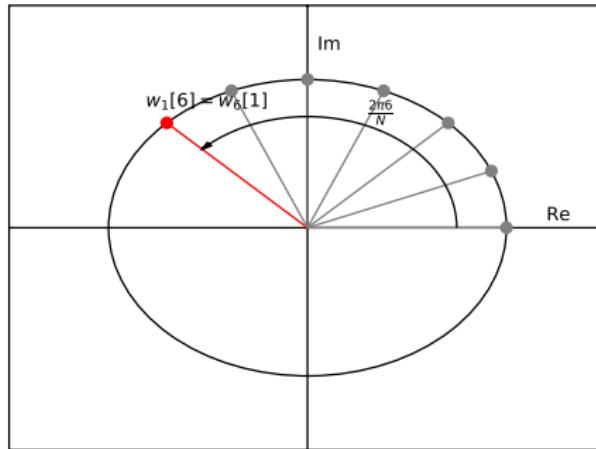
Que veulent dire ces fonctions de base



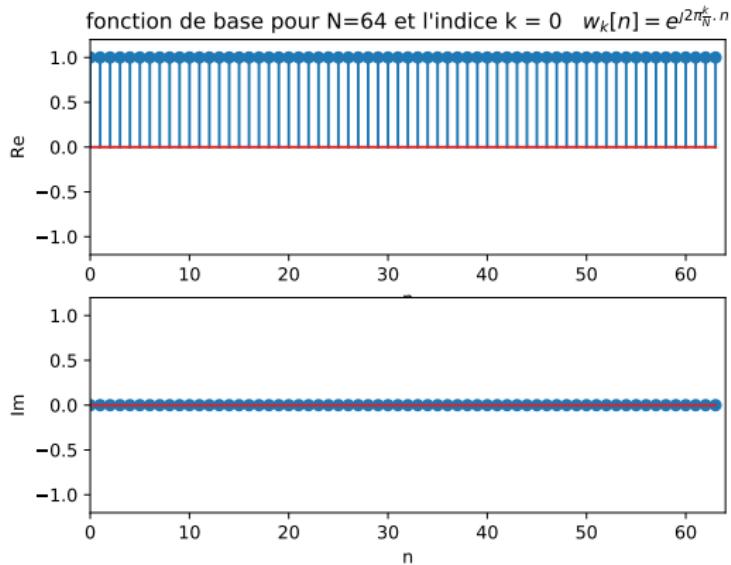
Que veulent dire ces fonctions de base



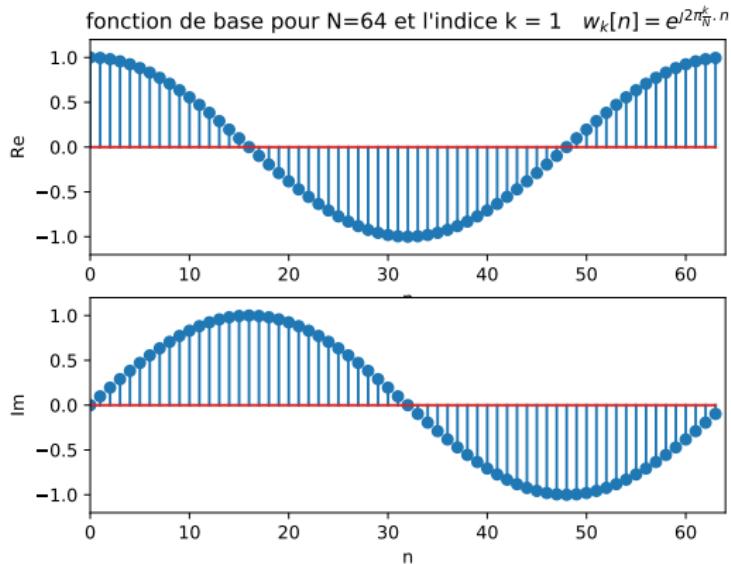
Que veulent dire ces fonctions de base



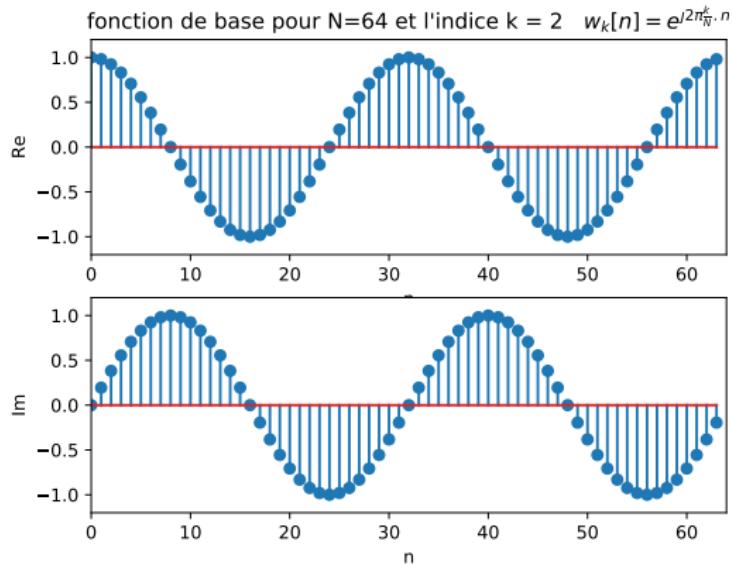
Les fonctions de base en temporel



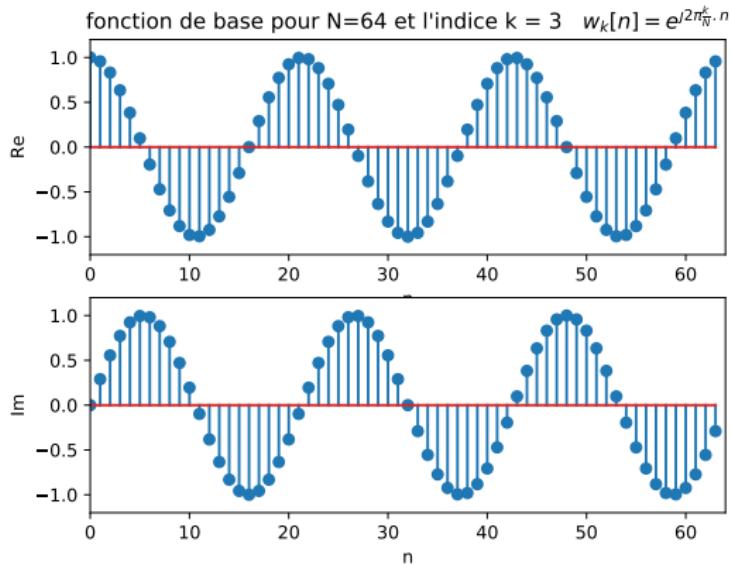
Les fonctions de base en temporel



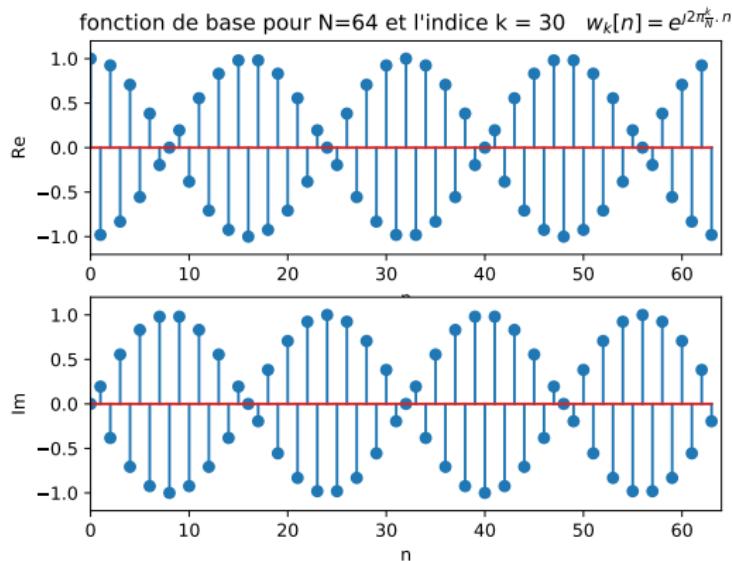
Les fonctions de base en temporel



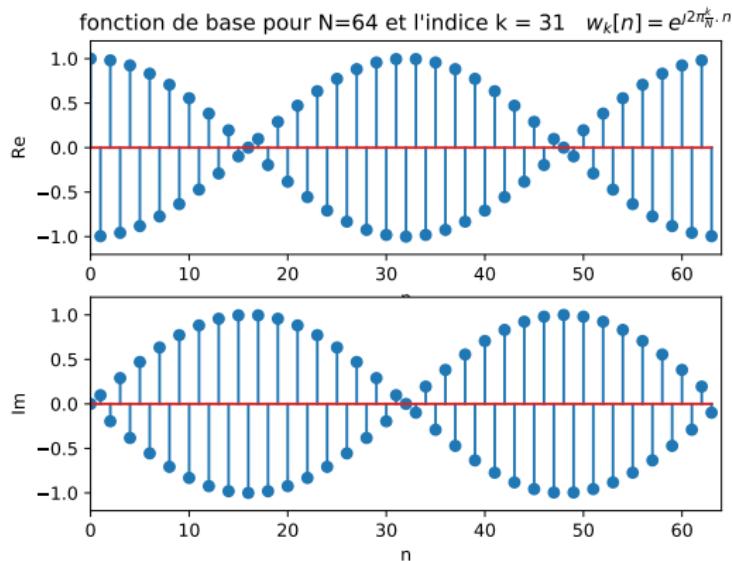
Les fonctions de base en temporel



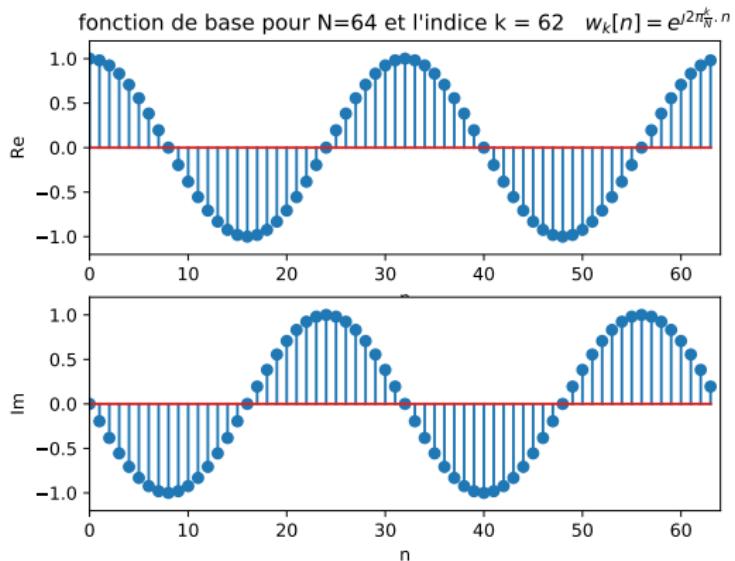
Les fonctions de base en temporel



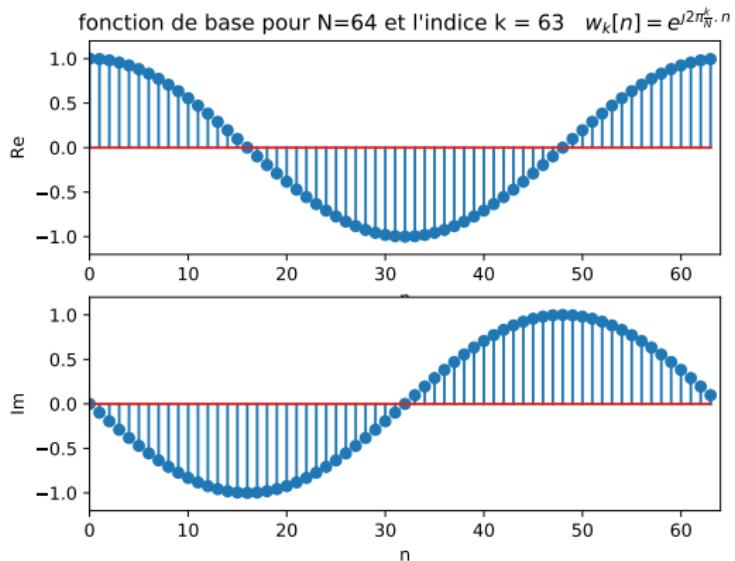
Les fonctions de base en temporel



Les fonctions de base en temporel



Les fonctions de base en temporel



Transformées de Fourier / changement de base

Analyse - Définition de la DFT

$$X_k = \langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle$$

DFT : Discrete Fourier Transform

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Synthèse - Définition de la DFT Inverse

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{w}^{(k)}$$

IDFT : Inverse Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk} s, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$



Transformée de Fourier : vue matricielle

Changement de base = Multiplication par la matrice de changement de base

On définit : $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ et la matrice \mathbf{W} telle que $\mathbf{W}_{n,m} = W_N^{nm}$:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \cdots & W^{(N-1)} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Analyse -DFT matricielle

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

DFT : Discrete Fourier Transform

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{k 2\pi}{N} n k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Synthèse - IDFT matricielle

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{X}$$

IDFT : Inverse Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} n k}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Traitement numérique du Signal

4: Transformée de Fourier Discrète

4.2 : Propriétés de la transformée de Fourier Discrète

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

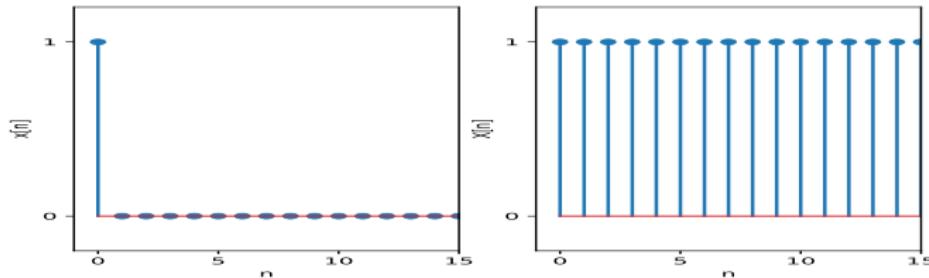
La DFT est linéaire

Tout est linéaire

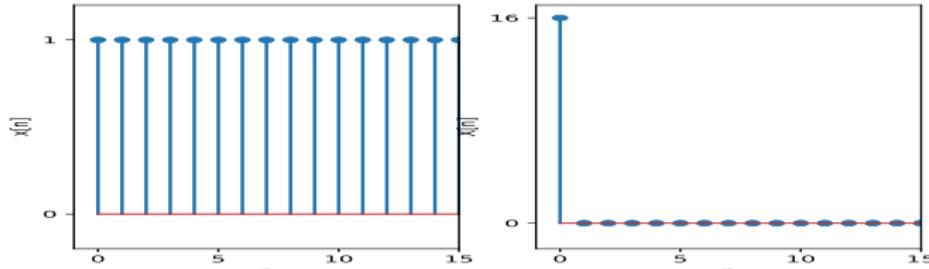
$$\text{DFT}(\alpha x[n] + \beta y[n]) = \alpha \text{DFT}(x[n]) + \beta \text{DFT}(y[n])$$

La DFT d'une impulsion est une constante et vice-versa

Soit $x[n] = \delta[n]$ ($x[n] \in \mathbb{C}^N$) : $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} = 1$



Soit $x[n] = \delta[n]$: ($x[n] \in \mathbb{C}^N$) : $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} = N\delta[k]$

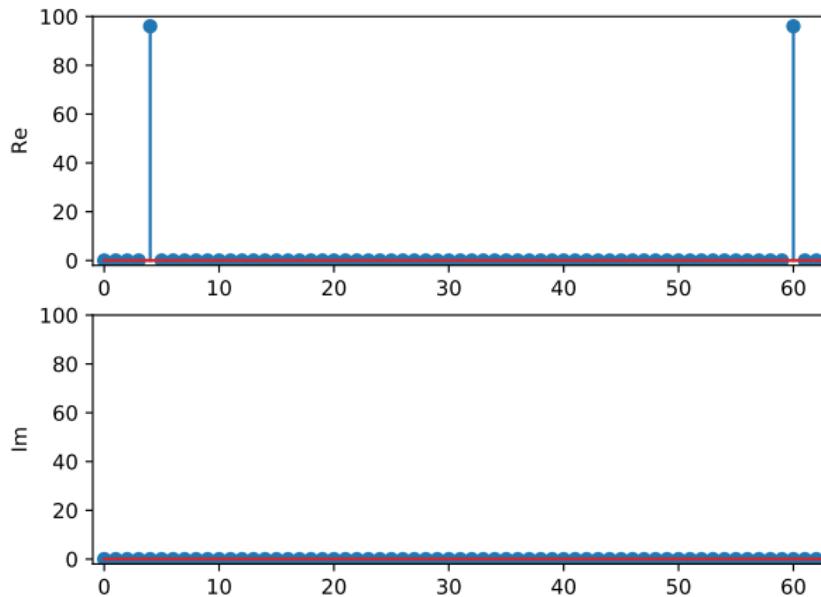


DFT d'un cosinus ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

$$\begin{aligned}x[n] &= 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16} n\right) \\&= \frac{3}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right] \\&= \frac{3}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} 60n} \right] \\&= \frac{3}{2} (w_4[n] + w_{60}[n])\end{aligned}$$

DFT d'un cosinus ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

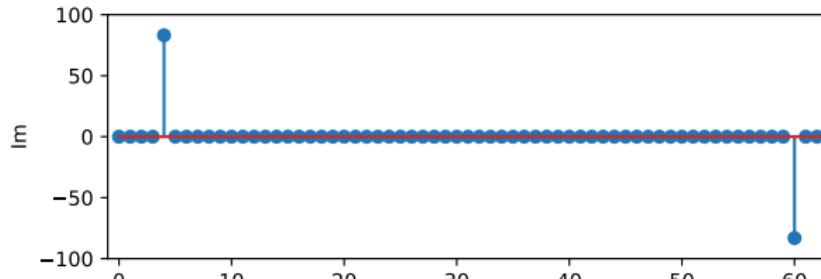
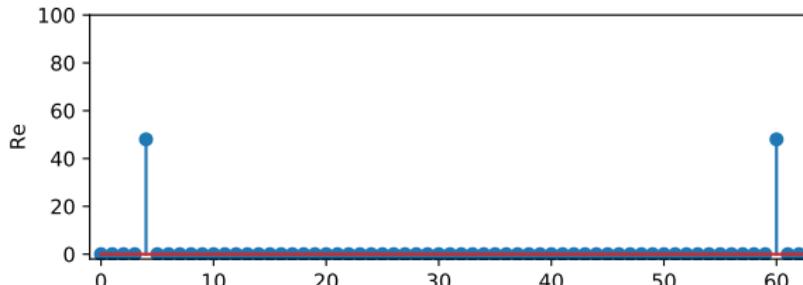
$$\begin{aligned} X[k] &= \langle w_k[n], x[n] \rangle \\ &= \frac{3}{2} \langle w_k[n], w_4[n] \rangle + \frac{3}{2} \langle w_k[n], w_{60}[n] \rangle \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 64 & \text{pour } k = 4, 60 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

DFT d'un cosinus ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

DFT d'un cosinus déphasé ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16}n + \frac{\pi}{3}\right) = 3/2 \left[e^{j\frac{2\pi}{64}4n} e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{64}4n} e^{-j\frac{\pi}{3}} \right] = 3/2(e^{j\frac{\pi}{3}} w_4[n] + e^{-j\frac{\pi}{3}} w_{60}[n])$$

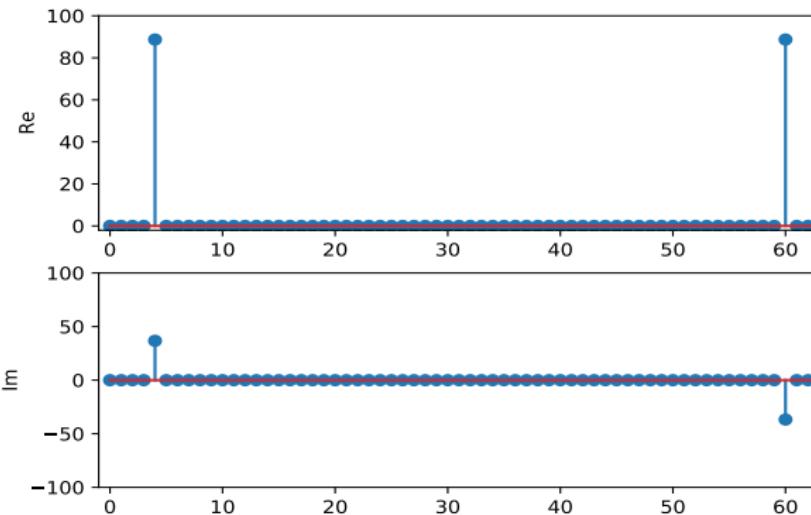
$$X[k] = \langle w_k[n], x[n] \rangle = 96e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(4) + 96e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(60)$$



DFT d'un cosinus retardé ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

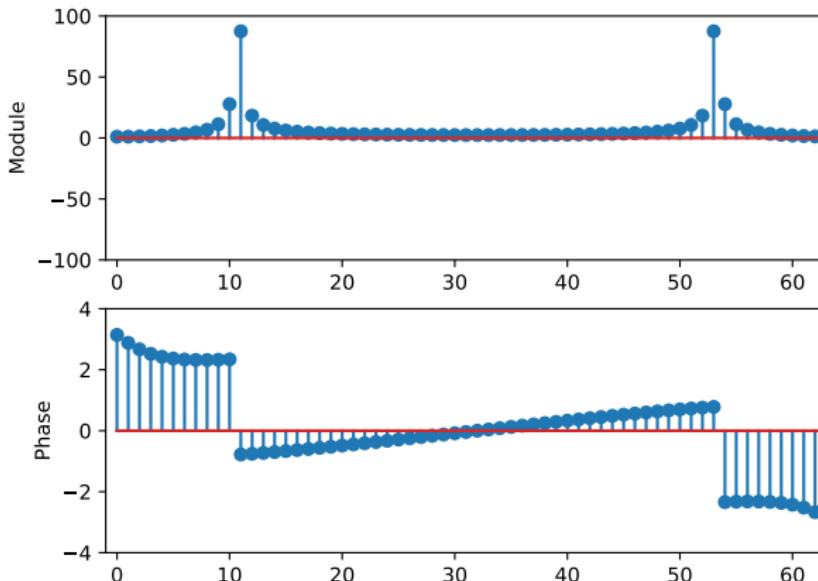
$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16}(n+1)\right) = 3/2 \left[e^{j\frac{2\pi}{64}4n} e^{j\frac{2\pi}{16}} + e^{-j\frac{2\pi}{64}4n} e^{-j\frac{2\pi}{16}} \right] = 3/2(e^{j\frac{2\pi}{16}} w_4[n] + e^{-j\frac{2\pi}{16}} w_{60}[n])$$

$$X[k] = \langle w_k[n], x[n] \rangle = 96e^{j\frac{2\pi}{16}\delta(4)} + 96e^{-j\frac{2\pi}{16}\delta(60)}$$



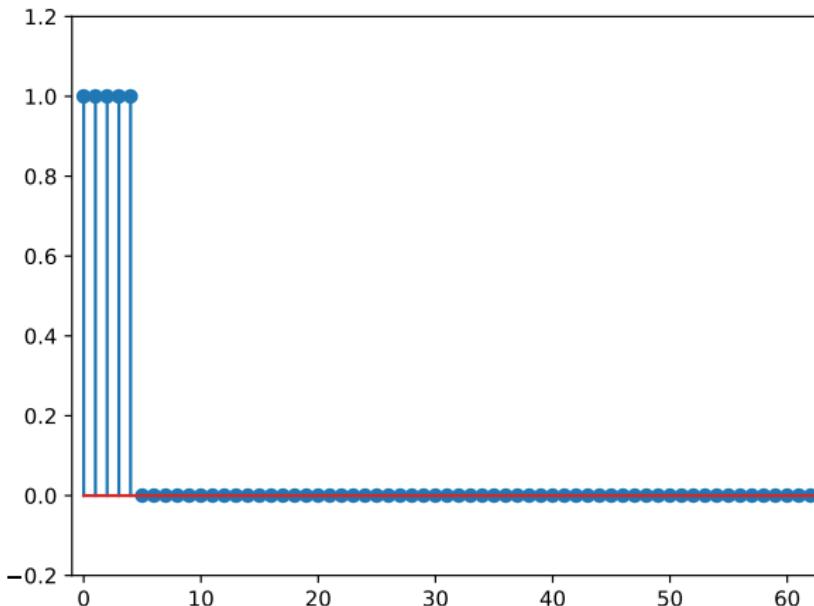
DFT d'un cosinus de fréquence non multiple de 1/N ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{64} 10.75n\right)$$



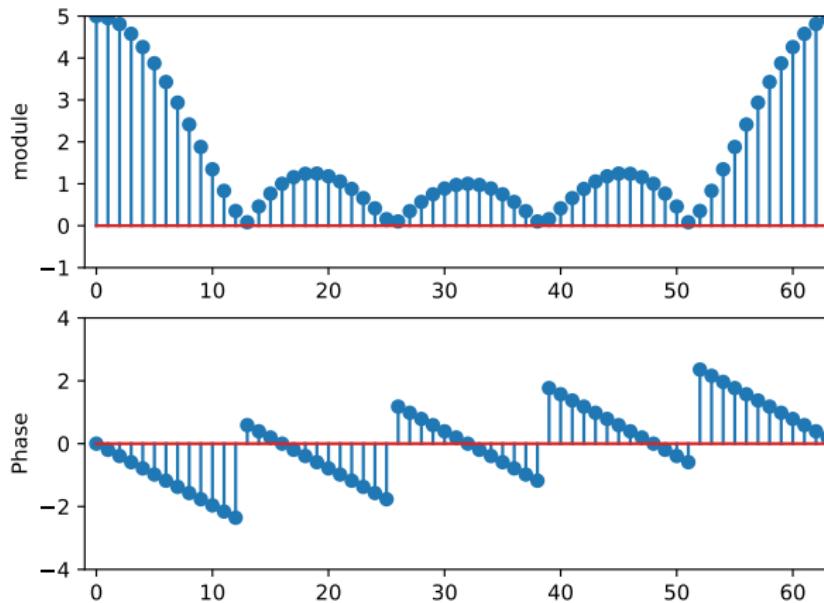
DFT d'un échelon de longueur M ($x[n] \in \mathbb{C}^N$)

$$x[n] = \sum_{l=0}^{M-1} \delta[n - l], n = 0, 1, \dots, N - 1$$



DFT d'un échelon de longueur M ($x[n] \in \mathbb{C}^N$)

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \\
 &= \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} Mk}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} k}} \\
 &= \frac{e^{-j \frac{\pi}{N} Mk} \left[e^{j \frac{\pi}{N} Mk} - e^{-j \frac{\pi}{N} Mk} \right]}{e^{-j \frac{\pi}{N} k} \left[e^{j \frac{\pi}{N} k} - e^{-j \frac{\pi}{N} k} \right]} \\
 &= \frac{\sin(\frac{\pi}{N} Mk)}{\sin(\frac{\pi}{N} k)} e^{-j \frac{\pi}{N} (M-1)k}
 \end{aligned}$$

DFT d'un échelon de longueur $M = 5$ ($x[n] \in \mathbb{C}^N, N = 64$)

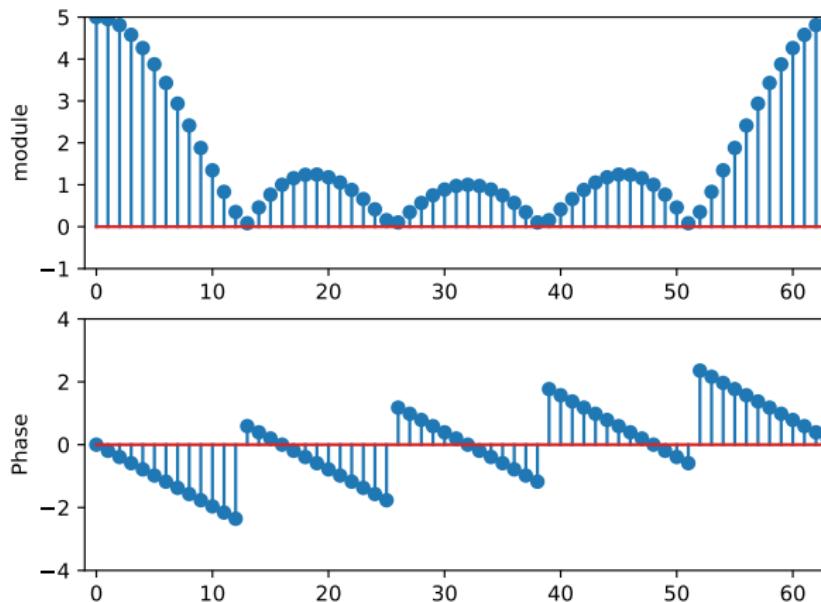
DFT d'un signal réel ($x[n] \in \mathbb{R}^N$)

La DFT est toujours Complexé !

$$\begin{aligned}
 X[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[N-k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} n(N-k)} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \\
 &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x^*[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \right)^* \\
 &= X^*[k]
 \end{aligned}$$

Donc : symétrie en valeur absolue

DFT d'un signal réel



Signaux Périodiques de taille infinie

De la DFT à la DFS : Discrete Fourier Series

Soit un signal $x[n]$ de taille finie $n \in [0, \dots N - 1]$, et sa DFT $X[k]$.

Comme $W_N^{-nk} = W_N^{-(n+iN)k} (= W_N^{-n(k+iN)})$,

$$\text{on peut écrire } x[n + iN] = x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Par convention, on écrira le signal périodisé $\tilde{x}[n], n \in \mathbb{Z}$

Signaux Périodiques de taille infinie

Périodisation temporelle et DFT

Périodisation temporelle et DFT

Soit $X[k], k \in [0, \dots, N - 1]$, la DFT de $x[n], n \in [0, \dots, N - 1]$ alors

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, n \in \mathbb{Z}$$

est le signal périodique de taille infinie comprenant $\mathbf{x} = \{x[n]\}_{n=0, \dots, N-1}$ dans chaque période.

Signaux Périodiques de taille infinie

De la DFT à la DFS : Discrete Fourier Series

Série de Fourier Discrète (DFS) et Transformée de Fourier Discrète (DFT)

On définit alors la DFS

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{nk}, k \in \mathbb{Z}$$

correspondant à

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, n \in \mathbb{Z}$$

Signaux apériodiques de taille infinie

Vers la Transformée de Fourier des Signaux à Temps Discret (DTFT)

- Pour les signaux de taille finie (N) : fréquences $\frac{k}{N}, k = 0, \dots, N - 1$
- Pour les signaux de taille infinie et périodiques (de période N) : idem
- Pour les signaux de taille infinie et apériodiques : fréquences f continues (entre 0 et 1), pulsation $\omega = 2\pi f$ continue entre 0 et 2π .

DTFT (Discrete-Time Fourier Transform)

La transformée de Fourier de signaux à Temps Discret d'un signal $x[n]$ est donnée (si la série converge) par :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

La DTFT est une fonction :

- Complexe
- de la pulsation ω
- Périodique de période 2π (car $e^{j(\omega+2\pi)} = e^{j\omega}$)

Signaux apériodiques de taille infinie

Vers la Transformée de Fourier des Signaux à Temps Discret (DTFT)

DTFT Inverse

La DTFT peut être inversée (si la série converge) par

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Notation de la paire de transformées

$$x[n] \stackrel{\text{DTFT}}{=} X(e^{j\omega})$$

Quand le contexte indique clairement que la transformée est une DTFT, on écrit :

$$x[n] = X(e^{j\omega})$$

DTFT Inverse

Sachant que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-k)} d\omega = 2\pi\delta[n-k]$$
$$\Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n')} d\omega = 2\pi x[n]$$

Existence de la DTFT

Soit la série $X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-jn\omega}$; DTFT = $\lim_{M \rightarrow \infty} X_M(e^{j\omega})$.

Donc la DTFT existe si $x[n]$ est absolument sommable :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} X_M(e^{j\omega}) \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M |x[n]e^{-jn\omega}| = \sum_{n=-M}^M |x[n]| < \infty$$

En pratique, la DTFT existe si $x[n]$ est de carré sommable, c'est à dire d'énergie finie.
Dans ce cas :

- on a convergence au sens des moindres carrés :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X_M(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$
- $X(e^{j\omega})$ peut être discontinu

DTFT et changement de base

Soit un signal $x[n]$ dans $l_2(\mathbb{Z})$ (de carré sommable et n prenant ses valeurs dans \mathbb{Z}). Pour toute valeur ω_0 , on peut voir la DTFT comme un produit intérieur de $x[n]$ avec $e^{j\omega_0 n}$. On a donc une projection de $x[n]$ sur un *vecteur de base* $e^{j\omega_0 n}$:

$$X(e^{j\omega}) = \langle e^{j\omega_0 n}, x[n] \rangle$$

Mais on a une infinité de vecteurs de base $\{e^{j\omega n}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$.

De plus, $\langle e^{j\omega_0 n}, e^{j\omega_0 n} \rangle = \delta(\omega - \omega_0)$ et on a donc une base orthonormale ($\delta(\omega)$ étant ici la fonction généralisée de Dirac).

On notera les transformations remarquables suivantes :

- $\alpha \stackrel{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \alpha\delta(\omega)$
- $\cos(\omega_0 n + \phi) \stackrel{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}[e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)]$
- $\sin(\omega_0 n + \phi) \stackrel{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \frac{-j}{2}[e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) - e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)]$

Symétries

- $x[-n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\omega})$
- $x^*[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\omega})$
- Si $x[n]$ réel : $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- Si $x[n] = x[-n] \in \mathbb{R}$: $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$
- Si $x[n] = -x[-n] \in \mathbb{R}$: $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 0$

Linéarité, décalage et énergie

- $\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega})$
- $x[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- $e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$

Conservation d'énergie ... Egalité de Parseval :

$$\langle x[n], y[n] \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega}) \rangle$$

Soit, en utilisant les définitions de produit intérieur sur $l_2(\mathbb{Z})$ et sur $L_2([-\pi, \pi])$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})d\omega$$

Théorème de Parseval : conservation d'énergie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Traitement numérique du Signal

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Janvier 2019

Eléments d'Analyse spectrale

Objectifs

- Être capable d'analyser un signal en temps/fréquence (*ANALYSE SPECTRALE*)

5.1 : Short Time Fourier Transform

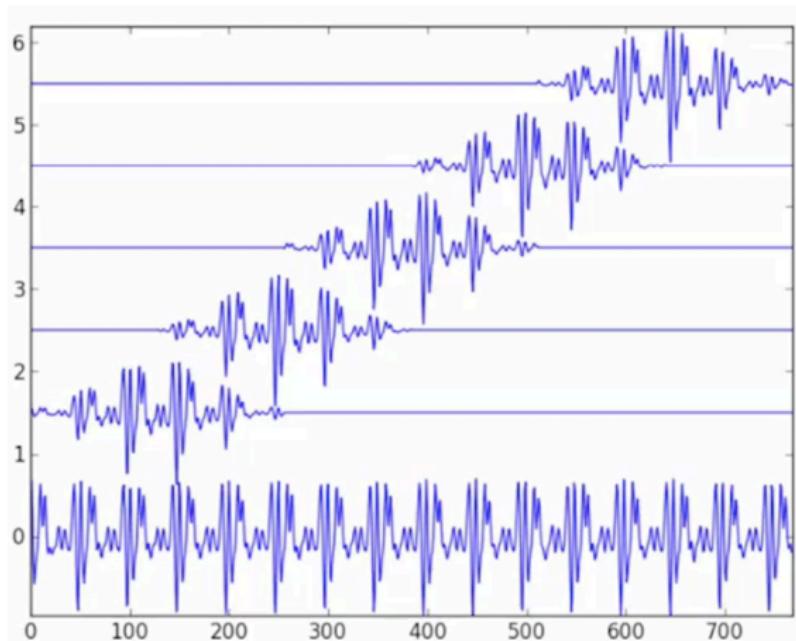
L'équation de la STFT

$$X_l[k] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n]x[n + lH]e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad l = 0, 1, \dots,$$

- $\{w[n]\}$: fenêtre d'analyse
- l : numéro de la trame
- H : incrément (Hop-size)

Short Time Fourier Transform : exemple de fenêtre

$$xw_l[n] = w[n]x[n + lH] \quad l = 0, 1, \dots,$$



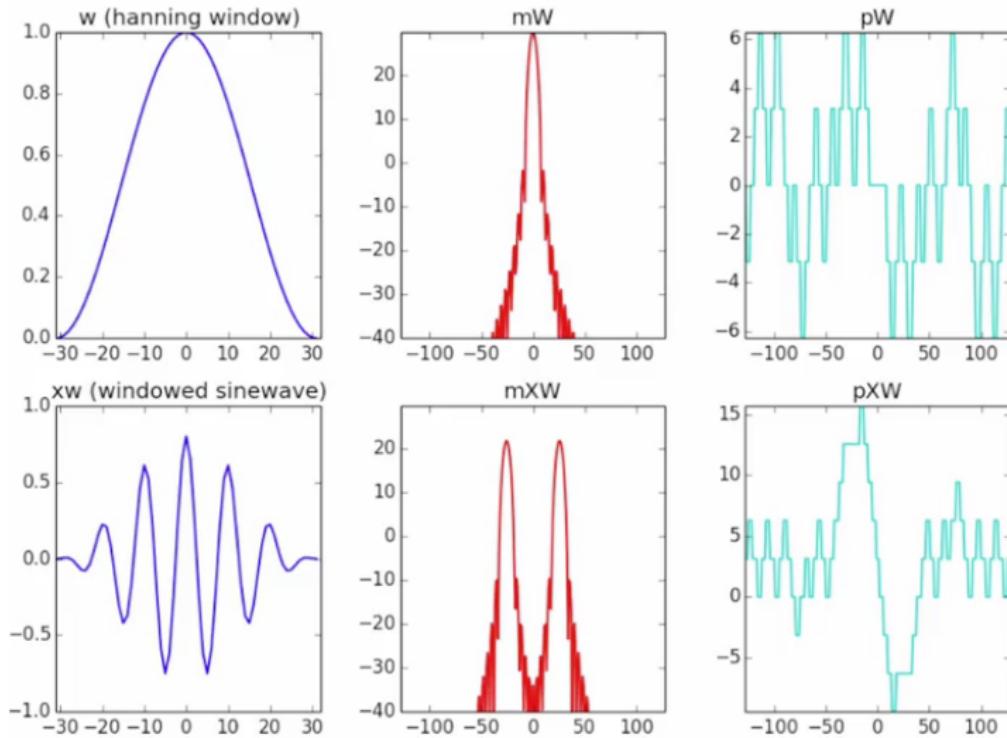
STFT d'une sinusoïde fenêtrée

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n/N) = \frac{A_0}{2} \left[e^{j\omega_0 n/N} + e^{-j\omega_0 n/N} \right]$$

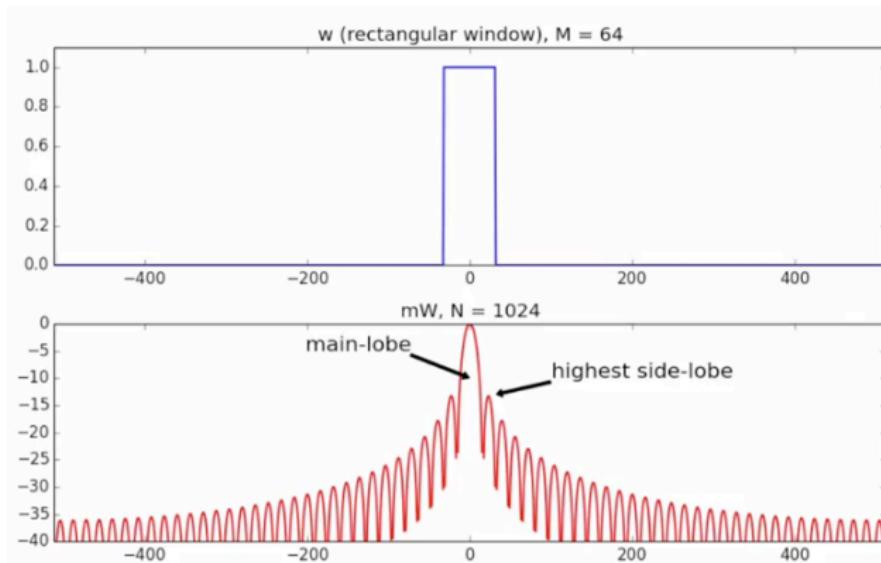
Prenons $\omega_0 = 2\pi k_o$, $A_0 = 2$ et $l = 0$

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n] x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n] \left[e^{j2\pi k_o n/N} + e^{-j2\pi k_o n/N} \right] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n] \left[e^{-j\pi 2(k-k_o)n/N} + e^{-j2\pi(k+k_o)n/N} \right] \\ &= W[k - k_o] + W[k + k_o] \end{aligned}$$

STFT d'une sinusoïde fenêtrée



Fenêtre d'analyse



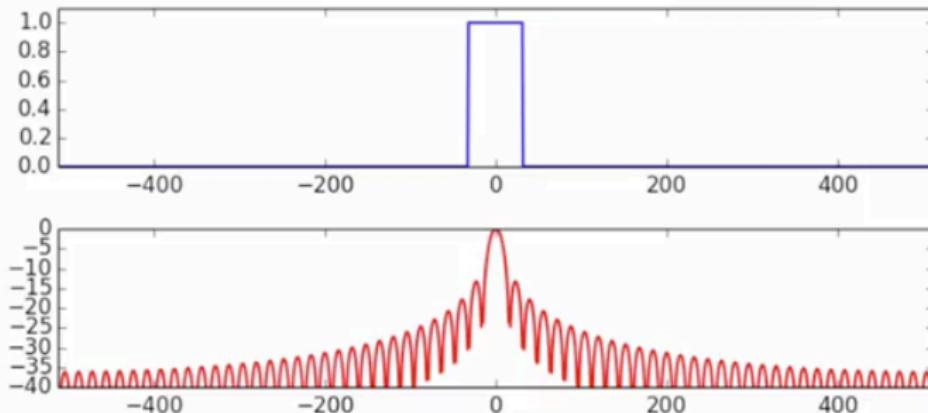
Fenêtres d'analyse en Scipy

bartmann (M[, sym])	Return a modified Bartlett-Hann window.
bartlett (M[, sym])	Return a Bartlett window.
blackman (M[, sym])	Return a Blackman window.
blackmanharris (M[, sym])	Return a minimum 4-term Blackman-Harris window.
bohman (M[, sym])	Return a Bohman window.
boxcar (M[, sym])	Return a boxcar or rectangular window.
chebwin (M, at[, sym])	Return a Dolph-Chebyshev window.
flattop (M[, sym])	Return a flat top window.
gaussian (M, std[, sym])	Return a Gaussian window.
general-gaussian (M, p, sig[, sym])	Return a window with a generalized Gaussian shape.
hamming (M[, sym])	Return a Hamming window.
hann (M[, sym])	Return a Hann window.
kaiser (M, beta[, sym])	Return a Kaiser window.
nuttall (M[, sym])	Return a minimum 4-term Blackman-Harris window according to Nuttall.
parzen (M[, sym])	Return a Parzen window.
slepian (M, width[, sym])	Return a digital Slepian window.
triang (M[, sym])	Return a triangular window.

Fenêtres d'analyse rectangulaire

$$w[n] = \begin{cases} 1, & n = -M/2, \dots, 0, \dots M/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$W[k] = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/M)}$$

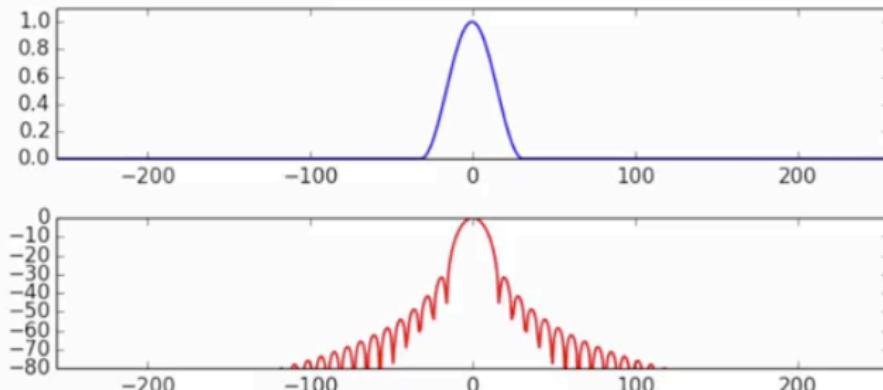


main-lobe width: 2 bins
side-lobe level: -13.3 dB

Fenêtres d'analyse de Hanning

$$w[n] = .5 + .5 \cos(2\pi n/M), \quad n = -M/2, \dots, 0, \dots M/2$$

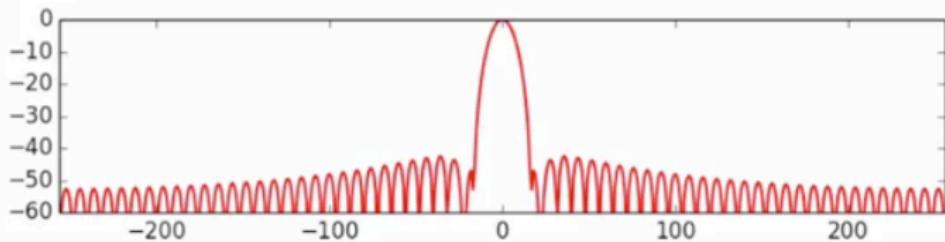
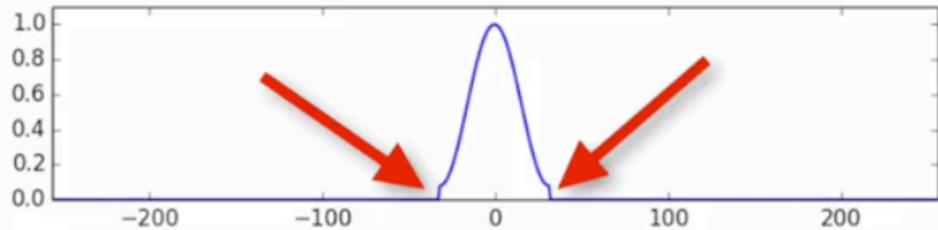
$$W[k] = .5 D[k] + .25(D[k-1] + D[k+1]) \quad \text{where } D[k] = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/M)}$$



main-lobe width: 4 bins
side-lobe level: -31.5 dB

Fenêtres d'analyse de Hamming

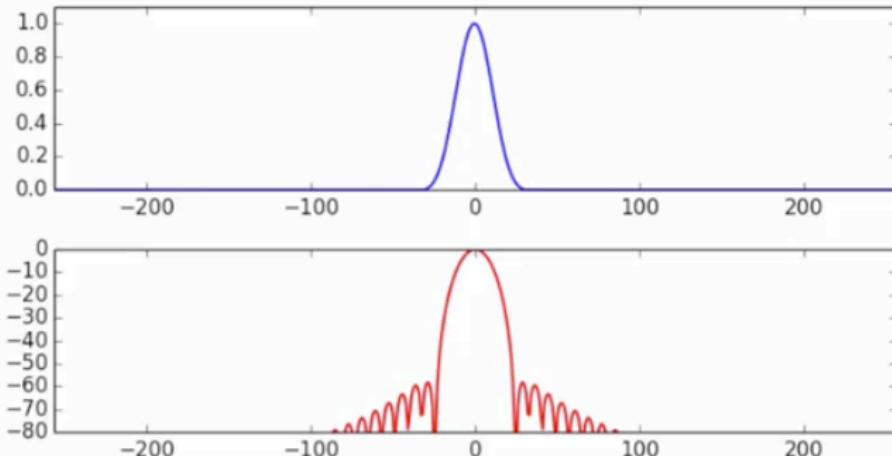
$$w[n] = .54 + .46 \cos(2\pi n/M), \quad n = -M/2, \dots, 0, \dots M/2$$



main-lobe width: 4 bins
side-lobe level: -42.7 dB

Fenêtres d'analyse de Blackmann

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M)$$

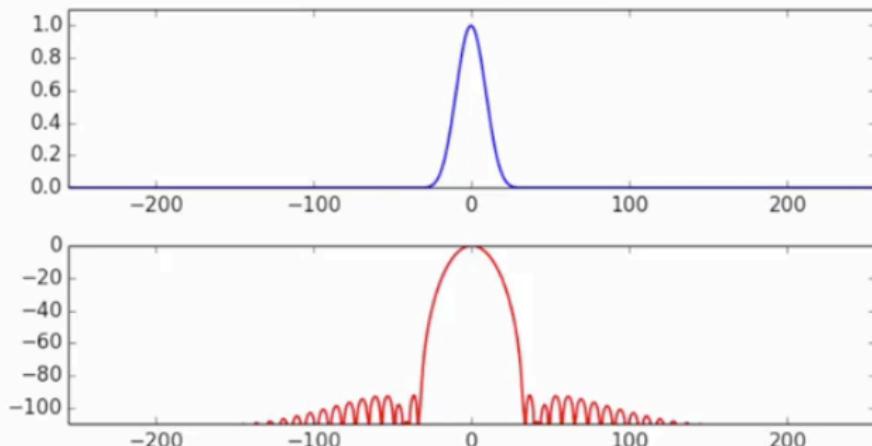


main-lobe width: 6 bins
side-lobe level: -58 dB

Fenêtres d'analyse de Blackmann-Harrix

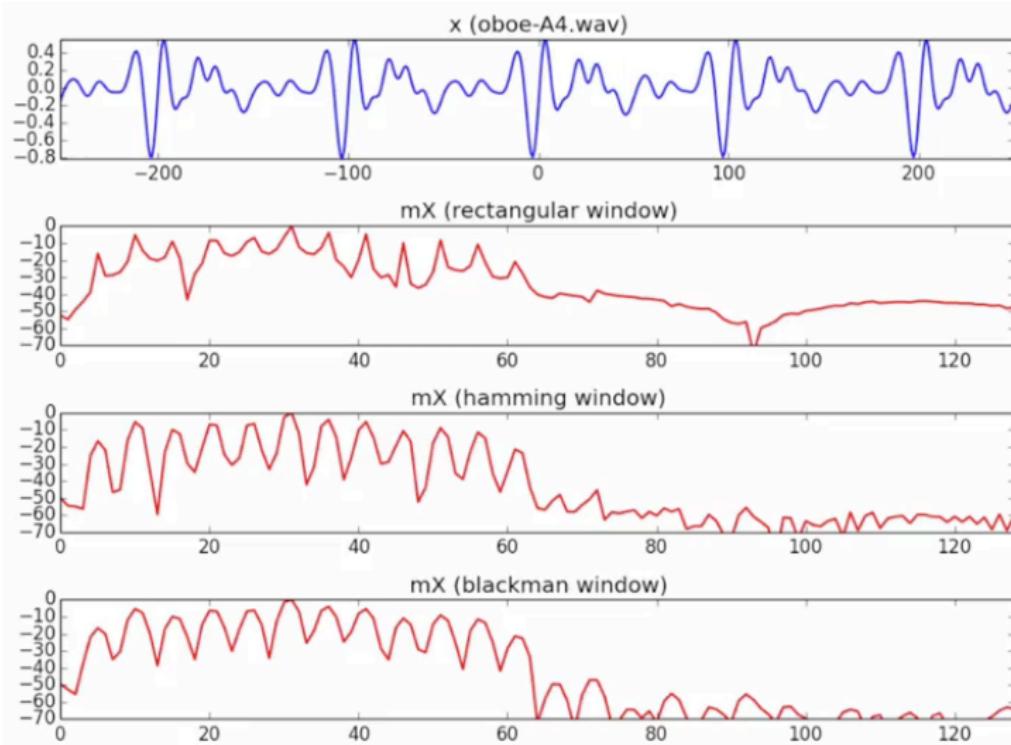
$$w(n) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^3 \alpha_l \cos\left(2nl\pi/M\right), \quad n = -M/2, \dots, 0, \dots, M/2$$

where $\alpha_0 = 0.35875, \alpha_1 = 0.48829, \alpha_2 = 0.14128, \alpha_3 = 0.01168$



main lobe width: 8 bins
side-lobe level: -92dB

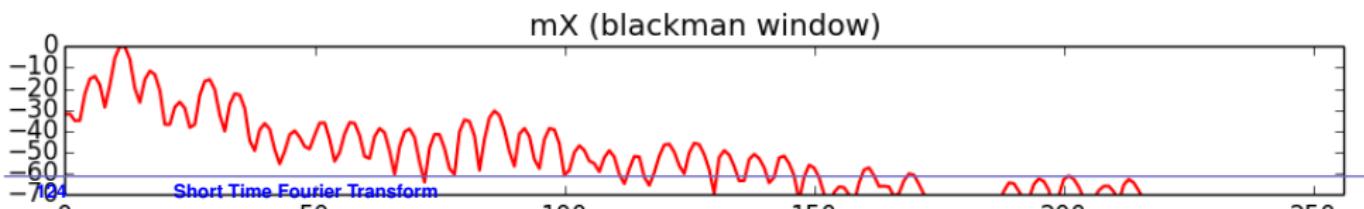
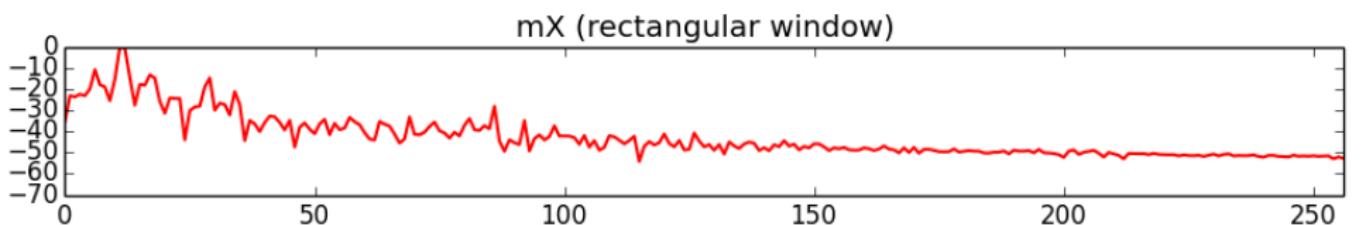
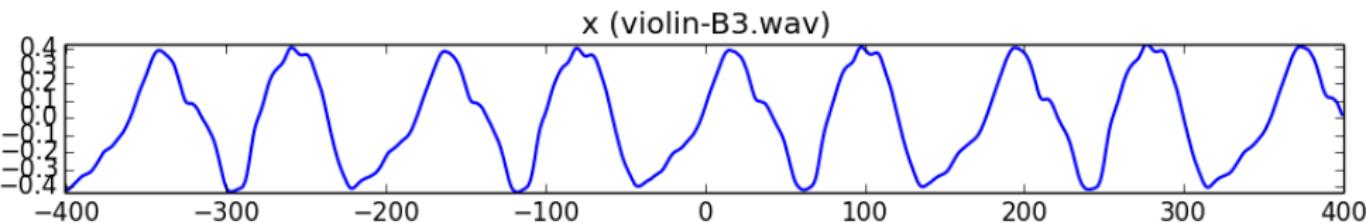
Exemple d'analyse d'un signal fenêtré



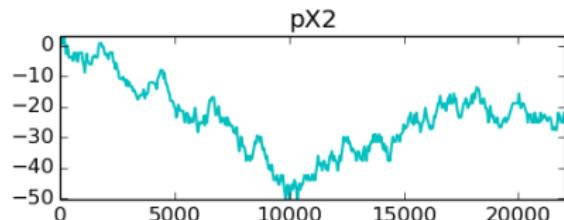
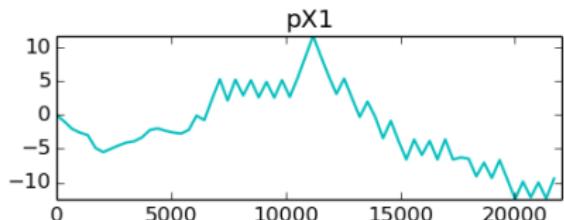
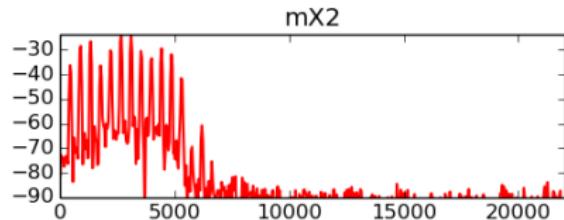
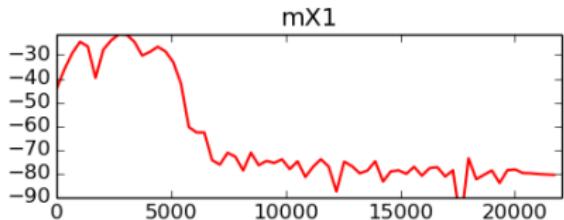
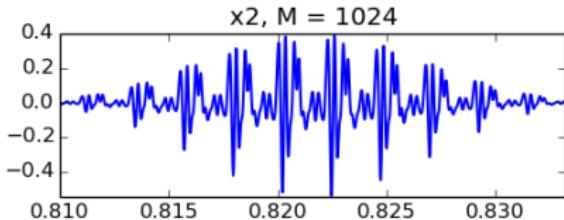
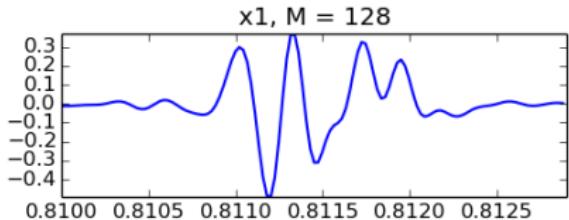
STFT et fenêtre d'analyse

Rappel :

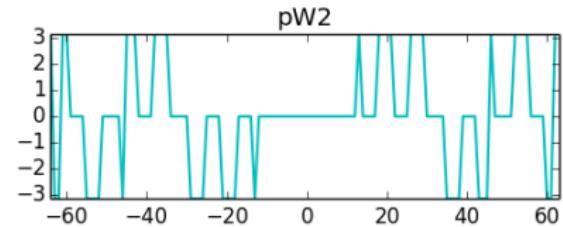
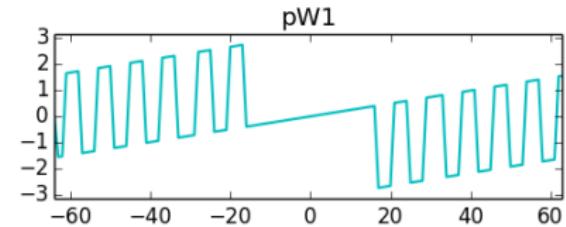
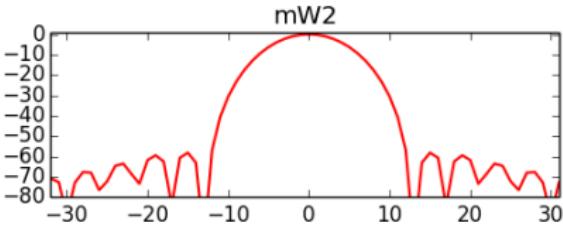
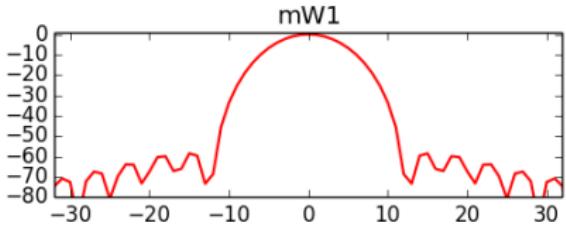
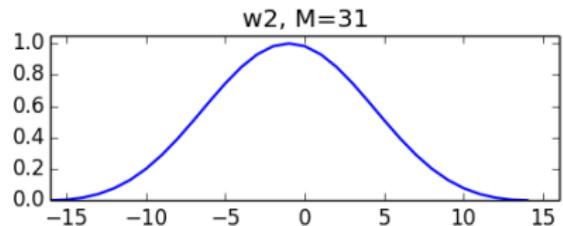
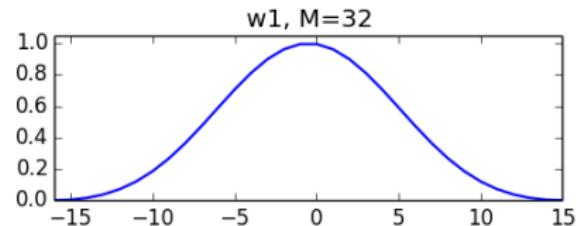
$$xw_l[n] = w[n]x[n + lH] \quad l = 0, 1, \dots,$$



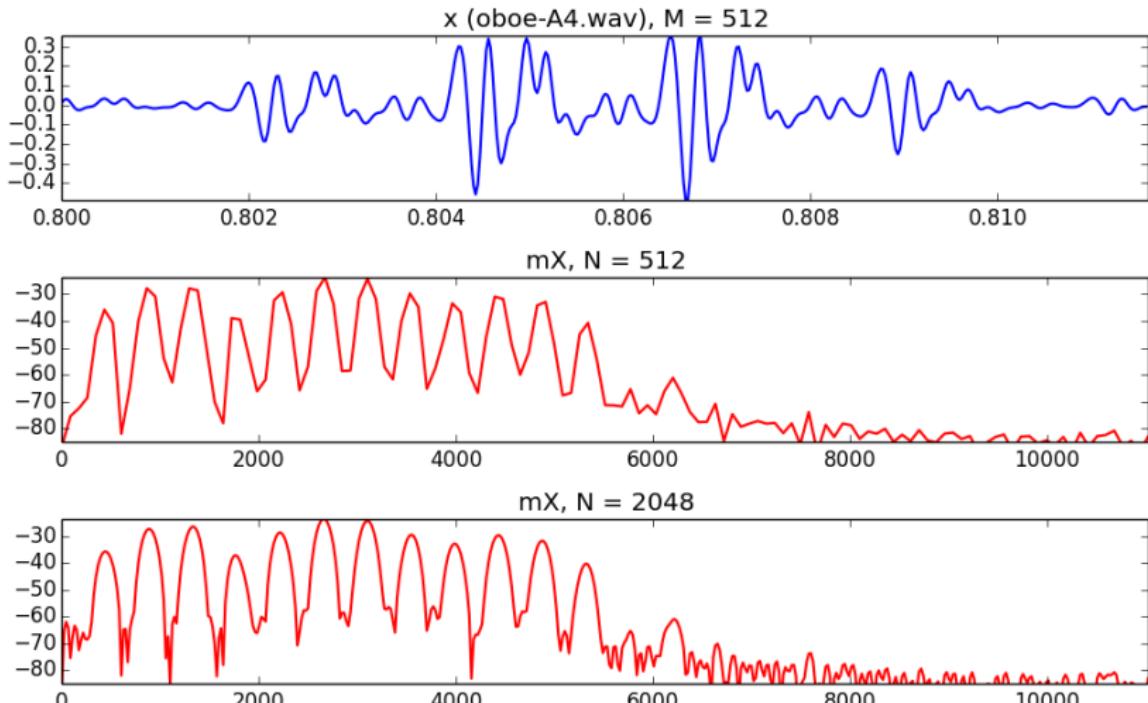
Taille de la fenêtre d'analyse



Parité de la fenêtre d'analyse

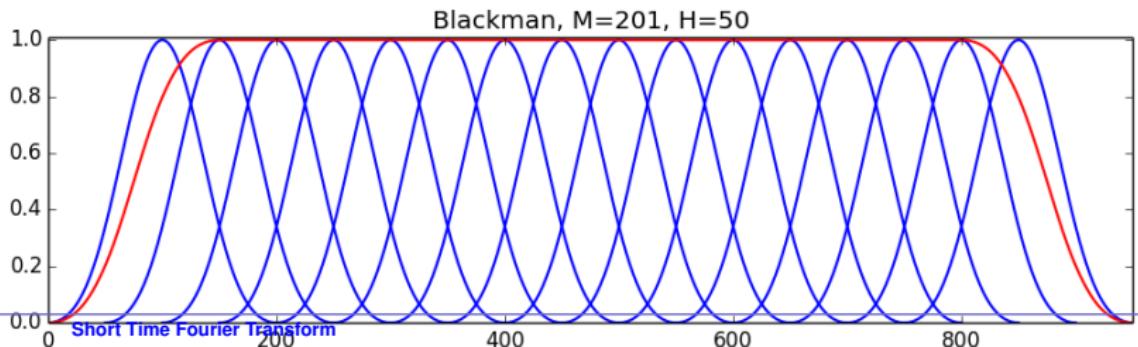
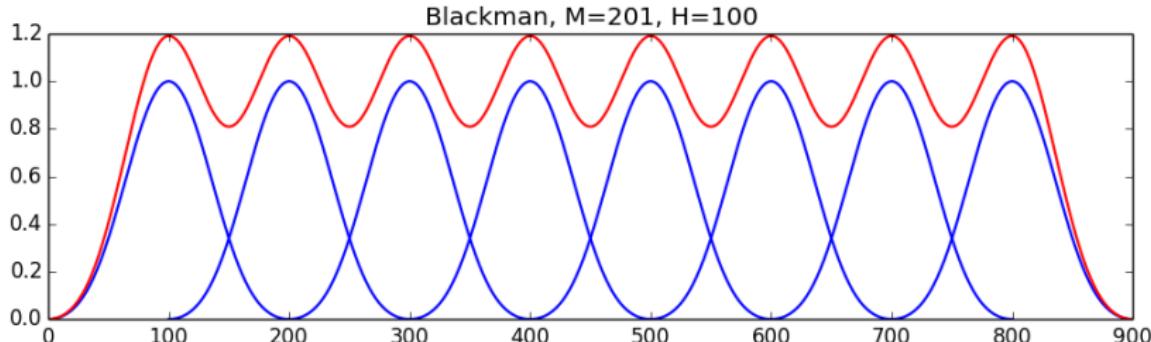


Taille de la FFT (zero-padding)

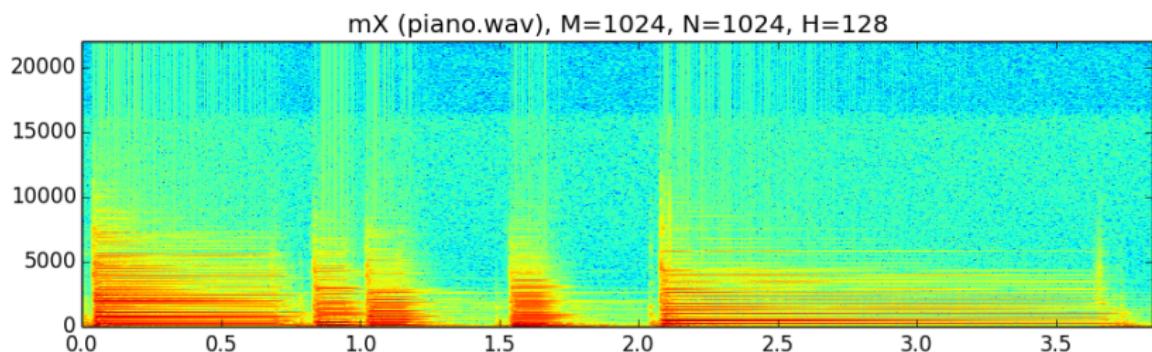
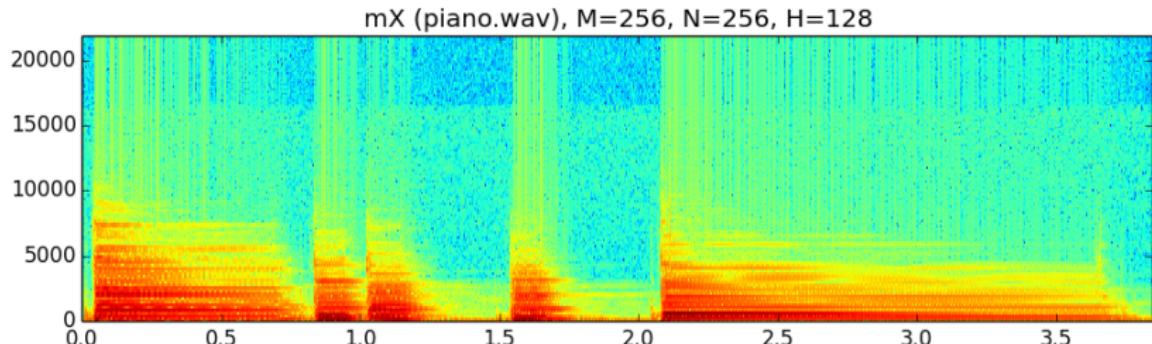


Grandeur de l'incrément

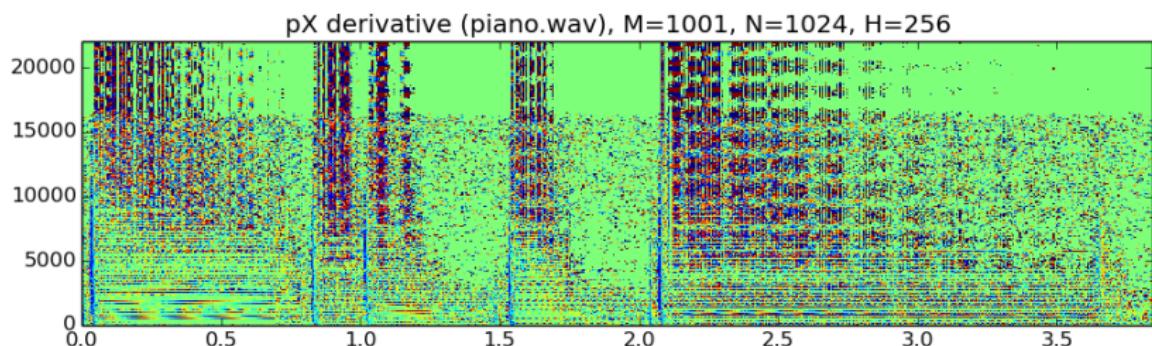
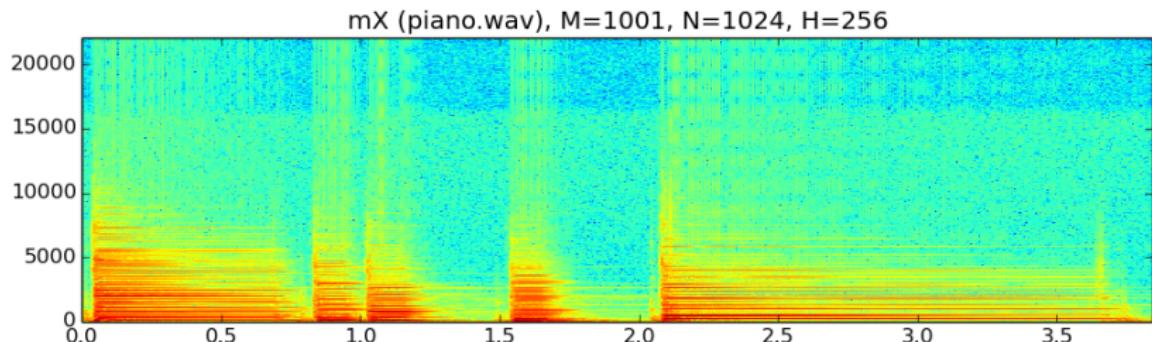
$$\text{Objectif } A_w[n] = \sum_{l=0}^{L-1} w[n - lH] = c$$



Compromis temps/fréquence



Spectrogramme d'amplitude et de phase



STFT Inverse

$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} \text{Shift}_{IH,n} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_l[k] e^{j2\pi kn/N} \right]$$

Chaque trame (reconstituée) vaut :

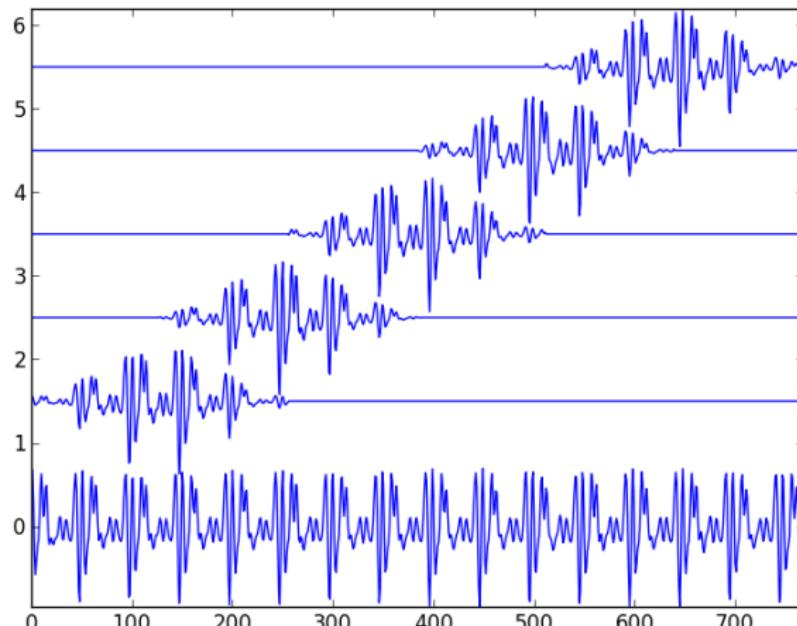
$$yw_l[n] = x[n + lH]w[n]$$

et la sortie globale vaut :

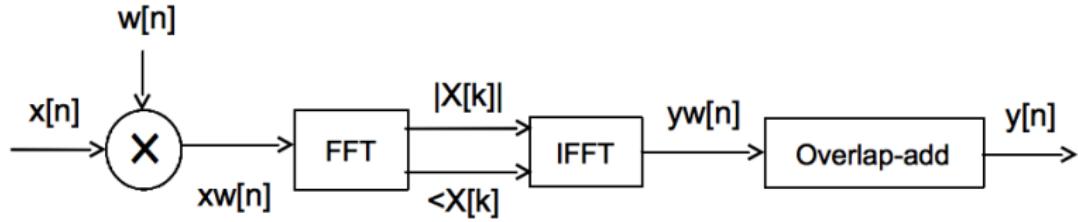
$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} yw_l[n] = x[n] \sum_{l=0}^{L-1} w[n - lH]$$

STFT Inverse : somme des signaux fenêtrés

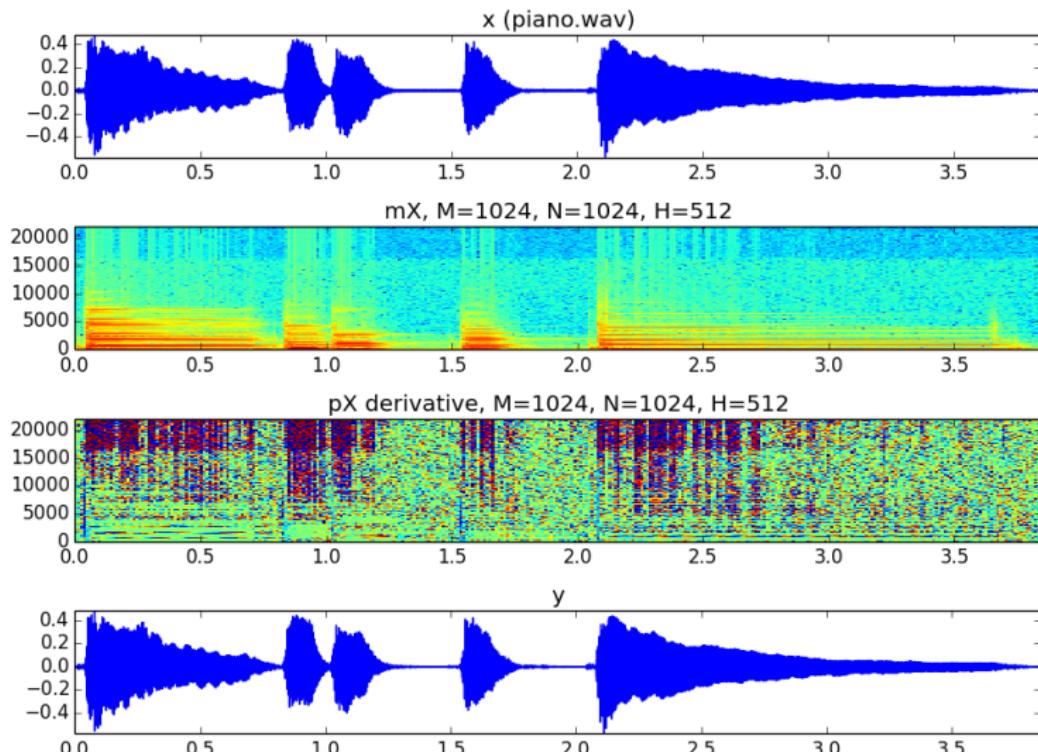
$$yw_i[n] = x[n + lH]w[n], \quad , l = 0, 1, \dots$$



STFT: Analyse et synthèse



STFT: Analyse et synthèse



Références sur la STFT :

- Cours de Xavier Serra, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, sur Coursera entre autres
- <https://en.wikipedia.org/wiki/STFT>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Spectrogram>
- Cours de Julius O. Smith : <https://ccrma.stanford.edu/jos/sasp/>
- Sons de : <http://www.freesound.org/people/xserra/packs/13030>
- Graphiques et morceaux de code repris sous licence CC Attribution-Noncommercial-Share et licence Afferro GPL.
- Package complet de codes sur <https://github.com/MTG/sms-tools>