PROJ. 2 SEANCE 1

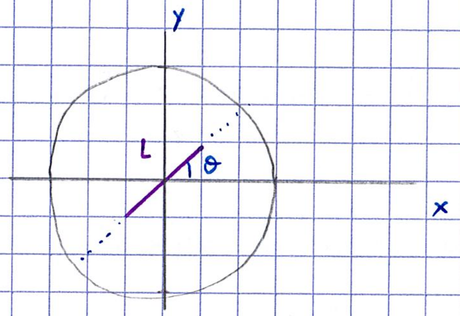
FLOU DE BOUGÉ

$$m(x,y) = c(x,y) * h(x,y)$$

$m(x,y)$ = immagine floue
$c(x,y)$ = immagine initiale
$h(x,y)$ = (PSF) filtre qui modélise le flou de bougé

1 On cherche ici à trouver l'équation du filtre de bougé $h(x,y)$ selon les coordonnées (x,y) et (r, ϕ)

On a ici un flou orienté selon θ de longueur L, l'on peut donc représenter ainsi



Coordonnées polaires

$$h(r,\phi) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } |r| < \frac{L}{2} \text{ et } \phi = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Coordonnées cartésiennes

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{si } \sqrt{x^2+y^2} < \frac{L}{2} \text{ et } \frac{x}{y} = -\tan\theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On choisit $1/L$ et non pas 1 de façon à ce que le filtre soit normalisé

↳ (en fréquentiel, ce L va s'annuler car le filtre a une taille L)

(2) Calcul $H(f_x, f_y)$ ($h(x,y)$ dans le domaine des fréquences)

Puisqu'on a $\theta = \text{cst}$, on peut considérer uniquement la droite d'angle θ, on se ramène alors à un porte en 1D

on s'attend donc à trouver un SINUS CARDINAL

$$H(f_x, f_y) = \int_R h(x,y)\, e^{-2\pi(f_x r\cos(\theta) + f_y r \sin(\theta))}\, dx$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{L}\, e^{-2\pi x(f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta))}\, dx$$

$$= \frac{1}{L} L \operatorname{sinc}(L\pi(f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta)))$$

$$= \operatorname{sinc}(\pi L(f_x \cos(\theta)) + (f_y \sin(\theta)))$$

(3)

length of motion $L = V_{relative} \times T_{exposure}$

(4)

Estimer $c(x,y)$ à partir de $m(x,y)$

Si on connaît le filtre, on peut inverser le flou de bouger pour reconstruire l'image

En domaine spatial $m(x,y) = c(x,y) * h(x,y)$

$\downarrow$

En domaine fréquentiel $M(f_x, f_y) = C(f_x, f_y) \cdot H(f_x, f_y)$

$\downarrow$

diviser par H $C(f_x, f_y) = \dfrac{M(f_x, f_y)}{H(f_x, f_y)}$

$\downarrow$

repasser en spatial $c(x,y) = \text{IFFT}(C(f_x, f_y))$

Cependant cette technique a des limites car si jamais $H(f_x, f_y)$ a des zéros (ce qui est possible puisqu'ici le sinus cardinal s'annule en certains points) cela rend l'opération impossible

(De plus, si on divise par des valeurs proches de zéro, cela pourrait amplifier les autres types de bruit ce qui peut être un problème)

FILTRE MÉDIAN

146	146	155	154	154	166
152	0	142	155	155	155
152	155	154	146	155	155
215	214	214	214	215	215
212	212	214	211	215	216
215	212	215	214	215	0

1

On observe deux "bandes" de couleur dans cette image.
Une bande avec des valeurs autour de 150 sur le 3 premiere lignes
et une bande avec des valeurs autour de 214 sur le 3 dernière

On observe deux points avec une amplitude nulle (0) qui sont placés de façon aléatoires.

↳ Cela pourrait être le resultat d'un bruit "poivre et sel", c'est-à-dire des points blancs (255) ou noir (0) sur l'image

2

Filtre MÉDIAN de rayon 1 est un filtre avec tous les elements = 1 et après que il a sélectionne les elements sur l'image il donne en sortie la median

a) On choisit un point de cordonnées (x,y)

b) On trie dans l'ordre croissant les amplitudes des points contenus dans le bloc 3x3 centré en (x,y)

$$\begin{matrix} (x-1\,;\,y-1) & (x\,;\,y-1) & (x+1\,;\,y+1) \\ (x-1\,;\,y) & (x\,;\,y) & (x+1\,;\,y) \\ (x-1\,;\,y+1) & (x\,;\,y+1) & (x+1\,;\,y-1) \end{matrix}$$

c) De ces 9 amplitudes on choisit la médiane. Puisqu'on a triées dans l'ordre croissant, on choisit la 5eme valeur et on la place dans la case (x,y)

BRUIT POIVRE-SEL est un bruit de type technologique parce que un detecteur de l'image ne marche pas bien car saturé en blanc (tojour ouverte) ou noir ↳ (toujours fermé)

(3)

On considerat le point (2;2) et le bloc 3x3 est

146	146	155
152	0	142
155	155	154

→ 0 ; 142 ; 146 ; 146 ; 152 ; 154 ; 155 ; 155

valeur mediane

146	146	155
152	152	142
155	155	154

(4) Filtre mediane appliquet sur un pixel du bord

coin haut-gauche

?	?	?
?	146	146
?	152	0

a) On fait le mediane de 4 valeur restante

→ mediane = 146

b) Place 0 sur ? → pas bonne solution, parce que la mediane fait 0

c) On symetrise l'image pour completer les cases vides

146	146	146
146	146	146
~~146~~ 152	152	0

→ On obtient 146 → cette techinique est viable car elle permet des conserver les contours

→ mettre sur le bord le valeur plus proche...

6 Filtre moyenneur de même taille que le filtre median (*)

(7) Un filtre MEDIAN va supprimer les valeurs aberrantes et les remplacer par des valeurs proches de celle qui les entourent. Cela permet par example de supprimer le bruit poivre et sel. Ce filtre permet aussi de conserver les contrastes.

Un filtre MOYENNEUR va avoir tendance a lisser l'image et donc la rendre floue.
Pour example, un bruit poivre et sel avec un filtre moyenneur va impacter tous lex pixels autours de lui, ce qui degrade encore plus l'image. Cela va aussi réduire les details et on perd les contrastes. (Ex. point 6)

(*)

(6)

146	146	155	154	154	166
134	134	142	155	155	155
157	156	154	146	155	155
194	194	214	214	215	215
212	212	214	211	215	215
215	212	215	214	215	0

NO (Per ogni punto si considera la matrice centrata in esso e si fa la media
Per esempio per 157 è la media tra 152, 152, 0, 155, 155, 155, 215, 215 e 214)

Pour chaque valeur on va considere la matrice centrée et on va faire la moyenne.
→ Pour example 157 est la moyenne entre 152, 152, 0, 155, 155, 155, 215, 215 et 214.

(6)

le FILTRE MOYENNEUR est linéaire, puisqu'on réalise une somme d'amplitudes qu'on divise par le nombre d'amplitudes, ce qui est une opération linéaire

$$moy(x) + moy(y) = moy(x+y)$$

une opération de tri

le FILTRE MÉDIAN n'est pas linéaire puisqu'il faut faire ~~x~~ exemple

$x = (1,1,3)$ $med(x) = 1$

$y = (1,2,0)$ $med(y) = 1$

$x+y = (2,3,3)$ $med(x+y) = 3$ est non 2 !

$$med(x) + med(y) \neq med(x+y)$$

→ l'advantage d'un filtre linéaire est qu'on peut le caractériser par sa réponse impulsionnelle et donc obtenir le résultat rapidement par une simple convolution.
Un filtre non-linéaire ne pourra pas être appliqué si rapidement puisqu'il faut réaliser 2 boucles et un tri pour déterminer une seule valeur.

→ Un filtre linéaire sera donc bien plus rapide et moins ~~coûteux~~ coûteux en opérations.

tri = ordinamento

ANALYSE CAPESTRALE

$$C_x(\tau) = TF^{-1}\left(\ln\left[|X(f)|^2\right]\right)$$

$C_x(\tau)$ = capestrum = antitransformé de Fourier appliqué a le spectre du signal en decibel
$X(f)$ = transf. Fourier signal

(1)

Si $y(t) = h(t) * x(t)$ alors $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

Il faut demonstrer $c_y(\tau) = c_h(\tau) + c_x(\tau)$

$$c_y(\tau) = TF^{-1}\left(\ln |Y(f)|^2\right)$$

$$= TF^{-1}\left(\ln |X(f) \cdot H(f)|^2\right)$$

$$= TF^{-1}\left(\ln\left(|X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2\right)\right)$$ car le module d'un produit est le produit des modules

$$= TF^{-1}\left(\ln |X(f)|^2 + \ln |H(f)|^2\right)$$ car $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$$= TF^{-1}\left(\ln |X(f)|^2\right) + TF^{-1}\left(\ln (|H(f)|^2)\right)$$ car la TF est lineaire

$$= C_x(\tau) + C_h(\tau)$$

(2)

$$y(t) = x(t) + \underbrace{a x(t-T)}_{\text{replica di } x \text{ amplificata o smorzata a seconda di } a}$$ $a > 0$ $T > 0$

$y(t)$ est la somme du signal $x(t)$ et de $x(t)$ retardé de T avec une amplitude a. (cela peut servir a modeliser un signal ayant subi un flou de bouge de durée T)

On peut demonstrer que $y(t)$ est la sortie d'un filtre linéaire d'entrée $x(t)$

$x(t) = c \cdot x_1(t) + d\, x_2(t)$ alors

$\rightarrow y(t) = (c x_1(t) + d\, x_2(t)) + a\,(c_1 x_1(t-T) + d x_2(t-T))$

$= c\,(x_1(t) + a\, x_1(t-T)) + d\,(x_2(t) + a\, x_2(t-T))$

$= c\, y_1(t) + d\, y_2(t)$ LINEARITÉ !

→ FILTRO LINEARE = posso moltiplicare e aggiungere e non cambia nulla

Calcul la fonction de transfert $H(f)$

$$y(t) = x(t) + a x(t-T)$$

$$\downarrow \, \tilde{\iota}$$

$$Y(f) = X(f) + a X(f) e^{-j2\pi f T}$$ (théorème du retard)

$$\rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} =$$

$$= 1 + a e^{-j2\pi f T}$$

Si je considère le théorème du retard de TF

$$TF^{-1}\left(F(x) e^{-j2\pi f T} = f(t-T) \right)$$

$$\downarrow$$

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$

③ Développement limité de $\ln|H(f)|^2$

① $H(f) = 1 + a e^{-j2\pi f T}$

$= 1 + a\cos(2\pi f T) - j a \sin(2\pi f T)$

② $|H(f)|^2 = [1 + a\cos(2\pi f T)]^2 + a^2 \sin(2\pi f T)^2$

$= 1 + 2a\cos(2\pi f T) + \underbrace{a^2\cos(2\pi f T)^2 + a^2 \sin(2\pi f T)}_{1}$

$= 1 + 2a\cos(2\pi f T) + a^2$

$= (1 + a^2)\left(1 + \frac{2a\cos(2\pi f T)}{1+a^2}\right)$

→ on posant $\alpha = \frac{2a}{1+a^2}$

$|H(f)|^2 = (1+a^2)(1 + \alpha\cos(2\pi f T))$

$\ln(|H(f)|^2) = \ln(1+a^2) + \ln(1 + \underbrace{\alpha\cos(2\pi f T)}_{x})$

→ On peut faire un développement limité à l'ordre 1 car $-1 \leq \cos(2\pi f T) \leq 1$ et 1 et $0 < \alpha < 1$ donc $-1 < \alpha\cos(2\pi f T) < 1$

→ $\ln(|H(f)|^2) \simeq \ln(1+a^2) + \alpha\cos(2\pi f T)$

④ Grace à la question 3 on est maintenant en mesure de faire un approximation du cepstre de $h(t)$:

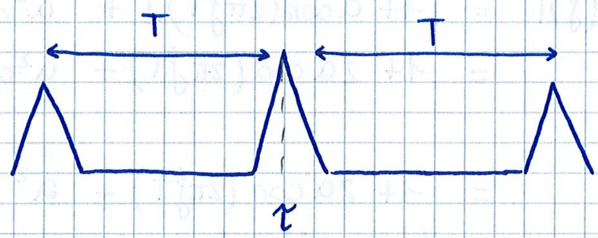
$C_h(\tau) = TF^{-1}(\ln|H(f)|^2)$

$\simeq TF^{-1}(\ln(1+a^2) + \alpha\cos(2\pi f T))$

$= \underbrace{\ln(1+a^2)\cdot\delta(\tau)}_{\text{autocorr. cst}} + \underbrace{\frac{a}{2}[\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)]}_{\text{autocorr. cos}}$

(5) Om trouve donc que le cepstre de $h(t)$ est formé de 3 Diracs donc un en $\tau = 0$ et deux autres de part et autre, espacé de T

Pour estimer le cepstre de $y(t)$, il suffira donc de d'identifier ces Diracs et de mesurer l'espacement entre deux Diracs consécutifs



(6) Cette méthode fonctionne cependant selon certaines conditions puisqu'il faut que α vérifie

$$\alpha = \frac{2a}{a^2+1} < 1$$ si $\alpha > 1$ non fonctionne !

De plus le cepstre di $x(t)$ ne doit pas être trop grand devant celui de $h(t)$ puisque $C_y(\tau) = C_x(\tau) + C_y(\tau)$

→ Si c'était le cas on ne pourrait plus distinguer les Diracs provenant du cepstre de $h(t)$ par rapport au cepstre de $x(t)$