Automatique
1. Introduction

Sylvie Icart
sylvie.icart@unice.fr

ELEC 3
Polytech'Nice-Sophia

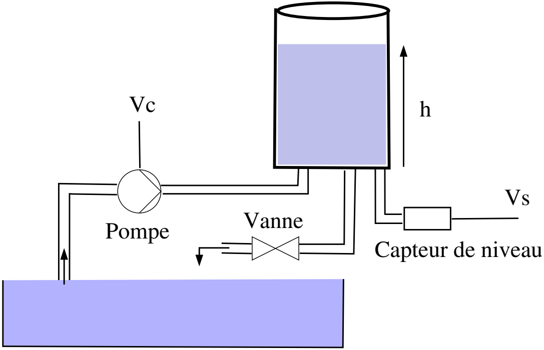
septembre 2018

Automatique

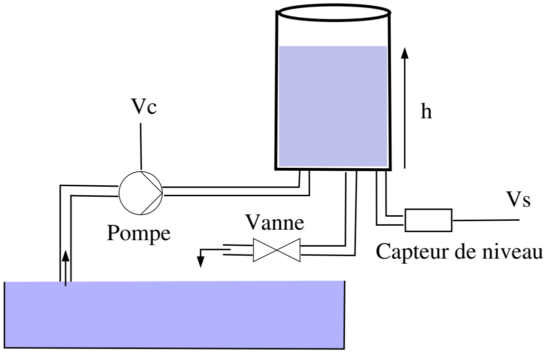
" Ensemble des disciplines scientifiques et des techniques utilisées pour la conception et l'emploi de dispositifs qui fonctionnent sans l'intervention d'un opérateur humain "

- Modélisation (mathématique) du sytème à automatiser
- Analyse des propriétés du modèle
- Conception d'une loi de commande (à partir du modèle)
- Simulation, prise en compte des imprécisions, implantation . . .

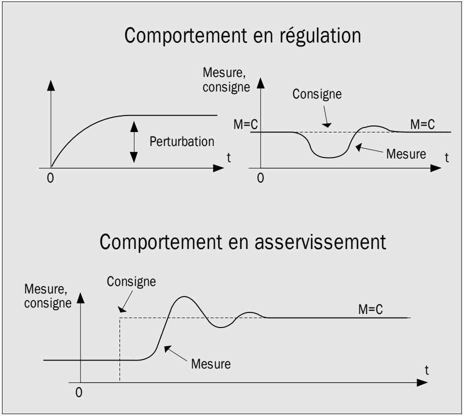
Illustration : régulation de niveau lors du premier TD



entrée Vc : tension d'alimentation de la pompe
sortie à réguler h : niveau d'eau dans la cuve



entrée Vc : tension d'alimentation de la pompe
sortie à réguler h : niveau d'eau dans la cuve
sortie mesurée Vs : tension en sortie du capteur (image du niveau)
perturbation q : fuite (débit de sortie)
système : pompe (actionneur) + cuve (processus) + capteur de niveau



performances : précision, temps de réponse, dépassement

Boucle ouverte - Boucle fermée ?

- Boucle ouverte : on détermine l'entrée qui correspond à la sortie désirée, possible si on connait parfaitement le sytème et qu'il n'y a pas de perturbation.
  ce qui revient à conduire les yeux fermés !

Boucle ouverte - Boucle fermée ?

- Boucle ouverte : on détermine l'entrée qui correspond à la sortie désirée, possible si on connait parfaitement le sytème et qu'il n'y a pas de perturbation.
  ce qui revient à conduire les yeux fermés !
- Boucle fermée : on se sert de l'écart entre ce que l'on veut et ce que l'on obtient pour déterminer la loi de commande.

Boucle ouverte - Boucle fermée ?

- Boucle ouverte : on détermine l'entrée qui correspond à la sortie désirée, possible si on connait parfaitement le sytème et qu'il n'y a pas de perturbation.
  ce qui revient à conduire les yeux fermés !
- Boucle fermée : on se sert de l'écart entre ce que l'on veut et ce que l'on obtient pour déterminer la loi de commande.
  risque d'instabilité ou pompage du sytème bouclé

Programme

- Classification signaux et systèmes
- Influence des pôles et zéros de la fonction de transfert sur les réponses. Stabilité.
- Représentations fréquentielles : Pourquoi ?
- Représentations fréquentielles : Bode, Nyquist, Black
- Rappels sur les systèmes classiques : premier et second ordre
- Précision des systèmes asservis
- Synthèse d'une loi de commande à partir du lieu d'Evans : placement de pôles
- Correcteur P, PI, PID, avance de phase
- Simulations à l'aide de Scilab-Xcos
- Travaux Pratiques : Asservissement de niveau, de position et de vitesse + Simulations

Signaux et Systèmes

Signal :

toute source d'information qui évolue en fonction du temps.

- signal à temps continu : $s(t), t \in \mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}$)
- signal à temps discret : $s_k, k \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$)
- signal déterministe... ou non : présence de bruit
- signal quantifié : si CAN $s(t) \in \mathcal{A},$ card$\mathcal{A}$ fini

Signaux et Systèmes

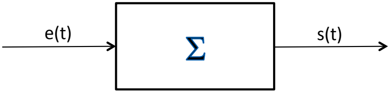
Signal :

toute source d'information qui évolue en fonction du temps.

- signal à temps continu : $s(t), t \in \mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}$)
- signal à temps discret : $s_k, k \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$)
- signal déterministe... ou non : présence de bruit
- signal quantifié : si CAN $s(t) \in \mathcal{A}$, card$\mathcal{A}$ fini

Système :

transforme un signal (entrée) en un autre signal (sortie).



- Système linéaire :
  $\Sigma : e_i \mapsto s_i, i = \{1, 2\}$ alors,

$$\Sigma : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mapsto \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2, \forall \alpha_1, \alpha_2$$

  il y a proportionnalité des effets aux causes,
  les causes ajoutent leurs effets.

- Système linéaire :
  $\Sigma : e_i \mapsto s_i, i = \{1, 2\}$ alors,

$$\Sigma : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mapsto \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2, \forall \alpha_1, \alpha_2$$

  il y a proportionnalité des effets aux causes,
  les causes ajoutent leurs effets.
- Système stationnaire :
  $\Sigma : e(t) \mapsto s(t)$, alors

$$\Sigma : e(t - T) \mapsto s(t - T), \forall t$$

  les caractéristiques du système ne changent pas en fonction du temps.

- Système linéaire :
  $\Sigma : e_i \mapsto s_i, i = \{1, 2\}$ alors,

$$\Sigma : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mapsto \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2, \forall \alpha_1, \alpha_2$$

  il y a proportionnalité des effets aux causes,
  les causes ajoutent leurs effets.
- Système stationnaire :
  $\Sigma : e(t) \mapsto s(t)$, alors

$$\Sigma : e(t - T) \mapsto s(t - T), \forall t$$

  les caractéristiques du système ne changent pas en fonction du temps.
- Système causal : les effets ne peuvent précéder leurs causes (la réponse implusionnelle est nulle pout t négatif).

- Système linéaire :
  $\Sigma : e_i \mapsto s_i, i = \{1, 2\}$ alors,

$$\Sigma : \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \mapsto \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2, \forall \alpha_1, \alpha_2$$

  il y a proportionnalité des effets aux causes,
  les causes ajoutent leurs effets.
- Système stationnaire :
  $\Sigma : e(t) \mapsto s(t)$, alors

$$\Sigma : e(t - T) \mapsto s(t - T), \forall t$$

  les caractéristiques du système ne changent pas en fonction du temps.
- Système causal : les effets ne peuvent précéder leurs causes (la réponse implusionnelle est nulle pout t négatif).
- Système multivariable : plusieurs entrées/sorties $e \in \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{R}^p$

Système linéaire stationnaire (LTI)

à temps continu

- signaux d'entrée et de sortie reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Système linéaire stationnaire (LTI)

à temps continu

- signaux d'entrée et de sortie reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- utilisation de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad \forall p \in \mathbb{C}$$

Système linéaire stationnaire (LTI)

à temps continu

- signaux d'entrée et de sortie reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- utilisation de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad \forall p \in \mathbb{C}$$

Théorème de la dérivée :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p\,\mathcal{L}(f(t)) - f(0^+)$$

Si CI nulles, on remplace l'étude de l'eq. diff par celle d'une fraction rationnelle (fonction de transfert).

Système linéaire stationnaire (LTI)

à temps continu

- signaux d'entrée et de sortie reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- utilisation de la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \quad \forall p \in \mathbb{C}$$

Théorème de la dérivée :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p\,\mathcal{L}(f(t)) - f(0^+)$$

Si CI nulles, on remplace l'étude de l'eq. diff par celle d'une fraction rationnelle (fonction de transfert).

à temps discret : équations récurrentes, transformée en z.

signaux aléatoires : utilisation de la transformée de Fourier.

Fonction de transfert

si le système est LTI à temps continu et si toutes les CI sont nulles :

$$\mathcal{L}(\frac{d^i e(t)}{dt^i}) = p^i E(p), \quad \mathcal{L}(\frac{d^j s(t)}{dt^j}) = p^j S(p), \ \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Fonction de transfert

si le système est LTI à temps continu et si toutes les CI sont nulles :

$$\mathcal{L}(\frac{d^i e(t)}{dt^i}) = p^i E(p), \quad \mathcal{L}(\frac{d^j s(t)}{dt^j}) = p^j S(p), \ \forall i, j \in \mathbb{N}$$

L'équation différentielle du sytème :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{d} b_j \frac{d^j s(t)}{dt^j} \text{ devient}$$

Fonction de transfert

si le système est LTI à temps continu et si toutes les CI sont nulles :

$$\mathcal{L}(\frac{d^i e(t)}{dt^i}) = p^i E(p), \quad \mathcal{L}(\frac{d^j s(t)}{dt^j}) = p^j S(p), \ \forall i, j \in \mathbb{N}$$

L'équation différentielle du sytème :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{d} b_j \frac{d^j s(t)}{dt^j} \text{ devient}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i E(p) = \sum_{j=0}^{d} b_j p^j S(p)$$

Fonction de transfert

si le système est LTI à temps continu et si toutes les CI sont nulles :

$$\mathcal{L}(\frac{d^i e(t)}{dt^i}) = p^i E(p), \quad \mathcal{L}(\frac{d^j s(t)}{dt^j}) = p^j S(p), \ \forall i, j \in \mathbb{N}$$

L'équation différentielle du sytème :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i e(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{d} b_j \frac{d^j s(t)}{dt^j} \text{ devient}$$

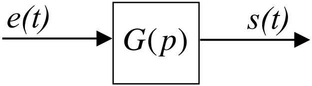
$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i E(p) = \sum_{j=0}^{d} b_j p^j S(p)$$

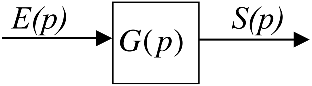
Soit $$S(p) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}{\displaystyle\sum_{j=0}^{d} b_j p^j} E(p) = G(p) E(p), G(p) \text{ fraction rationnelle}$$

Algèbre des diagrammes

2 écritures possibles :

- le signal temporel $e(t)$ est filtré par le système dont la fonction de transfert est $G(p)$; en sortie on obtient le signal temporel $s(t)$



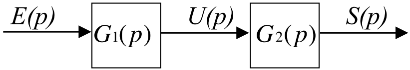


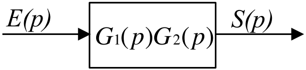
- si les CI sont nulles $S(p) = G(p)E(p)$
  écriture temporelle : $s(t) = (g \star e)(t)$

$$g \star e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e(t-\tau)\ d\tau = \int_0^t g(\tau)e(t-\tau)\ d\tau \text{ (causalité)}$$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$
$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)E(p))$

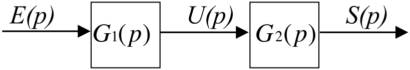
- système en série

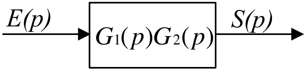




$$S(p) = G_2(p)U(p) = G_2(p)G_1(p)E(p)$$

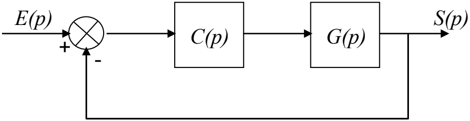
- système en série





$$S(p) = G_2(p)U(p) = G_2(p)G_1(p)E(p)$$

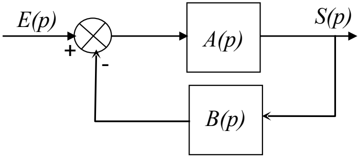
- système bouclé à retour unitaire



$S(p) = C(p)G(p)(E(p) - S(p))$, soit
$S(p)(1 + C(p)G(p)) = C(p)G(p)E(p)$

$$G_{BF}(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

- système bouclé à retour non unitaire



$$S(p) = A(p)\ (E(p) - B(p)S(p))\dots$$

$$G_{BF}(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Fraction rationnelle

$$G(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}{b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \cdots + b_0} = \frac{g_n(p)}{g_d(p)}$$

.

- le polynôme $g_n(p)$ est appelé numérateur de $G(p)$, $\deg(g_n) = n$ si $a_n \neq 0$,
- le polynôme $g_d(p)$ est appelé dénominateur de $G(p)$, $\deg(g_d) = d$ si $b_d \neq 0$

Fraction rationnelle

$$G(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}{b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \cdots + b_0} = \frac{g_n(p)}{g_d(p)}$$

.

- le polynôme $g_n(p)$ est appelé numérateur de $G(p)$, $\deg(g_n) = n$ si $a_n \neq 0$,
- le polynôme $g_d(p)$ est appelé dénominateur de $G(p)$, $\deg(g_d) = d$ si $b_d \neq 0$
- fraction rationnelle **propre** si $\deg(g_n) \leq \deg(g_d)$; fraction rationnelle **strictement propre** si $\deg(g_n) < \deg(g_d)$

Fraction rationnelle

$$G(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}{b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \cdots + b_0} = \frac{g_n(p)}{g_d(p)}$$

.

- le polynôme $g_n(p)$ est appelé numérateur de $G(p)$, $\deg(g_n) = n$ si $a_n \neq 0$,
- le polynôme $g_d(p)$ est appelé dénominateur de $G(p)$, $\deg(g_d) = d$ si $b_d \neq 0$
- fraction rationnelle **propre** si $\deg(g_n) \leq \deg(g_d)$;
  fraction rationnelle **strictement propre** si $\deg(g_n) < \deg(g_d)$
  Une fonction de transfert (strictement) propre est associée à un système (strictement) causal.

$$G(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0}{b_d p^d + b_{d-1} p^{d-1} + \cdots + b_0} = \frac{g_n(p)}{g_d(p)}$$

.

- racines de $g_n(p) = 0$ sont appelées **racines** ou **zéros** de $G(p)$, il y en a $n = \deg(g_n)$
- racines de $g_d(p) = 0$ sont appelées **pôles** de $G(p)$, il y en a $d = \deg(g_d)$.

a_i et b_j réels $\Rightarrow$ si z zéro de $G(p)$, alors z^* zéro de $G(p)$
idem pour les pôles (réels ou complexes conjugués)

Décomposition en éléments simples

pourquoi ? réponse d'un système à une entrée quelconque :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p)E(p))$$

utilisation des tables de transformée + théorèmes

$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$u_h(t)$	$\frac{1}{p}$
$t\ u_h(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at}\ u_h(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\sin \omega t\ u_h(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t\ u_h(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2+b^2} \sin(\omega t + \varphi)$ avec $\tan \varphi = \frac{a}{b}$

Éléments "simples" : de la forme $\frac{a}{(p-\alpha)^l}$ et $\frac{Ap+B}{(p^2-bp+c)^l}$

- si tous les pôles p_i ($i = 1$ à d) sont simples et réels, on peut décomposer $G(p)$ en éléments simples comme suit :

$$G(p) = \sum_{i=1}^{d} \frac{k_i}{p - p_i}$$

  les coefficients k_i se calculent aisément (cf exemples).

- si $G(p)$ a des pôles réels p_i multiples de multiplicité m_i :

$$G(p) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{k_{i,l}}{(p - p_i)^l}$$

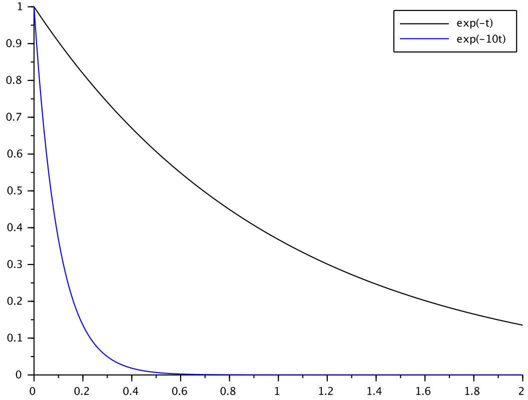
- si $G(p)$ a des pôles complexes conjugués, on les regroupe 2 à 2 comme suit :

$$G_i(p) = \frac{Ap + B}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2}$$

linéarité de la TL

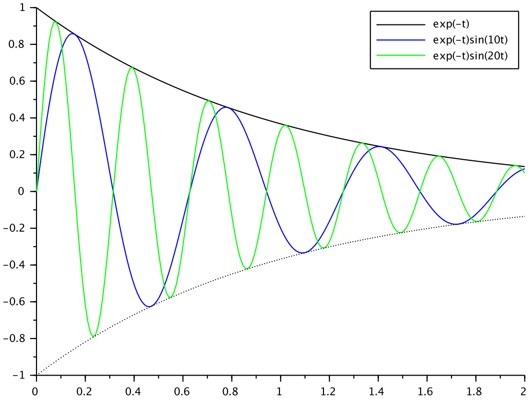
$$G(p) = \sum_i G_i(p) \Rightarrow g(t) = \sum_i g_i(t)$$

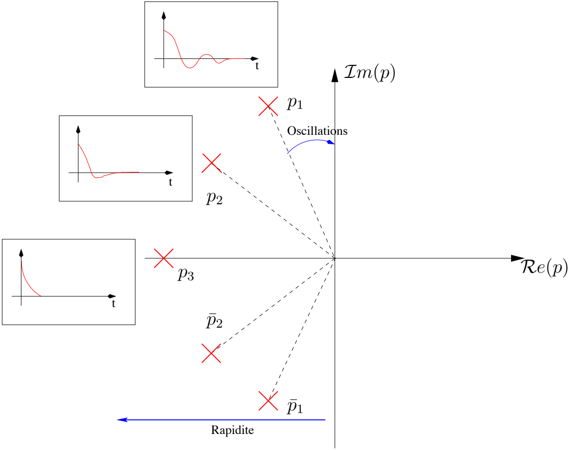
- si un pôle simple en $p = p_i, g_i(t) = k_i e^{p_i t} \Rightarrow g(t)$ diverge si $p_i > 0$ contribution du pôle $p_i < 0 \pm$ rapide suivant la valeur de p_i



- si pôle multiple en $p = p_i, g_i(t) = k_{i,l} t^{l-1} e^{p_i t} \Rightarrow g(t)$ diverge si $p_i > 0$
- si pôles $p_i = \sigma_i + j\omega_i \Rightarrow g_i(t) = a_i e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$

  $\pm$ rapide : $\sigma_i (= \Re(p_i))$, $\pm$ oscillant : $\omega_i (= \Im(p_i))$





t
t
t
$\mathcal{I}m(p)$
p_1
Oscillations
p_2
p_3
$\mathcal{R}e(p)$
$\bar{p}_2$
$\bar{p}_1$
Rapidite