Cours 1 :

Introduction, filtrage, convolution et analyse fréquentielle des images

Images et filtres

ELEC3

Lionel Fillatre (cours), Federica Turi (TD)

2018-2019

Une introduction aux images et filtres numériques

- Permet de développer des compétences du type
  - Comment corriger des défauts / améliorer la qualité des images
  - Comment stocker et transférer efficacement des images
  - Comment analyser des images (contenus, bruits, etc.)

- Outils principaux étudiés
  - Adapter la fréquence d'échantillonnage
  - Analyser le contenu spectral
  - Modéliser et appliquer des filtres adéquats

- Site du cours:

  http://jalon.unice.fr/cours/deneire/Cours-deneire-20140129083323/view

Le déroulé du cours

- 4 problèmes différents et complémentaires :
  - PB1 : Echantillonnage et filtrage en 2D
  - PB2 : Restauration des images
  - PB3 : Compression, quantification et codage d'images
  - PB4 : Introduction aux décompositions en ondelettes

Déroulé sur le semestre

	PB1	PB2	PB3	PB4	Questions/réponses	Examen
Cours	8 février	28 février	14 mars	4 avril	25 avril	27 mai
Td	15 février 01 mars 08 mars	15 mars 22 mars 29 mars	05 avril 12 avril 23 avril	3 mai 10 mai 17 mai		

Déroulé typique d'un problème

- 1 cours d'introduction au problème
  - Examen individuel de 10 minutes **au début** du cours suivant (noté sur 10) : examen uniquement composé de questions de cours

- Séance 1 (par groupe de 6)
  - Un énoncé guidé avec des exercices
  - Tous les étudiants doivent savoir traiter tous les exercices

  ➜ échange important entre les étudiants
  - Aucun rendu

- Séance 2 (par binôme)
  - Mise en oeuvre de la séance 1 avec Python sur des problèmes concrets
  - Résoudre le problème permet d’acquérir le savoir
  - Le savoir ou savoir-faire doit être formalisé (**mis sur papier**)
  - Un exercice précis à rendre sous forme d’un fichier Jupyter Notebook dès la fin de la séance (noté sur 10)

- Séance 3 (par binôme)
  - Finalisation du rapport et des programmes à remettre pour le mercredi soir suivant sur Jalon
  - Rendu sous forme d’un fichier Jupyter Notebook (noté sur 10)

Notation

- 1 note sur 10 individuelle à chaque PB (cours) ➜ 1 note globale sur 40
- 1 note sur 10 en binôme à chaque PB (séance 2) ➜ 1 note globale sur 40
- 1 note sur 10 en binôme à chaque PB (séance 3) ➜ 1 note globale sur 40
- Examen écrit final ➜ 1 note sur 40
  - Questions de cours
  - Exercices d'applications
- **Moyenne finale sur 20 : moyenne (ramenée sur 20) des 4 notes sur 40**

Préparation environnement informatique

- Environnement informatique :
  - Python avec Jupyter Notebook et OpenCV
  - Deux possibilités : la machine virtuelle ou une installation personnelle
  1. Machine virtuelle
     - Télécharger la machine virtuelle sur le site Jalon

       http://jalon.unice.fr/cours/deneire/Cours-deneire-20140129083323
     - Pour exécuter la machine virtuelle, il faut également télécharger **VirtualBox**

       https://www.virtualbox.org/
  2. Installation personnelle
     - Installer Anaconda Python 2.7 sur votre machine : https://www.anaconda.com/distribution/
     - Installer la librairie OpenCV dans Anaconda

- Faire le TP de prise en main **dès aujourd'hui** (non traité en cours, fortement recommandé)

- Si vous rencontrez des difficultés, préparez vos questions pour le 1er TD

Sommaire

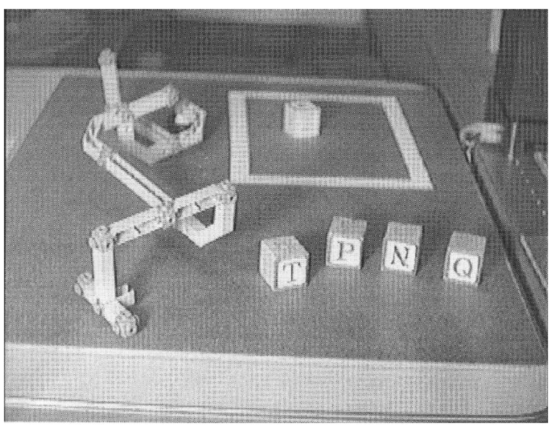
- Acquisition d’images
- Transformée de Fourier
- Convolution
- Transformée de Fourier discrète

ACQUISITION D'IMAGES

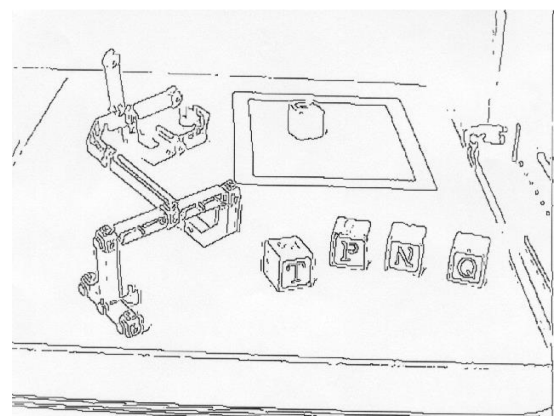
Qu’est-ce qu’une image ? Un filtre ?

I(x,y) J(x,y)

filtre

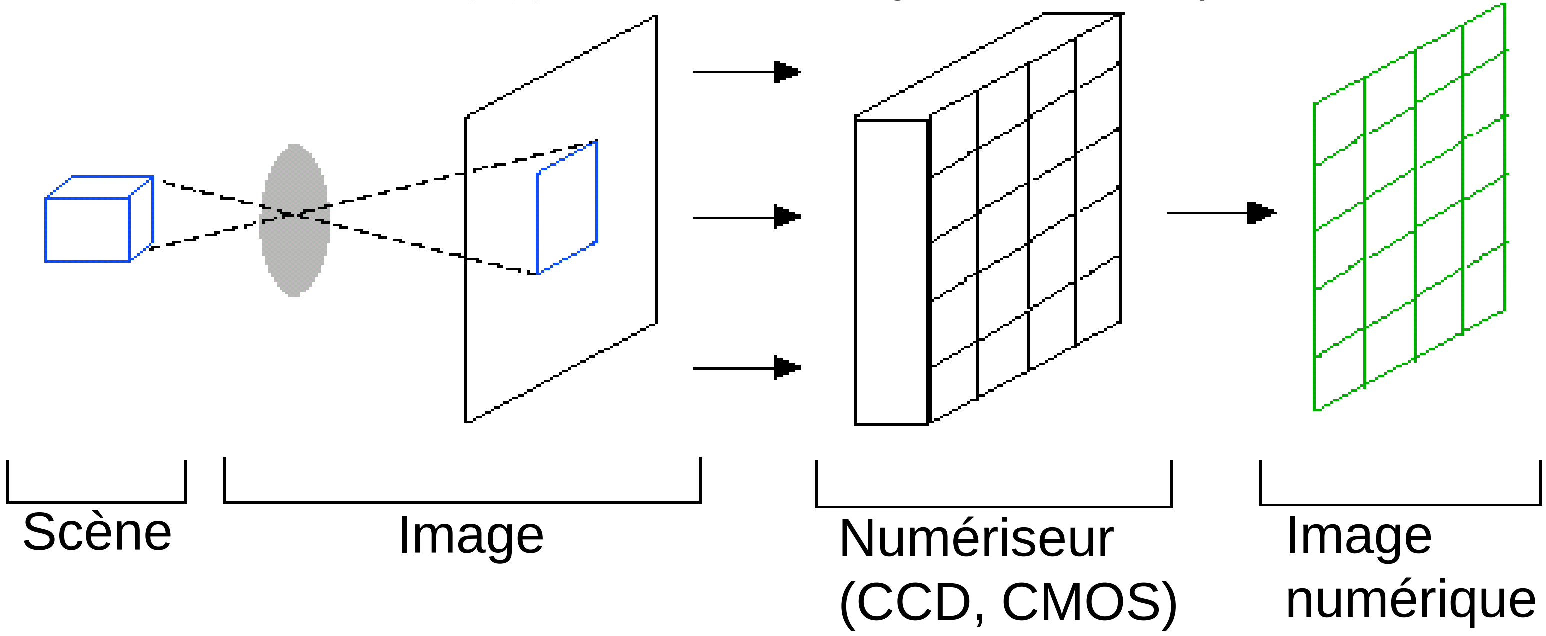


filtre



Acquisition d'une image numérique

1. I(x,y) continue **2.** Image numérisée (échantillonnée et quantifiée)

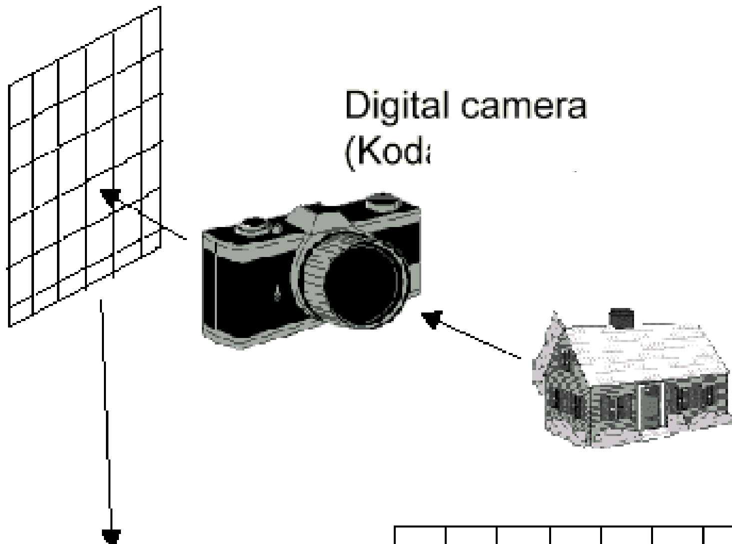


1. Projection 2D d'une scène 3D
2. I(x,y) représente l'intensité de la lumière au point (x,y)
3. Discrétisation de l'espace et de l'intensité

0	10	10	15	50	70	80
0	0	100	120	125	130	130
0	35	100	150	150	80	50
0	15	70	100	10	20	20
0	15	70	0	0	0	15
5	15	50	120	110	130	110
5	10	20	50	50	20	250

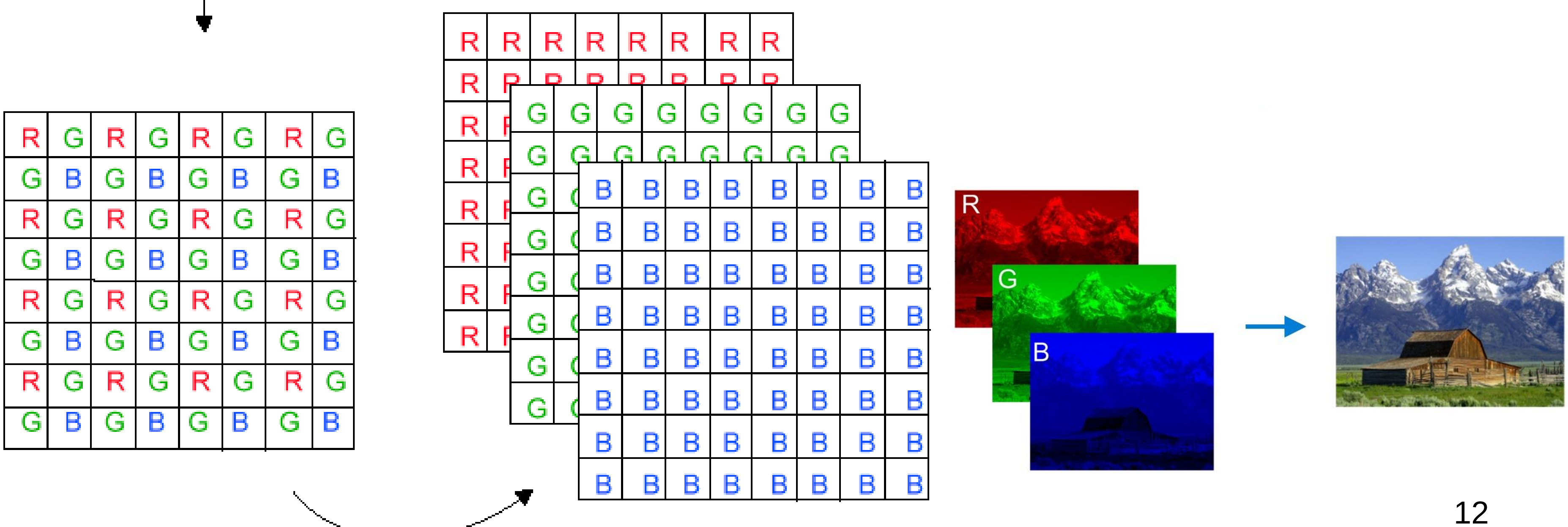
Pixel (picture element)
➔ Scalaire
Ex : niveaux de gris
➔ Vecteur
Ex : couleur

CCD couleur (Charge-Coupled Device)



- Mono-CCD
- Chaque photorécepteur est recouvert d'un **filtre** coloré
- **Interpolation** de couleurs

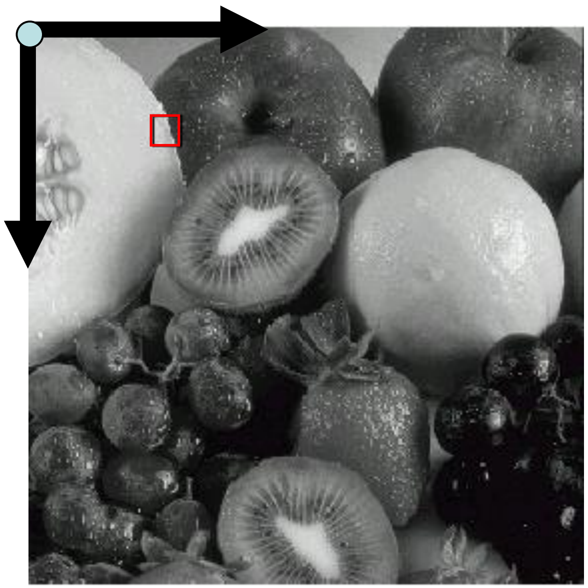
Filtres :
2 G pour
1 R et 1 B



Interpolation

Représentation d'une image

(0,0)
ou
(1,1)



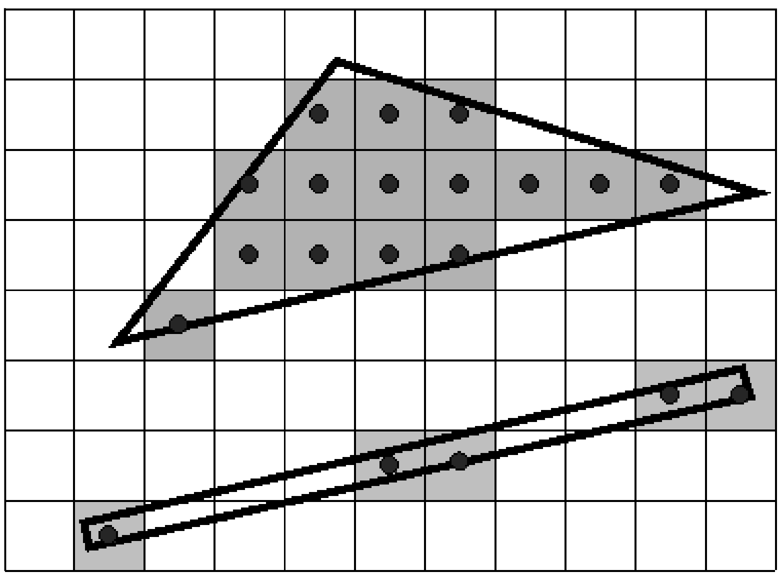
y = \ x =	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
41	210	209	204	202	197	247	143	71	64	80	84	54	54	57	58
42	206	196	203	197	195	210	207	56	63	58	53	53	61	62	51
43	201	207	192	201	198	213	156	69	65	57	55	52	53	60	50
44	216	206	211	193	202	207	208	57	69	60	55	77	49	62	61
45	221	206	211	194	196	197	220	56	63	60	55	46	97	58	106
46	209	214	224	199	194	193	204	173	64	60	59	51	62	56	48
47	204	212	213	208	191	190	191	214	60	62	66	76	51	49	55
48	214	215	215	207	208	180	172	188	69	72	55	49	56	52	56
49	209	205	214	205	204	196	187	196	86	62	66	87	57	60	48
50	208	209	205	203	202	186	174	185	149	71	63	55	55	45	56
51	207	210	211	199	217	194	183	177	209	90	62	64	52	93	52
52	208	205	209	209	197	194	183	187	187	239	58	68	61	51	56
53	204	206	203	209	195	203	188	185	183	221	75	61	58	60	60
54	200	203	199	236	188	197	183	190	183	196	122	63	58	64	66
55	205	210	202	203	199	197	196	181	173	186	105	62	57	64	63

- Pour numériser des images, deux opérations :
  - Echantillonnage
  - Quantification

Échantillonnage

➔**Discrétisation de l'espace 2D, on découpe l'image en pixels**

Une résolution trop faible peut causer des problèmes d'aliasing



N = 4

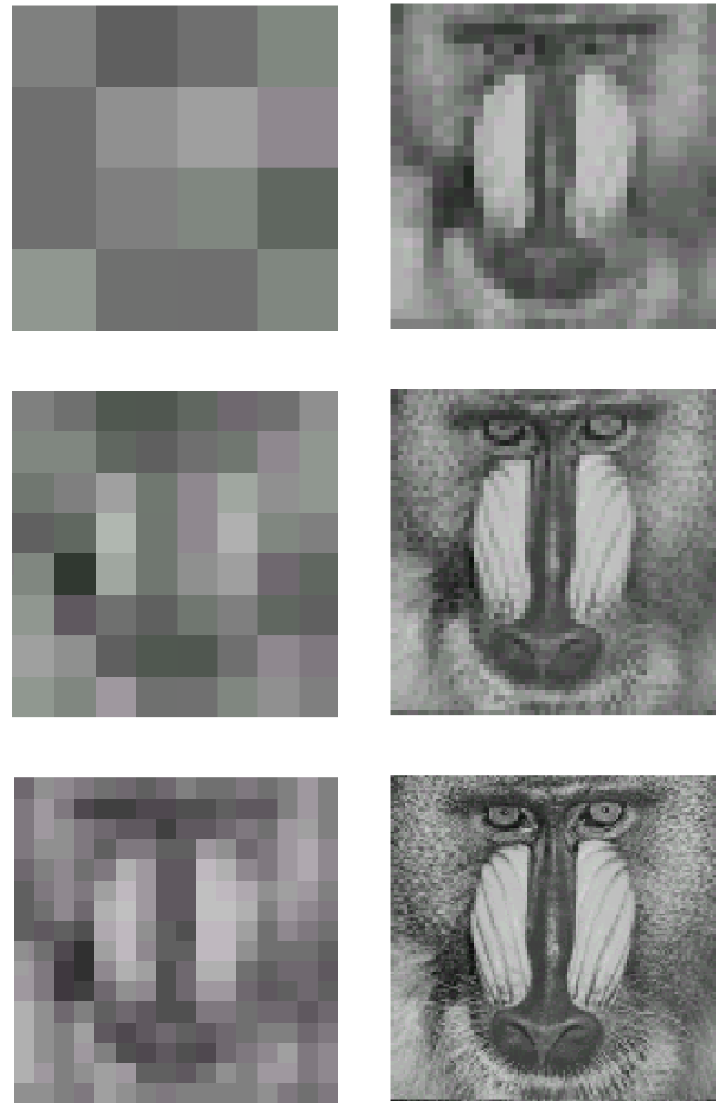
N = 32

N = 8

N = 64

N = 16

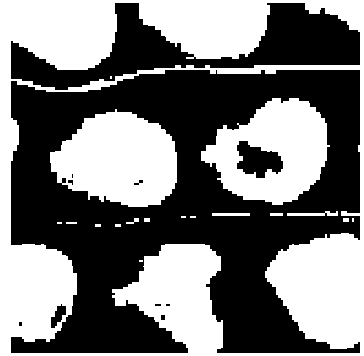
N = 128

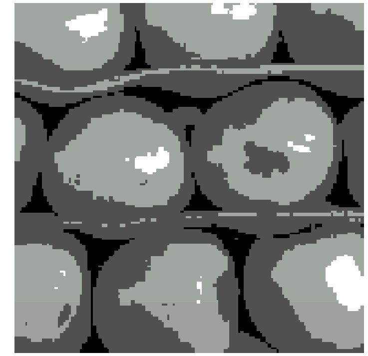


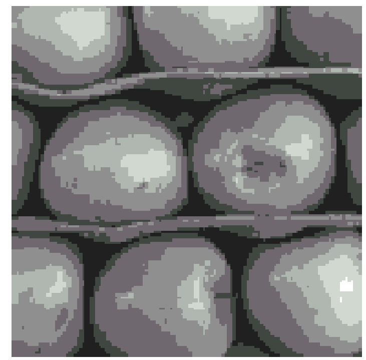
➔ Apparition d'escaliers sur les contours obliques

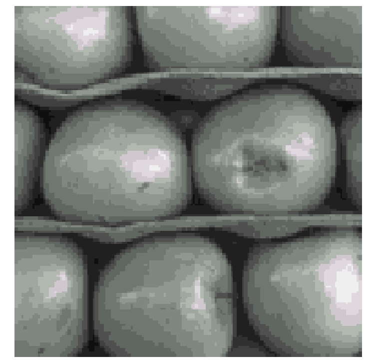
Quantification

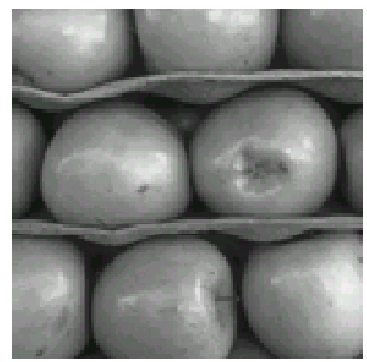
➔ **Discrétisation de l’espace des couleurs ou niveaux de gris**


bits=1


bits=2


bits=3


bits=4


bits=8

Une quantification trop faible peut causer des problèmes de faux contours

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Transformée de Fourier d'une image

- Transformée de Fourier : décomposition en une somme infinie de sinusoïdes d'amplitude complexe

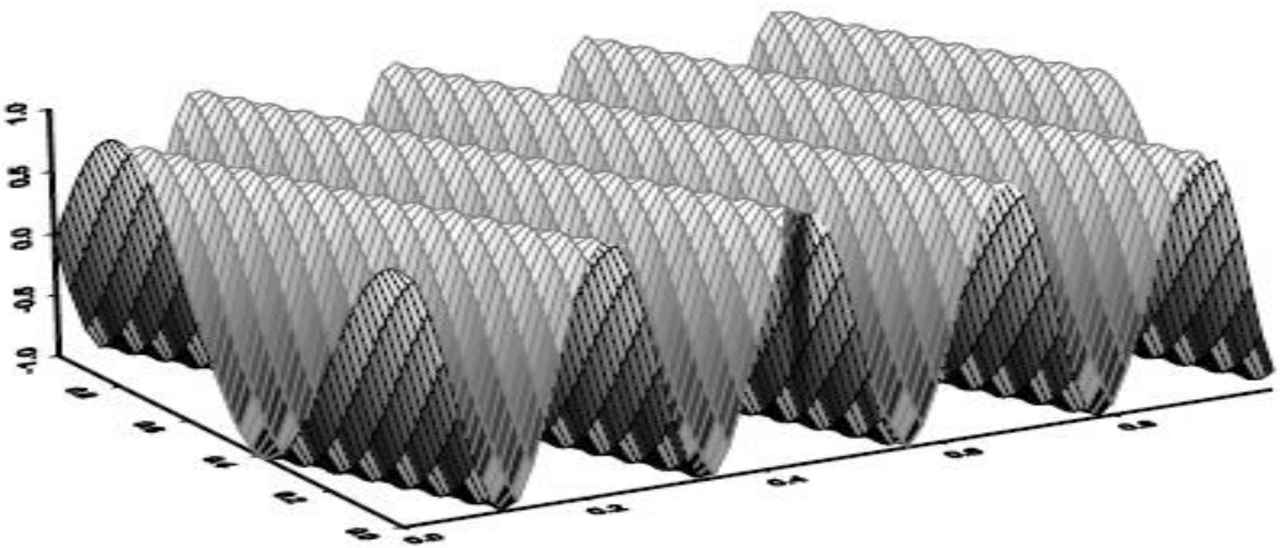
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{-2\pi j(ux+vy)} \, du \, dv$$

- On calcule l'amplitude de chaque composante en projetant l'image sur les différentes sinusoïdes

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{2\pi j(ux+vy)} \, dx \, dy$$

Sinusoïde à deux dimensions

une ondulation régulière dans une direction



$$\boxed{a.\exp j(u.x + v.y + \varphi)}$$

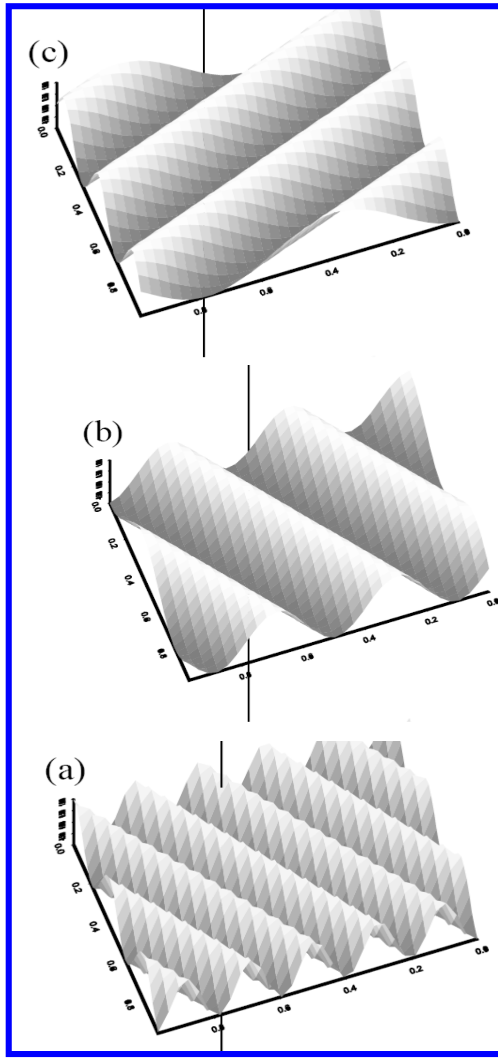
a : amplitude

$\boldsymbol{\varphi}$: phase

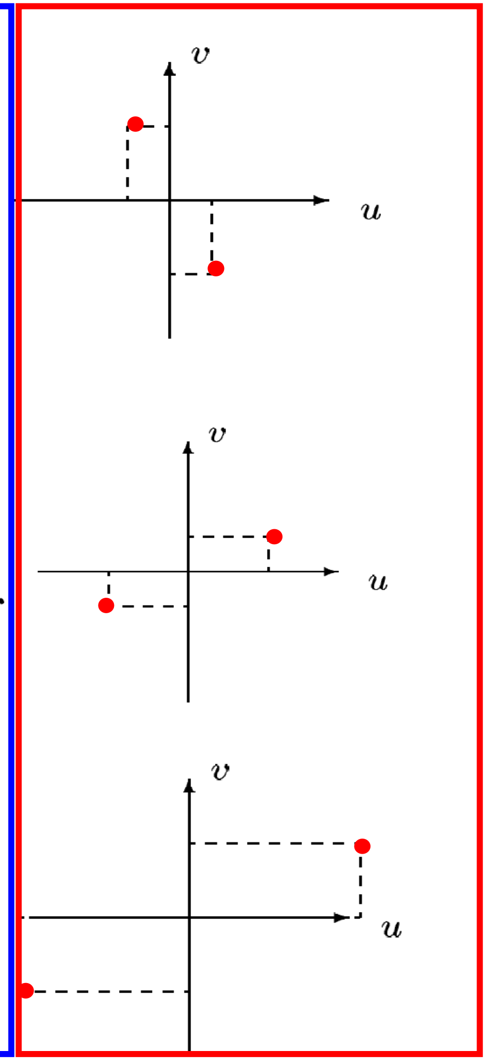
Transformée de Fourier de sinusoides

- Sinusoïdes bidimensionnelles d'orientation différente
- Sinusoïdes bidimensionnelles de fréquence d'ondulation différente

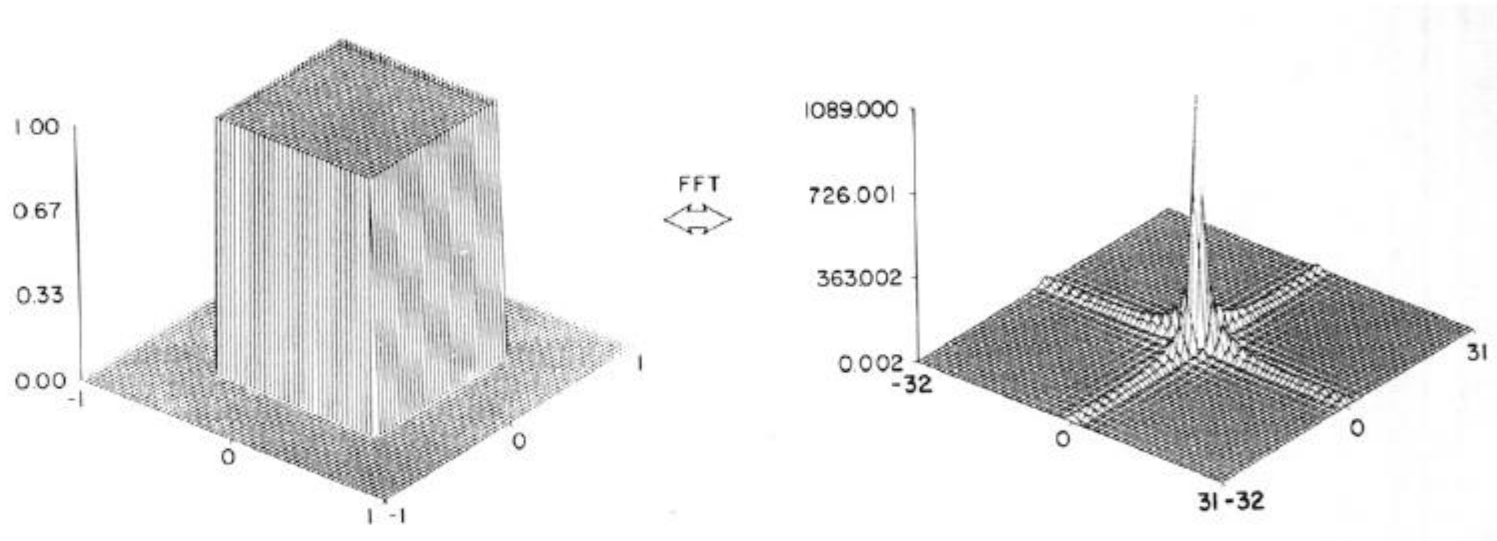
domaine spatial



domaine fréquentiel



Transformée de Fourier d'un carré



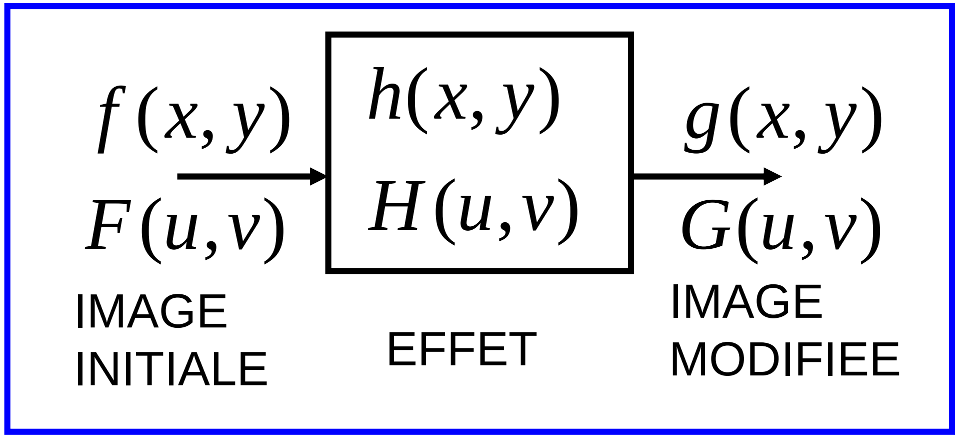
$$F(u, v) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi(ux+vy)} \, dx \, dy$$

$$= \frac{\sin \pi u}{\pi u} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi vy} \, dy$$

$$= \frac{\sin \pi u}{\pi u} \frac{\sin \pi v}{\pi v} .$$

CONVOLUTION

Convolution à deux dimensions



$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)h(x-s,y-t)dsdt$$

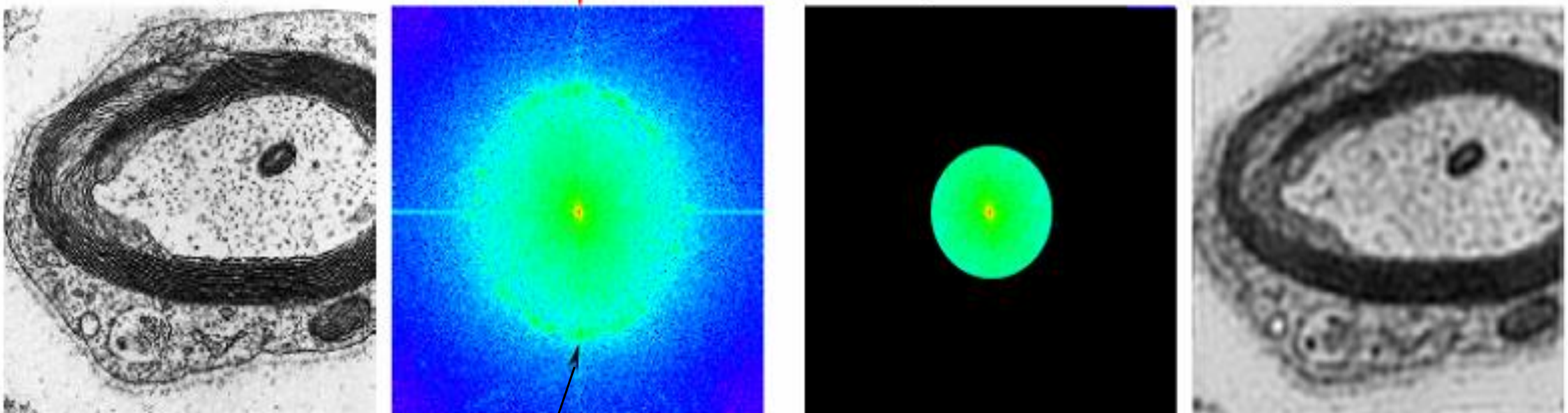
devient un *produit* dans le domaine des fréquences

$$\boxed{G(u,v) = F(u,v)H(u,v)}$$

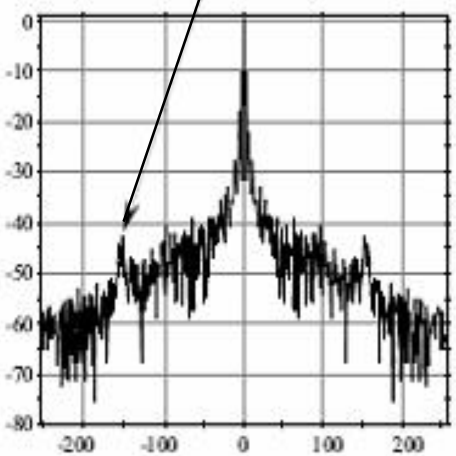
Remarque : généralement, filtre passe-bas (lissage, flou, bougé) ou filtre passe-haut (mise en évidence des contours)

Principe du filtrage dans le domaine de Fourier

Image | Spectre de Fourier | Spectre filtré | Image filtrée



Transformée de Fourier → Coupure des hautes fréquences spatiales → Transformée de Fourier inverse



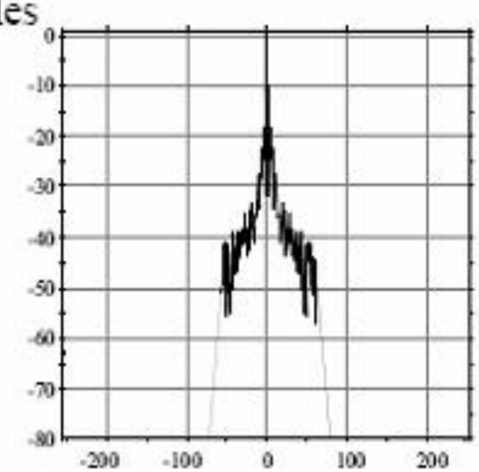


Image brute

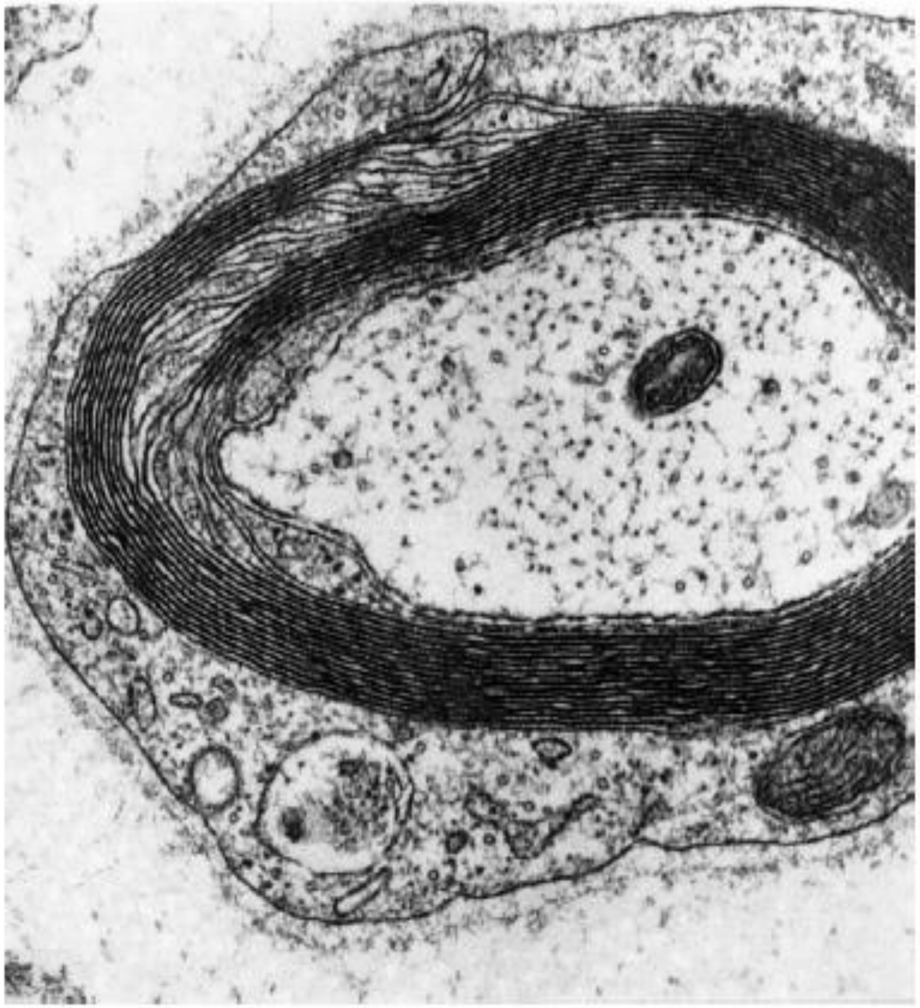


Image filtrée

Filtrage passe-bas

Image brute

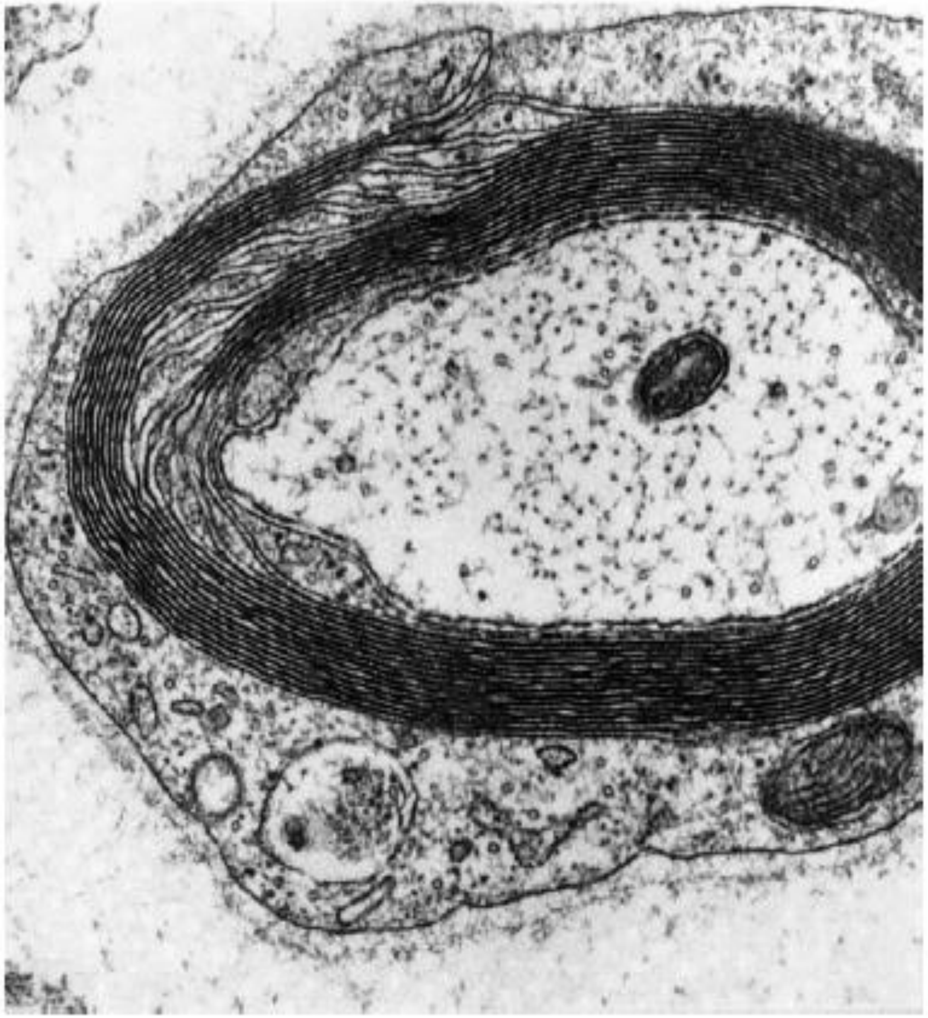


Image filtrée

Filtrage passe-bas

Image brute

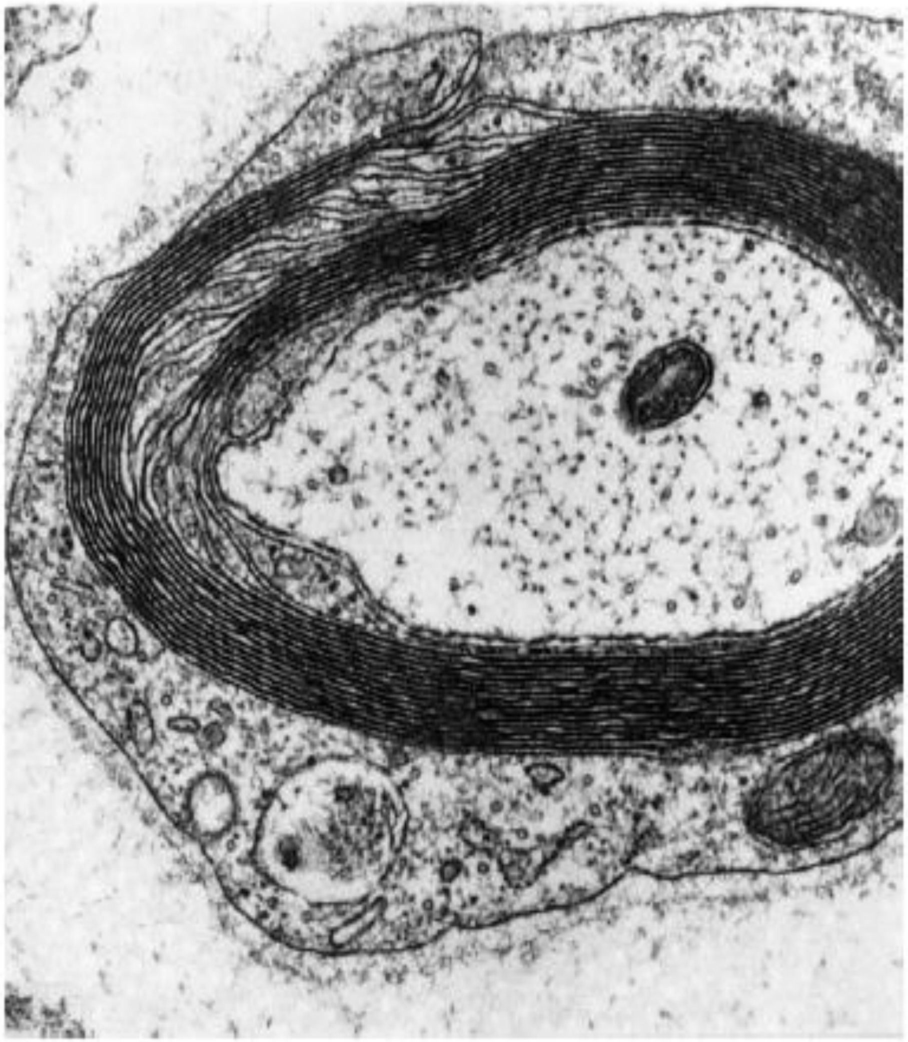


Image filtrée

Filtrage passe-bas

Image brute

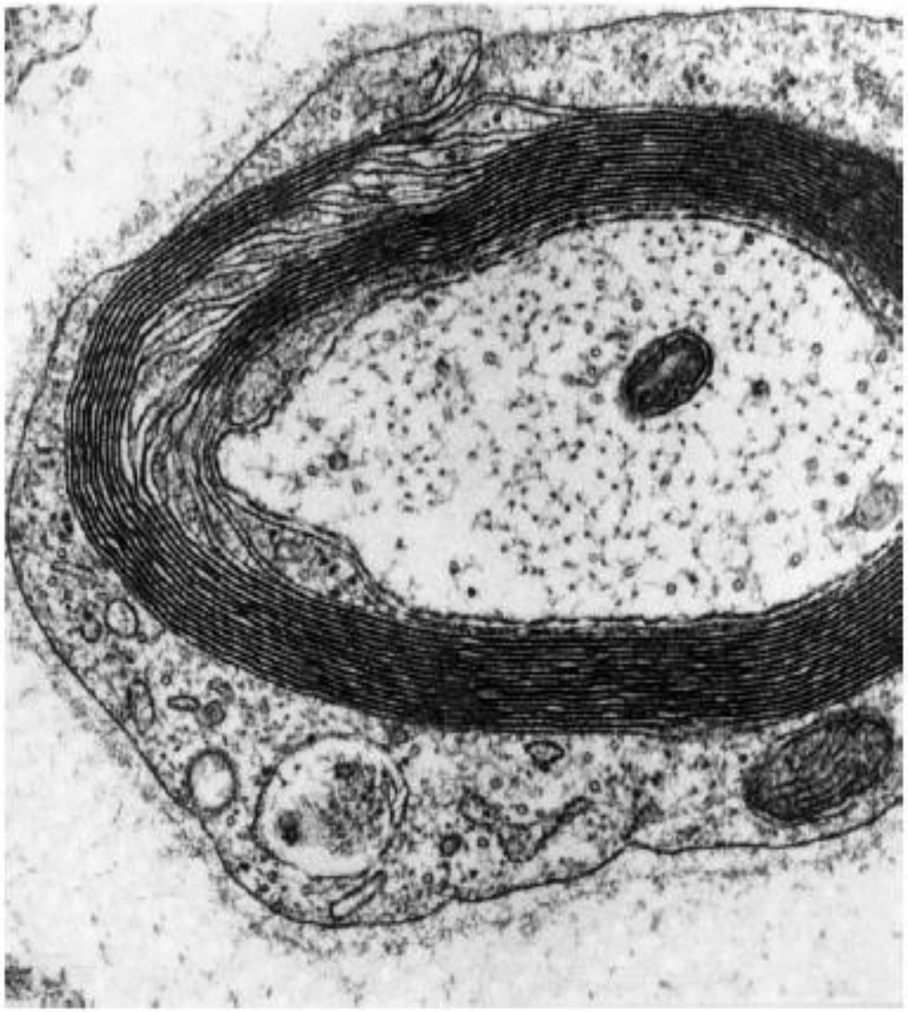
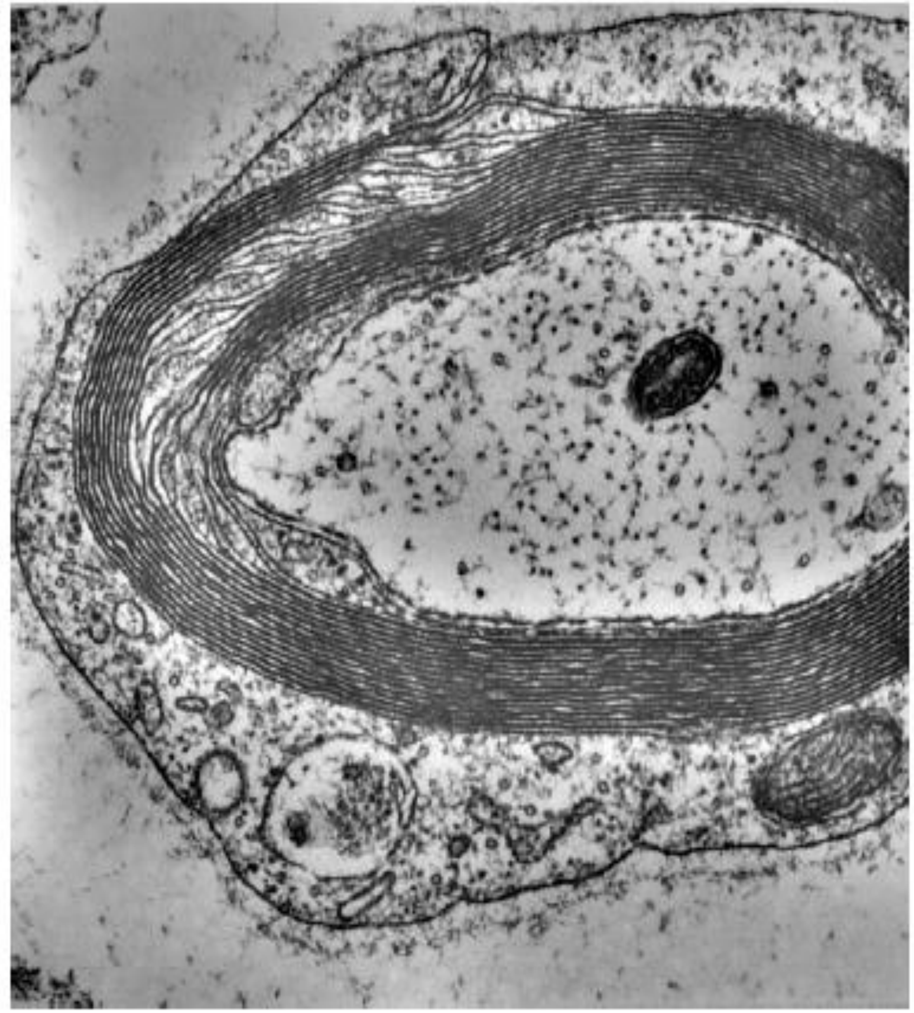


Image filtrée



Filtrage passe-haut

Image brute

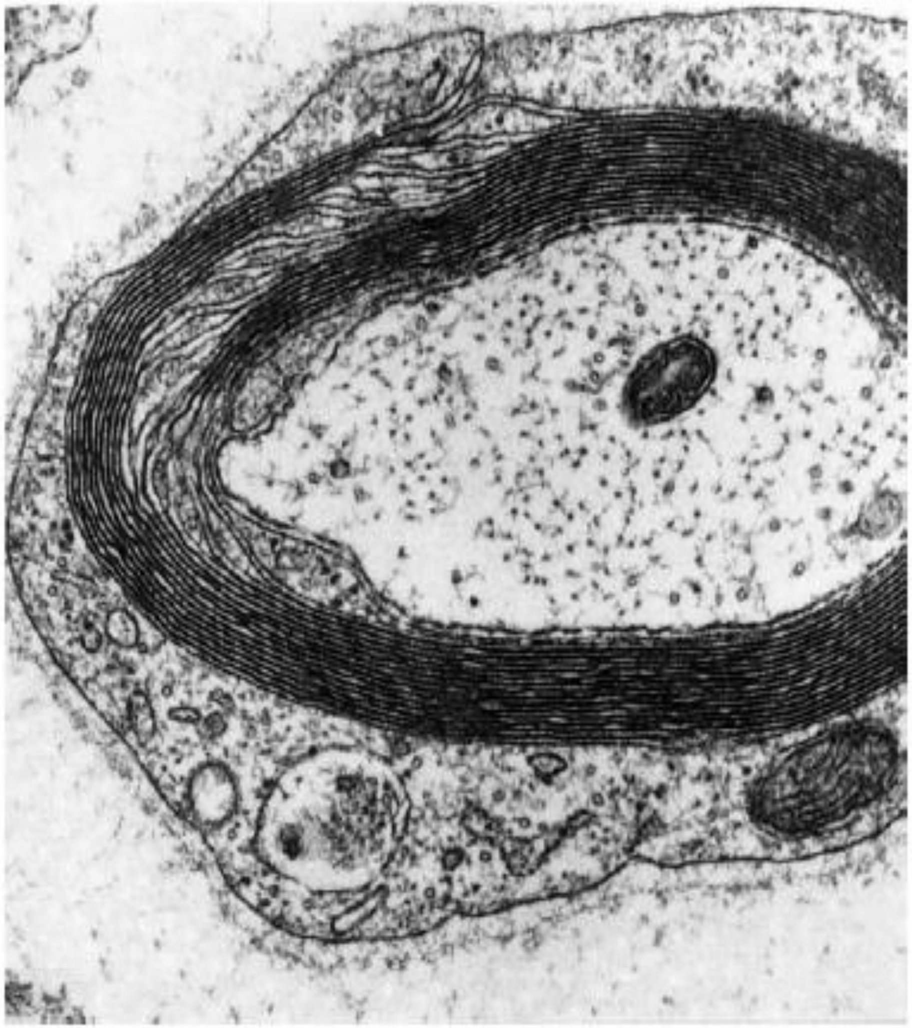
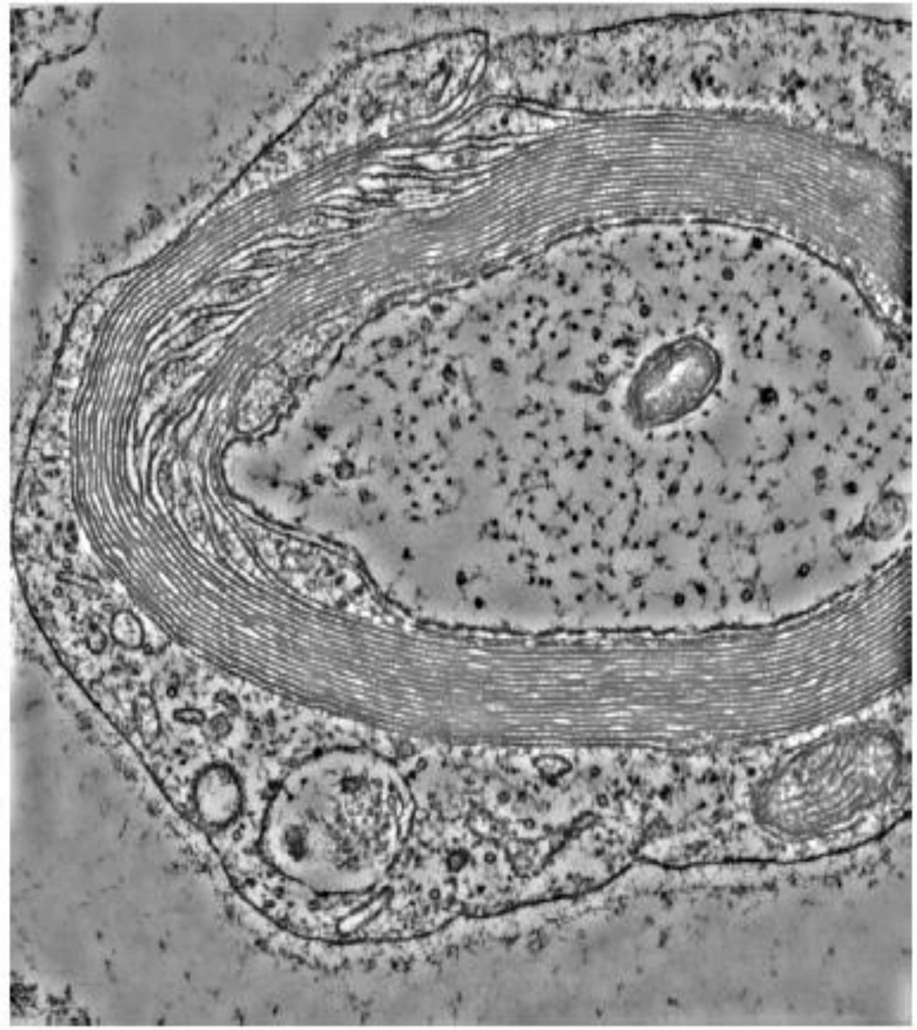


Image filtrée



Filtrage passe-haut

Image brute

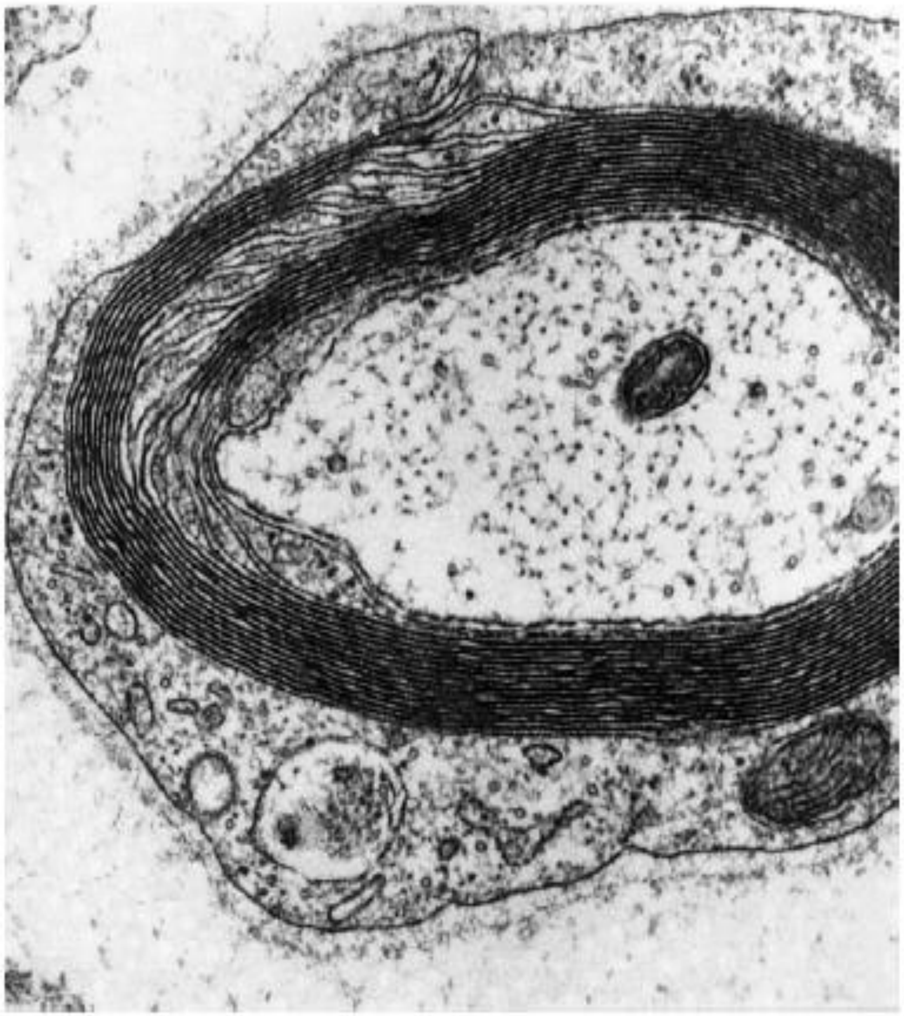
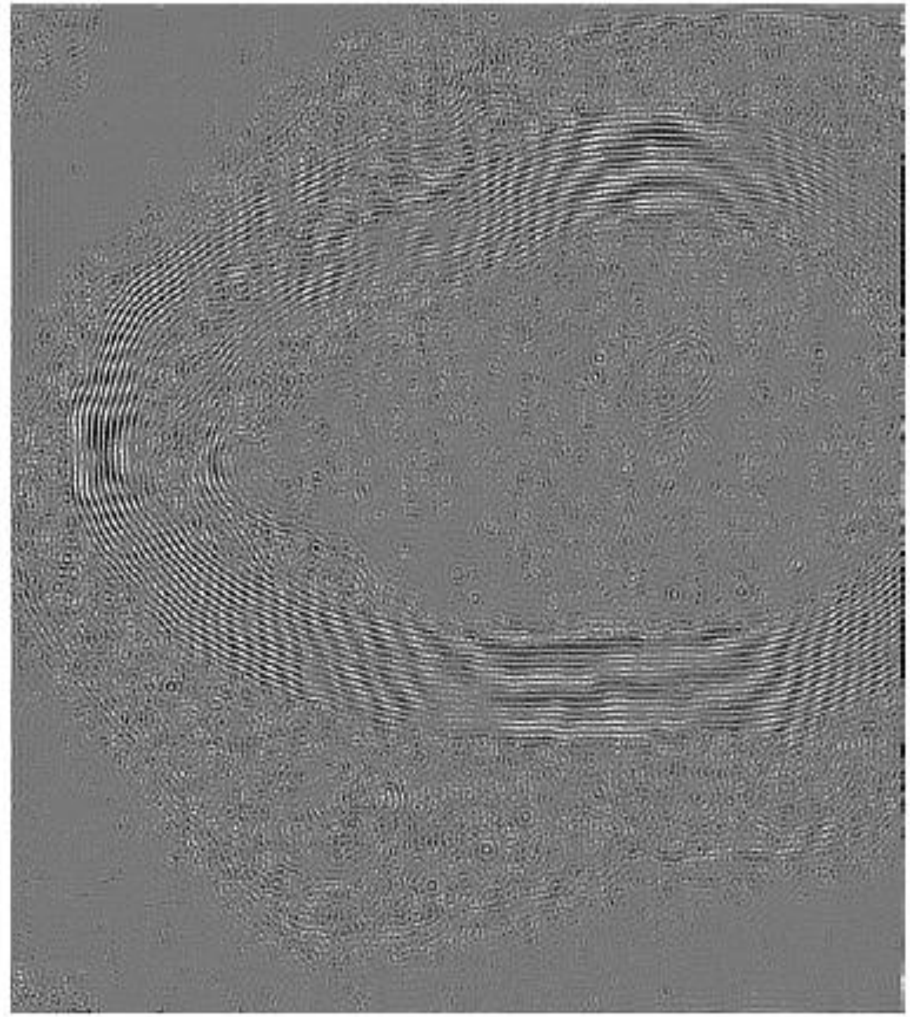


Image filtrée



Filtrage passe-haut

ÉCHANTILLONNAGE

Attention à l’interprétation de l’échantillonnage

- Ce n’est pas un pavage de pixels

- mais une « brosse » d’impulsions variant en amplitude d’après la théorie de l’échantillonnage d’une image

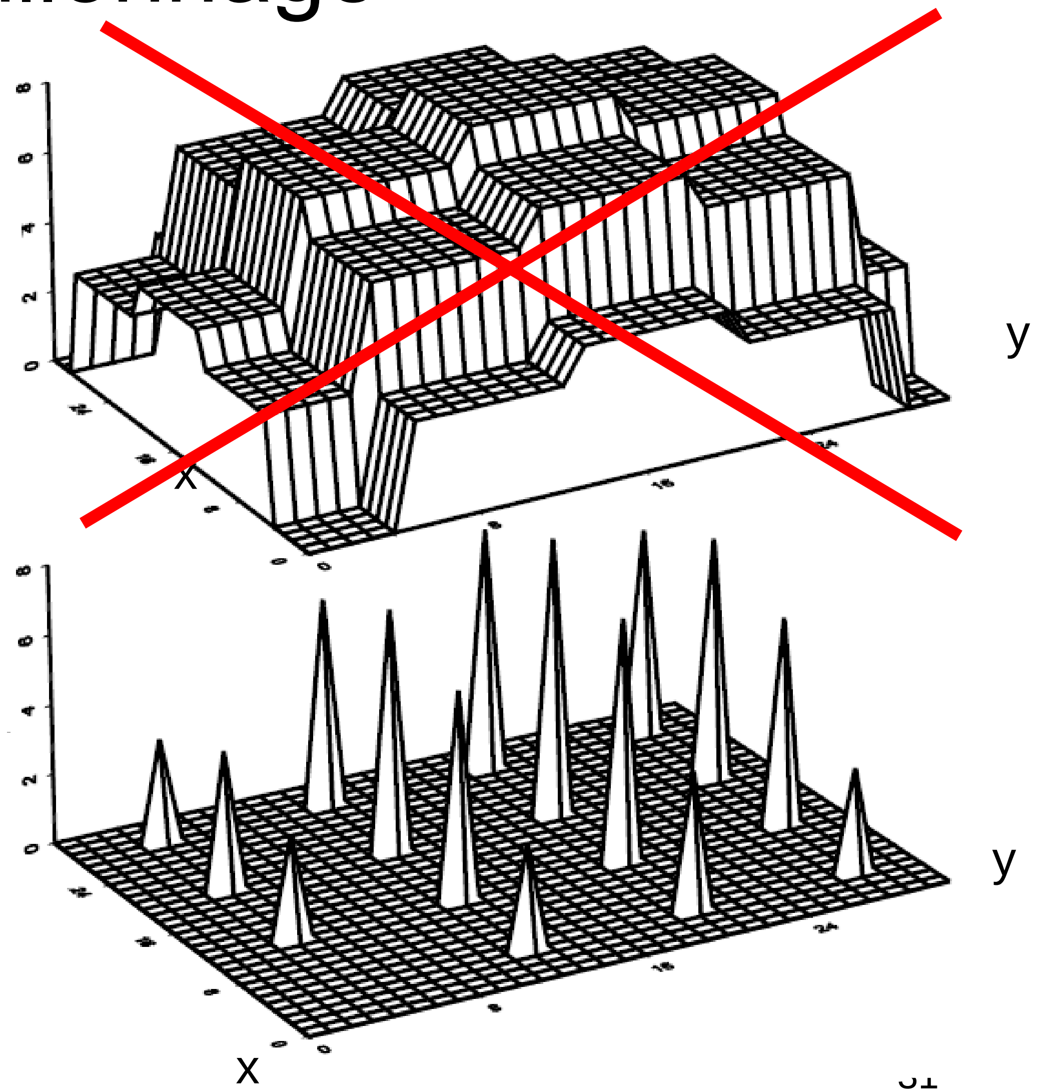
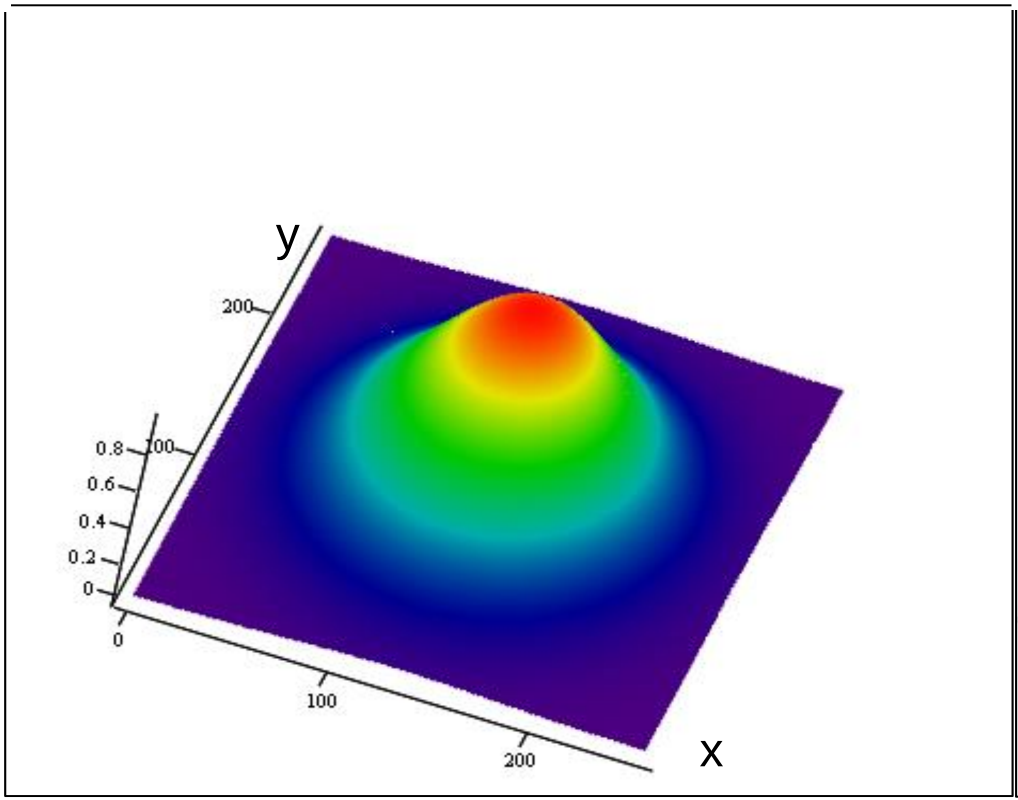
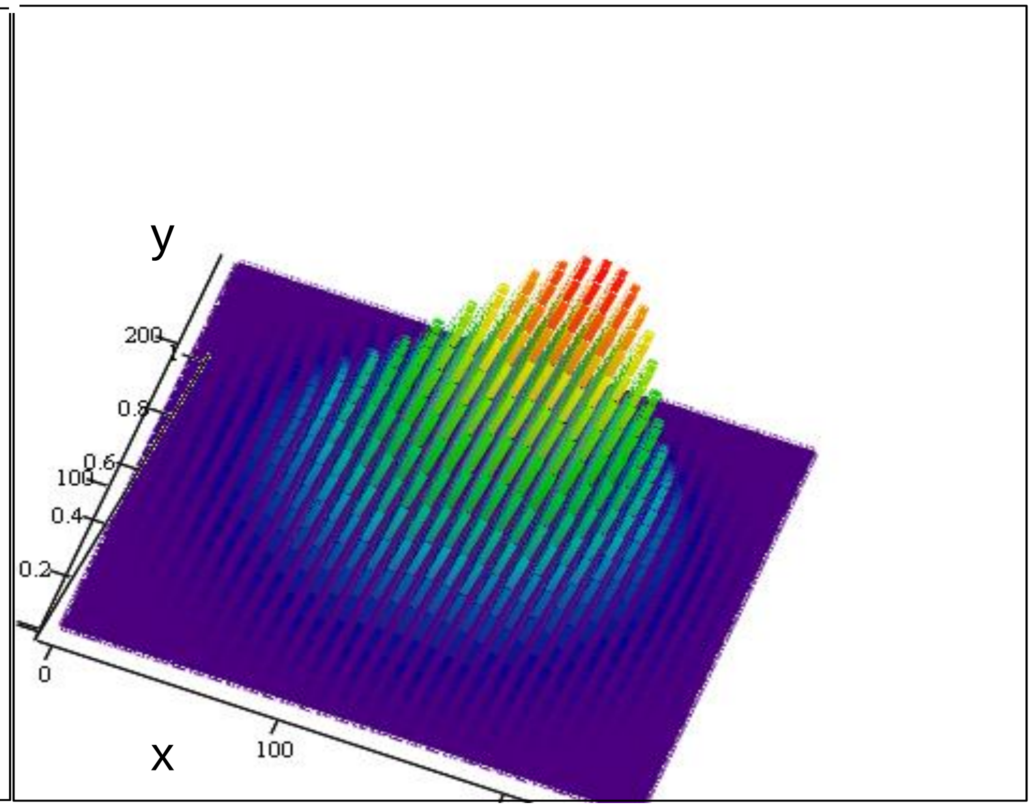


Illustration de l’échantillonnage

Dans le domaine spatial, l’échantillonnage d’une fonction $f(x, y)$ se traduit comme un produit de $f(x, y)$ par la fonction d’échantillonnage (la brosse)

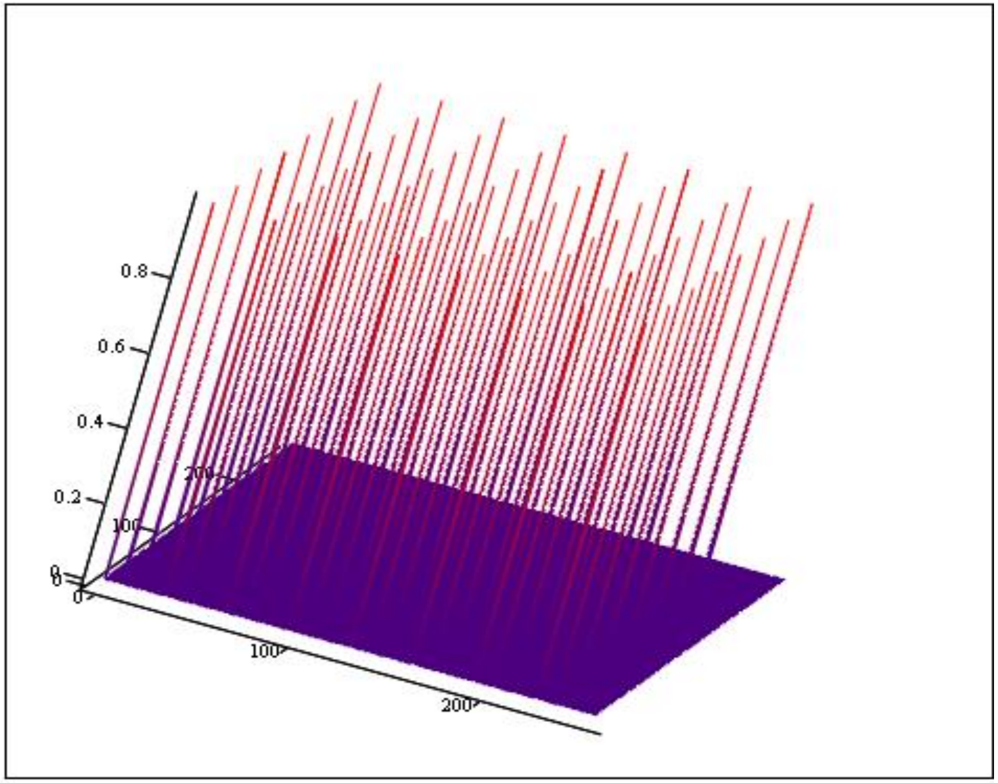




Avant échantillonnage

Après échantillonnage

Brosse régulière d'impulsions



$$b(x,y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y)$$

$$B(u,v) = \frac{1}{\Delta x\, \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{i}{\Delta x}, v - \frac{j}{\Delta y}\right)$$

Interprétation fréquentielle de l’échantillonnage

- Dans le domaine spatial : l’échantillonnage correspond au produit de $f(x, y)$ par la brosse régulière $b(x, y)$:

$$f_e(x, y) = f(x, y) \times b(x, y)$$

- Dans le domaine des fréquences : convolution de $F(u, v)$ et de $B(u, v)$

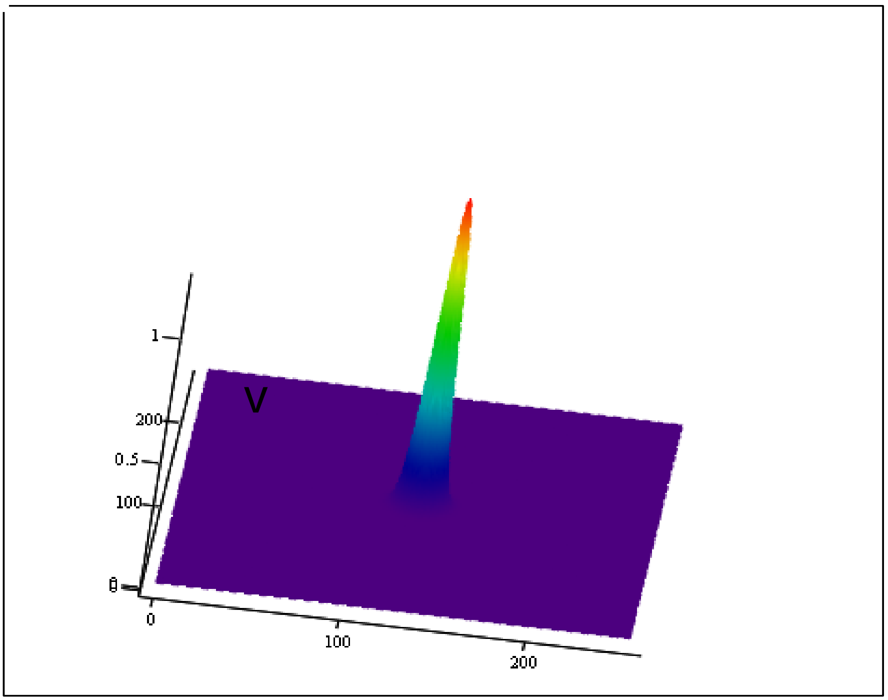
$$F_e(u, v) = F(u, v) * B(u, v)$$

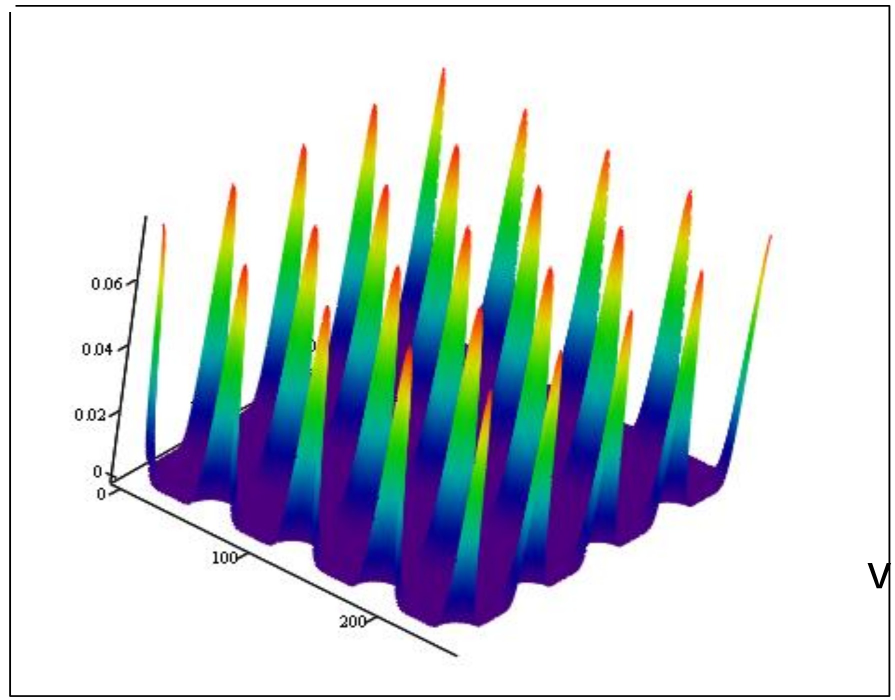
- La transformée de Fourier d’une brosse périodique d’impulsions de Dirac $b(x, y)$ est une brosse d’impulsions de Dirac $B(u, v)$ dans le domaine des fréquences

- Conclusion : la transformée de Fourier de l’image échantillonnée est périodique.

Réplication du spectre

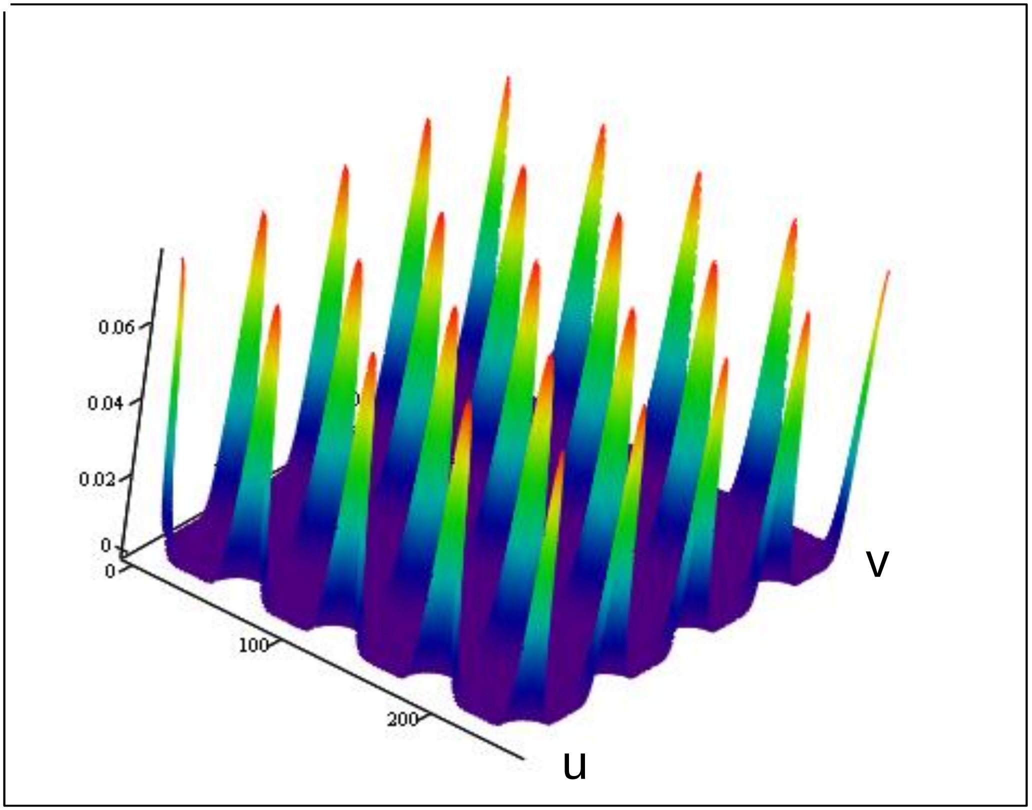
- La transformée de Fourier de la fonction échantillonnée est la convolution de la transformée F(u,v) de f(x,y) par la transformée de Fourier de la brosse qui est elle aussi une brosse
- La convolution par la brosse est la somme des répliques décalées à la position de chacune des impulsions de la brosse.

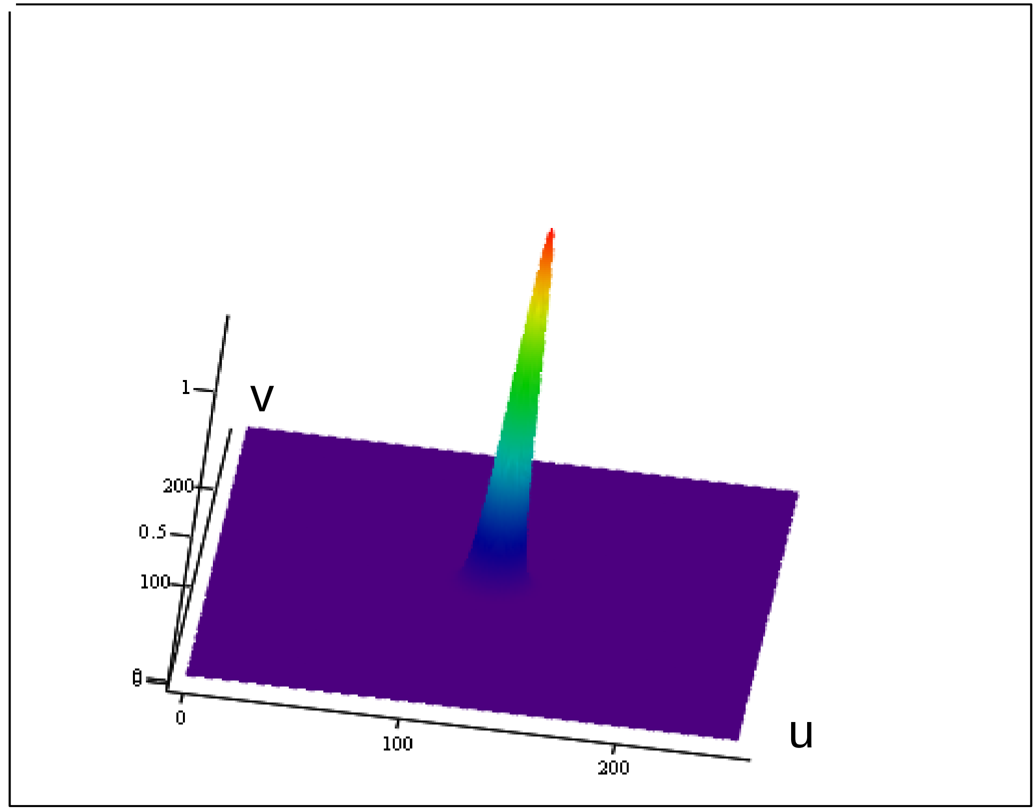




$$F_e(u,v) = \frac{1}{\Delta x\, \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F\left(u - \frac{i}{\Delta x}, v - \frac{j}{\Delta y}\right)$$

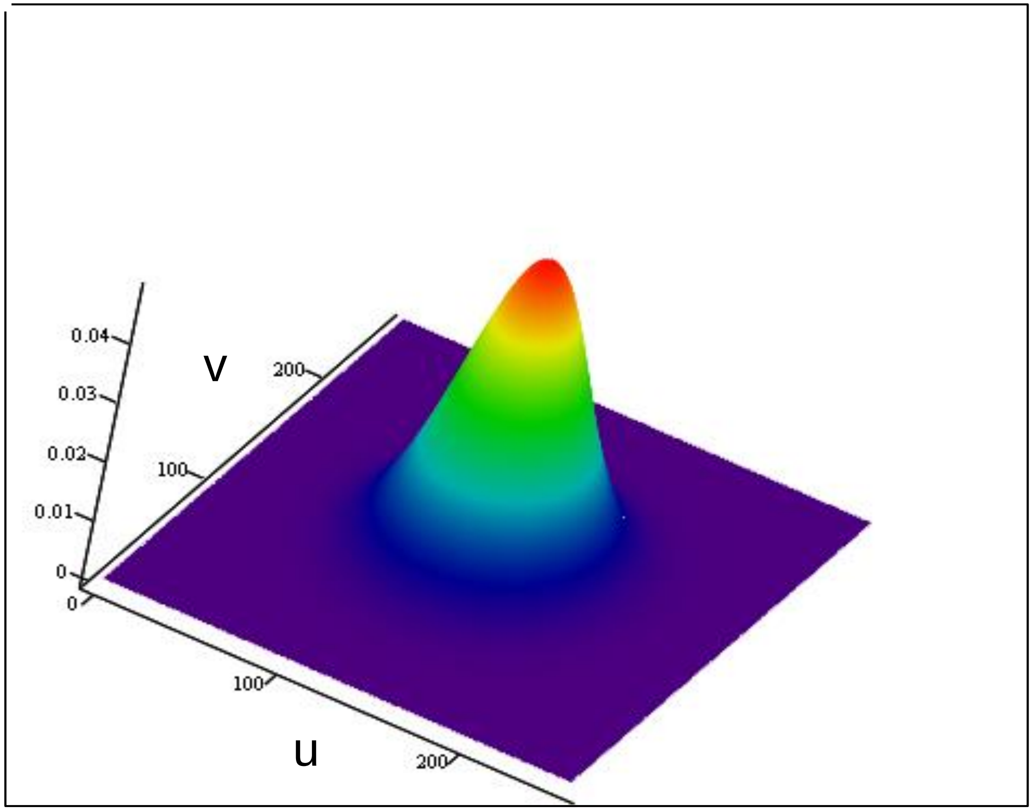
Récupération du spectre

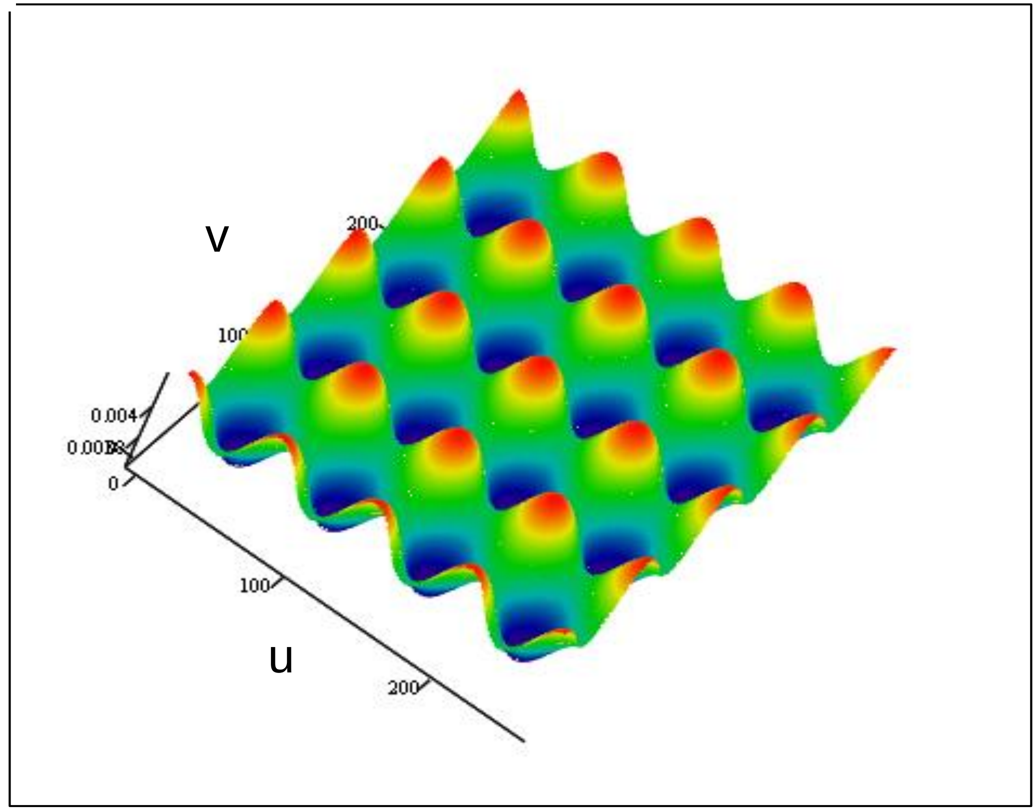




- Retrouver la fonction dans le domaine spatial est équivalent à la retrouver dans le domaine des fréquences
- Il ne faut garder qu'une composante fréquentielle
- Il ne faut pas que les répliques décalées se chevauchent

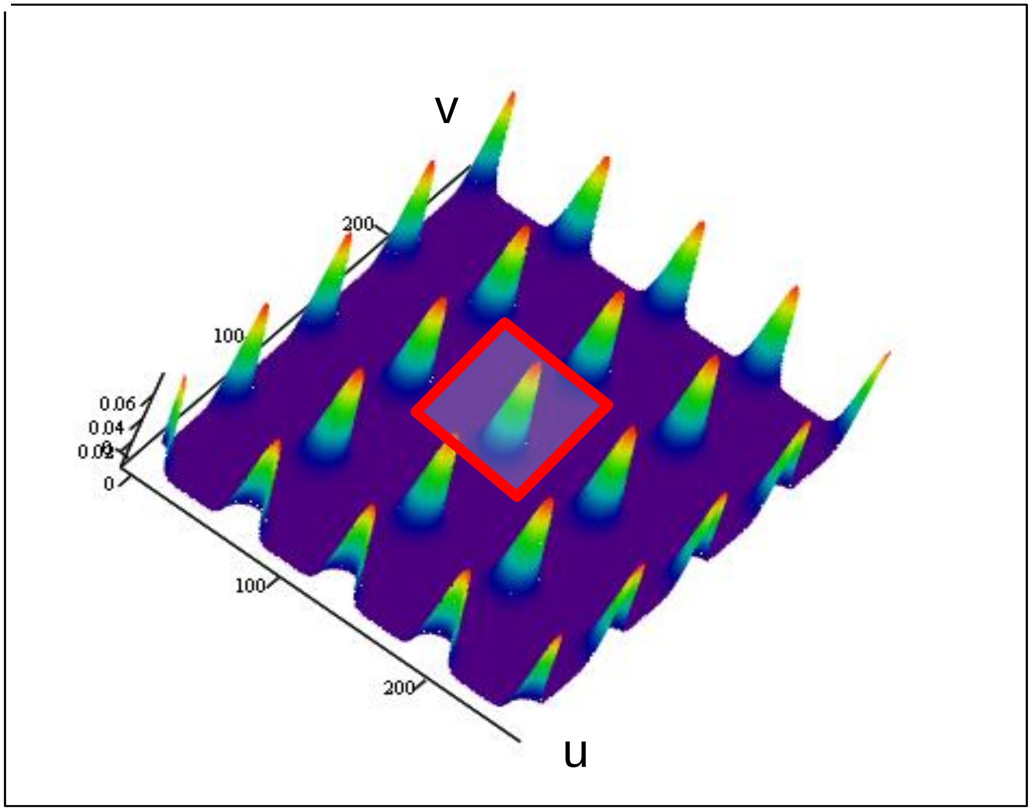
Repliement de spectre

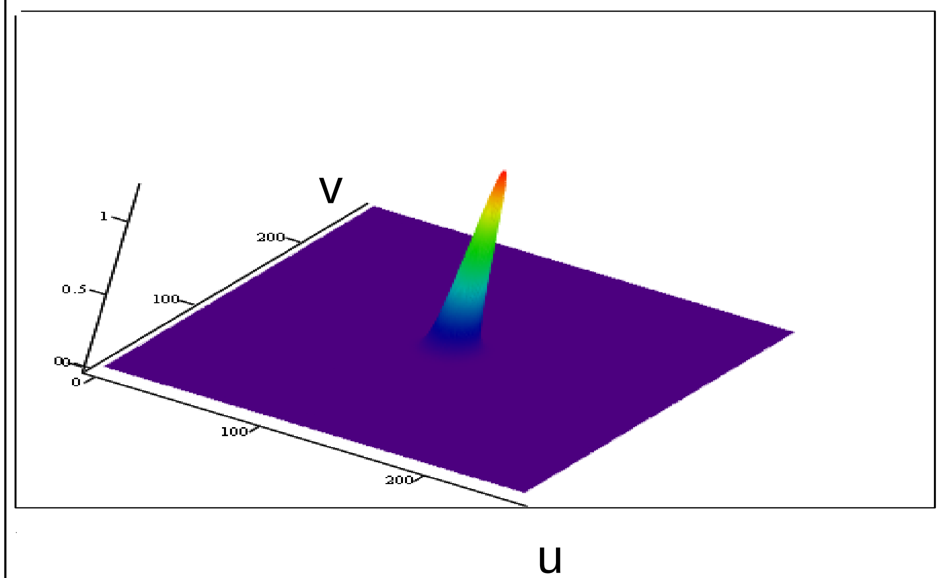




- Ici le pas d'échantillonnage est trop grand et les répliques se chevauchent, il n'est pas possible de retrouver la fonction initiale par une simple sélection.

Filtrage passe-bas

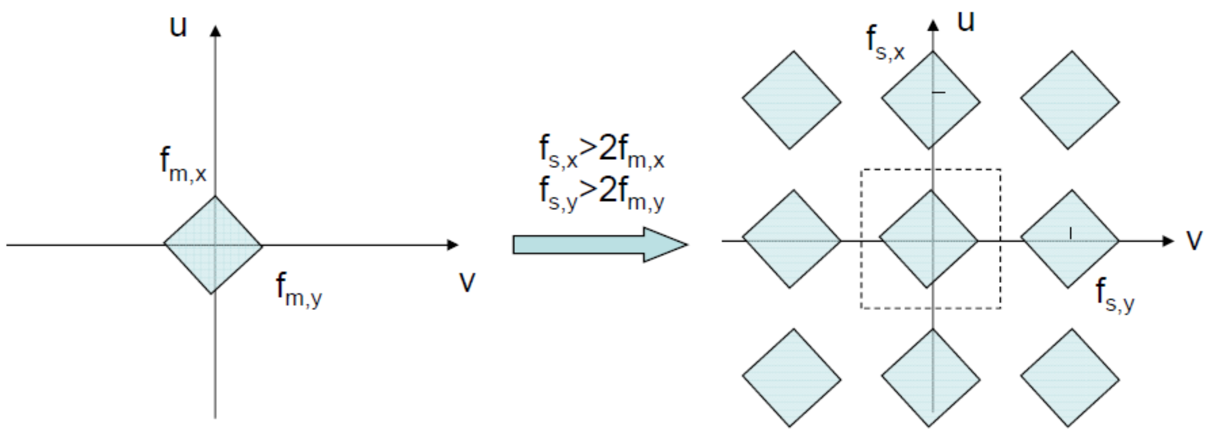




- Sélectionner la réplique = effectuer un filtrage passe bas !
- Remarque : le filtre passe-bas n’est pas parfait (phénomène de Gibbs, etc.)

Reconstruction

- **Théorème de Nyquist :** pour reconstruire l'image à partir de ses échantillons (pixels), il faut que son support spectral soit limité à la moitié de la fréquence d'échantillonnage dans les deux directions u et v.



Spectre original

Spectre échantillonné

- Formule de reconstruction:

$$f(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m,n)\frac{\sin(\pi(x-m))}{\pi(x-m)}\frac{\sin(\pi(y-n))}{\pi(y-n)}$$

$f(m,n)$: échantillons discrets de la fonction $f(x,y)$

TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRETE

Transformée de Fourier discrète

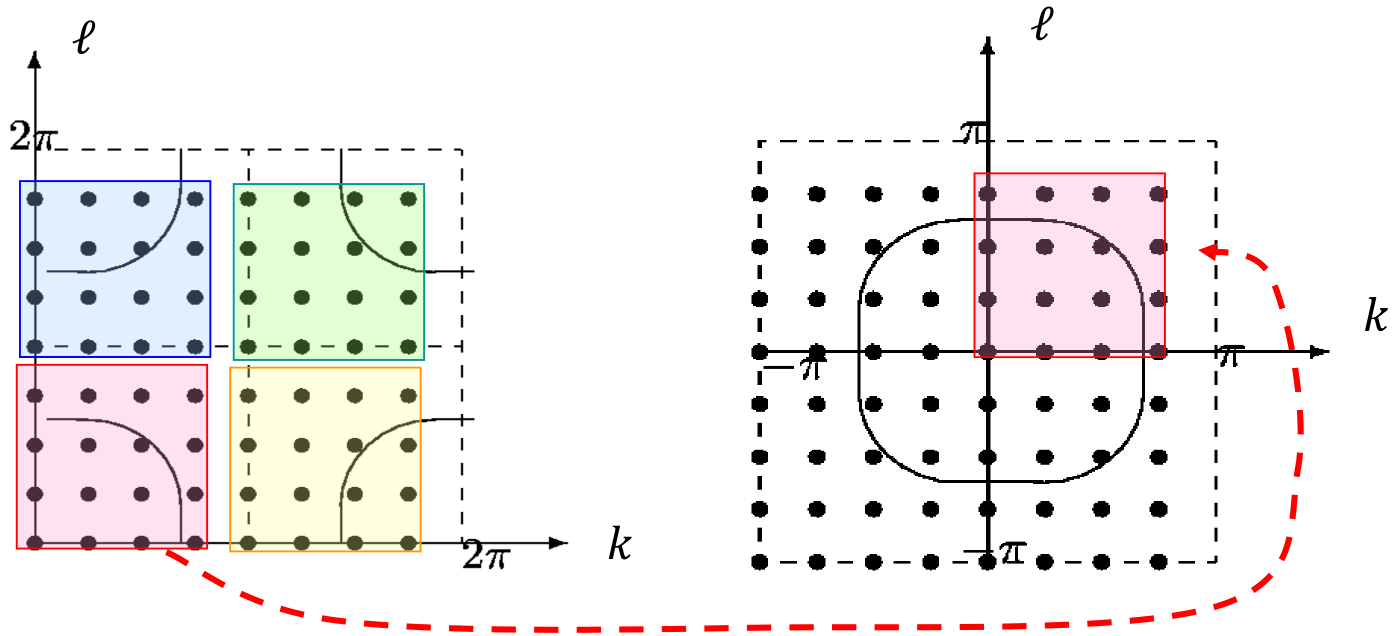
$$F(k,\ell) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp\left(-2\pi j \left(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N}\right)\right)$$

$$f(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} F(k,\ell) \exp\left(2\pi j \left(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N}\right)\right)$$

- Valeurs discrètes (ici entières) de k et de ℓ tout comme de m et de n
- Echantillonnage spatial = périodisation de la transformée de Fourier
- Echantillonnage de la transformée = périodisation dans le domaine spatial

Attention : tout se passe comme si les images et leurs transformées étaient périodiques.

Présentation visuelle du résultat de la transformée de Fourier discrète



Transformée de Fourier Rapide

$$F(k,\ell) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp\left(-2\pi j \left(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N}\right)\right)$$

$$F(k,\ell) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp\left(-2\pi j \left(\frac{\ell n}{N}\right)\right)\right) \exp\left(-2\pi j \left(\frac{km}{M}\right)\right)$$

- On commence par calculer la TF monodimensionnelle de chaque ligne

$$G(m,\ell) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp\left(-2\pi j \left(\frac{\ell n}{N}\right)\right)$$

- Puis la TF monodimensionnelle de chaque colonne de ce tableau intermédiaire

$$F(k,\ell) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m,\ell) \exp\left(-2\pi j \left(\frac{km}{M}\right)\right)$$

Convolution discrète

$$g(m,n) = \sum_{m'} \sum_{n'} h(m-m', n-n')\, f(m',n')$$

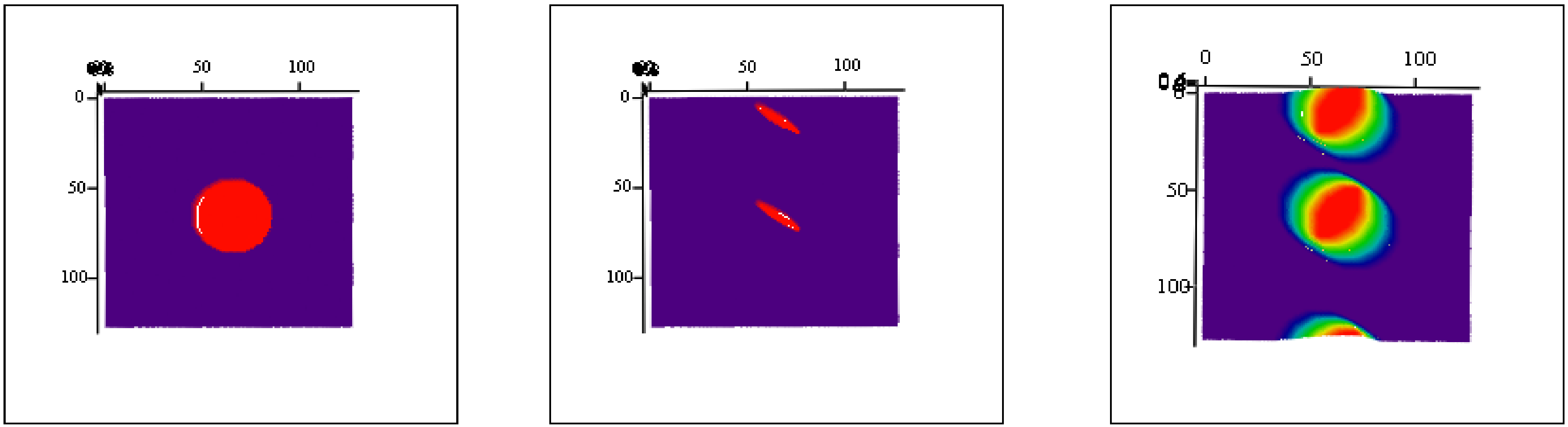
$$\begin{array}{ccc} f(m,n) & \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} h(m,n) \\ H(k,\ell) \end{array}} \longrightarrow & g(m,n) \\ F(k,\ell) & & G(k,\ell) \end{array}$$

IMAGE INITIALE	EFFET	IMAGE MODIFIEE

$$G(k,\ell) = H(k,\ell)F(k,\ell)$$

Illustration

- Lorsqu'on effectue une convolution en utilisant la transformée de Fourier discrète, le résultat est une fonction périodique dont la période est la dimension du signal.



f g $f * g$

Convolution de f et de g

- Le résultat de la convolution qui déborde en haut de l'image se retrouve reproduit en bas du fait de la périodisation implicite

CONCLUSION

Conclusion

- Travailler de façon continue est très important
- Le traitement d’images est fortement basé sur le traitement du signal mais il faut s’habituer à exploiter deux dimensions !