Automatique
2. Réponse fréquentielle

Sylvie Icart
icart@unice.fr

ELEC 3
Polytech'Nice-Sophia

septembre 2018

Réponse harmonique

- si $e(t) = \sin \omega t \, u_h(t)$,
- si les CI son nulles,
- si tous les pôles p_i de $G(p)$ sont distincts,

$$\begin{aligned} S(p) &= G(p)\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ &= \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}{(p-p_1)\ldots(p-p_d)} \, \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\alpha_i}{p-p_i}$$

soit

$$(p^2+\omega^2)S(p) = Ap + B + (p^2+\omega^2)\sum_{i=1}^{d} \frac{\alpha_i}{p-p_i} = \omega G(p)$$

Prenons les valeurs particulières $p = j\omega$ et $p = -j\omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} Aj\omega + B &= \omega\ G(j\omega) \\ -Aj\omega + B &= \omega\ G(-j\omega) \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{2j}\{G(j\omega) - G(-j\omega)\} \\ B &= \frac{\omega}{2}\{G(j\omega) + G(-j\omega)\} \end{aligned} \right.$$

$G(p)$ fraction rationnelle à coefficients réels $\Rightarrow G(-j\omega) = G(j\omega)^*$

$$\begin{aligned} A = \Im(G(j\omega)) = |G(j\omega)|\sin(Arg(G(j\omega)) \\ B = \omega\Re(G(j\omega)) = \omega|G(j\omega)|\cos(Arg(G(j\omega)) \end{aligned}$$

$$S(p) = |G(j\omega)|\sin(Arg(G(j\omega))\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$+|G(j\omega)|\cos(Arg(G(j\omega))\frac{\omega}{p^2+\omega^2} + \sum_{i=1}^{d}\frac{\alpha_i}{p-p_i}$$

Par transformée de Laplace inverse :

$$s(t) = |G(j\omega)| \left\{ \sin(Arg(G(j\omega)) \cos \omega t + \cos(Arg(G(j\omega)) \sin \omega t \right\} + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e^{p_i t}$$

Système stable : $\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e^{p_i t} = 0$, d'où :

$$s(t) \underset{\infty}{\sim} |G(j\omega)| \sin(\omega t + Arg(G(j\omega)))$$

- si pôles $G(p)$ multiples : terme $\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{k_{i,l}}{(p-p_i)^l}$

Système stable : $lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{m_i} \frac{k_{i,l}}{(l-1)!} \quad t^{l-1} e^{p_i t} = 0$

$$s(t) \underset{\infty}{\sim} |G(j\omega)| \sin(\omega t + Arg(G(j\omega)))$$

$G(j\omega)$: Transmittance isochrone du système

$G(j\omega)$: Transmittance isochrone du système

$$s(t) \underset{\infty}{\sim} |G(j\omega)| \sin(\omega t + Arg(G(j\omega)))$$

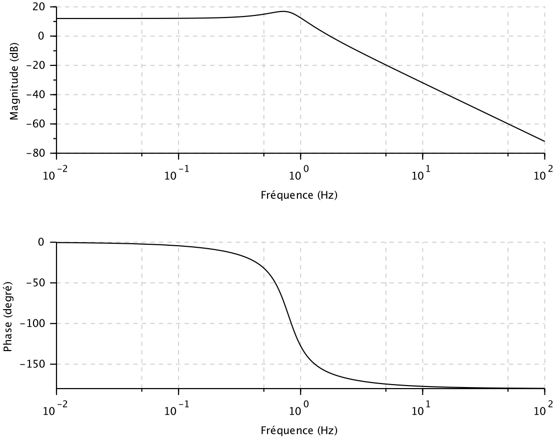
La sortie en régime permanent est un signal sinusoïdal de même pulsation que le signal d'entrée mais amplifié ou atténué (suivant ω) et déphasé.

NB : équation vraie uniquement en régime permanent pour un système stable !

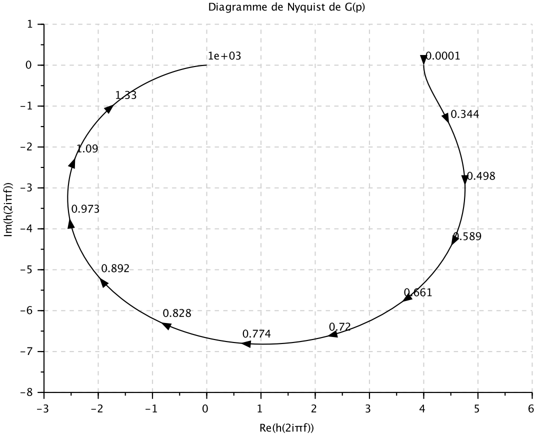
Réponse fréquentielle

Etude de $G(j\omega)$ en fonction de ω (ou $f = \frac{\omega}{2\pi}$).

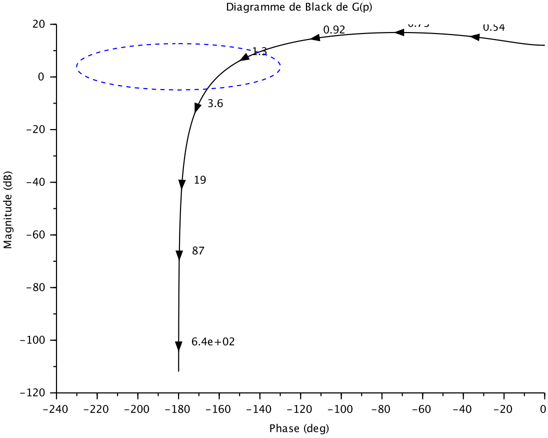
- plan de Bode : on trace séparément le module en dB et l'argument en fonction de la pulsation (fréquence), échelle semi-log.



- plan de Nyquist : en abscisse la partie réelle et en ordonnée la partie imaginaire (courbe paramétrée par ω).



- plan de Black : en abscisse l'argument et en ordonnée le module exprimé en dB (courbe paramétrée par ω).



Gain statique

lorsqu'il existe...

$$\lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)| = K$$

- si l'entrée est une échelon (réponse indicielle)

$$\lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pG(p)E(p) = G(0)$$

  valeur de la réponse indicielle en régime permanent

- si l'entrée est une sinusoïde de "très basse" fréquence
  - $\rightarrow$ dans Bode : asymptote (pourquoi ?)
  - $\rightarrow$ dans Black : ordonnée lorsque $\omega = 0$ (argument=0 car $K \in \mathbb{R}^+$)
  - $\rightarrow$ dans Nyquist : départ du lieu, sur l'axe réel $G(0) \in \mathbb{R}^+$

Système passe-bas : laisse passer les basses fréquences et pas les hautes.

$$\lim_{\omega \to \infty} |G(j\omega)| = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |G(j\omega)|_{\text{dB}} = -\infty$$

Pour un système passe-bas, pulsation de coupure ω_c

$$|G(j\omega_c)| = \frac{|G(0)|}{\sqrt{2}}$$

pulsation de coupure à -3dB du gain statique : $|G(j\omega_c)|_{\text{dB}} = |G(0)|_{\text{dB}} - 3$

Fréquence de résonance

Pour un système passe bas, fréquence pour laquelle $|G(j\omega)|$ est maximum.

$\rightarrow$ dans Bode : abscisse correspondant au maximum de la courbe de gain

$\rightarrow$ dans Black : fréquence correspondant au gain maximum

$\rightarrow$ dans Nyquist : fréquence correspondant au point le plus éloigné de O (origine plan de Nyquist)

Identification d'un sytème à l'aide de la réponse harmonique

Si on ne connaît pas l'équation (modèle) du système linéaire stable

- on excite le système (stable !) par une sinusoïde,
- on attend le régime permanent,
- on mesure le gain et le déphasage entrée/sortie.

On obtient $G(p)$ par identification et non pas à partir de l'équation différentielle.