Première partie
Espace probabilisé. Probabilité conditionnelle.

1 Espace probabilisable.

1.1 Univers et tribu.

Une *expérience aléatoire* est une expérience donnant à observer un résultat parmi des résultats possibles.
On admet une incertitude sur le résultat et l'on cherche à la mesurer.

Définition 1.1. Etant donné une expérience aléatoire, on appelle :
- ⋆ *univers de l'expérience aléatoire* l'ensemble **non vide** des résultats possibles. Notons U cet ensemble.
- ⋆ *éventualité de l'expérience aléatoire* tout élément de l'univers : $e \in U$.

Exemple 1.1. Quelques expériences aléatoires et leur modèle d'urne.
- ⋆ **Lancer d'une pièce de monnaie.** L'univers U a deux éventualités : $pile, face$.
  On peut modéliser en codant les éventualités par un nombre : par exemple $\begin{cases} 0 \mapsto face \\ 1 \mapsto pile \end{cases}$: $\boxed{U = \{0,1\}}$
  Modèle d'urne : tirer 1 fois dans une urne contenant 2 boules numérotées 0 et 1.
- ⋆ **Tirer une carte dans un jeu ordinaire.** L'univers U a 32 éventualités : $7^{\heartsuit}, 7^{\diamondsuit}, \ldots, as^{\spadesuit}$.
  On peut modéliser en codant les éventualités par le couple de nombres : $(valeur, couleur)$: $\boxed{U = [\![1,8]\!] \times [\![1,4]\!]}$
  ce qui facilite la description des événements : $\boxed{U = \{(v,c), v \in [\![1,8]\!],\ c \in [\![1,4]\!]\} \ = \ [\![1,8]\!] \times [\![1,4]\!]}$
  Modèle d'urne : tirer 1 fois dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4 puis 1 fois dans une urne contenant 8 boules numérotées de 1 à 8.
- ⋆ **Former 6 couples mixtes simultanément à partir de 6 filles et 6 garçons.**
  L'univers U a $6!$ éventualités, chaque éventualité pouvant être modélisée par une permutation de $[\![1,6]\!]$.
  Modèle d'urne : tirer 6 fois sans remise dans une urne contenant 6 boules numérotées de 1 à 6.

Définition 1.2. Soit un ensemble U, non vide. Soit $\mathcal{T}$, une partie de $\mathcal{P}(U)$.
$\mathcal{T}$ est appelée *tribu* ou *algèbre de Boole* sur U si et seulement si :
- ⋆ $\mathcal{T}$ est non vide ;
- ⋆ $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{P}(U), (A \in \mathcal{T}) \Rightarrow (\overline{A} \in \mathcal{T})$;
- ⋆ $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie ou dénombrable : $\forall I \subset \mathbb{N}, ((A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}) \Rightarrow (\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{T})$.

Le couple $(U, \mathcal{T})$ est appelé *espace probabilisable*.
Tout élément E de $\mathcal{T}$ est appelé *évènement* de l'espace $(U, \mathcal{T})$.

Propriété 1.1. Propriétés d'une tribu. Soit $(U, \mathcal{T})$ un espace probabilisable (admis voir 2e année).
(1) La partie pleine U et la partie vide $\emptyset$ sont des évènements : $U \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$;
(2) $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie ou dénombrable : $\forall I \subset \mathbb{N}, ((A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}) \Rightarrow (\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T})$;
(3) $\mathcal{T}$ est stable par différence ou différence symétrique : $\forall A, B \in \mathcal{T}, (A \setminus B) \in \mathcal{T}, (A \Delta B) \in \mathcal{T}$.

Définition 1.3. Soit $(U,\mathcal{T})$ un espace probabilisable.
$(U,\mathcal{T})$ est un *schéma de Bernoulli* si et seulement si il existe $E \in \mathcal{P}(U)$, une partie de U, distincte de U et $\emptyset$ telle que $\mathcal{T}$, la tribu couplée à U, soit définie par quatre éléments :

$$\mathcal{T} = \left\{U, \emptyset, E, \overline{E}\right\}$$

Exemple 1.2. Schémas de Bernoulli de référence.
⋆ Lors du lancer d'une pièce de monnaie, on étudie l'événement E : *obtenir un pile.*
Dans cet exemple, les événements propres- c-à-d distincts de U et de $\emptyset$, sont élémentaires :

$$E = \{pile\} \text{ et } \overline{E} = \{face\}$$

⋆ Lors du tirage d'une carte dans un jeu ordinaire, on étudie l'événement E : *tirer un as* :

$$E = \{as^{\heartsuit}, as^{\diamondsuit}, as^{\clubsuit}, as^{\spadesuit}\} \text{ et } \overline{E} = U \setminus E$$

⋆ Lors du tirage d'une boule dans une urne contenant k boules blanches parmi n $(0 < k < n)$, on étudie l'événement E : *obtenir une boule blanche* :

$$E = [\![1, k]\!] \text{ et } \overline{E} = [\![k+1, n]\!]$$

Exemple 1.3. Soit un espace probabilisable $(U,\mathcal{T})$.
Exprimons en fonction de $A,\ B,\ C \in \mathcal{T}$ les événements suivants (plusieurs expressions équivalentes possibles) :

(a) *Aucun des événements A, B, C n'est réalisé* :

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

(b) *Au moins deux des événements A, B, C sont réalisés*

$$\underbrace{(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)}_{\text{recouvrement}} = \underbrace{(A \cap B) \cap \bar{C} \ \sqcup \ (B \cap C) \cap \bar{A} \ \sqcup \ (C \cap A) \cap \bar{B} \ \sqcup \ (A \cap B \cap C)}_{\text{partition}}$$

2 Espace probabilisé

Définition 2.1. Soit $(U,\mathcal{T})$, un espace probabilisable. Soit une application $p \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & p(A) \end{array} \right.$.
L'application p est une *probabilité sur* $(U,\mathcal{T})$ si et seulement si :

- ⋆ p est positive : l'image par p de tout événement est positive :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{T} \qquad p(A) \geq 0}$$

- ⋆ p vérifie le principe de totalité : $\boxed{p(U) = 1}$ On dit aussi que p est une mesure de masse totale égale à 1.
- ⋆ p est additive :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{T} \qquad A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

c-à-d : la probabilité de l'union d'une famille d'évènements disjoints deux à deux est la somme de leur probabilités.

Le triplet $(U,\mathcal{T}, p)$ est alors appelé *espace probabilisé.*

Théorème 2.1. Soit $(U,\mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé (admis voir 2e année).
La probabilité p vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\boxed{\forall A \in \mathcal{T}, p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

(2) $\boxed{p(\emptyset) = 0}$

(3) $\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{T}, (A \subset B) \Rightarrow (p(A) \leq p(B))}$
c-à-d : p est croissante pour les relations d'ordre $\subset$ et $\leq$.

Exercice 2.1. Soit $(U, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.
Soient $A, B \in \mathcal{T}$ tels que : $0 < p(B) \leq p(A)$.
Ordonner si possible les rapports suivants. Justifier.

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} \qquad \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad \sqrt{\frac{p(A)}{p(B)}} \qquad \frac{p(A)}{p(B)} \qquad \sqrt{\frac{p(B)}{p(A)}} \qquad \frac{p(B)}{p(A)}$$

CORRIGÉ
On a les relations d'ordre évidentes suivantes, utilisant la condition suffisante :

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} \leq \underbrace{\frac{p(B)}{p(A)}}_{\leq 1} \leq \sqrt{\frac{p(B)}{p(A)}} \leq 1 \leq \sqrt{\frac{p(A)}{p(B)}} \leq \frac{p(A)}{p(B)} \quad \text{et} \quad \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \leq \underbrace{\frac{p(A \cap B)}{p(B)}}_{\leq 1}$$

La question revient à ordonner, si c'est possible, $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ par rapport à $\frac{p(B)}{p(A)}$ et $\sqrt{\frac{p(B)}{p(A)}}$.
Considérons l'expérience du lancer d'un dé ordinaire à 6 faces.
L'univers est : $U = [\![1, 6]\!]$. L'espace $(U, \mathcal{P}(U))$ est uniformément probabilisé par p.
Soient A, B, C des événements :

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{1, 2, 5\} \quad C = \{1\}$$

$$P(A) = \frac{4}{6} \qquad p(B) = \frac{3}{6} \qquad p(C) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2}{3} \qquad \frac{p(B)}{p(A)} = \frac{3}{4} \qquad \text{Dance cas : } \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \leq \frac{p(B)}{p(A)}$$

$$\frac{p(A \cap C)}{p(C)} = 1 \qquad \frac{p(C)}{p(A)} = \frac{1}{4} \qquad \text{Dance cas : } \frac{p(A \cap C)}{p(C)} \geq \frac{p(C)}{p(A)}$$

Conclusion : connaître $p(B) < p(A)$ n'est pas suffisant pour pouvoir ordonner le rapport $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ parmi $\frac{p(B)}{p(A)}$ et $\sqrt{\frac{p(B)}{p(A)}}$.

$$\boxed{\frac{p(A \cap B)}{p(A)} \leq \frac{p(B)}{p(A)} \leq \sqrt{\frac{p(B)}{p(A)}} \leq 1 \leq \sqrt{\frac{p(A)}{p(B)}} \leq \frac{p(A)}{p(B)}}$$

Application à un test de dépistage de maladie.

Sur une population de 100 habitants, on a les résultats suivants concernant le fait d'être atteint par une maladie (M) et la réponse positive ou non (T_+) à un test de dépistage :

	T_+	T_-
M	9	1
$\bar{M}$	9	81

U étant la population et $(U, \mathcal{P}(U), p)$ l'espace uniformément probabilisé. On vérifie :

$$\underbrace{\frac{p(M \cap T_+)}{p(T_+)}}_{\frac{9}{18}} \leq \underbrace{\frac{p(M)}{p(T_+)}}_{\frac{10}{18}} \qquad \underbrace{\frac{p(\bar{M} \cap T_+)}{p(\bar{M})}}_{\frac{9}{90}} \leq \underbrace{\frac{p(T_+)}{p(\bar{M})}}_{\frac{18}{90}}$$

L'intérêt est que les probabilités marginales fournissent des majorants des probabilités conditionnelles.
FIN du CORRIGÉ

Propriété 2.1. Convergence monotone (admis voir 2e année).
Soit $(U, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé.

(1) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$,une suite de $\mathcal{T}$ croissante pour l'inclusion.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k)}$$

(2) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de $\mathcal{T}$ décroissante pour l'inclusion.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p(A_n) = p(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k)}$$

(3) Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$, un n-uplet quelconque de $\mathcal{T}$.

$$\boxed{p(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}((-1)^{k+1} \sum_{i_j<i_{j+1}} p(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}))}$$

Cette dernière propriété, dite *crible de Poincaré*, généralise le calcul de la probabilité de l'union de deux à n évènements.

Exemple 2.1.

⋆ Expérience : 4 personnes répondent à 6 QCM.
Pour chaque question, les choix possibles sont codés de 1 à 5 et une seule réponse est autorisée.
Les personnes répondent indépendamment les unes des autres.

⋆ Univers :

$$U = \mathcal{M}_{6,4}([\![1,5]\!])$$

Étant donné une matrice 6×4, la k^e colonne donne les 6 réponses fournies par la personne n$\check{r}k$.
Une colonne correspond à une application de $[\![1,6]\!]$ dans $[\![1,5]\!]$.
Il y a donc 5 applications constantes sur les 5^6 possibles.

⋆ Espace probabilisé :

$$\left(U,\ \underbrace{\mathcal{P}(U)}_{\text{tribu maximale}},\ \underbrace{p \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(U) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(U)} \end{array}\right.}_{\text{probabilité uniforme}}\right)$$

⋆ Évènement étudié :

E : Au moins une personne coche toujours le même code.

⋆ Pour calculer cet évènement (en tant qu'ensemble) et sa probabilité, on peut procéder selon trois stratégies :

⋆ **par passage au complémentaire (partition de U).**
Soit $\bar{E}$: *Chaque personne coche au moins deux codes.* Alors $\boxed{E = U \setminus \bar{E}}$

$$\begin{aligned} p(E) &= 1 - p(\bar{E}) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{5^5}\right)^4 \\ &\sim \frac{4}{5^5} \end{aligned}$$

⋆ **par une partition de E (union disjointe)**.
On pose : F_k : *Exactement k personnes ne cochent qu'un seul code.* Alors $\boxed{E = F_1 \sqcup F_2 \sqcup F_3 \sqcup F_4}$

$$\begin{aligned} p(E) &= p(F_1) + p(F_2) + p(F_3) + p(F_4) && \text{par additivité de } p \\ &= \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \left(\frac{1}{5^5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5^5}\right)^{4-k} && \text{loi binomiale de paramètres } (4, \frac{1}{5^5}) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{5^5}\right)^4 && \text{formule du binôme} \end{aligned}$$

⋆ **avec un crible de E (union non disjointe).**
On pose : E_k : *La personne n°k ne coche qu'un seul code.* Alors : $\boxed{E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4}$

$$\begin{aligned}
p(E) &= p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + p(E_4) \\
&\quad -p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_1 \cap E_4) - p(E_2 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_4) - p(E_3 \cap E_4) \\
&\quad +p(E_2 \cap E_3 \cap E_4) + p(E_1 \cap E_3 \cap E_4) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_4) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\
&\quad -p(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) \\
&= 4 \times \frac{1}{5^5} - 6 \times \frac{1}{5^{10}} + 4 \times \frac{1}{5^{15}} - \frac{1}{5^{20}} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{5^5}\right)^4
\end{aligned}$$

3 Système complet d'évènements

Théorème 3.1. : soit n, un entier naturel non nul et U, un ensemble non vide.
Soit $\{A_k,\ k \in [\![1, n]\!]\}$ une partition de U. Soit $(p_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une suite de $[0, 1]$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.
Alors :

- ⋆ la partition $\{A_k, 1 \leq k \leq n\}$ engendre une tribu $\mathcal{T}$ de U
- ⋆ l'application $p \left| \begin{array}{lll} \mathcal{T} & \to & \mathbb{R} \\ A_k & \mapsto & p_k \quad (k \in [\![1, n]\!]) \end{array}\right.$ définit un probabilité sur $(U, \mathcal{T})$.

On dit que $\{A_k, 1 \leq k \leq n\}$ est un *système complet d'évènements de l'espace* $(U, \mathcal{T}, p)$.

Exemple 3.1. Soit $U = \{e_k,\ \ k \in [\![1, n]\!]\}$, un ensemble fini.
La suite des singletons $(\{e_k\})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une partition de U.
Si on a $(p_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, une suite de $[0, 1]$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ alors une probabilité p peut être définie ainsi :

$$\forall A \in \mathcal{P}(U), \quad p(A) = \sum_{e_k \in A} p(\{e_k\}) = \sum_{e_k \in A} p_k.$$

Autrement dit, si l'univers d'un espace probabilisé est fini, on peut toujours prendre le système d'évènements élémentaires comme système complet.
La tribu engendrée par le système des évènements élémentaires est maximale pour la relation d'inclusion et égale à $\mathcal{P}(U)$.

Définition 3.1. : soit $U = \{e_k, k \in [\![1, n]\!]\}$, un ensemble fini (non vide) à n éléments.
Soit $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
L'application p est dite *uniforme* si est seulement si les évènements élémentaires sont équiprobables.

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad p(\{e_k\}) = \frac{1}{n}$$

Remarque 3.1. Si U est fini et si p est uniforme sur $\mathcal{P}(U)$ alors : $\forall A \in \mathcal{P}(U)\ \ p(A) = \dfrac{card(A)}{n}$.
c-à-d : si p est uniforme alors l'image par p d'un événement est proportionnelle au cardinal.

Exemple 3.2. Expérience : course équestre à 4 chevaux au départ.

- ⋆ Univers : $U = \{1, 2, 3, 4\}$
- ⋆ Tribu : $\mathcal{T} = \mathcal{P}(U)$
- ⋆ Probabilités :

On ne sait rien des chevaux.

$$\forall k \in [\![1, 4]\!], \quad p(\{k\}) = \frac{1}{4}$$

On sait que le cheval 1 est convalescent.

$$p(\{1\}) = \frac{1}{6} \quad \forall k \in [\![2, 4]\!], \ \ p(\{k\}) = \frac{5}{18}$$

4 Probabilité conditionnelle.

Définition 4.1. Soit $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $p(A)$ est non nulle.
L'application $p_A \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & [0,1] \\ X & \mapsto & \dfrac{p(X \cap A)}{p(A)} \end{array} \right.$ est appelée *probabilité conditionnelle à* A (*probabilité sachant* A).
Le triplet $(U, \mathcal{T}, p_A)$ est un nouvel espace probabilisé.

Démonstration. Vérifions que p_A est une probabilité sur $(U, \mathcal{T})$.

$$p_A \left| \begin{array}{cc} \mathcal{T} & \to \mathbb{R} \\ E & \mapsto \dfrac{p(E \cap A)}{p(A)} \end{array} \right.$$

- ⋆ Vérifions que p_A est positive.

  Soit $E \in \mathcal{T}$ $\quad p$ est positive. Donc $p_A(E) = \dfrac{p(E \cap A)}{p(A)} \geq 0$.

- ⋆ Vérifions que p_A est totale.

$$A \subset U \text{ donc } U \cap A = A. \quad \text{Donc} \quad p_A(U) = \frac{p(U \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$$

- ⋆ Vérifions que p_A est additive.

  Soient $E, F \in \mathcal{T}$ / $F \cap E = \emptyset$. Montrons : $p_A(F \cup E) = p_A(F) + p_A(E)$

$$\begin{array}{rcll} p_A(F \cup E) & = & \dfrac{p((F \cup E) \cap A))}{p(A)} & \text{(définition de } p_A\text{)} \\ & = & & \\ & = & \dfrac{p((F \cap A) \sqcup (E \cap A))}{p(A)} & (\cap \text{ distributif sur } \cup) \\ & = & \dfrac{p(F \cap A) + p(E \cap A)}{p(A)} & (p \text{ additive}) \\ & = & \dfrac{p(F \cap A)}{p(A)} + \dfrac{p(E \cap A)}{p(A)} & (\times \text{ distributif sur } +) \\ & = & p_A(F \cup E) = p_A(F) + p_A(E) & \end{array}$$

- ⋆ Conclusion.

  p_A est positive, totale et additive c-à-d. p_A est une probabilité sur $(U, \mathcal{T})$.

□

Définition 4.2. Indépendance de deux évènements.
Soit $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Soient A et X, deux évènements. On suppose que $p(A)$ est **non nulle**.
L'évènement X est indépendant de l'évènement A si et seulement si $p_A(X) = p(X)$.

Théorème 4.1. Soit $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Soient A et X, deux évènements.

$$p(X \cap A) = p(X) \times p(A) \quad \Leftrightarrow \quad (p(A) = 0 \text{ ou } p_A(X) = p(X))$$

Théorème 4.2. Formule de Bayes
Soit $(U, \mathcal{T}, p)$, un espace probabilisé.
Soit $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$, un système complet d'évènements tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!], p(A_k) \neq 0$.
Soit $X \in \mathcal{T}$, un évènement tel que : $p(X) \neq 0$.

$$\forall j \in \{1, \cdots, n\}, p_X(A_j) = \frac{p_{A_j}(X) p(A_j)}{\sum_{k=1}^{n} p_{A_k}(X) p(A_k)}$$

Exemple 4.1.

- ⋆ Expérience : on lance n fois un dé choisi au hasard parmi 100 dont 25 sont truqués.
  Un dé truqué est codé 1 et un dé ordinaire est codé 0.
- ⋆ Univers : $U = \{0,1\} \times [\![1,6]\!]^n$. Un résultat est un couple :
  - ⋆ la première composante indique si le dé est truqué ou non ;
  - ⋆ la seconde composante est le $n-$uplet des lancers.
- ⋆ Tribu : $\mathcal{T} =< \ A, \ G >$ avec :
  - ⋆ $A = \{(1, u_n), u_n \in [\![1,6]\!]^n\}$, l'ensemble des résultats d'un dé truqué.
  - ⋆ $G = \{(d, \underbrace{(6, \ldots 6)}_{n\ fois}), d \in \{0,1\}\}$ l'ensemble des résultats gagnants.
- ⋆ Espace probabilisé : on connaît la probabilité des événements générateurs de $\mathcal{T}$.

$$p : \mathcal{T} \to \mathbb{R} \text{ telle que } \qquad p(A) = \frac{1}{4} \qquad p_A(G) = \frac{1}{10^n} \qquad p_{\overline{A}}(G) = \frac{1}{6^n}$$

- ⋆ Évènement étudié : A *sachant* G c-à-d «avoir tiré un dé truqué sachant qu'on a gagné ».
  Déterminer :
  - ⋆ $p_n = p_G(A)$
  - ⋆ $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ si c'est possible.

CORRIGÉ

- ⋆ Déterminons p_n.

$$\begin{aligned}
p_n &= p_G(A) \\
&= \frac{p(G \cap A)}{p(G)} \\
&= \frac{p(G \cap A)}{p(G \cap A) + p(G \cap \bar{A})} \\
&= \frac{p_A(G)p(A)}{p_A(G)p(A) + p_{\bar{A}}(G)p(\bar{A})} \\
&= \frac{\dfrac{1}{4 \times 10^n}}{\dfrac{1}{4 \times 10^n} + \dfrac{1}{6 \times 6^n}} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n}
\end{aligned}$$

- ⋆ $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ car $\dfrac{5}{3} > 1$

FIN du CORRIGÉ