Traitement Numerique du Signal

Luc Deneire

1 TD 1 : Opérations sur les signaux continus

1.1 Tracés de signaux

1. Faites un tracé précis des signaux suivants :

   - $x(t) = u(t+1) - u(t), \qquad \dfrac{d}{dt}x(t), \qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
   - $y(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t-2) + \delta(t+2)dt$
   - $x(t) = e^{-t}u(t), \qquad \dfrac{d}{dt}x(t), \qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ Rappelez vous de la dérivée d'un produit.
   - $x(t) = \frac{1}{t}[\delta(t-1) + \delta(t+2)], \qquad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
   - $x(t) = r(t) - 2r(t-1) + 2r(t-3) - r(t-4),, \qquad \dfrac{d}{dt}x(t), \qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ où $r(t) := tu(t)$ est la fonction rampe.
     Donnez également l'expression analytique des dérivée et intégrale.
   - $y(t) = x(3-2t)$, où $x(t) = 2^{-t}u(t-1)$

2. Faites le tracé des signaux $f(t)$, $g(t)$ et de leur produit $f(t).g(t)$.

   - $f(t) = u(t+4) - u(t-4), \qquad g(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-3k)$
   - $f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \qquad g(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$ Ecrivez le produit sous forme analytique simple.
   - $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \qquad g(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$ Ecrivez le produit sous forme analytique simple.
   - $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \qquad g(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k-1)$ Ecrivez le produit sous forme analytique simple.
   - $f(t) = \left(\frac{1}{2}t\right)^{|t|}, \qquad g(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$

- $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - 0.5k), \qquad g(t) = 2^{-|t|}$
- $f(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2), \qquad g(t) = tu(t)$

3. Autocorrélation et intercorrélation

   - Soit $x(t) = \Pi_T(t)$, déterminez $R_{xx}(\tau)$. Mettez les propriétés de l'autocorrélation en évidence.

4. Déterminez si les signaux suivants sont à énergie finie ou à puissance finie, calculez la grandeur d'intérêt.

   (a) $x(t) = A\Pi_T(t)$,
   (b) $x(t) = A\sin(2\pi ft)$,
   (c) $x(t) = u(t)$,
   (d) $x(t) = Ae^{-at}, a > 0$,
   (e) $x(t) = Ae^{-At}$,
   (f) $x(t) = A\Pi_T(t) * \Pi_T(t)$.

5. Puissance moyenne : soit $x(t) = A\sin(2\pi f_o t)$

   (a) Calculez la puissance moyenne $P(t_o, T)$ du signal sur un intervalle de mesure T,
   (b) Montrez que la puissance moyenne pour $T \to \infty$ est égale à celle calculée sur une période $\frac{1}{f_o}$.
   (c) Pour quelles autres valeurs de l'intervalle de mesure obtient-on le même résultat ?

6. Calculez les fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation de (éventuellement, vérifiez avec Python) :

   - $x(t) = \Pi_T(t)$;
   - $x(t) = \Pi_T(t)$ et $y(t) = \delta(t)$;
   - $x(t) = \Pi_{T_1}(t)$ et $y(t) = \Pi_{T_2}(t)$ (avec $T_1 > T_2$;
   - soit $x(t) = \Pi_T(t)$ et $R_{xx}(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation, calculez l'intercorrélation entre $R_{xx}(t)$ et $x(t)$;

7. Produits de convolution ($x(t) * y(t)$:

   - montrez que $x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$;
   - montrez que $x(t) * \delta(t - t_o) = x(t - t_o)$;
   - montrez que $x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)$
   - $x(t) = A[\delta(t + t_o) + \delta(t - t_o)]; y(t) = B[\delta(t + t_1) + \delta(t - t_1)]$
   - $x(t) = y(t) = \Pi_T(t)$;
   - $x(t) = \Pi_T(t)$ et $y(t) = \delta(t)$;
   - $x(t) = \Pi_{T_1}(t)$ et $y(t) = \Pi_{T_2}(t)$ (avec $T_1 > T_2$;

2 Espaces vectoriels

2.1 Opérations et produit intérieur

Signaux et espaces vectoriels

- Montrer que l'ensemble de tous les n-tuples (ordonnés) $[a_1, a_2, \cdots a_n]$ avec la définition "naturelle" de la somme :

$$[a_1, a_2, \cdots a_n] + [b_1, b_2, \cdots b_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots a_n + b_n]$$

  et la multiplication par un scalaire

$$\alpha[a_1, a_2, \cdots a_n] = [\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots \alpha a_n]$$

  forme un espace vectoriel. Donnez sa dimension et trouvez une base.

- Montrez que l'ensemble des signaux de la forme $y(t) = a\cos(\pi t) + b\sin(\pi t)$ (a et b arbitraires), équipés avec l'addition et la multiplication par un scalaire, forment un espace vectoriel. Donnez sa dimension et donnez une base.

- Les quatre diagonales d'un cube sont-elles orthogonales ?

- Exprimez l'impulsion à temps discret $\delta[n]$ en fonction de l'échelon (à temps discret) $u[n]$ et vice-versa.

2.2 Signaux de télécommunication : constellations

- Montrez que les deux fonctions suivantes forment une base orthonormale :

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos 2\pi t & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin 2\pi t & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Indiquer l'expression du produit intérieur.

  Tracez ces fonctions de base dans un repère cartésien où l'axe horizontal représente les cosinus ($\psi_1(t)$) et l'axe vertical les sinus (on appellera ce tracé une "constellation").

- Soient les signaux suivants :

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos 2\pi t + \sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_1(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos 2\pi t + 3\sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_2(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos 2\pi t + \sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_3(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos 2\pi t + 3\sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_4(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos 2\pi t - \sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_5(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(\cos 2\pi t - 3\sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_6(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos 2\pi t - \sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_7(t) &= \begin{cases} \sqrt{2}(3\cos 2\pi t - 3\sin 2\pi t) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
x_{i+8}(t) &= -x_i(t); i = 0, \cdots, 7
\end{aligned}
$$

Tracez les points de la constellation qui représente ces signaux en utilisant les fonctions de base $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$.

- On considère qu'on envoie un signal $x_i(t)$ donné. On définit l'énergie d'un signal comme étant le carré de la norme (2) du vecteur. Donnez les énergies des différents signaux $x_i(t)$.
- On considère qu'on envoie un signal $x_i(t)$ choisi aléatoirement. On a donc une variable aléatoire X dont les valeurs sont prises dans $R_X = [x_o(t), x_1(t), ...x_{15}(t)]$. Dans ce cas, l'énergie (moyenne) est définie comme étant $\mathrm{E}\big[||X||^2\big]$.

  Déterminez l'énergie moyenne si

  - Tous les signaux sont équiprobables.
  - La masse de probabilité est donnée par

$$p_X(x_o) = p_X(x_4) = p_X(x_8) = p_X(x_12) = \frac{1}{8}$$

$$p_X(x_i) = \frac{1}{24}, \qquad i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15$$

2.3 Produits intérieurs

Soient les signaux suivants :

$$x_0(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\pi t + \frac{\pi}{6}) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

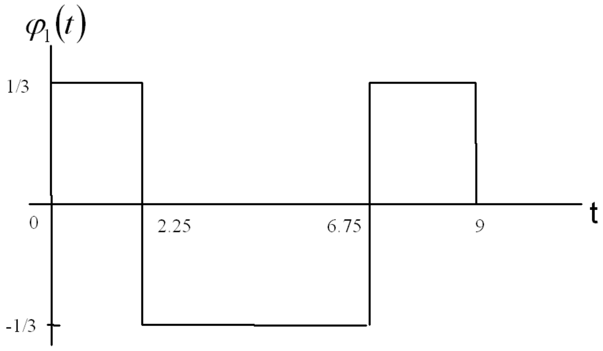
$$x_1(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\pi t + \frac{5\pi}{6}) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

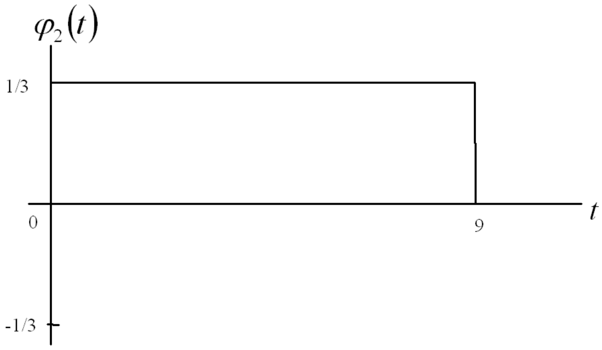
$$x_2(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos(2\pi t + \frac{3\pi}{2}) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Trouvez une base orthonormale pour ces signaux (utilisez $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$).
- Tracez la constellation correspondante
- Trouvez les produits intérieurs suivants :
  - $< x_o(t), x_o(t) >$
  - $< x_o(t), x_1(t) >$
  - $< x_o(t), x_2(t) >$

2.4 Fonctions de bases

Soient deux fonctions de base données ci-dessous :





- Tracez les signaux $u(t)$ et $v(t)$ qui correspondent aux vecteurs $\mathbf{u} = [11]$ et $\mathbf{v} = [21]$.
- Pour les mêmes signaux $u(t)$ et $v(t)$, trouvez une base orthonormale telle que $\mathbf{u} = [\sqrt{2}0]$ produit $u(t)$, trouvez $\mathbf{v}$.

2.5 Bases sinusoïdales

Soient les fonctions

$$c_i(t) = \sqrt{2}\cos 2\pi i t \text{ sur } t \in [0,1]$$

et

$$s_i(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi i t \text{ sur } t \in [0,1]$$

pour $i = 1, 2, \cdots, 10$.

- Montrez que cette base est orthonormale.
- Quelle est la dimension de l'espace vectoriel.
- Soient
$$x_o(t) = 10\sqrt{2}\cos 2\pi 5t - 5\sqrt{2}\sin(2\pi 6t)$$

$$x_1(t) = 5\sqrt{2}\cos 2\pi 6t + 5\sqrt{2}\sin(2\pi 6t)$$
Calculez les normes de $x_o(t)$ et de $x_1(t)$, leur produit intérieur et leur distance.

2.6 Distance entre deux signaux

On considère les deux (familles de) signaux :
$x_n(t) = A\sin(2\pi nt/T)\Pi_T(t - T/2)$ et $y_n(t) = A\cos(2\pi nt/T)\Pi_T(t - T/2)$, où n et p sont des entiers positifs.

1. Calculer la distance L_2 des deux signaux en fonction de n et p.
2. Calculer la norme des signaux.
3. Ces signaux sont-ils orthogonaux / orthonormaux ?

2.7 Développement en séries de Fourier

Soit la famille de fonctions $\{\psi_k(t)\}$ où $\psi_k(t) = e^{\frac{j2\pi kt}{T}}$. Cette famille permet de développer un signal périodique de période T en série de Fourier X_k :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \psi_k(t)$$

et $X_k = \frac{<x,\psi_k>}{<\psi_k,\psi_k>} = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} x(t)e^{-\frac{j2\pi kt}{T}}dt$

- montrez que cette série est orthogonale
- développer en série de Fourie le signal dont une période est définie par :
$$x(t) = At/T\Pi_T(t - T/2)$$

3 Python

4 Transformée de Fourier Discrète

4.1 Théorème de décalage

Soit un signal $x[n]$, tel que $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$. On définit le signal décalé cycliquement par

$$y[n] = \tilde{x}[n-l]$$

$\tilde{x}[n+kN] = x[n], n \in [0, ..., N-1], k \in \mathbb{Z}$ est la version périodisée de x.

Montrez que la DFT $Y[k]$ de $y[n]$ vaut $Y[k] = e^{-\jmath\frac{2\pi}{N}lk}X[k]$

4.2 Théorème de convolution

Soient deux signaux $x[n]$, et $y[n]$, tels que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, et $z[n]$ est la convolution cyclique de $x[n]$ et $y[n]$, définie par :

$$z[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]\tilde{y}[n-i]; \qquad n = 0, 1, ..., N-1$$

où $\tilde{y}[n+kN] = y[n], n \in [0, ..., N-1], k \in \mathbb{Z}$ est la version périodisée de y.

Montrez que la DFT de $z[n]$ est le produit des DFTs de $x[n]$ et $y[n]$, c'est-à-dire que $Z[k] = X[k].Y[k]$.

4.3 DFTs simples

Faites “à la main”, les DFT des signaux suivants

- $\mathbf{x} = [10, 5]$
- $\mathbf{x} = [3, 5, 8, -1]$
- $\mathbf{x} = [3, 5\jmath, 8, -1]$
- $\mathbf{x} = [0, 1, 1, 1, 1, 1]$ (expliquez comment généralisez à une taille de signal arbitrairement grande : $\mathbf{x} = [0, 1, \cdots, 1]$).

Que remarquez vous comme différence sur les deux derniers exemples ?

4.4 DFT d'un signal réel

Soit un signal réel $x[n], n = 0, 1, ..., 9$. Les échantillons impairs de cette DFT sont donnés par :

$$\begin{aligned} &X(0) = 5, \\ &X(2) = 3 + 5\jmath, \\ &X(4) = -3 + 6\jmath, \\ &X(6) = 9 + 5\jmath, \\ &X(8) = -5 - \jmath, \end{aligned}$$

Déterminez les valeurs des échantillons pairs.

4.5 Déphasage

Soit $\mathbf{X} = [4, 6, 2, 1, 2]$ et $g[n] = W_5^{-2n} x[n]$ (où $W_N = e^{\jmath \frac{2\pi}{N}}$), déterminez la DFT de $g[n]$.

4.6 Convolution ... et théorème de convolution

- Soient les signaux :

$$\mathbf{x} = [1, 2, 1, -1]$$
$$\mathbf{y} = [0, 1/3, -1/3, 1/3]$$

  Calculez la convolution circulaire de ces deux signaux par calcul direct et par DFT.

4.7 DFT classiques

Soient les DFT suivantes, donnez le signal temporel $x[n]$. S'il est réel, exprimez-le sans utiliser $\jmath$ et en fonction de fonctions trigonométriques.

- $\mathbf{X} = [0, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N-3 \text{ termes}}, 1]$
- $\mathbf{X} = [0, 0, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N-5 \text{ termes}}, 1, 0]$
- $\mathbf{X} = [0, \jmath, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N-3 \text{ termes}}, -\jmath]$

4.8 avec python

Soient les commandes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.fft as fft

x=np.array([5,4,3,2,1])
X=fft.fft(x)
X=np.concatenate(([X[0]], X[-1:0:-1]))
y=fft.ifft(X)
```

En utilisant les propriétés de la DFT, donnez le résultat.

4.9 avec python

Soient les commandes suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.fft as fft

x=np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])
X=fft.fft(x)
X=np.concatenate((X[4:8:], X[0:4:]))
" On peut également écrire X=fft.fftshift(X)
y=fft.ifft(X)
```

En utilisant les propriétés de la DFT, donnez le résultat.

4.10 Et on conclut ...

Soit le signal **x** dont la DFT vaut $\mathbf{X} = [4, 1, 2, 9, 3, 8]$. On définit le signal **y** tel que $y[n] = (-1)^n x[n]$. Que vaut la DFT de **y**.

4.11 Génération et analyse de musique

4.11.1 Introduction

Jusque maintenant, nous nous sommes intéressés uniquement aux signaux discrets ($x[n]$, avec $n \in \mathbb{Z}$). Pour appréhender les signaux audio, nous devons passer aux signaux à temps discret, où la notion de temps intervient explicitement. Dans cette premiere partie, nous nous limitons aux signaux à durée finie :

Signaux (de durée finie) à temps discret : $x(nT_s)$: $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ T_s \text{ : période d'échantillonnage} \end{cases}$

D'un point de vue calcul numérique, rien ne change, seule l'interprétation est différente : $x[10]$ représente le signal x au temps $10.T_s$. D'autre part, en considérant $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ la DFT de $x[n]$, $X[k](k = 0, 1, \ldots, N-1)$, représente le contenu fréquentiel du signal x à la (vraie) fréquence $\dfrac{k}{N.T_s} = kF_s$, où $F_s = \dfrac{1}{T_s}$ est appelée fréquence d'échantillonnage.

4.11.2 Fréquence normalisée et "vraie" fréquence

Si on fonctionne à $T_s = 1$, alors $x(nT_s) = x(n) = x[n]$, et on peut interpréter $x[n]$ comme étant un signal à temps discret à la fréquence d'échantillonnage de $F_s = 1$ éch/sec (échantillon par second).

De ce fait, $X[k], (k = 0, 1, \ldots, N-1)$ représente le contenu fréquentiel à la fréquence $\frac{k}{N}$, qu'on appellera *fréquence normalisée*.

Définition 4.1 *Fréquence normalisée*

Soit un signal à temps discret $x(nT_s), (n = 0, 1, \ldots, N-1)$, sa DFT $X[k]$ est définie sur les fréquences normalisées :

$$f_k = \frac{k}{N}, (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

On omet souvent l'indice k, et donc :

$$0 \leq f < 1$$

Cependant, nous sommes également intéressés par le contenu du signal à la "vraie" fréquence, que je définis ci-dessous :

Définition 4.2 *"Vraie" fréquence*

Soit un signal à temps discret $x(nT_s), (n = 0, 1, \ldots, N-1)$, sa DFT $X[k]$ est définie sur les “vraies” fréquences :

$$F_k = \frac{k}{NT_s}, (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$

On omet souvent l’indice k, et donc, en définissant $F_s = \frac{1}{T_s}$:

$$0 \le F < F_s$$

Le lien entre “vraie fréquence” et fréquence normalisée est donc donné par :

$$f = \frac{F}{F_s}$$

On notera la *fréquence normalisée* en minuscule (f) et la *“vraie” fréquence* en majuscule (F)

4.11.3 Génération de signaux musicaux

Les signaux musicaux sont le plus souvent générés par des instruments physiques et basés sur des phénomènes de résonance (résonance de cordes, d’air dans un tuyau, ... (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Résonance_acoustiquerésonance sur Wikipedia)).

De ce fait, on peut modéliser un signal musical par une sinusoïde, soit, en temps continue (en utilisant la pulsation $\Omega = 2\pi F$):

$$x(t) = A\sin(\Omega f t + \phi)$$

Soit, en temps discret :

$$x(nT_s) = A\sin(\Omega n T_s + \phi)$$

et donc pour les signaux discrets, où on introduit la fréquence normalisée $f = F/F_s$ et la pulsation normalisée $\omega = 2\pi f$:

$$x[n] = A\sin(\omega n + \phi)$$

Les différents instruments de musique ont des résonances relativement complexes, suivant (en première approximation) le schéma suivant : présence d’une résonance principale à la fréquence *fondamentale* F_1 et un certain nombres d’*harmoniques*, qui sont des résonances à une fréquence multiple de la fondamentale $F_k = kF_1$, $k = 2, 3, \ldots$. La *richesse harmonique* étant plus importante si le nombre d’harmoniques est important, ainsi que l’amplitude de ces harmoniques. Cette richesse harmonique est une composante importante du *timbre* de l’instrument (voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Timbre_(musique)Timbre sur Wikipedia).

On pourra alors générer un signal musical (trop simpliste, mais bon ...) comme étant :

$$x[n] = x(nT_s) = \sum_k A_k \sin(2\pi f_k n + \phi_k)$$

4.11.4 Analyse de signaux musicaux

De manière relativement directe, l'analyse “harmonique” des signaux musicaux consistera à déterminer la fondamentale et les harmoniques du signal considéré ... et donc à utiliser la DFT

4.12 Génération d'un signal musical simple

Voir la suite sur le notebook Jupyter sur Jalon

5 DTFT et STFT (transformée de Fourier de signaux à temps discret et transformée de Fourier sur des portions de signaux)

5.1 Quelques DTFT et IDFT

Déterminez la DTFT de :

- $x[n] = a^n u[n]$ où $|a| < 1$ et $n = 0, \ldots, \infty$ ($u[n] = 1$ pour $n = 0, \ldots, \infty$).
- $x[n] = u[n] - u[n-M], M > 0$
- $y[n] = b_o x[n] + b_1 x[n-1]$
- $y[n] = \cos(\omega_o n) x[n]$
- $z[n] = x[n] * y[n]$ (convolution)
- $z[n] = x[n].y[n]$ (produit)
- $(-1)^n x[n]$
- $(-1)^n x^*[M-n]$, M entier.
- $n x[n]$ (différentiation ...)

Déterminez la DTFT inverse de :

- $X(e^{\jmath\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \text{ et } |\omega| < \pi \end{cases}$
- $X(e^{\jmath\omega}) = \begin{cases} 1 & \omega_c < \omega < \pi \text{ et } -\pi < \omega < -\omega_c \\ 0 & |\omega| < \omega_c \end{cases}$
- $X(e^{\jmath\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ (où $\delta(\omega)$ est la fonction généralisée de Dirac.
- $X(e^{\jmath\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega \pm \omega_o| < B/2 \\ 0 & \text{sinon sur } [-\pi, \pi] \end{cases}$
- $X(e^{\jmath\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega \pm \omega_o| < B/2 \\ 1 & \text{sinon sur } [-\pi, \pi] \end{cases}$

6 Filtres numériques : introduction

6.1 Systèmes LTI

Soient les système suivants, indiquez si ces systèmes sont causaux, linéaires, invariants dans le temps et BIBO stables:

- $\mathcal{H}\{x[n]\} = n x[n]$
- $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[-n]$

- $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[n-3] + x[n-7]$
- $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[4n+2]$
- $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[n].e^{\jmath 2\pi n}$
- $\mathcal{H}\{x[n]\} = e^{-\jmath \omega n} x[n]$
- $\mathcal{H}\{x[n]\} = \sum_{k=n-n_o}^{n+n_o} x[k]$
- $y[n] = ny[n-1] + x[n],$ avec $x[n] = 0$ pour $n > n_o$

6.2 Systèmes en série

Soient 3 systèmes LTI en série :

- Système 1 : $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[n/2]$ si n pair , 0 sinon
- Système 2 : $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[n] + 0.5x[n-1] + 0.25x[n-2]$
- Système 3 : $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[2n]$

Donnez la fonction de transfert du système global, et indiquez si ce système est LTI.

6.3 Convolution

Soit le signal discret $x[n]$ défini par (pour une valeur quelconque de M impaire):

$$x[n] = \begin{cases} M-n & 0 \leq n \leq M \\ M+n & -M \leq n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrez que $x[n]$ peut être exprimé comme étant la convolution entre deux signaux discrets $x_1[n]$ et $x_2[n]$.
- En fonction de ce résultat, calculez la DTFT de $x[n]$.

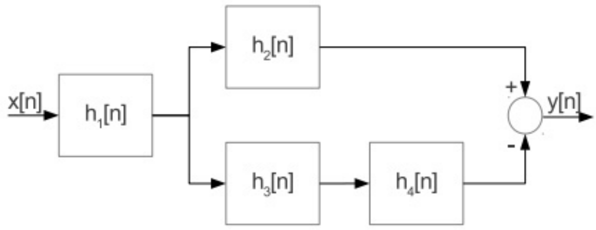
6.4 Réponse impulsionnelle

Soit

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ -1 & 5 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Déterminez et tracez la réponse du système dont la réponse impulsionnelle efezqst $h[n]$ à l'entrée $x[n] = u[n-4]$
- Soit
  - $h_1[n] = fezq3(-1)^n(\frac{1}{4})^n u[n-2]$
  - $h_2[n] = h_3(n) = u[n+2]$
  - $h_4[n] = \delta[n-1]$

Soit le système suivant :



Déterminez sa réponse impulsionnelle.

- Pour ce système, déterminez si le système est causal et BIBO stable.

6.5 filtrage à phase nulle

Soit l'opérateur de retournement temporel :

$$\mathcal{R}\{x[n]\} = x[-n]$$

Soit $\mathcal{H}\{\}$ un système LTI. Que pouvez vous dire du système suivant :

$$y[n] = \mathcal{R}\{\mathcal{H}\{\mathcal{R}\{\mathcal{H}\{x[n]\}\}\}\}$$

6.6 Théorème de convolution

Soit :

$$w_R[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$w_T[n] = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq M/2, \\ M-n & M/2 < n \leq M, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exprimez la tranformée de Fourier W_T de $w_T[n]$ en fonction de la transformée de Fourier de $w_r[n]$.

6.7 Filtre IIR

Soit un filtre passe-bas idéal $H(e^{\jmath\omega})$. Quelle devrait être le signal d'entrée $x[n]$ du filtre pour que la sortie soit un signal à durée finie, et non nul ?

6.8 Filtres, réponse fréquentielle et linéarité de la phase

Pour les filtres suivants, donner la réponse fréquentielle (en amplitude et en phase), indiquez le type de filtre (passe-bas, passe-bande, ...), indiquez si le filtre est à phase linéaire et donnez son délai de groupe. On rappelle que le délai de groupe est donné par $\tau = -\frac{d\phi(\omega)}{\omega}$.

Pour tous les filtres suivants, $h[n] = 0$ si $h[n]$ est non spécifié.

1. $h[-1] = 1, h[0] = 0, h[1] = 1$
2. $h[-1] = 1, h[0] = 0, h[1] = -1$
3. $h[0:4] = [1, 2, 3, 2, 1]$
4. $h[0:3] = [1, 2, 2, 1]$
5. $h[0:3] = [1, 2, -2, -1]$
6. $h[0:4] = [1, -2, 3, -2, 1]$
7. $h[0:3] = [1, -2, 2, -1]$
8. $h[0:3] = [1, -2, 2, 1]$
9. $h[0:4] = [1, -2, 3, 2, 1]$
10. $h[n] = (-1)^n \lambda^n (1 - \lambda), n \geq 0$

7 Transformées en z

Table de transformées en z

$x[n]$	$X(z)$	Région de convergence (ROC)
$\delta[n]$	1	$z \in \mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$(-a)^n u(n)$	$\frac{z}{z+a}$	$\|z\| > a$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$n^2 u[n]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\| > 1$
$e^{an} u[n]$	$\frac{z}{z-e^a}$	$\|z\| > \|e^a\|$
$C_{k-1}^{n-1} e^{a(n-k)} u[n-k]$	$\frac{z}{(z-e^a)^k}$	$\|z\| > \|e^a\|$
$\cos(\omega n) u[n]$	$\frac{z(z-\cos(\omega))}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega n) u[n]$	$\frac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\|z\| > 1$
$\frac{1}{n} u[n-1]$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega n + \theta) u[n]$	$\frac{z^2\sin(\theta) + z\sin(\omega-\theta)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$	$\|z\| > 1$
$e^{an}\cos(\omega n) u[n]$	$\frac{z(z-e^a\cos(\omega))}{z^2 - 2ze^a\cos(\omega) + e^{2a}}$	$\|z\| > \|e^a\|$ height

7.1

Soit $y[n] = nx[n]$, montrer que $Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}$

7.2

Donnez les transformées en z des séquences suivantes et donnez leur ROC (région de convergence).

- $x[n] = \sin(\omega n + \theta)u[n]$
- $x[n] = \cos(\omega n)u[n]$
- $x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
- $x[n] = a^n u[-n]$
- $x[n] = e^{-\alpha n} u[n]$

- $x[n] = e^{-\alpha n} \sin(\omega n) u[n]$
- $x[n] = n^2 u[n]$
- $y[n] = e^{an} x[n]$

7.3

Soit

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2 + bz + (a}$$

Donnez les conditions que doivent remplir les constantes réelle a et b pour que le filtre soit stable.

7.4

Soit un système, supposé stable, dont la fonction de transfert vaut :

$$H(z) = \frac{z}{4z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}$$

déterminez sa réponse impulsionnelle.

7.5

Déterminiez les transformées inverses des systèmes suivants, supposés stables :

- $\frac{z}{z - 0.8}$
- $\frac{z^2}{z^2 - z + 0.5}$
- $\frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - z + 0.5}$
- $\frac{z^2}{(z-a)(z-1)}$

7.6

Soit le système causal suivant, déterminez sa réponse à un échelon ($u[n]$).

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2 - 0.32z + 0.8}$$

7.7

Soit un polynôme de type $a[0]x^N + a[1]x^{N-1} + \cdots + a[N-1]x + a[N]$. Alors, dans python, on écrit :

```
coeff=a
#  Le premier coefficient de coeff est le coefficient qui correspond
#  à la plus grande puissance de x
racines=np.roots(coeff) # donne les racines du polynome
# exemple
>>>coeff=[1 ,-1, 0.5]

>>>np.roots(coeff)

array([ 0.5+0.5j,  0.5-0.5j])
```

Soient les polynômes suivants, peuvent-ils être les dénominateurs d'un filtre causal stable ?

- $z^2 - z + 0.5$
- $z^5 + 2z^4 + z^2 + 0.5$
- $z^5 + 0.3z^4 - 0.6z^3 - 0.7z^2 + 0.16$

7.8

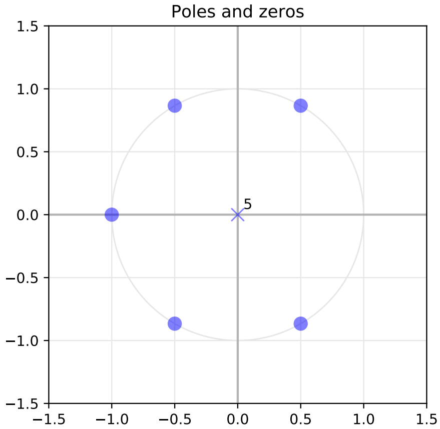
Soit le filtre FIR de fonction de transfert :

$$H(z) = (1 - z^{-1})^3(1 + z^{-1})^3$$

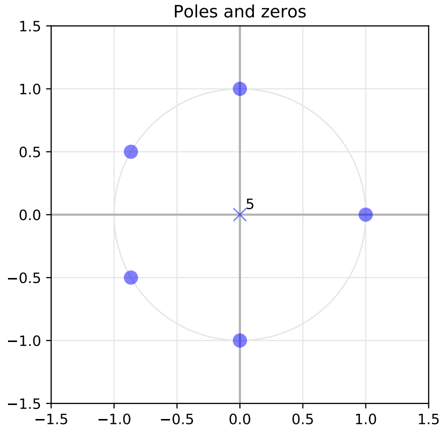
1. Tracez son diagramme de pôles et zéros
2. Tracez $|H(e^{\jmath\omega})|$
3. Classez ce filtre (passe-bas / Passe haut, / passe ou stop bande).

7.9

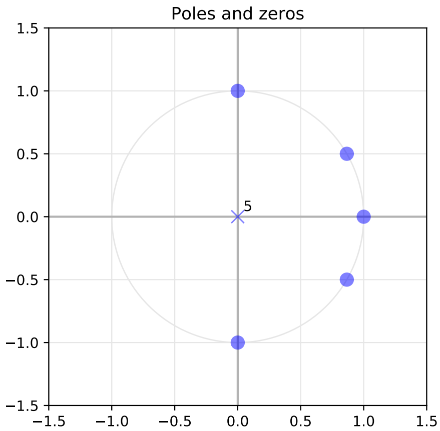
Soient les 6 filtres (FIR) suivants, donnez les correspondances entre les figures (pole/zéro - réponse impulsionnelle - réponse fréquentielle) ,



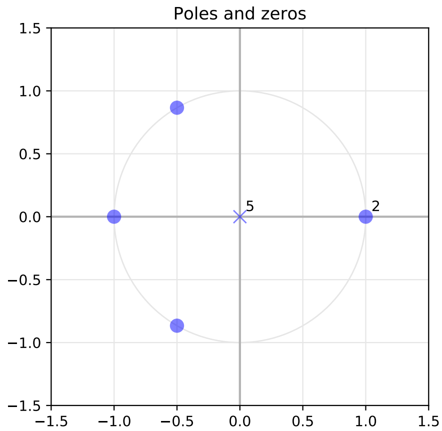
(1)



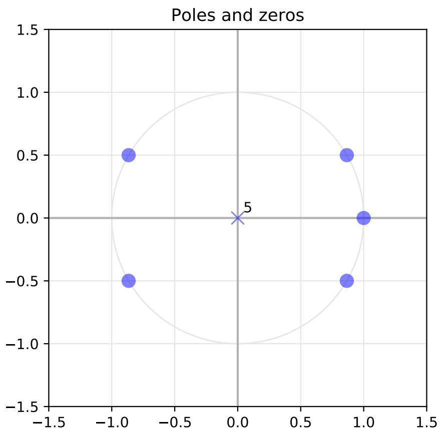
(2)



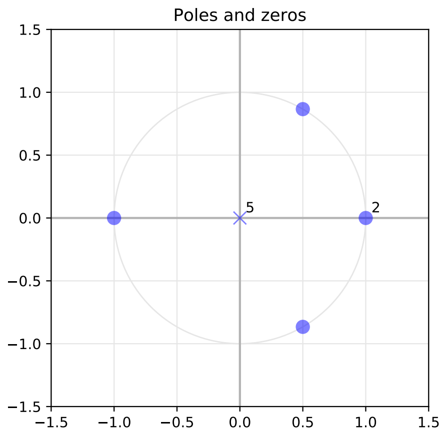
(3)



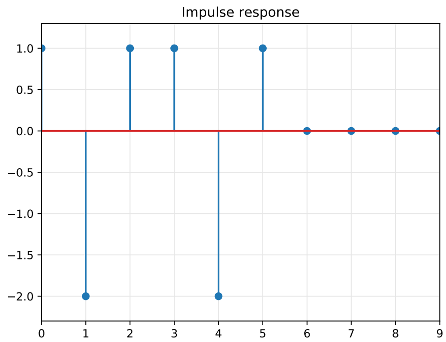
(4)



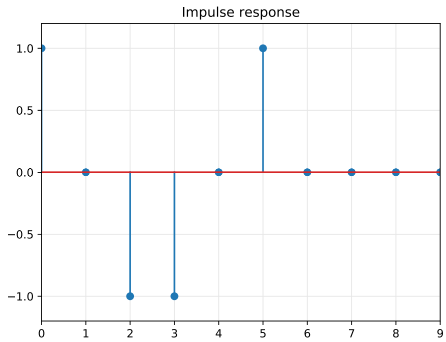
(5)



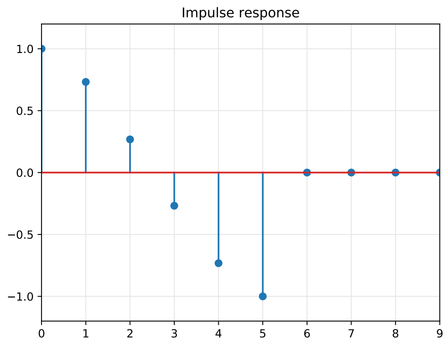
(6)


Impulse response
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

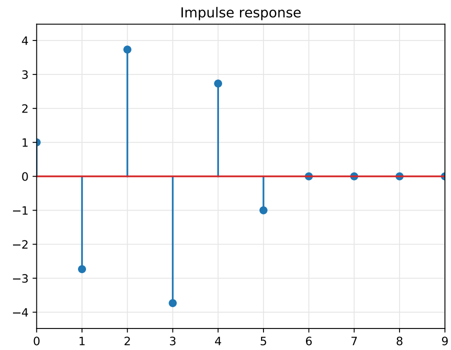
(1)


Impulse response
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

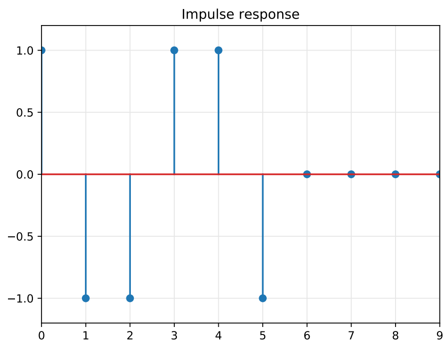
(2)


Impulse response
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

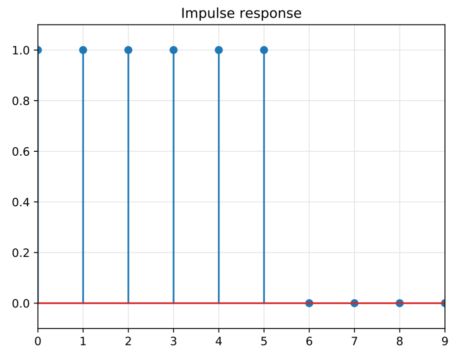
(3)


Impulse response
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

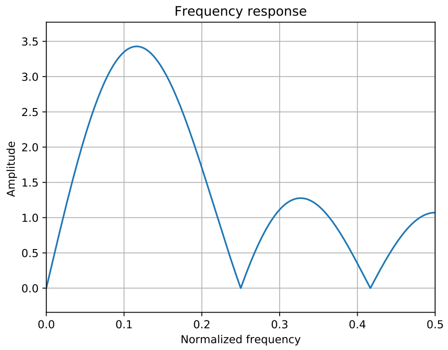
(4)


Impulse response
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

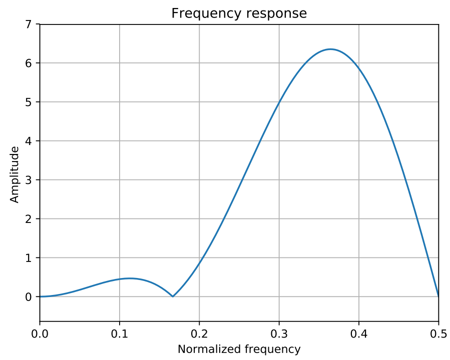
(5)


Impulse response
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

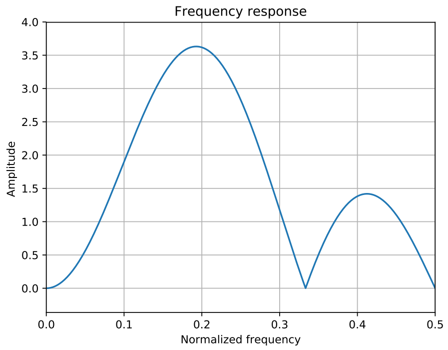
(6)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

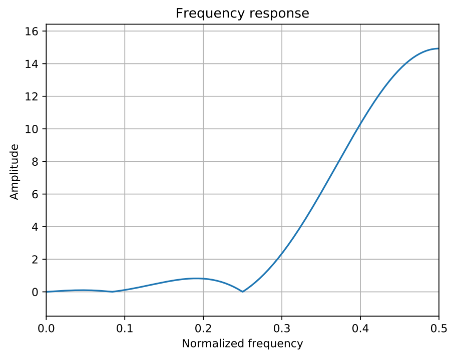
(1)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

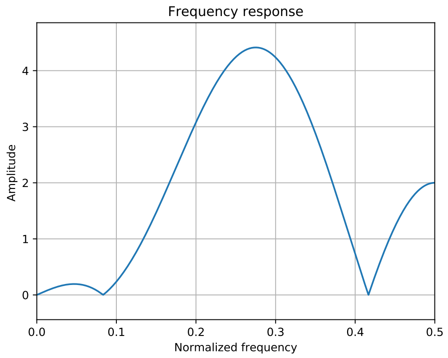
(2)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

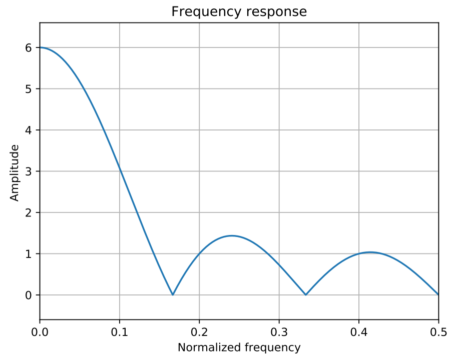
(3)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

(4)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

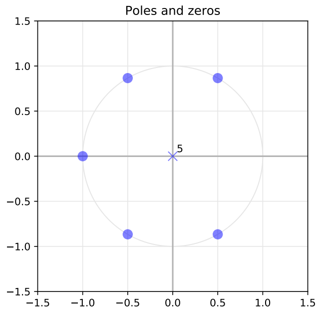
(5)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

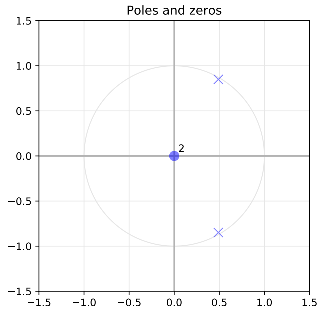
(6)

7.10

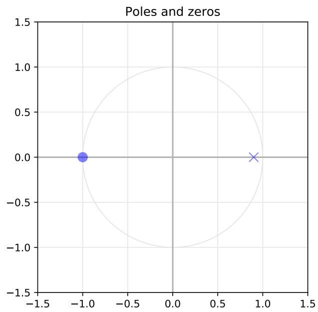
Soient les 6 filtres suivants, donnez les correspondances entre les figures (pole/zéro - réponse impulsionnelle - réponse fréquentielle) ,



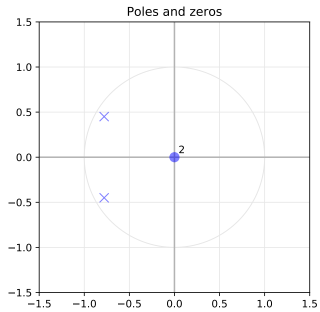
(1)



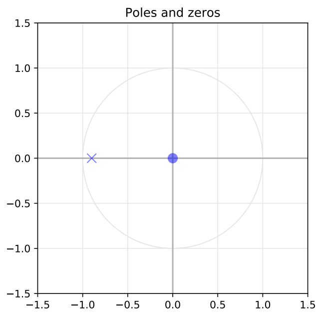
(2)



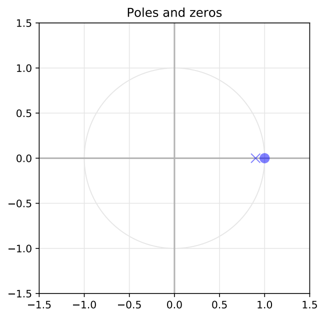
(3)



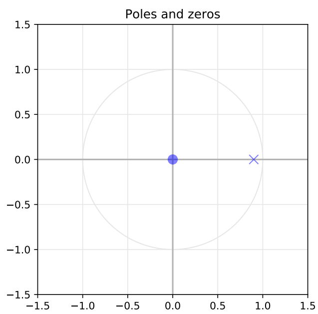
(4)



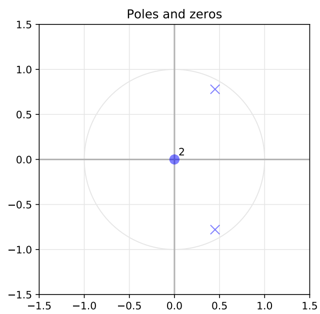
(5)



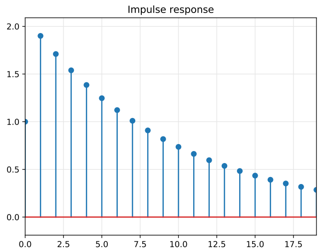
(6)



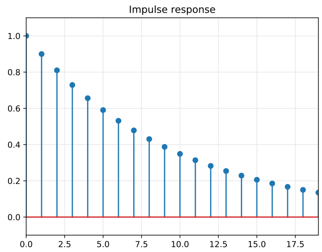
(7)



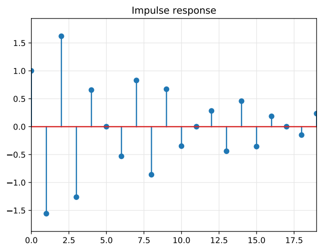
(8)


Impulse response

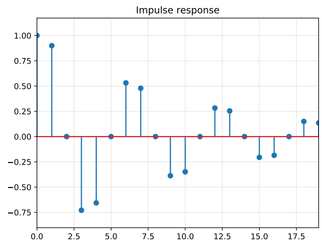
(1)


Impulse response

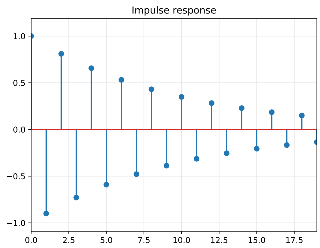
(2)


Impulse response

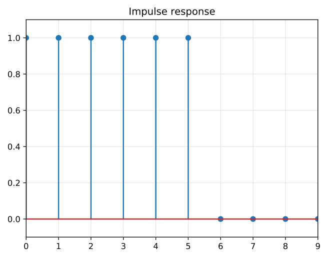
(3)


Impulse response

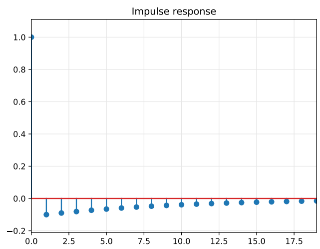
(4)


Impulse response

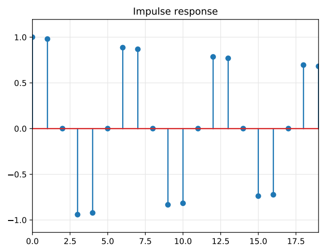
(5)


Impulse response

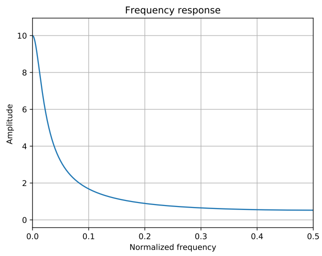
(6)


Impulse response

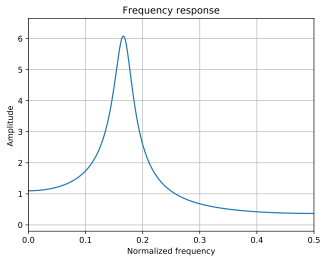
(7)


Impulse response

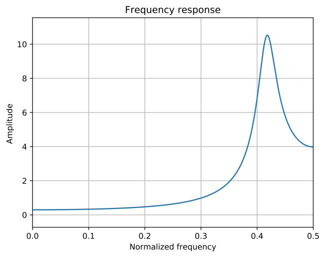
(8)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

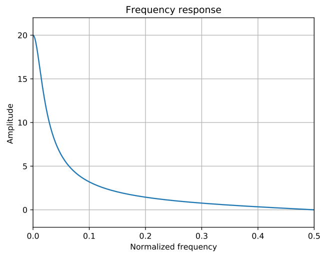
(1)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

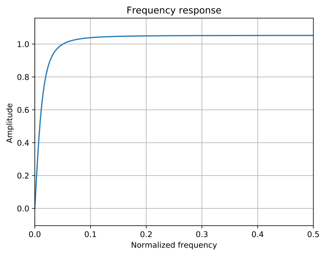
(2)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

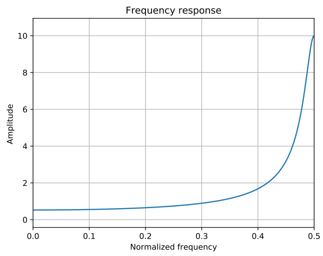
(3)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

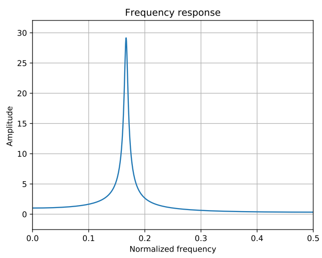
(4)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

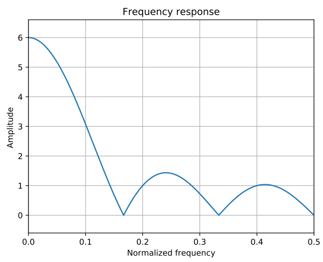
(5)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

(6)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

(7)


Frequency response
Amplitude
Normalized frequency

(8)

8 Processus aléatoires

8.1 Fréquence aléatoire

On définit le processus stochastique $X[n] = a\cos(2\pi F n)$ où F est une variable aléatoire, uniformément répartie sur $[0, W]$, et a une constante réelle.

1. Tracer plusieurs réalisations $x[n]$.
2. Calculer la moyenne statistique $m_{X[n]}$.
3. Calculer la fonction d'autocorrélation statistique $R_X[l, k]$.
4. Examiner la stationnarité de $X[n]$.

8.2 Amplitude aléatoire

On définit le processus stochastique $X[n] = A\cos(2\pi f n)$ où A est une variable aléatoire, uniformément répartie sur $[0, 1]$, et f une constante réelle.

1-4. Mêmes questions que pour l'exercice **??**.

5. Déterminer la densité de probabilité du premier ordre $f_{X[t]}(x; n)$.

8.3 Phase aléatoire

On définit le processus stochastique $X[n] = a\cos(2\pi f n + \Theta)$ où Θ est une variable aléatoire, uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$, et a, f sont des constantes réelles.

Mêmes questions que pour l'exercice **??**.

8.4 Somme de deux sinusoïdes

Soit un processus $X[n] = A\cos\omega n + B\sin\omega n$, où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes, centrées, de variances égales à σ_A^2 et σ_B^2, et où ω est une constante. Est-ce que $X[n]$ est stationnaire ?

8.5 Filtrage de bruit blanc

Soit un bruit blanc $X[n]$ de moyenne nulle et de puissance $\sigma_X^2 = 1$. Ce bruit passe dans un filtre FIR tel que $Y[n] = X[n] - 2.X[n-1] + X[n-2]$.

- Calculez la fonction de corrélation de $R_Y[k]$ de Y.
- Calculez la densité spectrale de puissance de la sortie du filtre, faites le graphe de la dsp.

8.6 Filtrage de bruit blanc

Soit un bruit blanc $X[n]$ de moyenne $m_X = 2$ et de variance $\sigma_X^2 = 1$. Ce bruit passe dans un filtre FIR tel que $Y[n] = X[n] + 2.X[n-1] + X[n-2]$.

- Calculez la fonction de corrélation de $R_Y[k]$ de Y.
- Calculez la densité spectrale de puissance de la sortie du filtre, faites le graphe de la dsp.

8.7 Rapport Signal/bruit

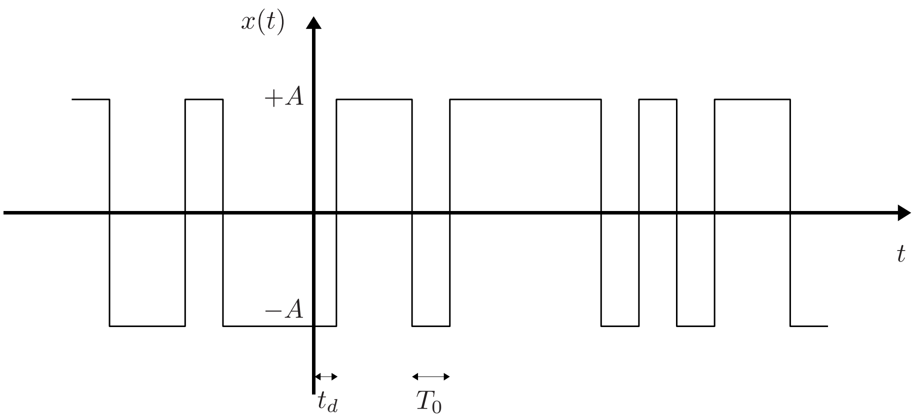
Soit une sinusoïde $X(t) = a.sin(2\pi ft)$ de fréquence $f = 5000Hz$ et d'amplitude $a = 10mV$. Ce signal est noyé dans un bruit $(N(t))$de densité spectrale de puissance $S_N(f) = -30dBm/Hz$ $(Y(t) = X(t) + N(t))$

1. On filtre le signal $Y(t)$ par un filtre passe-bas idéal à 10 KHz (on l'appelera $Y_f(t)$: quel est le rapport signal sur bruit résultant
2. On échantillonne le signal à 30 kéchs/sec :
   - Représentez la densité spectrale de puissance de $Y_f(t)$ et déterminez le rapport signal/bruit.
   - Idem pour une fréquence d'échantillonnage de 18 kéchs/sec.
3. On filtre le signal échantillonné par un passe bande centré en 5 KHz et de largeur de bande 100 Hz : quel est le rapport signal bruit en sortie.

8.8 Signal de télécomms

On considère le processus stochastique $X(t)$ dont une réalisation est présentée ci-dessous. Il s'agit d'une séquence aléatoire de symboles binaires :

- Le 1 et le 0 sont représentés par une impulsion d'amplitude +A et A, respectivement, de durée T_o (une constante).
- Les impulsions ne sont pas synchronisées : le délai T_d du début de la première impulsion après l'instant $t = 0$ est une variable aléatoire, uniformément répartie entre 0 et T_o.
- Les symboles 0 et 1 sont équiprobables et indépendants. Calculer :
  1. La fonction de probabilité $f_{X(t)}(x)$.
  2. La moyenne statistique $E[X(t)]$.
  3. La fonction d'autocorrélation de $X(t)$.
  4. La densité spectrale de puissance $S_X(f)$ de $X(t)$.
  5. La densité spectrale d'énergie d'une impulsion d'amplitude A et de durée égale à T_o.



8.9 Simulation de signaux de télécoms et DSP

TBC

9 Echantillonnage et interpolation

9.1

Soit le signal continu $y(t)$ obtenu par convolution des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, à bande limitée tels que $|X_1(\Omega)| = 0$ pour $|\Omega| > 1000\pi$ et $|X_2(\Omega)| = 0$ pour $|\Omega| > 2000\pi$.

On échantillonne $y(t)$ tel que $y_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT)$. Indiquez les valeurs que peut prendre T tel que $y(t)$ peut être reconstruit à partir de $y_e(t)$.

9.2

Soit un signal $x(t)$. On échantillonne ce signal avec une période d'échantillonnage $T_s = 10^{-4}s$. Pour chacun des cas suivants, indiquez si le théorème d'échantillonnage garantit que $x(t)$ peut être parfaitement reconstruit à partir du signal échantillonné.

1. $X(\Omega) = 0$ pour $|\Omega| > 5000\pi$
2. $X(\Omega) = 0$ pour $|\Omega| > 15000\pi$
3. $\Re\{X(\Omega)\} = 0$ pour $|\Omega| > 5000\pi$
4. $x(t)$ réel et $X(\Omega) = 0$ pour $\Omega > 5000\pi$
5. $x(t)$ réel et $X(\Omega) = 0$ pour $\Omega < -15000\pi$
6. $X(\Omega) * X(\Omega) = 0$ pour $|\Omega| > 10000\pi$
7. $|X(\Omega)| = 0$ pour $|\Omega| > 5000\pi$

9.3 Echantillonnage et filtrage

Soit un signal réel $x_c(t)$ à temps continu, avec le support spectral $\Omega = [-2\pi 5.10^3, 2\pi 5.10^3]$. Ce signal est échantillonné à une fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{T_1}$. Ensuite, il passe dans un filtre de réponse fréquentielle :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Ensuite, le signal passe dans un convertisseur temps discret/temps continu idéal (interpolateur idéal), en supposant que l'intervalle entre deux échantillons vaut T_2 pour donner le signal $y_c(t)$.

Tracez les graphes de $Y_C(j\Omega)$ pour :

- $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = 10^4$
- $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = 2.10^4$
- $\frac{1}{T_1} = 2.10^4$; $\frac{1}{T_2} = 10^4$
- $\frac{1}{T_1} = 10^4$; $\frac{1}{T_2} = 2.10^4$

9.4 Changement de fréquence d'échantillonnage

Soit un signal de parole $x_c(t)$ échantillonné à 10 kéchs/seconde, l'échantillonneur étant précédé d'un filtre anti-repli idéal. On notera le signal échantillonné $x_1[n]$. Ce même signal de parole $x_c(t)$ est échantillonné à 6 kéchs/seconde, toujours avec un filtre anti-repli, pour donner $x_2[n]$.

Concevez une chaîne purement numérique (rééchantillonnage et filtrage) qui fournit $x_2[n]$ à partir de $x_1[n]$

9.5 Quand la condition de Shannon est violée ... tout n'est pas perdu

Soit $x(t)$, de bande limitée Ω_N. On échantillonne ce signal à la fréquence $F_s = 1/T_s$ et on interpole le signal échantillonné par un filtre idéal $T_s\Pi_{\Omega_s/2}(\Omega)$. Ce signal reconstruit est appelé $x_r(t)$.

Si $\Omega_s > 2\Omega_N$, on sait que $x_r(t) \neq x(t)$.

On vous demande de démontrer que, quel que soit $x(t)$, $x_r(kT_s) = x(kT_s)$.

Suggestion : considérer les valeurs de v tel que $\dfrac{\sin(v)}{v} = 0$ ainsi que la limite $\lim_{t\to kT} x_r(t)$.