

Ondelettes de Haar 1D

Élec 3 | 2018 - 2019

Ce document est à compléter. Les parties précédées d'un symbole (★★) sont à compléter dans un premier temps alors que celles précédées d'un symbole (★) doivent être traitées dans un deuxième temps. Les trous "..." doivent être considérés comme (★★). Si un de ces symboles apparaît en légende d'une figure c'est que celle-ci doit être complétée. La Section 5 contient des rappels sur les changements de bases et nous vous conseillons de vous organiser de telle sorte qu'un sous groupe commence par cette section (indépendante du reste) pendant que le reste du groupe travaille sur le reste du document.

1 Introduction

Les ondelettes de Haar nous permettent d'approcher des fonctions par des fonctions constantes par morceaux. Plus particulièrement, nous allons voir comment la transformée de Haar permet de décomposer une fonction constante par morceaux en une fonction "grossière" (qui peut être vue comme une moyenne de la fonction de départ) plus des fonctions "détails" (ces fonctions contiennent l'information correspondant aux détails de la fonction que l'on peut aussi associer à des hautes fréquences).

2 Espace V_0

Définition 1. Soit V_0 l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $[i, i + 1[$, $i \in \mathbb{Z}$.

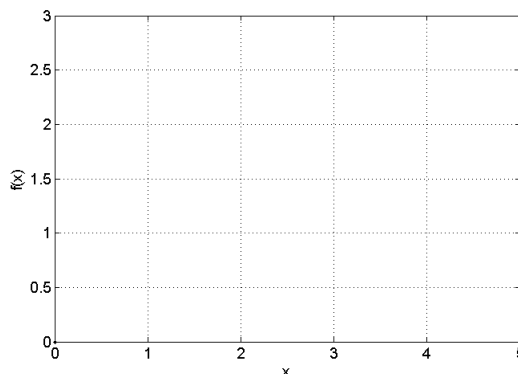


FIGURE 1 – Exemple de fonction de V_0 (★★)

Fonction d'échelle φ_0 de V_0 : C'est une fonction génératrice de l'espace V_0 définie comme il suit :

$$\varphi_0(x) = \mathbb{1}_{[0,1[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

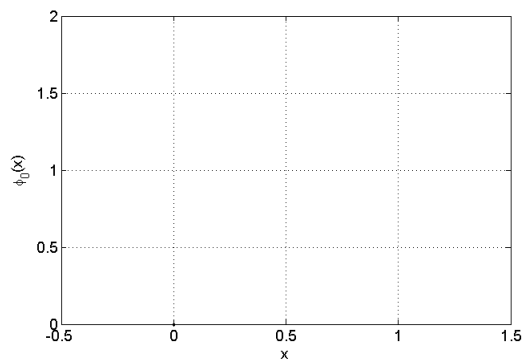


FIGURE 2 – Fonction d'échelle φ_0 de V_0 (★★)

On définit également les fonctions $\varphi_{0,i} : x \mapsto \varphi_0(x - i)$ ($i \in \mathbb{Z}$). Ces fonctions forment une base de l'espace V_0 :

$$\forall f \in V_0, \quad f(x) = \dots \quad (2)$$

Démonstration (★) :

□

3 Espace V_1

Définition 2. V_1 est l'espace des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}[$, $i \in \mathbb{Z}$.

Propriété 1. On a :

$$V_0 \subset V_1$$

Démonstration (★) :

□

Fonction d'échelle φ_1 de V_1 :

$$\varphi_1(x) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

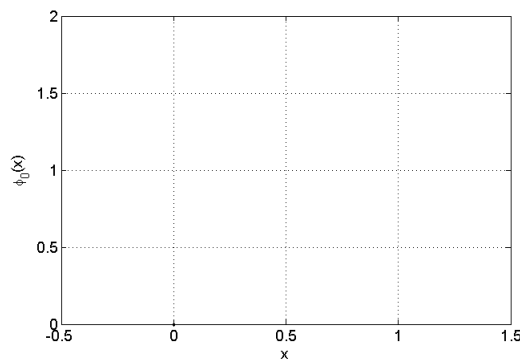


FIGURE 3 – Fonction d'échelle φ_1 de V_1 (★★)

Propriété 2. La fonction φ_1 peut être définie en fonction de φ_0 par :

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(2x)$$

Démonstration (★) :

□

De même que pour l'espace V_0 , on définit les fonctions :

$$\varphi_{1,i}(x) = \varphi_1(x - \frac{i}{2}) = \varphi_0(2x - i) \quad i \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Tout comme les fonctions $\varphi_{0,i}$ pour l'espace V_0 , les fonctions $\varphi_{1,i}$ forment une base de V_1 .

4 Généralisation : Espaces V_n

Définition 3. V_n est l'espace ...

Fonction d'échelle φ_n de V_n :

$$\varphi_n(x) = \dots \tag{4}$$

Les propriétés 1 et 2 se généralisent selon les deux propriétés suivantes.

Propriété 3. *Inclusion des espaces :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n \subset V_{n+1}$$

Propriété 4. *Facteur d'échelle :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) = \varphi_0(2^n x) \tag{5}$$

Enfin, nous définissons également les fonctions $\varphi_{n,i}(x) = \dots$ qui forment une base de V_n .

Les inclusions données par la propriété 3 nous assurent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n,i} \in V_{n+1}$ ce qui conduit au résultat suivant :

Propriété 5. *Les fonctions d'échelle $\varphi_{n,i}$ s'écrivent en fonction des $\varphi_{n+1,l}$ avec $l \in \mathbb{N}$:*

$$\varphi_{n,i}(x) = \varphi_{n+1,2i}(x) + \varphi_{n+1,2i+1}(x) \quad i \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Démonstration (★) :

□

Nous avons vu que V_n est un sous espace de V_{n+1} $\forall n \in \mathbb{N}$ (propriété 3), on peut donc chercher un sous espace W_n supplémentaire de V_n dans V_{n+1} , ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n \oplus W_n \\ \iff \begin{cases} \forall f \in V_{n+1}, \exists!(v, w) \in V_n \times W_n \text{ tels que } f = v + w \\ V_n \cap W_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En effet par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la base de V_n (c'est à dire les $\varphi_{n,i}$ $i \in \mathbb{N}$) pour obtenir une base de V_{n+1} . Les vecteurs ainsi ajoutés engendrent un supplémentaire de V_n dans V_{n+1} que l'on note W_n .

Une base de W_n est appelée "base d'ondelettes". De plus, comme nous le verrons par la suite, il est important d'avoir une base de W_n qui est orthogonale à la base de V_n . Au final, on aura :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n \oplus W_n \\ &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \oplus W_n \\ &\dots \\ &= V_0 \oplus \dots \end{aligned}$$

Une fonction $f \in V_{n+1}$ pourra donc être décomposée en une fonction "moyenne" $f_0 \in \dots$ plus des "fonctions détails" $w_i \in \dots$. Au final f peut s'écrire :

$$f(x) = \dots$$

4.1 Base d'ondelette de l'espace W_0

Intéressons nous maintenant à la base de W_0 . Comme nous l'avons vu elle doit vérifier :

- être orthogonale à V_0
- $V_1 = V_0 \oplus W_0$

Définition 4. Ondelette $\psi_0 \in W_0$:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

Il est clair que $W_0 \subset V_1$, on peut donc écrire ψ_0 en fonction des éléments $\varphi_{1,i}$ $i \in \mathbb{Z}$ de la base de V_1 définie précédemment :

$$\psi_0 = -\varphi_{1,0} + \varphi_{1,1} \quad (8)$$

Vérifions que ψ_0 est bien orthogonale aux éléments $\varphi_{0,i}$ de la base de V_0 :

Le support de la fonction ψ_0 est $[0, 1[$, donc $\forall i \neq \dots$, $Supp(\psi_0) \cap Supp(\varphi_{0,i}) = \emptyset$ ¹ ce qui implique que $\langle \psi_0, \varphi_{0,i} \rangle = 0$ (le produit scalaire utilisé étant $\langle f, g \rangle = \int f(t)g(t)dt$).

Il nous reste donc à vérifier que $\langle \psi_0, \varphi_{0,0} \rangle = 0$ (\star) :

$$\langle \psi_0, \varphi_{0,0} \rangle =$$

1. $Supp(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$, c'est l'ensemble des x pour lesquels la fonction f est différente de 0 (on parle de support de f)

On définit ensuite les fonctions $\psi_{0,i}(x) = \dots \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. Ces fonctions sont également orthogonales aux $\varphi_{0,i}$ (par translation de ψ_0).

Les $\psi_{0,i}$, $i \in \mathbb{Z}$ forment donc une base de W_0 orthogonale à la base de V_0 . Il reste maintenant à montrer que les espaces V_0 et W_0 sont bien supplémentaires dans V_1 (i.e $V_1 = V_0 \oplus W_0$).

Démonstration.

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \implies \begin{cases} \forall v_1 \in V_1, \exists!(v_0, w_0) \in V_0 \times W_0 \text{ tels que } v_1 = v_0 + w_0 \\ V_0 \cap W_0 = 0 \end{cases}$$

1. Montrons que $V_0 \cap W_0 = 0$:

$$\text{Soit } f \in V_0 \cap W_0 \implies \begin{cases} f \in V_0 \\ f \in W_0 \end{cases} \implies \begin{cases} f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \varphi_{0,i} \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{R} \\ f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_i \psi_{0,i} \text{ où } \gamma_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par définition de $\varphi_{0,i}$ et $\psi_{0,i}$, si on se place sur l'intervalle $[0, 1[$ on a :

$$\begin{aligned} f_{[0,1[}(x) &= \lambda_0 \varphi_{0,0} = \gamma_0 \psi_{0,0} \\ &= \lambda_0 = -\gamma_0 \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}[}(x) + \gamma_0 \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}[}(x) \end{aligned}$$

Le seul moyen de vérifier l'égalité ci-dessus est de prendre $\lambda_0 = \gamma_0 = 0$. On peut faire le même raisonnement sur tous les intervalles $[i, i+1[$, $i \in \mathbb{Z}$ et ainsi la seule fonction pouvant appartenir à la fois à V_0 et W_0 est la fonction nulle, c'est à dire que $V_0 \cap W_0 = 0$.

2. Montrons que $\forall v_1 \in V_1, \exists!(v_0, w_0) \in V_0 \times W_0$ tels que $v_1 = v_0 + w_0$:

Soit $v_1 \in V_1$ alors il existe des réels $\mu_i, i \in \mathbb{Z}$ tels que $v_1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i \varphi_{1,i}$. On cherche à exprimer V_1 dans la base constituée des fonctions des bases de V_0 et W_0 , cela revient à trouver des réels λ_i et $\gamma_i, i \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$v_1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu_i \varphi_{1,i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \varphi_{0,i} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_i \psi_{0,i}$$

Si on s'intéresse à l'intervalle $[0, 1[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}[}(x) + \mu_1 \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}(x) &= \lambda_0 - \gamma_0 \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}[}(x) + \gamma_0 \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}(x) \\ &= (\lambda_0 - \gamma_0) \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}[}(x) + (\lambda_0 + \gamma_0) \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}(x) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne par identification :

$$\begin{cases} \mu_0 = \lambda_0 - \gamma_0 \\ \mu_1 = \lambda_0 + \gamma_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} \\ \gamma_0 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} \end{cases}$$

On peut faire de même sur les autres intervalles $[i, i+1[$, $i \in \mathbb{Z}$ ce qui nous donne au final :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \lambda_i = \frac{\mu_{2i} + \mu_{2i+1}}{2} \\ \gamma_i = \frac{\mu_{2i+1} - \mu_{2i}}{2} \end{cases} \quad (9)$$

On a donc trouvé des coefficients réels λ_i et γ_i , $i \in \mathbb{Z}$ uniques permettant de décomposer v_1 en $v_0 + w_0$ où $v_0 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i \varphi_{0,i} \in V_0$ et $w_0 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_i \psi_{0,i} \in W_0$ ce qui termine la démonstration. □

4.2 Généralisation : Espaces W_n

Nous pouvons facilement généraliser ce que nous venons de faire pour l'espace W_0 aux espaces W_n , $n \in \mathbb{N}$.

Définition 5. Ondelette $\psi_n \in W_n$ ($\star\star$) :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dots \end{cases} \quad (10)$$

De même il est clair que $W_n \subset V_{n+1}$, on peut donc écrire ψ_n en fonction des éléments $\varphi_{n+1,i}$ $i \in \mathbb{Z}$ de la base de V_{n+1} :

$$\psi_n = -\varphi_{n+1,0} + \varphi_{n+1,1} \quad (11)$$

On peut également montrer que ψ_n est bien orthogonale aux éléments $\varphi_{n,i}$ $i \in \mathbb{Z}$ de la base de V_n . Encore une fois, on définit les fonctions $\psi_{n,i}(x) = \psi_n(x - \frac{i}{2^n}) = \psi_0(2^n x - i)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. Ces fonctions forment une base de W_n orthogonale à la base de V_n .

De plus en généralisant la démonstration faite dans le cas $n = 0$ on montre que :

$$V_{n+1} = V_n \oplus W_n \quad (12)$$

En généralisant la formule (9), les coefficients de la décomposition d'une fonction v_{n+1} de V_{n+1} dans les bases de V_n (coefficients $\lambda_{n,i}$) et W_n (coefficients $\gamma_{n,i}$) sont donnés (en fonction des coefficients $\mu_{n+1,i}$ de v_{n+1} dans la base de V_{n+1}) par :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \lambda_{n,i} = \dots \\ \gamma_{n,i} = \dots \end{cases} \quad (13)$$

L'équation (13) nous permet de réaliser la décomposition d'une fonction de V_{n+1} en une somme de fonctions de V_n et W_n . C'est la transformation de Haar. La fonction de V_n obtenue correspond à une "moyenne" de la fonction de départ et la fonction de W_n correspond aux "détails". Il est clair que cette transformation est linéaire car les coefficients dans la nouvelle base (celle de $V_n \oplus W_n$) sont exprimés comme une combinaison linéaire

des coefficients de la fonction dans l'ancienne base (celle de V_{n+1}) par l'équation (13).

À partir de (13), nous pouvons exprimer les coefficients de la fonction dans la base de V_{n+1} (les $\mu_{n+1,2i}$ et $\mu_{n+1,2i+1}$) en fonction de ceux dans la base de $V_n \oplus W_n$ (les $\lambda_{n,i}$ et $\gamma_{n,i}$) :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \mu_{n+1,2i} = \dots \\ \mu_{n+1,2i+1} = \dots \end{cases} \quad (14)$$

C'est exactement la *transformée inverse de Haar*. La transformée de Haar est donc inversible.

5 Rappels sur les changements de bases (\star, \star)

Dans cette section nous considérons les polynômes de degré 2 définis sur l'intervalle $] -1, 1[$. On notera alors un tel polynôme par $p(x) \in \mathcal{P}_{]-1,1[}^2$. Une base naturelle de l'espace $\mathcal{P}_{]-1,1[}^2$ est donnée par $b_1 = \{1, x, x^2\}$. Soit $p(x) \in \mathcal{P}_{]-1,1[}^2$ dont les coefficients dans la base b_1 sont (a, b, c) , alors on a

$$p(x) = \dots$$

Une autre base pour $\mathcal{P}_{]-1,1[}^2$ peut être définie par les *polynômes de Legendre*. On obtient ainsi $b_2 = \{1, x, \frac{3x^2-1}{2}\}$. De même que précédemment, tout $p(x) \in \mathcal{P}_{]-1,1[}^2$ peut alors être représenté de manière unique dans b_2 par les coefficients (α, β, γ) avec

$$p(x) = \dots$$

Une particularité de la base b_2 est qu'elle est orthogonale, c'est à dire que les éléments qui la composent sont orthogonaux deux à deux. Sachant que deux polynômes (et plus généralement deux fonctions) sont orthogonaux si leur produit scalaire, défini par

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \int_I p_1(x)p_2(x)dx,$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est l'intervalle sur lequel sont définis les polynômes (dans notre cas $] -1, 1[$), montrez que la base b_2 est orthogonale :

$$\langle 1, x \rangle = \dots$$

$$\left\langle x, \frac{3x^2-1}{2} \right\rangle = \dots$$

$$\left\langle 1, \frac{3x^2-1}{2} \right\rangle = \dots$$

Sachant que la norme d'un polynôme (et plus généralement d'une fonction) est donnée par $\|p\|^2 = \langle p, p \rangle$, on peut calculer la norme des polynômes de Legendre,

$$\|1\|^2 = \dots$$

$$\|x\|^2 = \dots$$

$$\left\| \frac{3x^2 - 1}{2} \right\|^2 = \dots$$

et on peut en déduire une base orthonormée pour $\mathcal{P}_{]-1,1[}^2$ donnée par $b_3 = \dots$

Pour une décomposition d'un polynôme $p(x) \in \mathcal{P}_{]-1,1[}^2$ dans la base b_1 , il est possible d'en déduire facilement une décomposition dans la base b_2 en travaillant uniquement sur les coefficients (a, b, c) . En effet, nous avons la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \dots$$

On remarquera que M est inversible et que son inverse est donnée par :

$$M^{-1} = \dots$$

ce qui permet d'obtenir les coefficients (a, b, c) du polynôme $p(x)$ dans b_1 à partir de ses coefficients (α, β, γ) dans b_2 .

6 Cas des signaux finis

Nous nous intéressons dans cette section au cas particulier des signaux finis (ce sont les signaux généralement rencontrés en pratique), c'est à dire les signaux définis sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Dans la suite, nous considérerons un signal discret v_N (*i.e* un vecteur) composé de $N \in \mathbb{N}$ points. On considèrera que $v_N \in V_{\log_2(N)}$ (nous verrons pourquoi dans la suite).

Remarquons que si on considère un signal continu s , on peut commencer par le projeter sur l'espace $V_{\log_2(N)}$ et ainsi se ramener au cas précédent (on approche s par une fonction v_N constante par morceaux).

Décomposition de V_n dans $V_{n-1} \oplus W_{n-1}$: Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, cette décomposition est unique et donnée par l'équation (13) qui peut également s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = W_d^n v_n \tag{15}$$

où W_d^n est une matrice de taille $(\dots \times \dots)$ définie par :

$$W_d^n = \dots$$

On remarque que v_n a \dots composantes et que v_{n-1} et w_{n-1} en ont \dots . On pourra donc effectuer \dots décompositions (ce qui explique le choix de l'espace de départ afin de finir la décomposition avec l'espace V_0 , cela n'affecte pas la décomposition c'est juste un choix de notation dans le cas de signaux discrets).

Algorithme de décomposition sur K niveaux ($K \leq \log_2(N)$) (★★) :

Reconstruction : passage de $V_{n-1} \oplus W_{n-1}$ à V_n : On voit clairement que $\sqrt{2}W_d^n$ est orthogonale (les colonnes sont orthogonales deux à deux ou encore $(\sqrt{2}W_d^n)^t(\sqrt{2}W_d^n) = I_d$ où I_d est la matrice identité) ce qui implique que :

$$(\sqrt{2}W_d^n)^t = \dots \tag{16}$$

On peut donc inverser (15) :

$$v_n = \dots \tag{17}$$

Algorithme de reconstruction de V_K ($K \leq \log_2(N)$) à $V_{\log_2(N)}$ ():**

Exemple : Faites (à la main) la décomposition puis la reconstruction du vecteur

$$[7 \ 1 \ 6 \ 6 \ 3 \ -5 \ 4 \ 2]$$

.

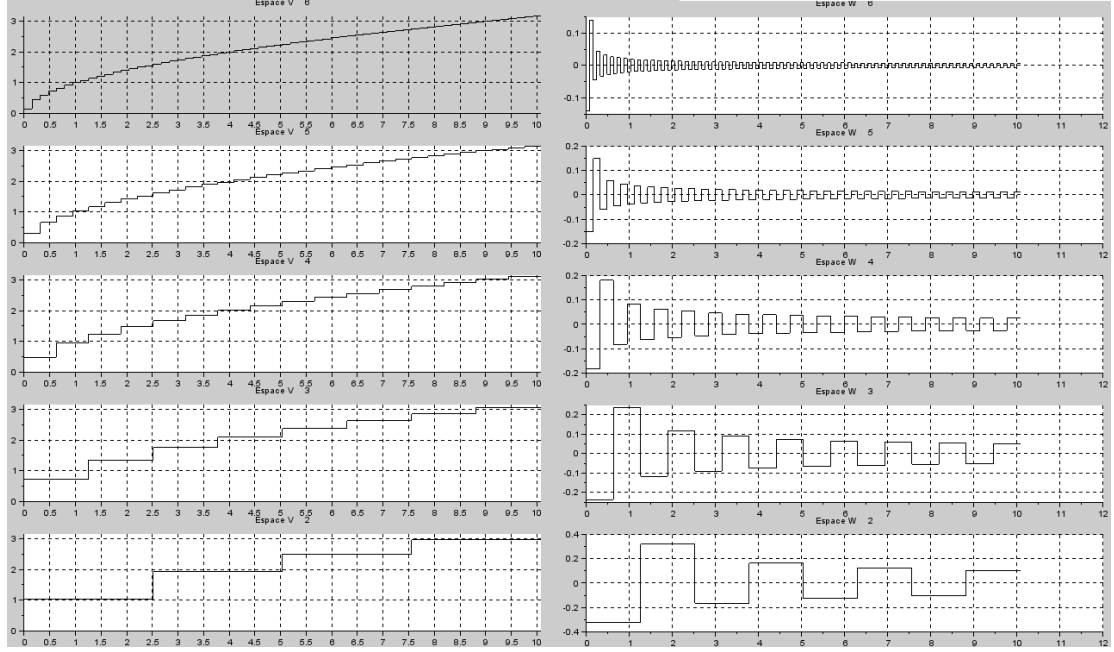


FIGURE 4 – Exemple de décomposition de la fonction $\sqrt{\cdot}$ (discrétisée initialement dans l'espace V_7 , i.e 2^7 points). La décomposition est faite jusqu'à l'espace V_2 (i.e. $2^2 = 4$ points).

7 Et en 2D ?

Il suffit simplement d'appliquer la transformée 1D sur les colonnes puis sur les lignes. La Figure 5 donne un exemple typique de la décomposition d'une image sur une base d'ondelettes (ici Haar). On peut distinguer l'image moyenne et les "détails" des deux niveaux de décomposition.

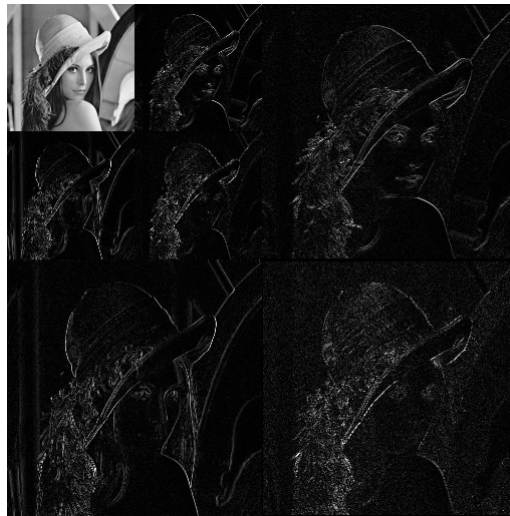


FIGURE 5 – Décomposition de l'image lena sur 2 niveaux.