Traitement numérique du Signal

4: Transformée de Fourier Discrète
4.1 : Sinusoïdes complexes en tant que bases de la Transformée

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

Un point de vue fréquentiel

Beaucoup de signaux sont “naturellement” périodiques :

- Battements de coeur
- Musique (cordes vibrantes, cavités résonnantes)
- Machines tournantes
- ...

Fourier est l’outil qui décrit le comportement périodique / fréquentiel des signaux :

- La DFT : Discrete Fourier Transform.
  Elle fait correspondre un signal discret de dimension N à un ensemble de N fréquences discrètes.
- La DFS : Discrete Fourier Series.
  Elle fait correspondre un signal discret *périodique* de dimension N à un ensemble de N fréquences discrètes.
- La DTFT : Discrete Time Fourier Transmorm.
  Elle fait correspondre un signal de dimension *infinie* une fonction périodique de période 2π.

L’ensemble de ces fréquences / fonction est appelé *Spectre*.

Signal Sinusoïdal Complexe

Rappels : Formules d'Euler

$$e^{\jmath\omega_o n} = \cos(\omega_o n) + \jmath \sin(\omega_o n)$$

$$\begin{array}{ll} e^{\jmath\pi} = \cos(\pi) + \jmath\sin(\pi) = -1 & |-1| = 1; \phi(-1) = \pi \\ e^{\jmath\pi/2} = \cos(\pi/2) + \jmath\sin(\pi/2) = \jmath & |j| = 1; \phi(\jmath) = \pi/2 \\ e^{-\jmath\pi/2} = \cos(-\pi/2) + \jmath\sin(-\pi/2) = -\jmath & |-\jmath| = 1; \phi(-\jmath) = -\pi/2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_o n) &= \frac{1}{2\jmath}\left(e^{\jmath\omega_o n} - e^{-\jmath\omega_o n}\right) = \frac{1}{2e^{j\pi/2}}\left(e^{\jmath\omega_o n} + e^{\jmath\pi} e^{-\jmath\omega_o n}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\jmath\pi/2}e^{\jmath\omega_o t} + \frac{1}{2}e^{\jmath\pi/2}e^{-\jmath\omega_o n} \\ \cos(\omega_o n) &= \frac{e^{\jmath\omega_o n} + e^{-\jmath\omega_o n}}{2} \end{aligned}$$

Signal Sinusoïdal Discret Complexe

Sinusoïde complexe périodique

Soit un signal $x[n] = e^{\jmath(\omega_o n + \phi)}$, $n = 0, 1, ...N-1$, $\omega_o = 2\pi f_o$
Pour que $x[n] = x[n + kT_o]$, $k = 1, 2, ...$ il faut :

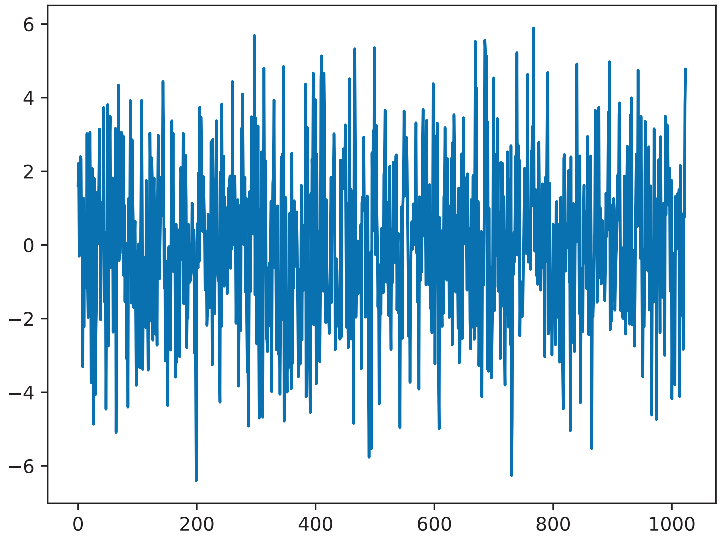
- ($k = 1$) que $e^{\jmath\phi}e^{\jmath\omega_o n} = e^{\jmath\phi}e^{\jmath\omega_o(n+T_o)}$, donc T_o entier et $T_o = \frac{1}{f_o}$. Donc f_o, la fréquence fondamentale, est un nombre rationnel.
- Le cas "extrême" est le cas où $T_o = \infty$, donc $f_o = 0$, soit un signal continu sur son support, et valant $x[n] = e^{\jmath\phi}$.
- Le cas où le signal est a-périodique correspond à $T_o = N$ ($f_o = 1/N$).
- Le cas "suivant" est le cas où $T_o = N/2$ et donc $f_o = 2/N$
- On déduit aisément qu'on aura les périodes $T_o = N/k$, $k = 1, ...N/2$, si N/k entier et donc les fréquences $f_o = k/N$.

Une sinusoïde discrète complexe peut s'écrire

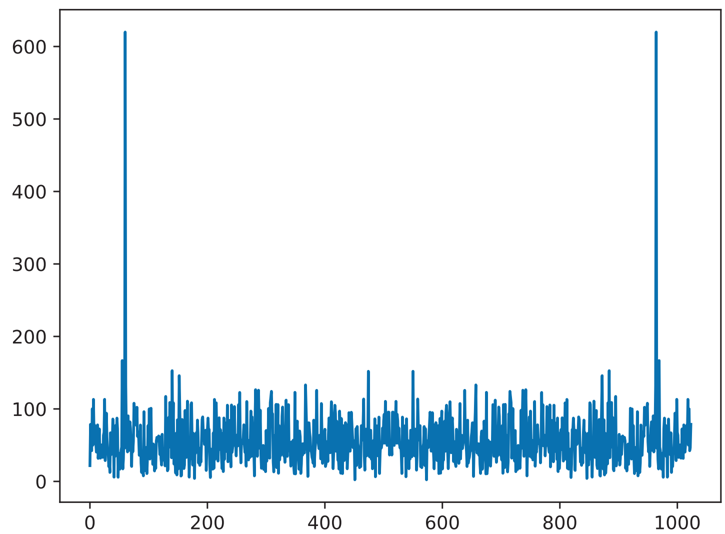
$$x[n] = e^{\jmath 2\pi \frac{k}{N} n}$$

- Si $x[n]$ est de longueur N, il faut $f_o = \frac{k}{N}$ entier.
- Si $x[n]$ est de dimension infinie, $f_o = \frac{k}{N}$ est peut être quelconque.

Signal Temporel



Signal Temporel ... et sa vision Fréquentielle



La base de Fourier : les sinusoïdes complexes

On se limite aux signaux de dimension N

- En tant que sinusoïde : $w_k[n] = e^{\jmath 2\pi \frac{k}{N} n} \quad n, k = 0, 1, \cdots, N-1$
- En tant que vecteur : $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k=0,1,\cdots,N-1}$ et $w_n^{(k)} = e^{\jmath 2\pi \frac{k}{N} n}$

Base orthogonale : soit $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i^*$, on a alors

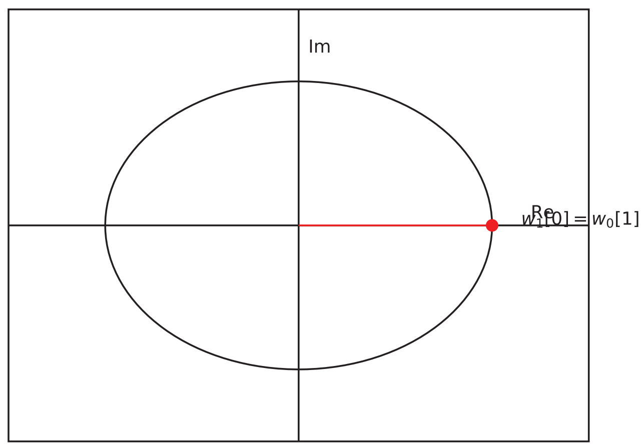
$$< \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k)} >= \sum_{i=0}^{N-1} e^{\jmath 2\pi \frac{k}{N} i} e^{-\jmath 2\pi \frac{k}{N} i} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{0} = N$$

PAS NORMEE: il faudrait un facteur de normalisation $1/\sqrt{N}$.

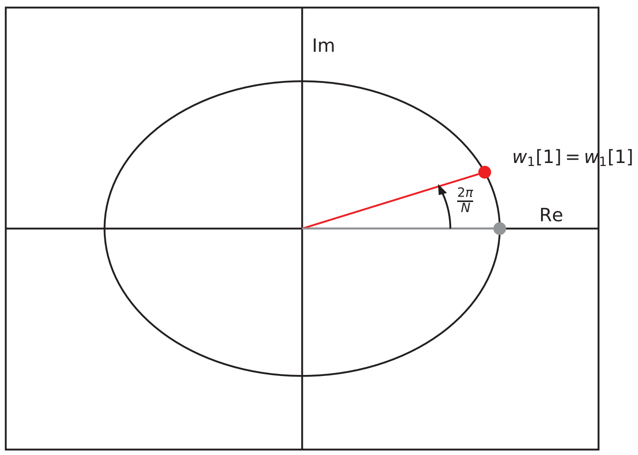
Et pour $k \neq k\prime$:

$$< \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k\prime)} >= \sum_{i=0}^{N-1} e^{\jmath 2\pi \frac{k}{N} i} e^{-\jmath 2\pi \frac{k\prime}{N} i} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{\jmath 2\pi \frac{k-k\prime}{N} i} = 0$$

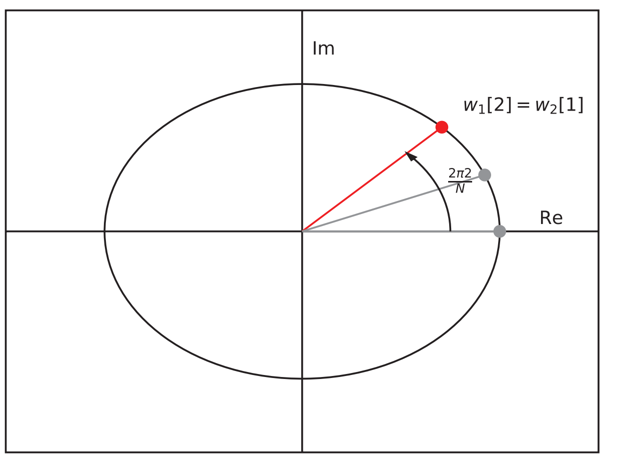
Que veulent dire ces fonctions de base



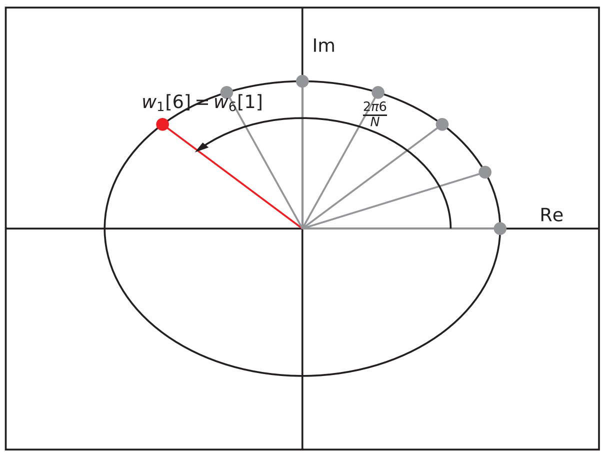
Que veulent dire ces fonctions de base



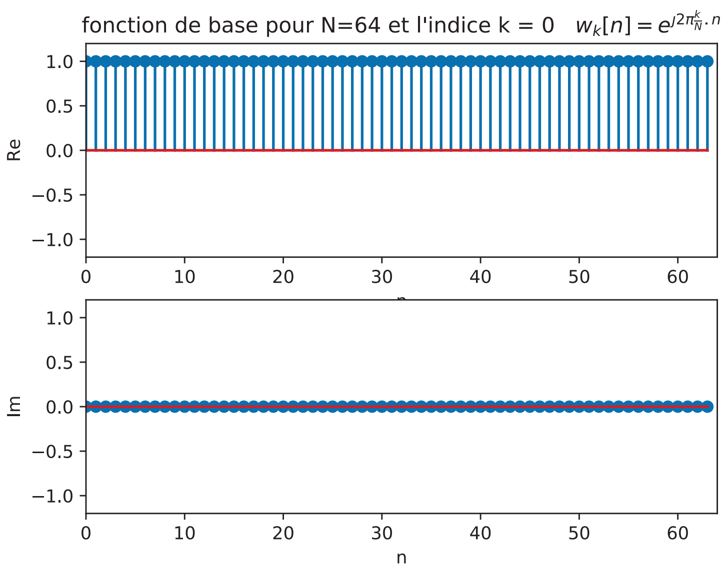
Que veulent dire ces fonctions de base



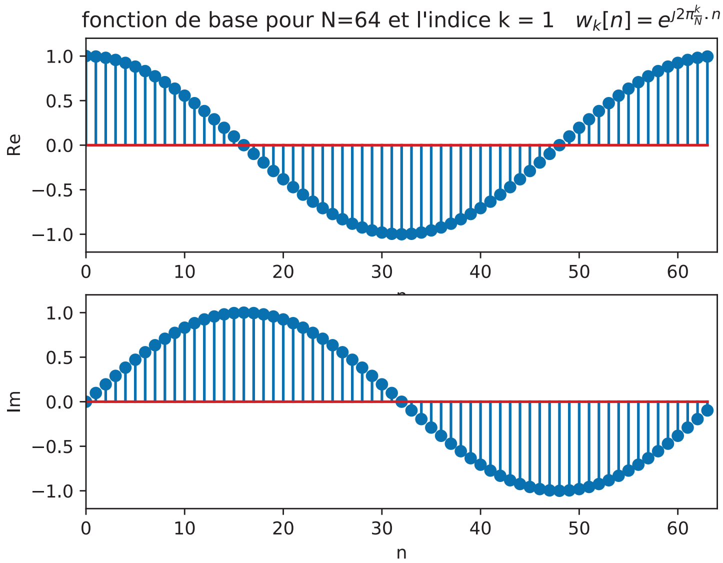
Que veulent dire ces fonctions de base



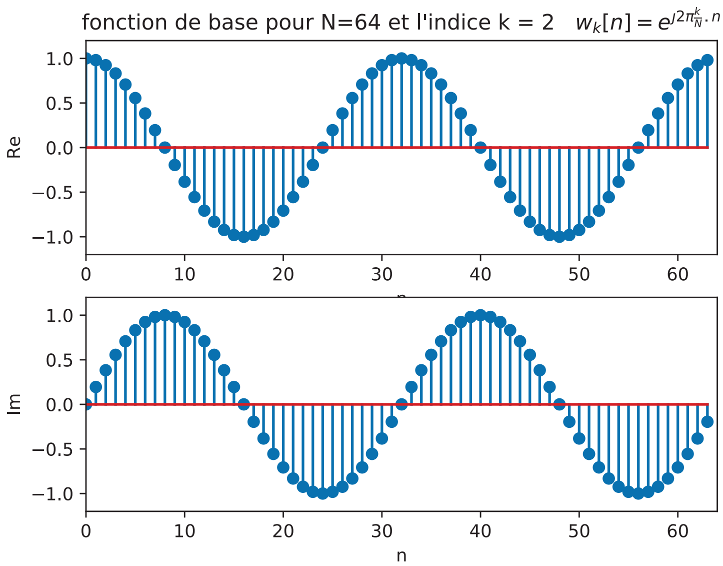
Les fonctions de base en temporel



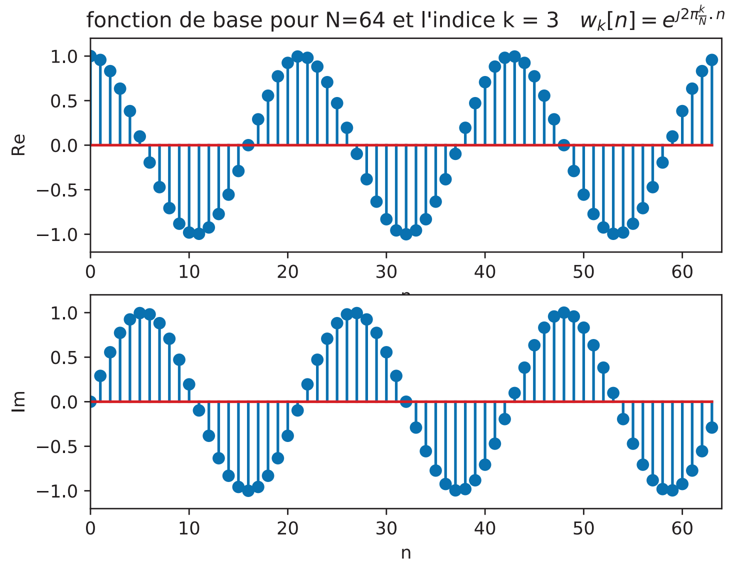
Les fonctions de base en temporel



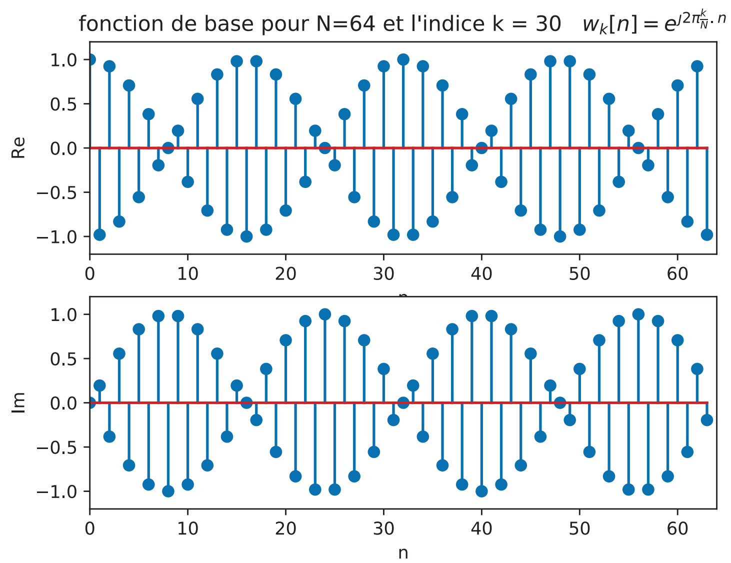
Les fonctions de base en temporel



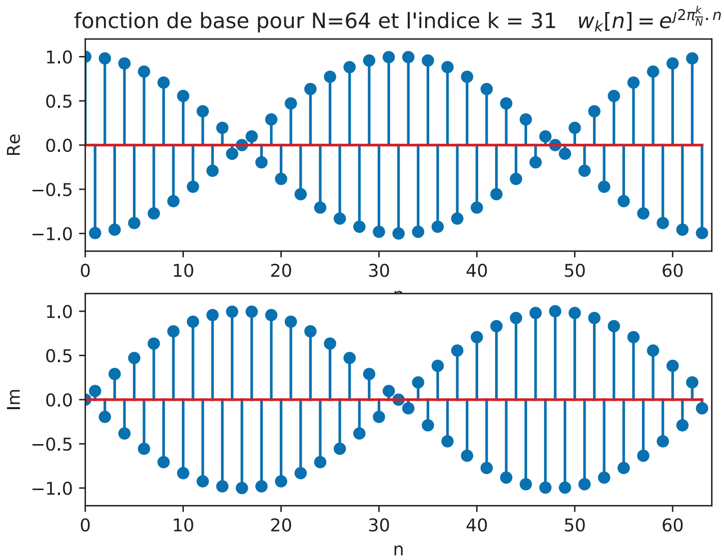
Les fonctions de base en temporel



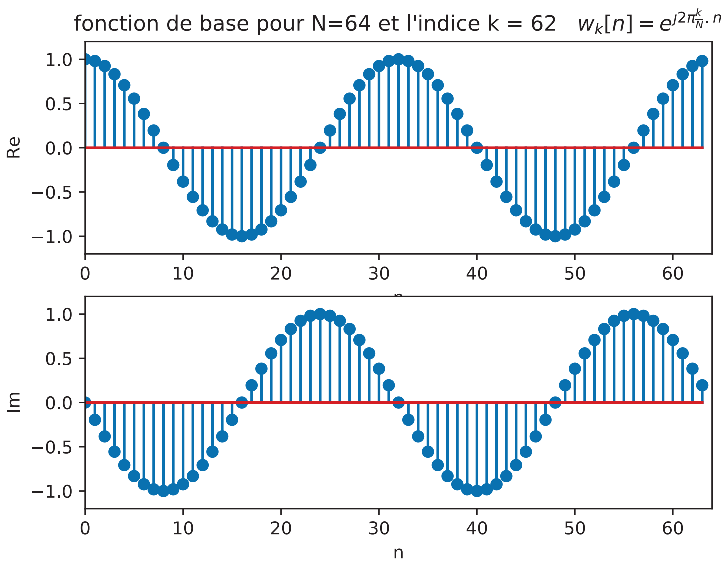
Les fonctions de base en temporel



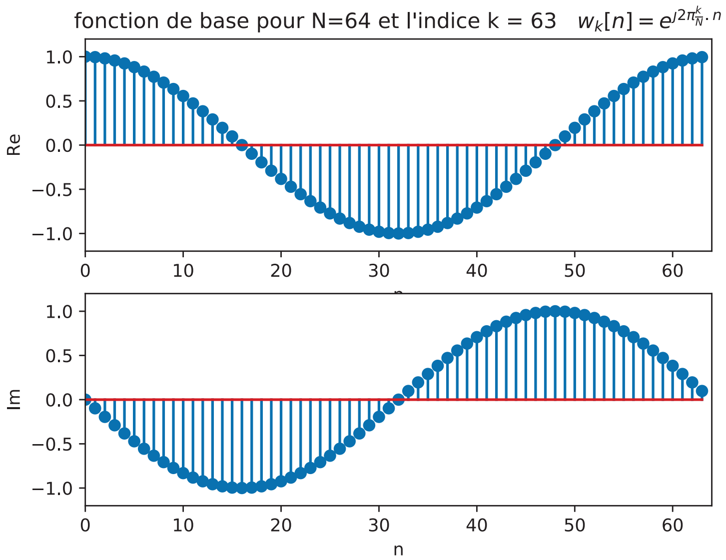
Les fonctions de base en temporel



Les fonctions de base en temporel



Les fonctions de base en temporel



Transformées de Fourier / changement de base

Analyse - Définition de la DFT

$$X_k = < \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{x} >$$

DFT : Discrete Fourier Transform

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

Synthèse - Définition de la DFT Inverse

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{w}^{(k)}$$

IDFT : Inverse Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} s, \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

Transformée de Fourier : vue matricielle

Changement de base = Multiplication par la matrice de changement de base

On définit : $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ et la matrice $\mathbf{W}$ telle que $\mathbf{W}_{n,m} = W_N^{nm}$:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \cdots & W^{(N-1)} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Analyse -DFT matricielle

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

DFT : Discrete Fourier Transform

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{k2\pi}{N}nk}, \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

Synthèse - IDFT matricielle

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^H\mathbf{X}$$

IDFT : Inverse Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

Traitement numérique du Signal

4: Transformée de Fourier Discrète
4.2 : Propriétés de la transformée de Fourier Discrète

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

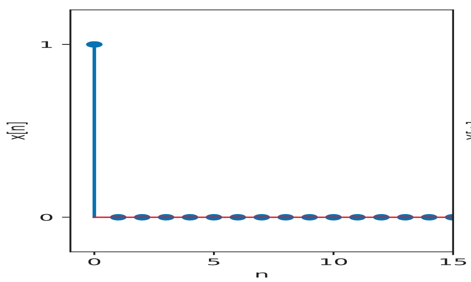
La DFT est linéaire

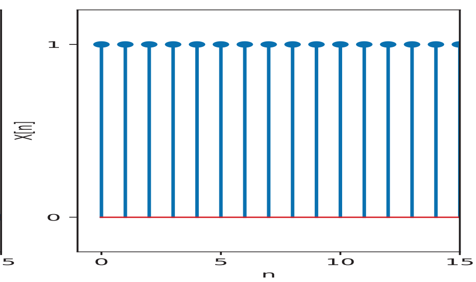
Tout est linéaire ....

$$\mathbb{DFT}(\alpha x[n] + \beta y[n]) = \alpha \mathbb{DFT}(x[n]) + \beta \mathbb{DFT}(y[n])$$

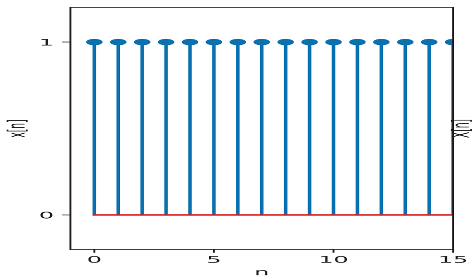
La DFT d'une impulsion est une constante et vice-versa

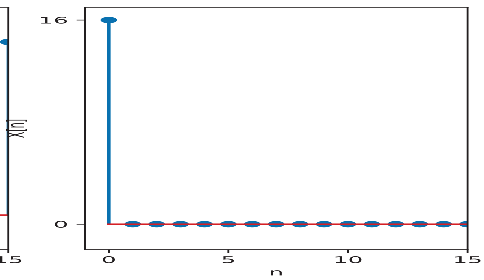
Soit $x[n] = \delta[n]$ $(x[n] \in \mathbb{C}^N)$: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} nk} = 1$





Soit $x[n] = \delta[n]$: $(x[n] \in \mathbb{C}^N)$: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} nk} = N\delta[k]$





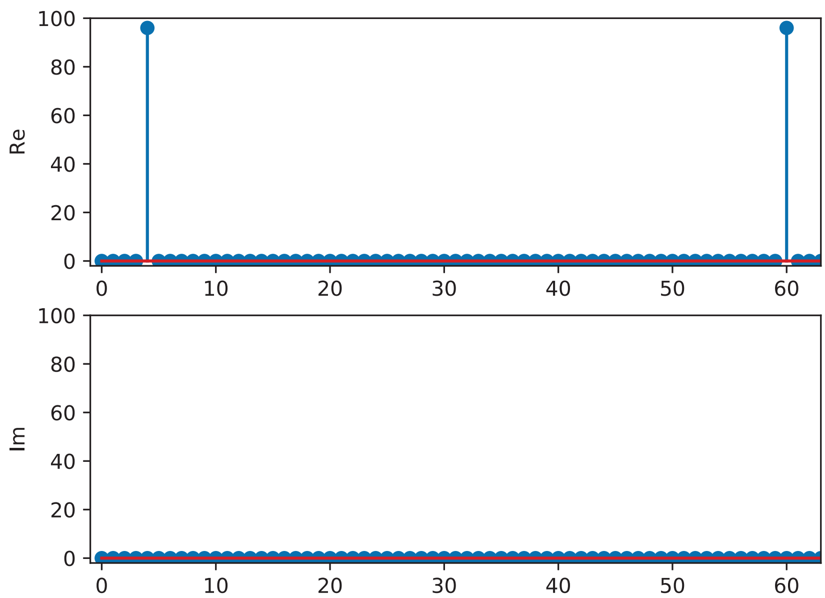
DFT d'un cosinus $(x[n] \in \mathbb{C}^{64})$

$$
\begin{aligned}
x[n] &= 3\cos\left(\frac{2\pi}{16} n\right) \\
&= \frac{3}{2}\left[e^{\jmath \frac{2\pi}{64} 4n} + e^{-\jmath \frac{2\pi}{64} 4n}\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[e^{\jmath \frac{2\pi}{64} 4n} + e^{\jmath \frac{2\pi}{64} 60n}\right] \\
&= \frac{3}{2}(w_4[n] + w_{60}[n])
\end{aligned}
$$

DFT d'un cosinus ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

$$\begin{aligned} X[k] &= < w_k[n], x[n] > \\ &= \tfrac{3}{2} < w_k[n], w_4[n] > + \tfrac{3}{2} < w_k[n], w_{60}[n] > \\ &= \begin{cases} \tfrac{3}{2}.64 & \text{pour } k = 4, 60 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

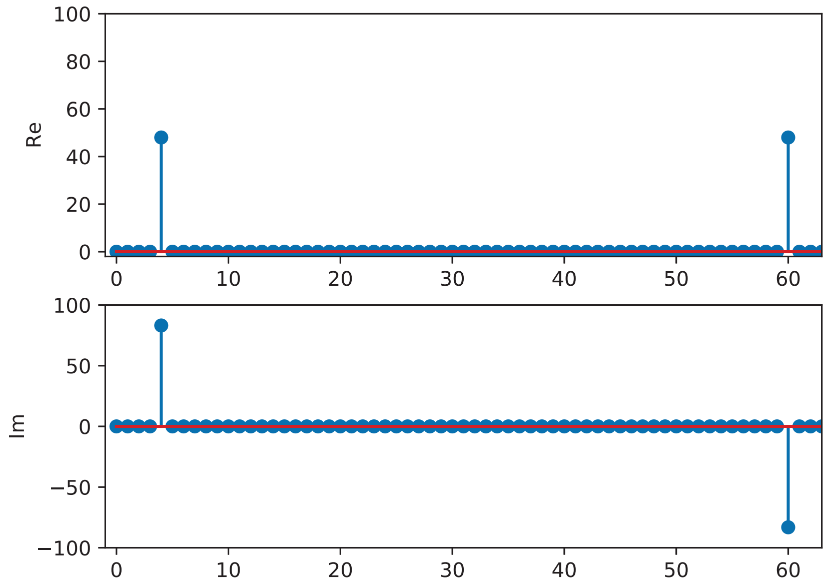
DFT d'un cosinus ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)



DFT d'un cosinus déphasé ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

$$x[n] = 3\cos(\frac{2\pi}{16}n+\frac{\pi}{3}) = 3/2\left[e^{\jmath\frac{2\pi}{64}4n}e^{\jmath\frac{\pi}{3}} + e^{-\jmath\frac{2\pi}{64}4n}e^{-\jmath\frac{\pi}{3}}\right] = 3/2(e^{\jmath\frac{\pi}{3}}w_4[n]+e^{-\jmath\frac{\pi}{3}}w_{60}[n])$$

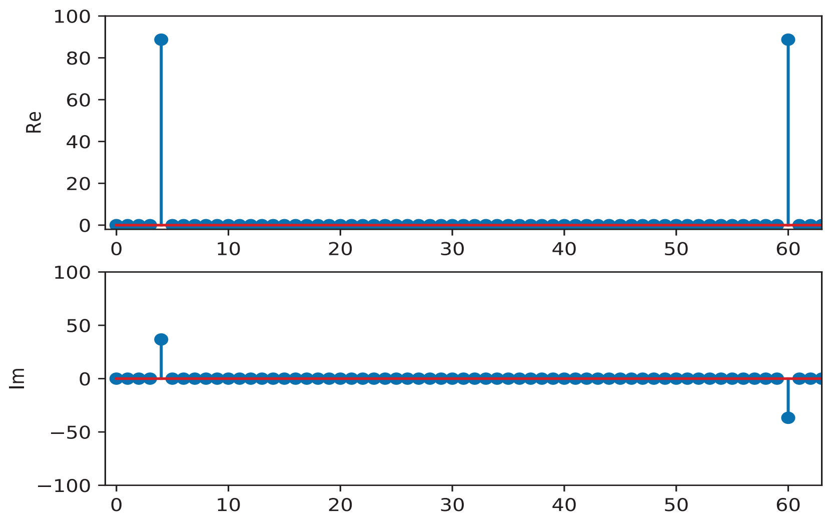
$$X[k] =< w_k[n], x[n] >= 96e^{\jmath\frac{\pi}{3}}\delta(4) + 96e^{-\jmath\frac{\pi}{3}}\delta(60)$$



DFT d'un cosinus retardé ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

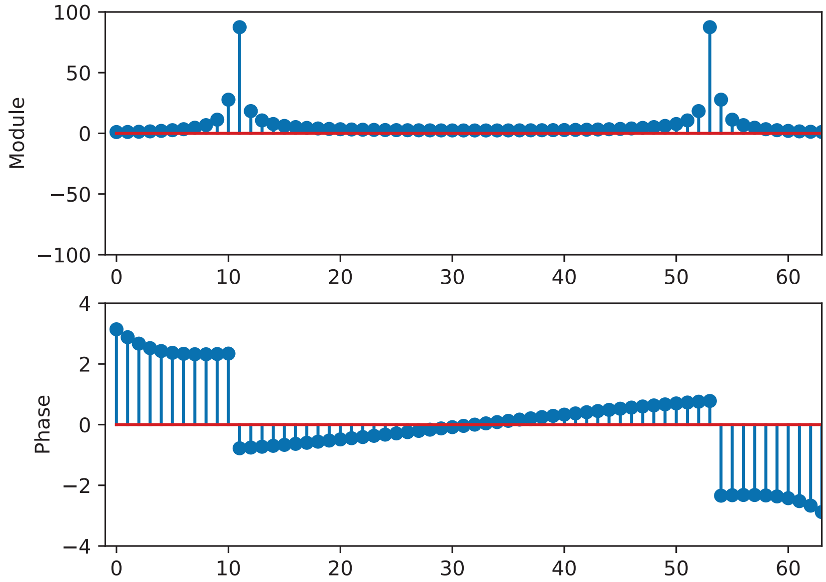
$$x[n] = 3\cos(\frac{2\pi}{16}(n+1)) = 3/2\left[e^{\jmath\frac{2\pi}{64}4n}e^{\jmath\frac{2\pi}{16}} + e^{-\jmath\frac{2\pi}{64}4n}e^{-\jmath\frac{2\pi}{16}}\right] = 3/2(e^{\jmath\frac{2\pi}{16}}w_4[n]+e^{-\jmath\frac{2\pi}{16}}w_{60}[r$$

$$X[k] =< w_k[n], x[n] >= 96e^{\jmath\frac{2\pi}{16}}\delta(4) + 96e^{-\jmath\frac{2\pi}{16}}\delta(60)$$



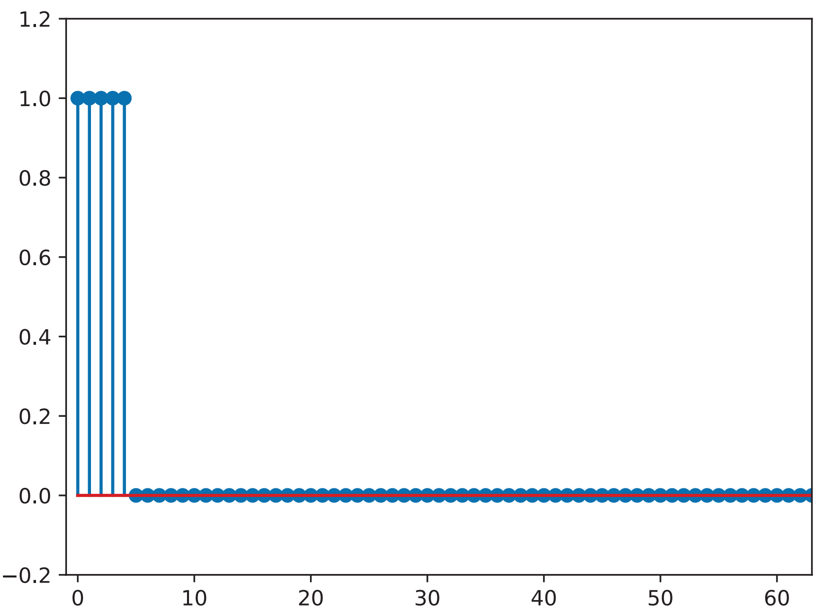
DFT d'un cosinus de fréquence non multiple de 1/N ($x[n] \in \mathbb{C}^{64}$)

$$x[n] = 3\cos(\frac{2\pi}{64}10.75n)$$



DFT d'un échelon de longueur M ($x[n] \in \mathbb{C}^N$)

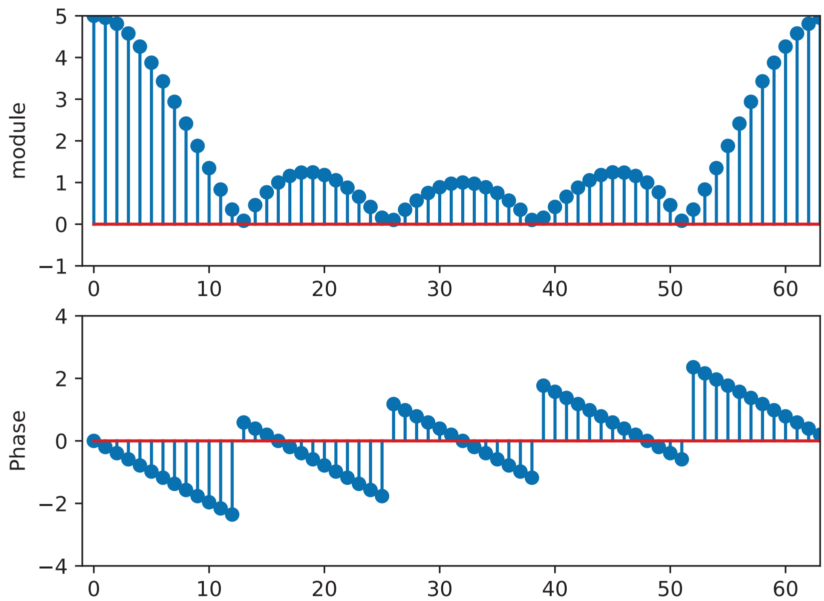
$$x[n] = \sum_{l=0}^{M-1} \delta[n-h], n = 0, 1, \cdots, N-1$$



DFT d'un échelon de longueur M ($x[n] \in \mathbb{C}^N$)

$$
\begin{aligned}
X[k] &= = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} nk} \\
&= \frac{1 - e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} Mk}}{1 - e^{-\jmath \frac{2\pi}{N} k}} \\
&= \frac{e^{-\jmath \frac{\pi}{N} Mk} \left[e^{\jmath \frac{\pi}{N} Mk} - e^{-\jmath \frac{\pi}{N} Mk} \right]}{e^{-\jmath \frac{\pi}{N} k} \left[e^{\jmath \frac{\pi}{N} k} - e^{-\jmath \frac{\pi}{N} k} \right]} \\
&= \frac{\sin(\frac{\pi}{N} Mk)}{\sin(\frac{\pi}{N} k)} e^{-\jmath \frac{\pi}{N} (M-1)k}
\end{aligned}
$$

DFT d'un échelon de longueur $M = 5$ ($x[n] \in \mathbb{C}^N$, $N = 64$)



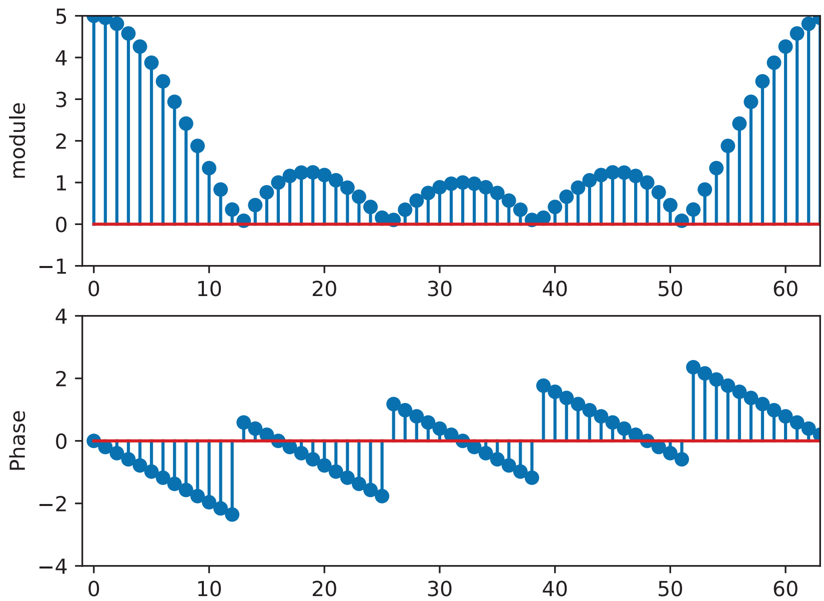
DFT d'un signal réel ($x[n] \in \mathbb{R}^N$)

La DFT est toujours Complexe !

$$\begin{aligned}
X[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[N-k]e^{-\jmath\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[k]e^{-\jmath\frac{2\pi}{N}n(N-k)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[k]e^{\jmath\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x^*[k]e^{-\jmath\frac{2\pi}{N}nk}\right)^* \\
&= X^*[k]
\end{aligned}$$

Donc : symétrie en valeur absolue

DFT d'un signal réel



Signaux Périodiques de taille infinie

De la DFT à la DFS : Discrete Fourier Series

Soit un signal $x[n]$ de taille finie $n \in [0, \cdots N-1]$, et sa DFT $X[k]$.
Comme $W_N^{-nk} = W_N^{-(n+iN)k} (= W_N^{-n(k+iN)})$,

on peut écrire $x[n+iN] = x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \forall i \in \mathbb{Z}$.

Par convention, on écrira le signal périodisé $\widetilde{x}[n], n \in \mathbb{Z}$

Signaux Périodiques de taille infinie

Périodisation temporelle et DFT

Périodisation temporelle et DFT

Soit $X[k], k \in [0, \cdots, N-1]$, la DFT de $x[n], n \in [0, \cdots, N-1]$ alors

$$\widetilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, n \in \mathbb{Z}$$

est le signal périodique de taille infinie comprenant $\mathbf{x} = \{x[n]\}_{n=0,\cdots N-1}$ dans chaque période.

Signaux Périodiques de taille infinie

De la DFT à la DFS : Discrete Fourier Series

Serie de Fourier Discrète (DFS) et Transformée de Fourier Discrète (DFT)

On définit alors la DFS

$$\widetilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \widetilde{x}[n] W_N^{nk}, k \in \mathbb{Z}$$

correspondant à

$$\widetilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, n \in \mathbb{Z}$$

Signaux apériodiques de taille infinie

Vers la Transformée de Fourier des Signaux à Temps Discret (DTFT)

- Pour les signaux de taille finie (N) : fréquences $\frac{k}{N}, k = 0, \ldots, N-1$
- Pour les signaux de taille infinie et périodiques (de période N) : idem
- Pour les signaux de taille infinie et apériodiques : fréquences f continues (entre 0 et 1), pulsation $\omega = 2\pi f$ continue entre 0 et 2π.

DTFT (Discrete-Time Fourier Transform)

La transformée de Fourier de signaux à Temps Discret d'un signal $x[n]$ est donnée (si la série converge) par :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\jmath\omega n}$$

La DTFT est une fonction :

- Complexe
- de la pulsation ω
- Périodique de période 2π (car $e^{j(\omega+2\pi)} = e^{j\omega}$)

Signaux apériodiques de taille infinie

Vers la Transformée de Fourier des Signaux à Temps Discret (DTFT)

DTFT Inverse

La DTFT peut être inversée (si la série converge) par

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Notation de la paire de transformées

$$x[n] \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} X(e^{j\omega})$$

Quand le contexte indique clairement que la transformée est une DTFT, on écrit :

$$x[n] \rightleftharpoons X(e^{j\omega})$$

DTFT Inverse

Sachant que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-k)} d\omega = 2\pi\delta[n-k]$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n')} d\omega = 2\pi x[n]$$

Existence de la DTFT

Soit la série $X_M(e^{\jmath\omega}) = \sum_{-M}^{M} x[n]e^{-\jmath\omega n}$; DTFT = $\lim_{M\to\infty} X_M(e^{\jmath\omega})$.
Donc la DTFT existe si $x[n]$ est absolument sommable :

$$\lim_{M\to\infty} X_M(e^{\jmath\omega}) \leq \lim_{M\to\infty} \sum_{-M}^{M} |x[n]e^{-\jmath\omega n}| = \sum_{-M}^{M} |x[n]| < \infty$$

En pratique, la DTFT existe si $x[n]$ est de carré sommable, c'est à dire d'énergie finie.
Dans ce cas :

- on a convergence au sens des moindres carrés : $\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X_M(e^{\jmath\omega}) - X(e^{\jmath\omega})|^2 d\omega = 0$
- $X(e^{j\omega})$ peut être discontinu

DTFT et changement de base

Soit un signal $x[n]$ dans $l_2(\mathbb{Z})$ (de carré sommable et n prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$).
Pour toute valeur ω_o, on peut voir la DTFT comme un produit intérieur de $x[n]$ avec $e^{\jmath\omega_o n}$. On a donc une projection de $x[n]$ sur un *vecteur de base* $e^{\jmath\omega_o n}$:

$$X(e^{\jmath\omega}) = < e^{\jmath\omega n}, x[n] >$$

Mais on a une infinité de vecteurs de base $\{e^{\jmath\omega n}\}_{\omega\in\mathbb{R}}$.
De plus, $< e^{\jmath\omega n}, e^{\jmath\omega_o n} >= \delta(\omega - \omega_o)$ et on a donc une base orthonormale ($\delta(\omega)$ étant ici la fonction généralisée de Dirac).
On notera les transformations remarquables suivantes :

- $\alpha \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \alpha\delta(\omega)$
- $\cos(\omega_o n + \phi) \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}[e^{\jmath\phi}\delta(\omega - \omega_o) + e^{-\jmath\phi}\delta(\omega + \omega_o)]$
- $\sin(\omega_o n + \phi) \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \frac{-\jmath}{2}[e^{\jmath\phi}\delta(\omega - \omega_o) - e^{-\jmath\phi}\delta(\omega + \omega_o)]$

Symétries

- $x[-n] \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} X(e^{-\jmath\omega})$
- $x^*[n] \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} X^*(e^{-\jmath\omega})$
- Si $x[n]$ réel : $X(e^{\jmath\omega}) = X^*(e^{-\jmath\omega})$
- Si $x[n] = x[-n] \in \mathbb{R}$: $X(e^{\jmath\omega}) \in \mathbb{R}$
- Si $x[n] = -x[-n] \in \mathbb{R}$: $\text{Re}\{X(e^{\jmath\omega})\} = 0$

Linéarité, décalage et énergie

- $\alpha x[n] + \beta y[n] \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \alpha X(e^{\jmath\omega}) + \beta Y(e^{\jmath\omega})$
- $x[n - n_o] \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} e^{-\jmath\omega n_o} X(e^{\jmath\omega})$
- $e^{\jmath\omega_o n} x[n] \overset{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} X(e^{\jmath(\omega-\omega_o)})$

Conservation d'énergie ... Egalité de Parseval :

$$< x[n], y[n] >= \frac{1}{2\pi} < X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega}) >$$

Soit, en utilisant les définitions de produit intérieur sur $l_2(\mathbb{Z})$ et sur $L_2([-\pi, \pi])$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})d\omega$$

Théorème de Parseval : conservation d'énergie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$