

# Traitement numérique du Signal

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Octobre 2018

# Introduction

## Informations

- Cours sur Moodle
- Questions par e-mail : deneire@unice.fr

## Ressources

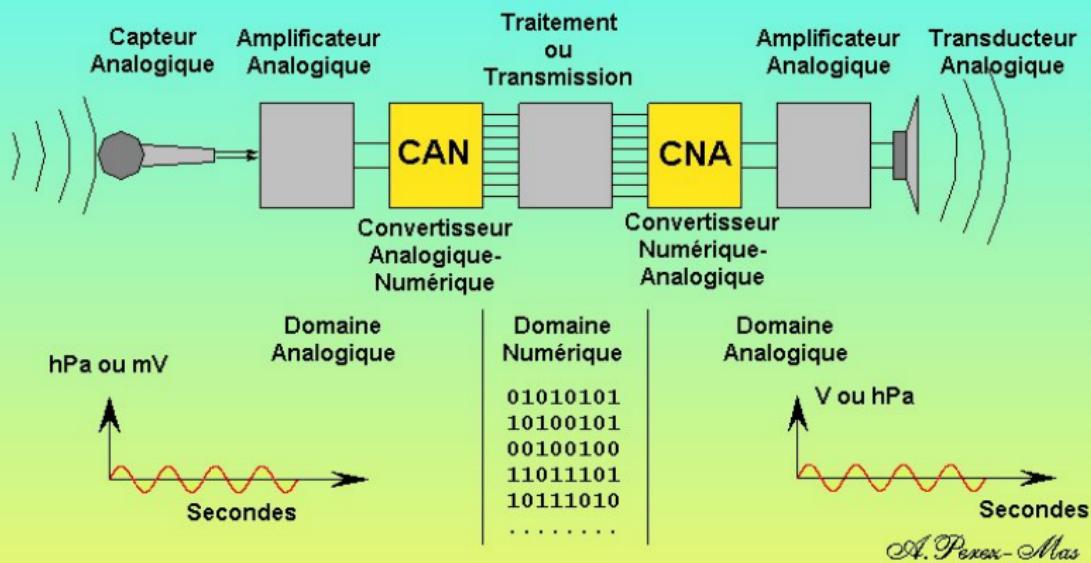
- Le livre de référence “SP4COMM” accessible via Jalon
- Notebooks Jupyter sur <https://jupyter.polytech.unice.fr:8000> (passer par le VPN !)
- Les transparents + transparents sonorisés

## Evaluation

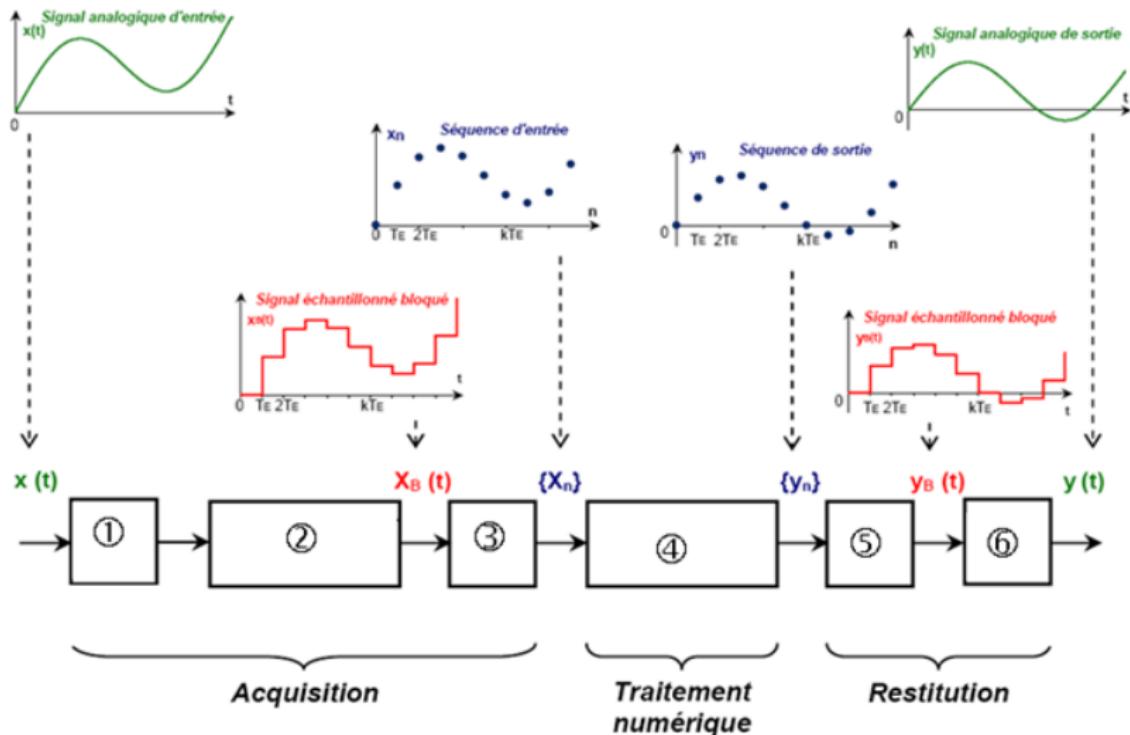
- 1 Quizz avant chaque cycle : 20 %
- 2 Homeworks intermédiaires (écrire un Notebook Jupyter) : 30 %
- 1 DS final (2 heures) : 50 %

# Chaîne de traitement de signal

## CHAINE DE TRAITEMENT NUMERIQUE

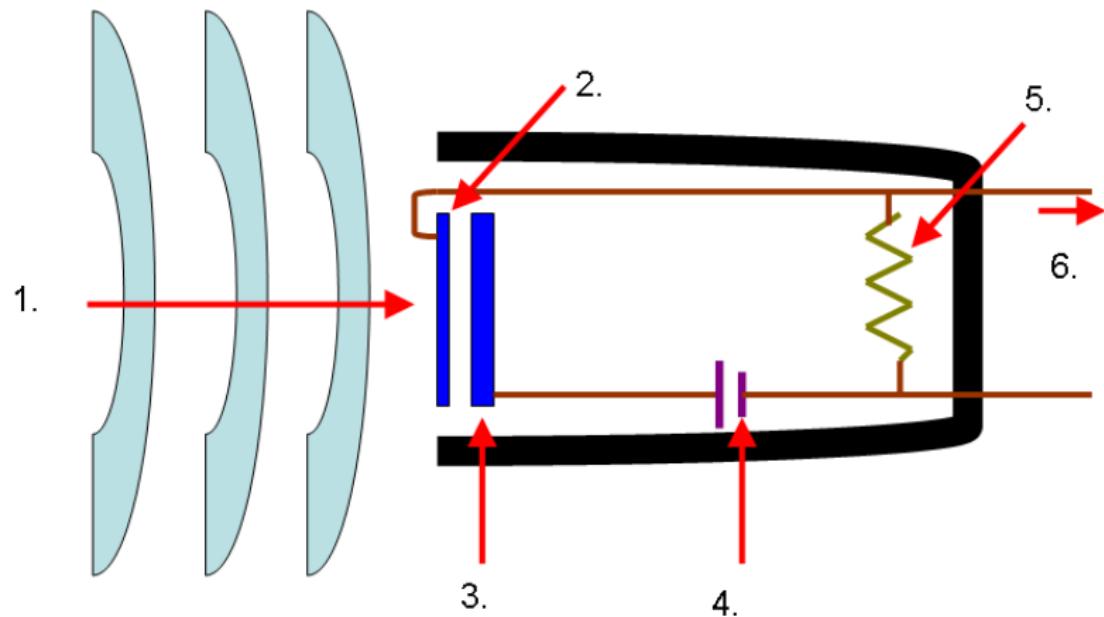


# Chaîne de traitement de signal

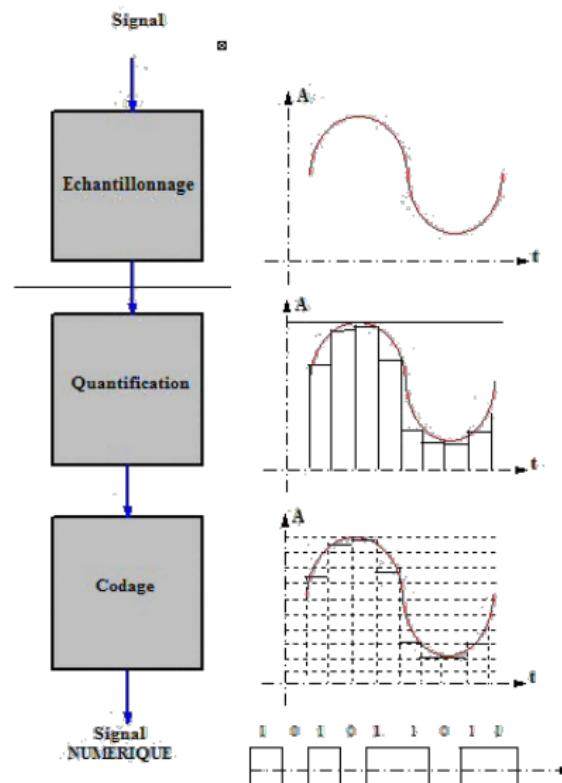


# 1 : mesure d'une grandeur physique - exemple du micro

Condenser Microphone



## 2-3 : Bloqueur - Echantillonneur - codage



## 4 : Traitement de signal proprement dit

- Codage (de parole, d'image, ....)
- Mise en forme de signaux (compression d'image, de son, ...)
- (dont) Débruitage.
- Extraction d'informations (température, réception d'images/parole, détection de cancers, reconnaissance de la parole, "Intelligence Artificielle")

## 4 : Outils du traitement de signal

- Analyse fréquentielle
- Analyse temps-fréquence
- Notions théoriques sur le bruit
- Filtrage linéaire

## 5 : Conversion Numérique - Analogique

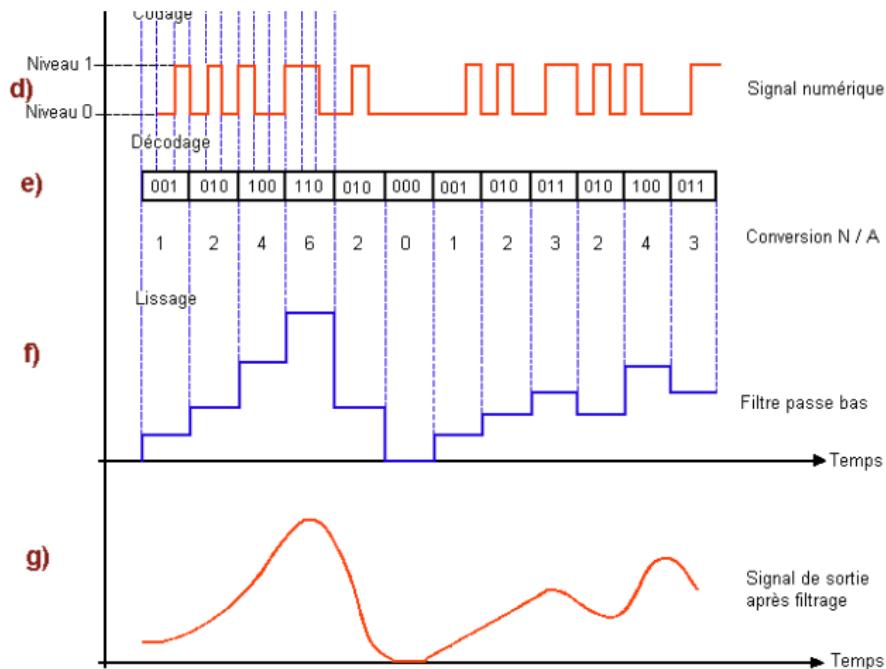
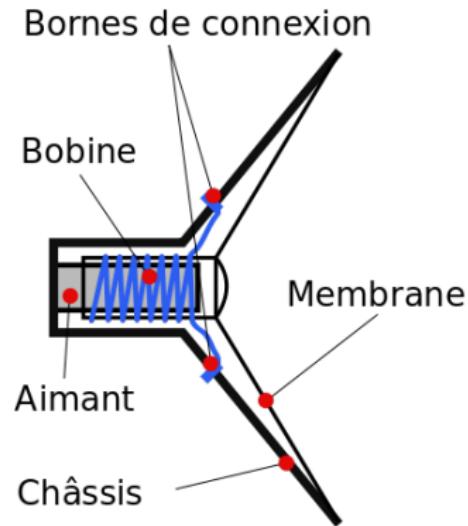


Fig. 5. - Conversion A / N - N / A.

## 6 :Transducteur - exemple du haut-parleur



## En temps discret : comprendre les notions fréquentielles et temporelles

### Objectifs

- Savoir ce qu'est un signal (continu), le caractériser, connaitre les opérations de base (Cycle I)
- Savoir manipuler l'outil de base : les espaces vectoriels (Cycle II)
- Savoir manipuler un signal à temps discret, éléments de Traitement en Python (Cycle III)
- Comprendre et manipuler le domaine fréquentiel (TFD - Cycle IV)
- Comprendre et manipuler les notions Temps-Fréquence (STFT - Cycle V)

# Traitement numérique du Signal

## 1: Signaux élémentaires

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Septembre 2018

## Quelques signaux déterministes

On se limitera ici à quelques signaux déterministes, utilisés principalement dans les systèmes Linéaires Invariant dans le Temps (LTI).

### Exponentielle complexe

$$x(t) = e^{st} \quad (1)$$



$$s = \sigma + i\omega$$

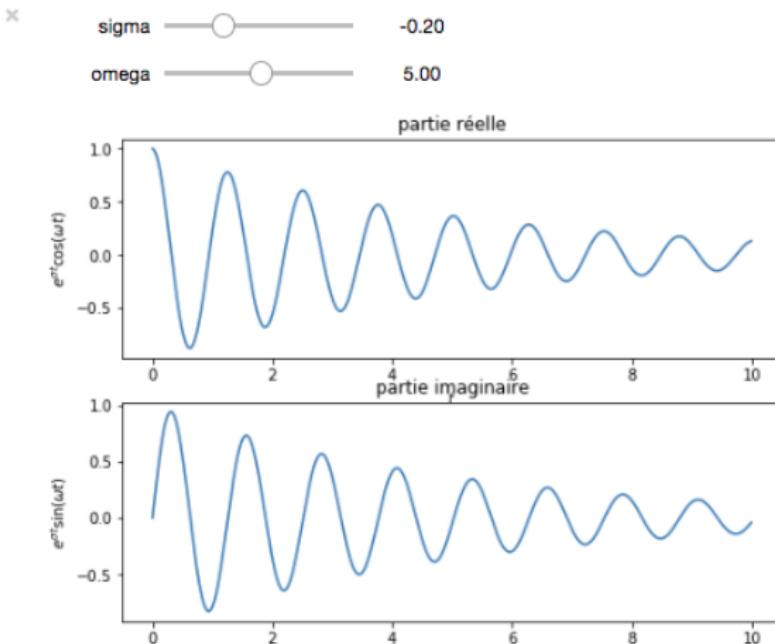
- $\sigma$ : amortissement et  $\omega$  pulsation
- on peut réécrire  $x(t)$  :

$$x(t) = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \quad (2)$$

- pour  $t > 0$ , l'enveloppe est :
  - exponentiellement décroissante en fonction du temps pour  $\sigma < 0$ ,
  - constante pour  $\sigma = 0$ ,
  - exponentiellement décroissante en fonction du temps pour  $\sigma > 0$ ,

On utilise surtout  $x(t) = e^{i\omega t}$  (pour permettre de faire une analyse harmonique du signal).

## Exponentielle complexe : partie réelle et imaginaire



## La distribution de Dirac

### Distribution de Dirac - Impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$\delta(t = 0) = \infty$$

$$\delta(t \neq 0) = 0$$

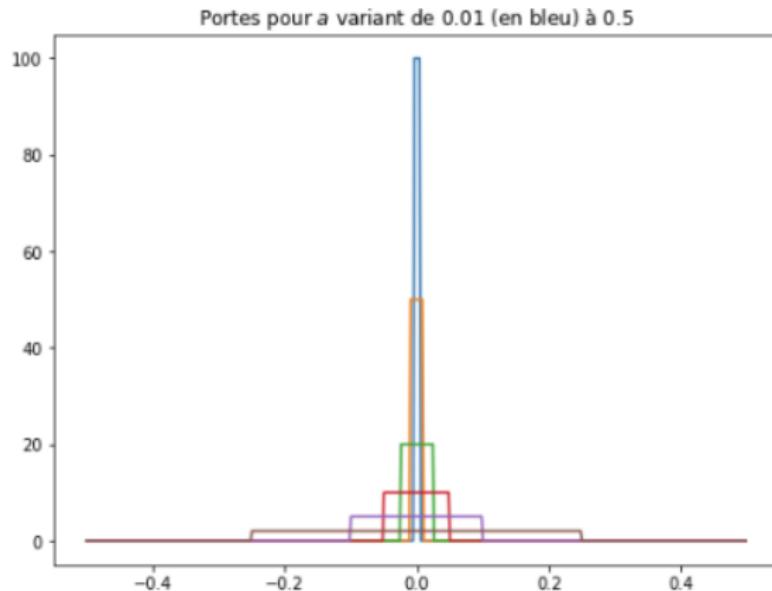
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

En particulier, on peut définir  $\delta(t)$  de la façon suivante, soit la fonction porte :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq -\frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

On définit

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi_a(t)$$



# Propriété de la distribution de Dirac

## 1 Propriété de sélection

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t) = x(0) \quad (3)$$

où  $x(t)$  est différentiable à  $t = 0$ .

## 2 Multiplication

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t) \quad (4)$$

où  $x(t)$  est différentiable à  $t = 0$ .

## 3 Linéarité

$$a \cdot \delta(t) + b \cdot \delta(t) = (a + b) \cdot \delta(t) \quad (5)$$

## 4 Mise à l'échelle

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (6)$$

où  $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ . La distribution de Dirac a donc une symétrie paire.

## 5 Dérivation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(t)}{dt} \cdot x(t) dt = -\frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (7)$$

Notez que le produit  $\delta(t) \cdot \delta(t)$  de deux Dirac n'est pas défini.

## Echelon unité (fonction de Heaviside)

### Echelon unité

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (8)$$

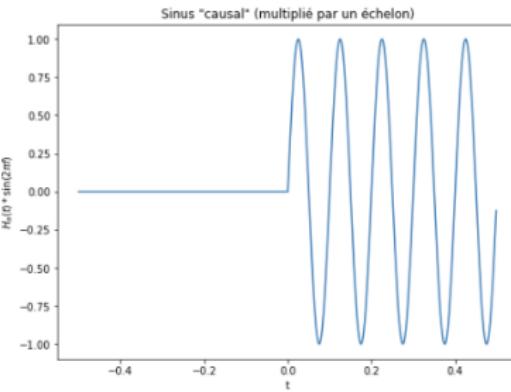
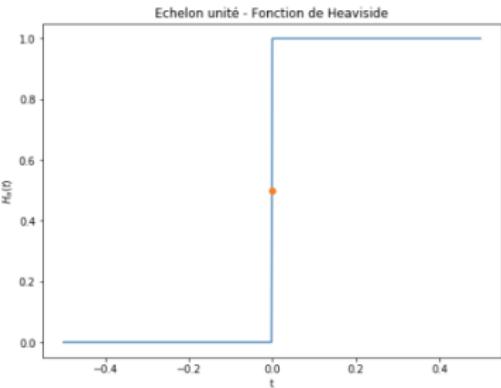
La valeur en  $t = 0$  est parfois notée  $a$  ( $a = \frac{1}{2}$  ci-dessus), et on note l'échelon par  $H_a(t)$  (ici  $H_{\frac{1}{2}}(t)$ ).

### Relation entre échelon et impulsion de Dirac

Par abus de notation, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = H(t) \quad (9)$$

**Notation :**  $u(t) = H_0(t)$



## Fonction Porte (signal rectangulaire)

La fonction porte est définie par :

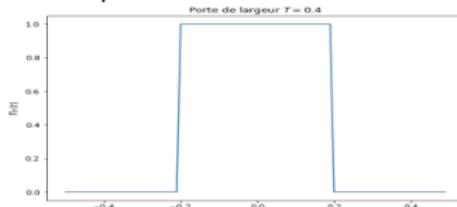
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Pi(t) = H_1(t + \frac{1}{2}) - H_1(t - \frac{1}{2}) = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2}) \quad (10)$$

On définit une porte "de largeur  $T$ " comme étant :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

On remarquera que  $\Pi_T(t) = \Pi(\frac{t}{T})$ .



## Signal “sign”

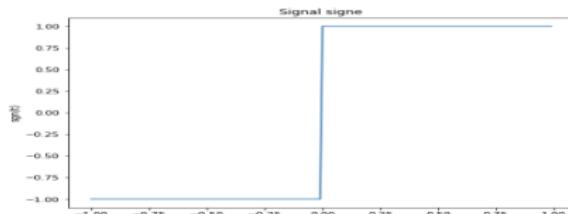
Le signal “sign” est défini par :

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$|x(t)| = x(t) \cdot \operatorname{sgn}(x(t)) \quad (12)$$

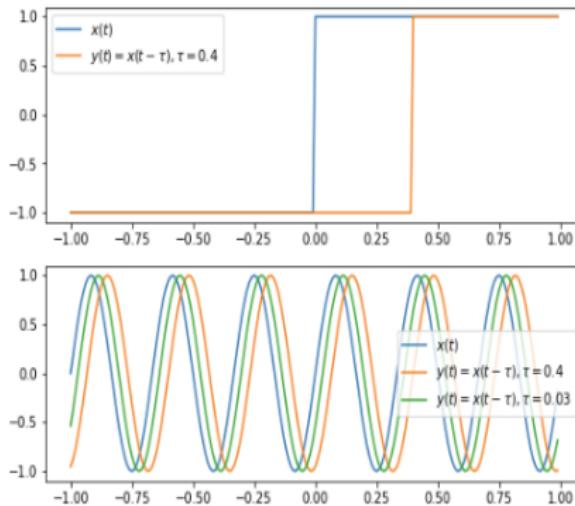
Ce signal est relié à l'échelon de Heaviside par

$$\operatorname{sgn}(t) = 2 \cdot H(t) - 1 \quad (13)$$



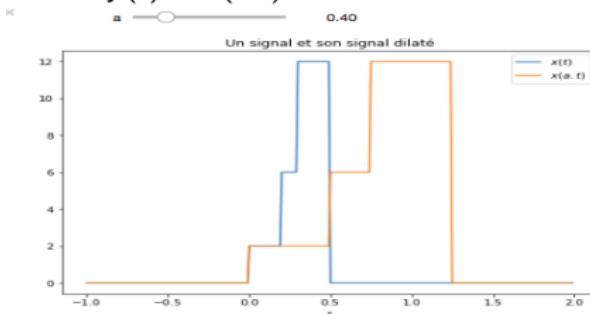
# Opérations courantes

- **Superposition** :  $y(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$
- **Décalage temporel** :  $y(t) = x(t - \tau)$



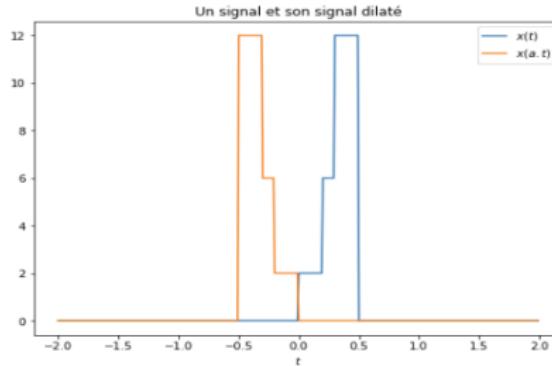
# Opérations courantes

## ■ Dilatation / Contraction : $y(t) = x(a.t)$



# Opérations courantes

- Retournement temporel :  $y(t) = x(-t)$



# Energie, Puissance et corrélation

Energie d'un signal  $x(t)$  (réel ou complexe)

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Si  $E$  est fini on dit que le signal  $x(t)$  est à énergie finie, c'est un **signal d'énergie**;

- L'énergie se mesure en Joules
- La **puissance instantanée** de  $x(t)$  est

$$p(t) = x(t)x^*(t);$$

C'est la densité d'énergie :  $p(t) = \frac{dE}{dt}$

Puissance moyenne d'un signal

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt$$

Si  $E$  est infini et que  $P$ , on a un **signal de puissance**.

## Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation d'un signal d'énergie  $x(t)$  est définie par

$$R_{xx}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

On note que  $R_x(0) = E$ .

Dans le cas d'un signal de puissance, l'intégrale précédente diverge et on définit :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

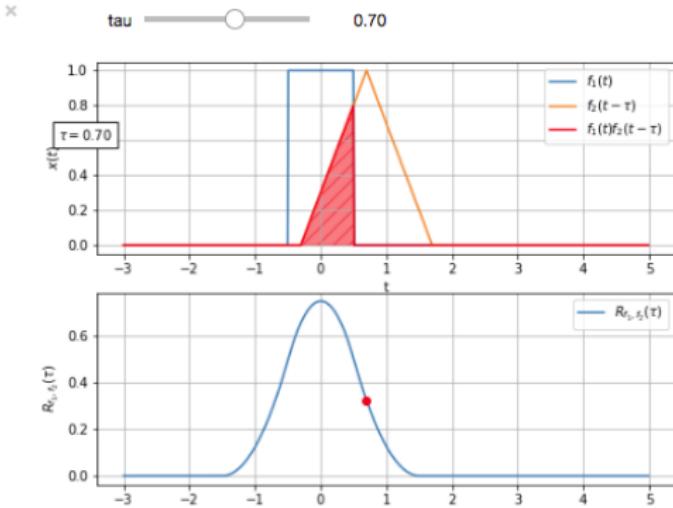
On note que  $R_x(0) = P$ .

## Intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t)$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

## Exemple de fonction d'(inter)-corrélation



## Propriétés de l'autocorrélation

- 1** La fonction d'autocorrélation a une symétrie Hermitienne :  
De par la définition, on a directement que :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau)$$

Dans le cas de signaux réels on a une symétrie pure et simple :

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

En particulier, pour un signal non nul :  $R_{xx}(0) > 0$

- 2** Inégalité de Schwartz >

On peut définir la corrélation entre  $x(t)$  et  $y(t)$  comme étant un produit scalaire

$$\langle x, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t - \tau)dt.$$

Alors, l'inégalité de Schwartz nous indique que

$$|\langle x, y_\tau \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y_\tau, y_\tau \rangle,$$

donc :

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0)R_{yy}(0).$$

En particulier :

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0).$$

dans le cas réel  $R_{xx}(0)$  est un maximum

# Convolution

Convolution de  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  :  $(f_1 * f_2)(t)$

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Relation avec l'(inter-)correlation

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

En effet :

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(-(\tau - t)) dt \\ &= x(\tau) * y^*(-\tau). \end{aligned}$$

# Traitement numérique du Signal

## 2: Espaces vectoriels

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Novembre 2018

## Un signal à temps discret

Un signal à temps discret typique :

$$x[n] = \dots, 1.234, -3.45, 3.4, -1.2, -10, 3.2101, \dots$$

Et ses différentes variantes ...

- de longueur finie ?
- périodique ?
- à support fini ?

Les espaces vectoriels

Un cadre commun pour traiter tous les signaux !

## Utilité des espaces vectoriels en traitement de signal

Un cadre mathématique commun pour tout le traitement de signal

- cadre commun pour tous les types de signaux (y compris images, ...)
- Y compris pour les signaux continus,
- Une interprétation simple des transformées (Fourier, ...)
- Une interprétation simple de l'échantillonnage et de l'interpolation
- Un outil pour la compression, l'approximation, la détection
- Fondamental dans la conception de systèmes (bouclés, télécoms, ...)

## Trois avantages

- Les espaces vectoriels sont des objets très généraux ... donc très puissants
- Les espaces vectoriels sont définis par leurs propriétés.
- Dès que ces propriétés sont définies, ... on a toute une boîte à outils pour manipuler ces espaces

## Quelques exemples que vous connaissez

Les évidents :

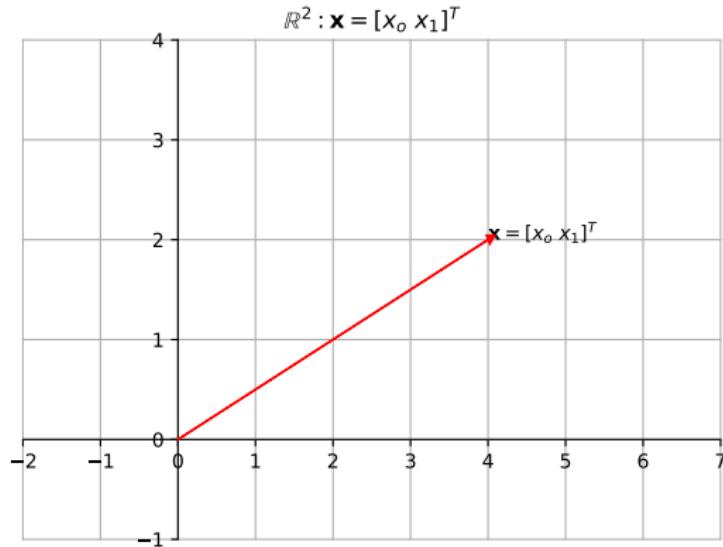
- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  : Espaces euclidiens, géométrie dans l'espace.
- $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$  : Espaces euclidiens "généralisés" - algèbre linéaire

Les moins évidents :

- $\ell_2(\mathbb{Z}^N)$  : l'espace des séquences infinies de carré sommable
- $L_2([a, b])$  : l'espace des *fonctions* de carré intégrable sur un intervalle.

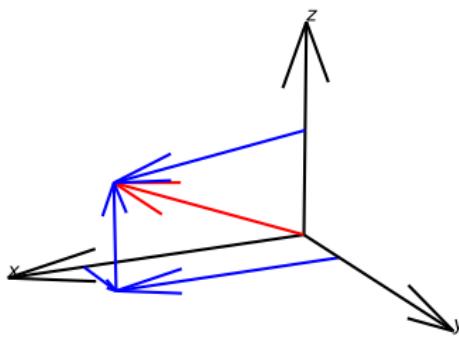
Les vecteurs peuvent être des fonctions !

## Ceux qu'on représente graphiquement



## Ceux qu'on représente graphiquement

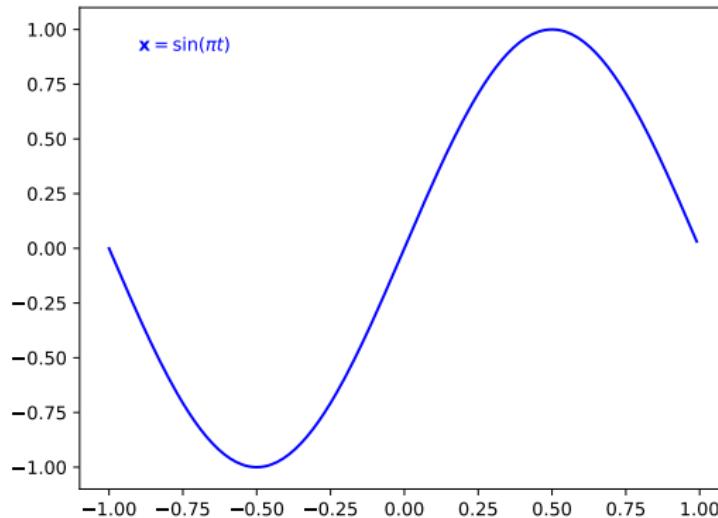
$$\mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ x_2]^T$$



# Ceux qu'on représente graphiquement

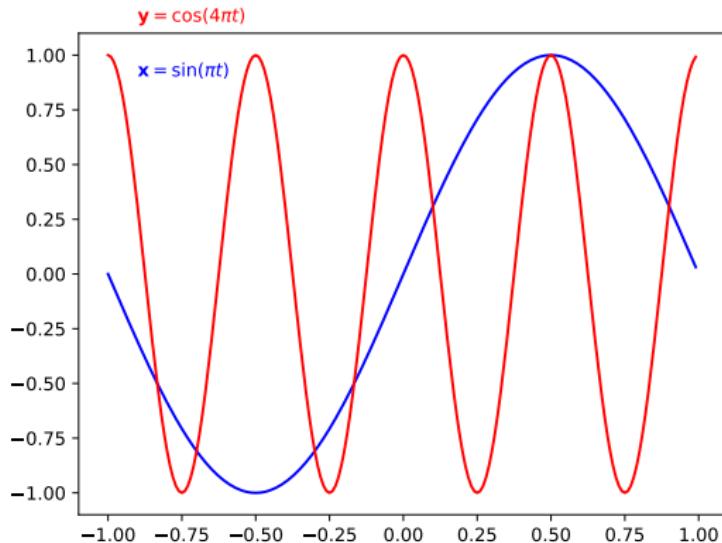
Vecteurs : fonctions de carré intégrable

$$L_2([-1, 1]) : \quad \mathbf{x} = x(t), \quad t \in [-1, 1]$$



# Ceux qu'on représente graphiquement

$$L_2([-1, 1]) : \quad \mathbf{x} = x(t), \quad t \in [-1, 1]$$



# Espaces vectoriels

## vecteurs et scalaires

Soit un ensemble de vecteurs  $V$  et de scalaires  $S$  (par exemple dans  $\mathbb{C}$ ).  $V$  est un espace vectoriel, avec les opérations d'addition et de multiplication qui ont les propriétés suivantes :

## Propriétés

Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

commutativité de l'addition  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

associativité de l'addition  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

Distributivité de la multiplication scalaire  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ ,  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ ,  
 $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$

Vecteur nul pour l'addition :  $\exists \mathbf{0} | \forall \mathbf{x} \in V : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Vecteur inverse pour l'addition :  $\forall \mathbf{x} \in V, \exists (-\mathbf{x}) | \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Identité pour la multiplication scalaire :  $\forall \mathbf{x} \in V : 1.\mathbf{x} = \mathbf{x}.1 = \mathbf{x}$

## Produit intérieur : mesurer et comparer

Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ , on définit un produit intérieur  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  qui représente une distance entre ces deux vecteurs, c'est une fonction de  $V \times V$  dans  $S$ . Comme c'est une distance, il faut les propriétés suivantes :

distributivité :  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

mise à l'échelle :  $\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$   
 $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

commutativité "hermitienne"  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$

produit propre positif  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$   
 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

### Orthogonalité, norme et inégalités triangulaires

orthogonalité on dit que  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  ssi  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$

norme On définit la norme (2) d'un vecteur par  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

inégalité de Cauchy-Schwarz On en déduit  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$  (égalité ssi  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ ).

inégalités triangulaires :  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (égalité ssi  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ ) En particulier, si  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ,  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$  (Pythagore)

# Espace de Hilbert

## Définition

### *Espaces de Hilbert séparables*

Un espace vectoriel  $H(V, S)$ , équipé d'un produit intérieur, et ayant la propriété de complétude, est un espace de Hilbert.

Si cet espace admet des bases orthonormales, il est dit **séparable**.

La complétude signifie que toute séquence convergente de vecteurs  $V$  tend vers un limite qui est dans  $V$ .

## Exemple d'espace de Hilbert

**Vecteurs de nombres complexes :**

$\mathbb{C}^N$  avec l'addition classique :

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} : z_n = x_n + y_n$$

et le produit intérieur :

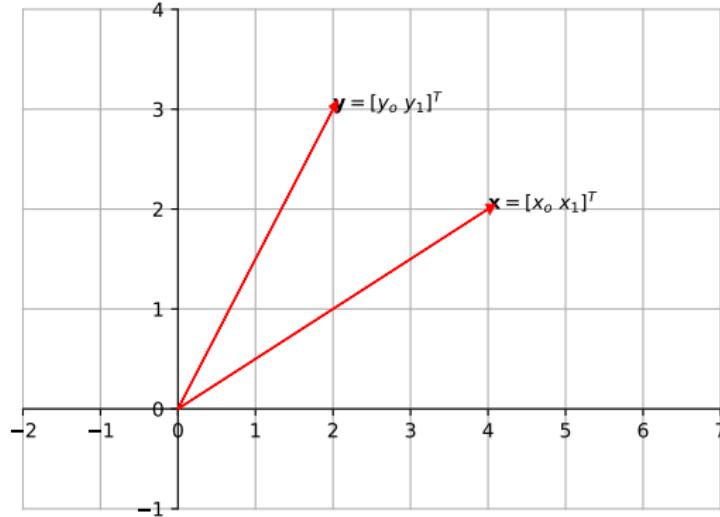
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* y_n$$

**Fonctions de carré sommable sur un intervalle fini (par exemple sur  $[0,1]$ ) :**

Produit intérieur dans  $\mathbb{R}^2$ 

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on a simplement

$$\langle x, y \rangle = x_0 \cdot y_0 + x_1 \cdot y_1$$

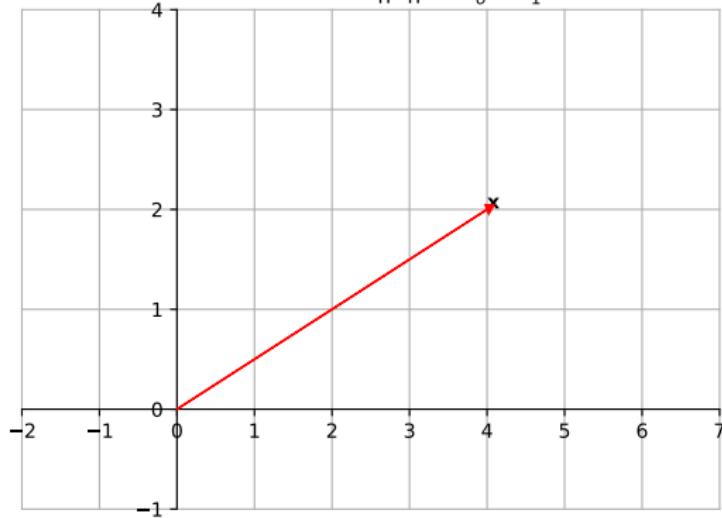
Produit intérieur dans  $\mathbb{R}^2$ 

Produit intérieur dans  $\mathbb{R}^2$  : Norme

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on a simplement

$$\langle x, x \rangle = x_0^2 + x_1^2 = \|x\|^2$$

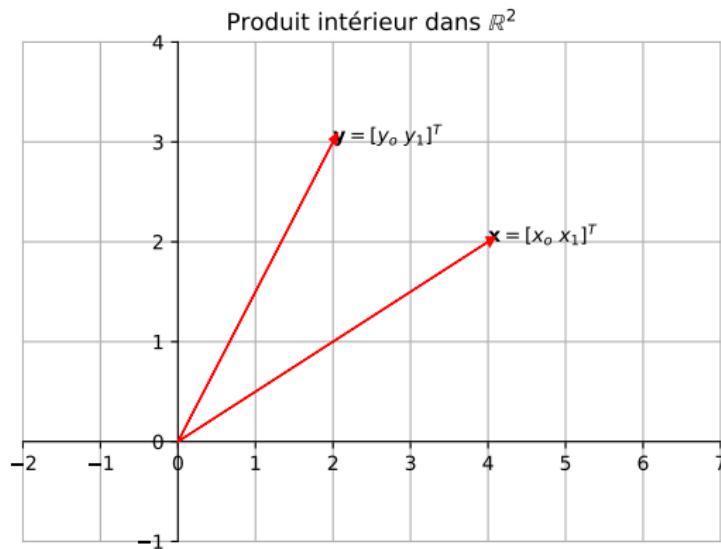
Norme dans  $\mathbb{R}^2$   $\|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2$



Produit intérieur dans  $\mathbb{R}^2$ 

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on a simplement

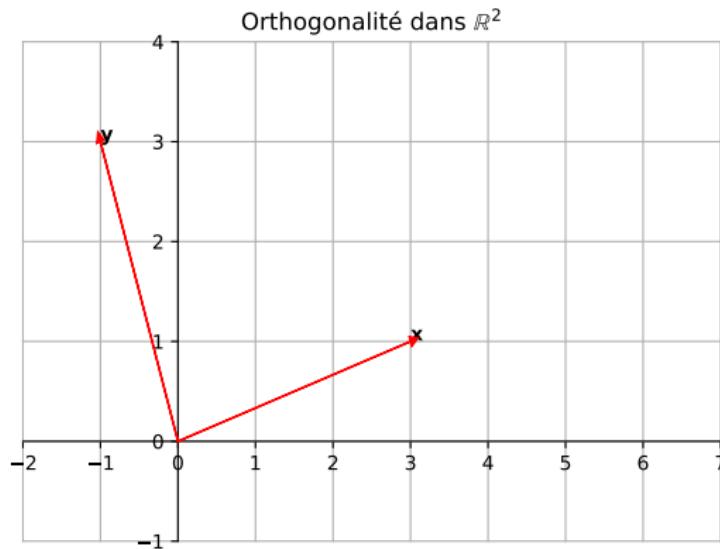
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0 \cdot y_0 + x_1 \cdot y_1 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha$$



Produit intérieur dans  $\mathbb{R}^2$  : orthogonalité

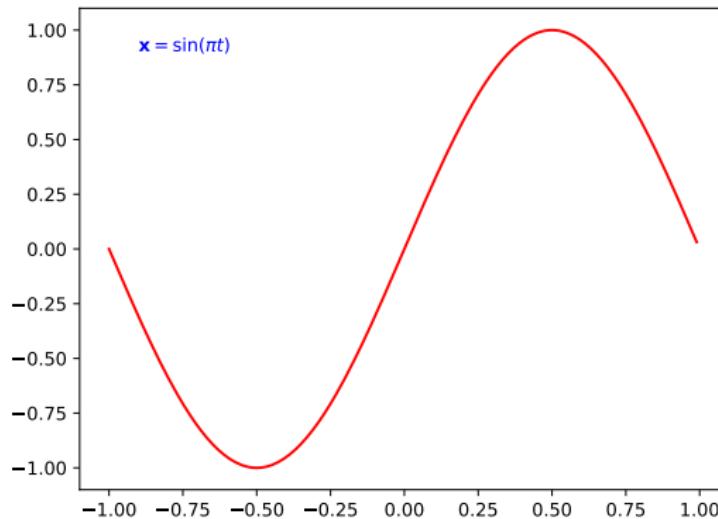
Si  $\alpha$  : 90 degrés

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0 \cdot y_0 + x_1 y_1 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha = 0$$



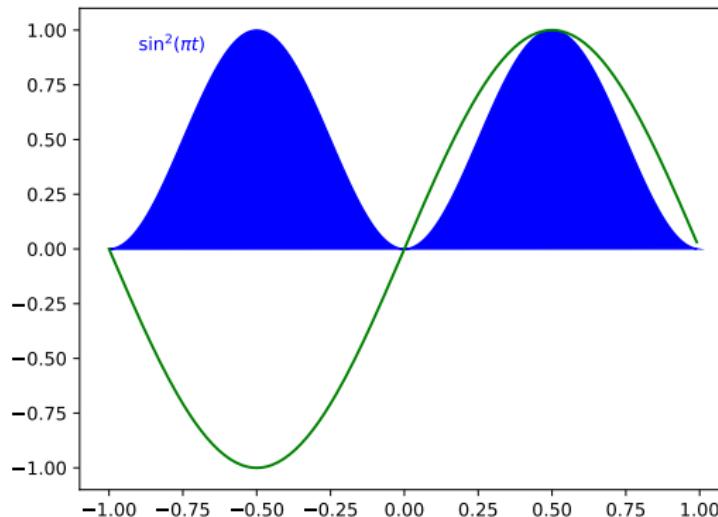
Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$ 

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$$



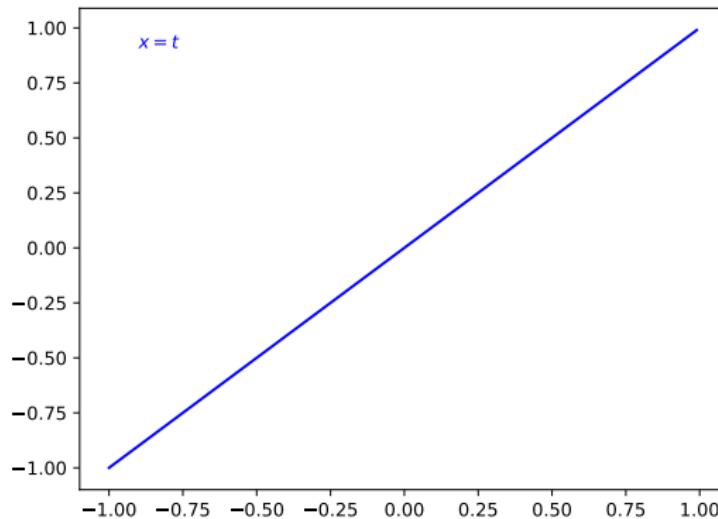
Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi t) dt = 1$$



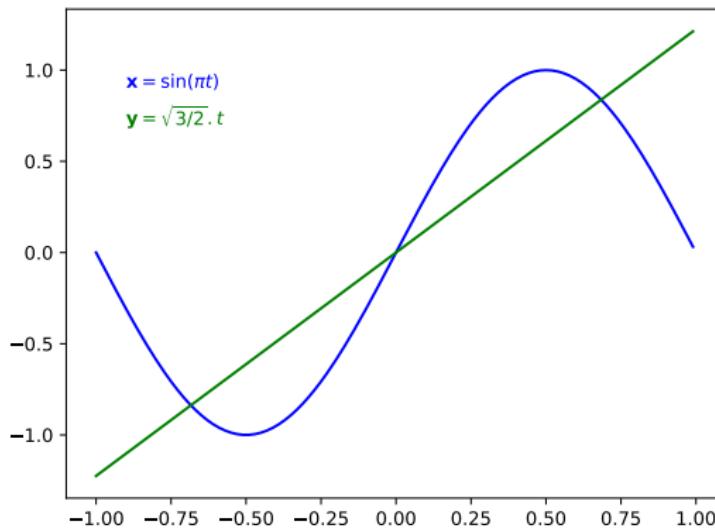
Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

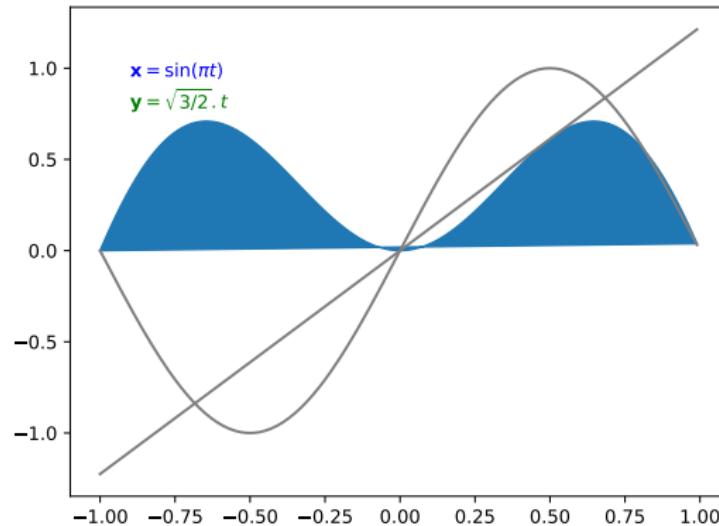
$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3$$



Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

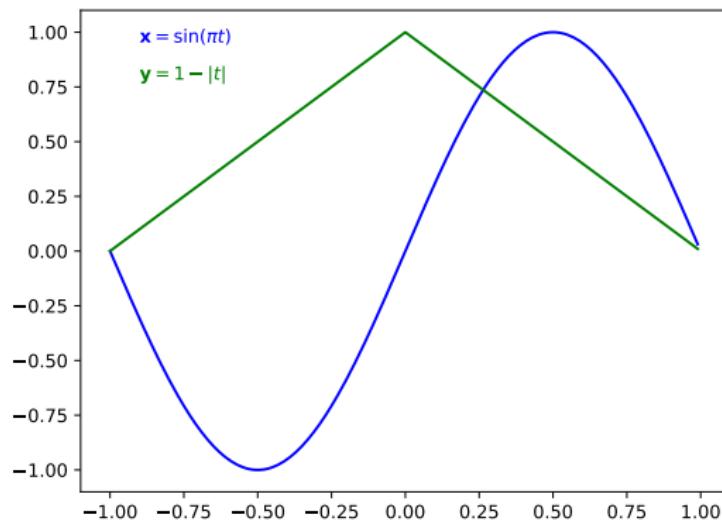
$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3$$



Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

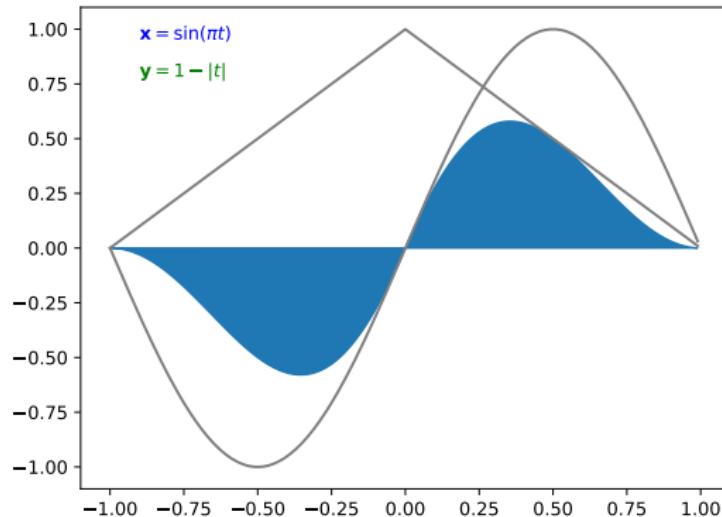
Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

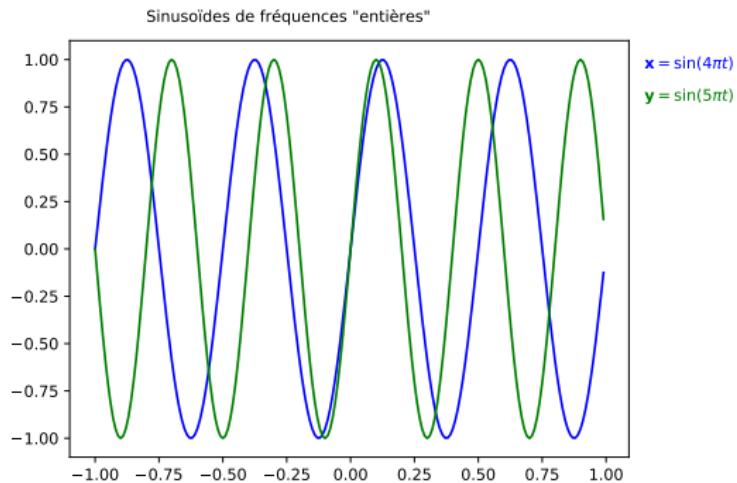
**x et y forment des sous-espaces orthogonaux**

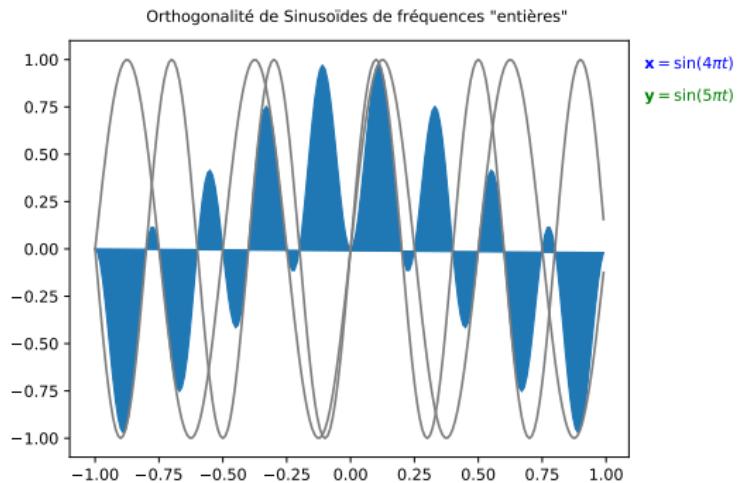


Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

**x et y forment des sous-espaces orthogonaux**



Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

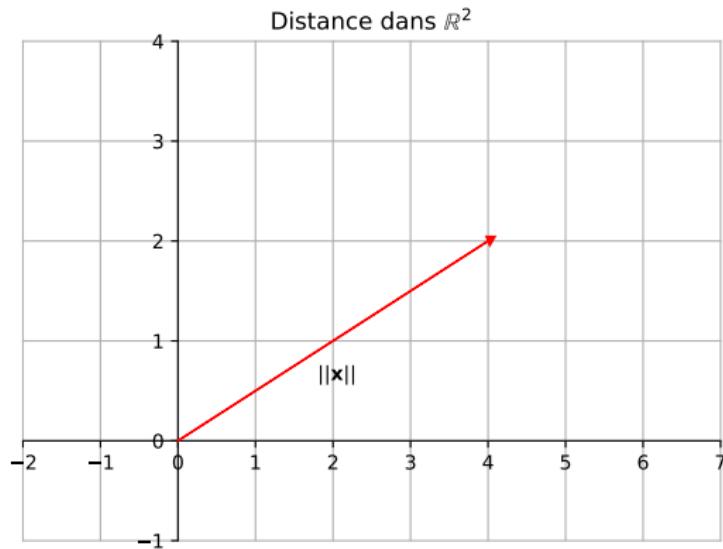
Produit intérieur dans  $L_2[-1, 1]$  : Norme

## De la norme à la Distance

- **Le produit intérieur** définit la norme :  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$
- **La Norme** définit la distance :  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

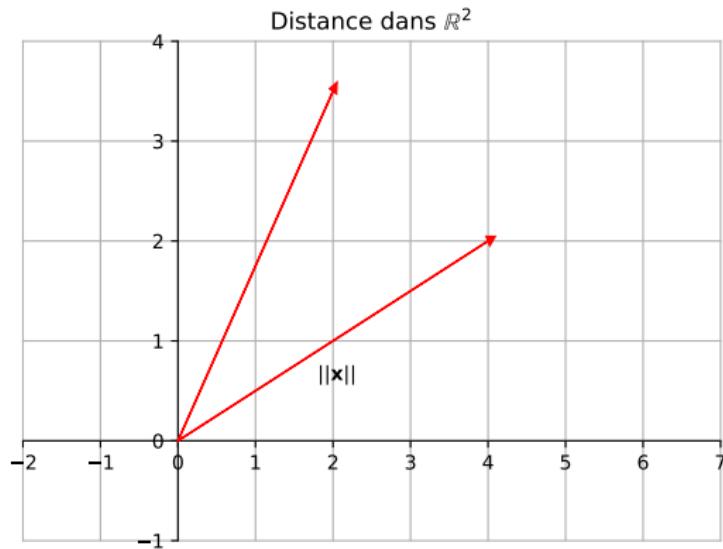
norme et distance dans  $\mathbb{R}^2$ 

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$$



norme et distance dans  $\mathbb{R}^2$ 

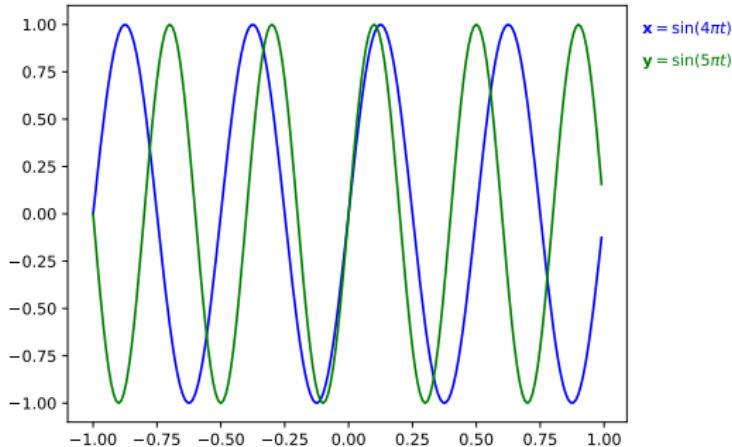
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2}$$



Distance dans  $L_2[-1, 1]$  : l'erreur quadratique moyenne

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \int_{-1}^1 |x(t) - y(t)|^2 dt$$

Distance entre deux Sinusoïdes de fréquences "entières"

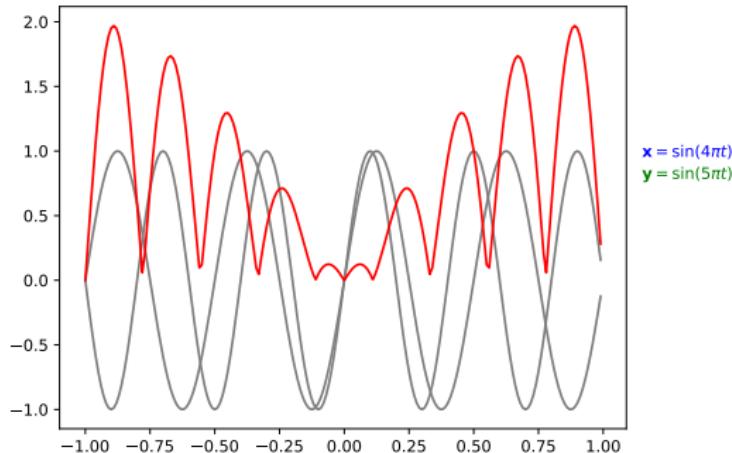


Distance dans  $L_2[-1, 1]$  : l'erreur quadratique moyenne

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \int_{-1}^1 |x(t) - y(t)|^2 dt = 2$$

Distance entre deux Sinusoïdes de fréquences "entières"

$$\sqrt{(x(t) - y(t))^2}$$



## Bases Orthogonales et Orthonormales

Soit un espace de Hilbert de dimension  $K$ , alors, on peut décrire tout vecteur de l'espace par :

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \alpha_k \psi_k$$

, où  $\{\psi_k\}_{k=1\dots K}$  est la base de l'espace vectoriel, et  $\alpha_k$  sont les coefficients (réels ou complexes) qui définissent les coordonnées du vecteur  $x$ .

Si on travaille avec des signaux continus, on aura :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \psi_k(t).$$

Si on travaille avec des signaux de carré sommable (à énergie finie) sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ , l'espace est noté  $L^2(t_1, t_2)$  et l'énergie du signal est le carré de la norme :

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

On rappelle que la base est orthonormale si  $\{\psi_k\}_{k=1\dots K}$  est une famille de fonctions orthogonales de norme unité.

# Construire une base Orthonormale

## Procédure de Gram-Schmidt

En entrée, on a :  $\{v_1, \dots, v_K\}$ , une base quelconque.

- Poser  $w_1 = v_1$ , calculer  $\psi_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ ,  $k = 1$ ;
- Itérer :  $k = k + 1$

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \psi_i \rangle \cdot \psi_i$$

$$\psi_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$$

- Jusqu'à  $k = K$

# Traitement numérique du Signal

## 3: Utilisation de Python

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

## Traitements numériques du Signal

### 4: Transformée de Fourier Discrète

#### 4.1 : Sinusoïdes complexes en tant que bases de la Transformée

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

## Un point de vue fréquentiel

Beaucoup de signaux sont “naturellement” périodiques :

- Battements de coeur
- Musique (cordes vibrantes, cavités résonnantes)
- Machines tournantes
- ...

Fourier est l’outil qui décrit le comportement périodique / fréquentiel des signaux :

- La DFT : Discrete Fourier Transform.  
Elle fait correspondre un signal discret de dimension  $N$  à un ensemble de  $N$  fréquences discrètes.
- La DFS : Discrete Fourier Series.  
Elle fait correspondre un signal discret *périodique* de dimension  $N$  à un ensemble de  $N$  fréquences discrètes.
- La DTFT : Discrete Time Fourier Transform.  
Elle fait correspondre un signal de dimension *infinie* une fonction périodique de période  $2\pi$ .

L’ensemble de ces fréquences / fonction est appelé *Spectre*.

# Signal Sinusoïdal Complexé

## Rappels : Formules d'Euler

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

$$e^{j\pi} = \cos(\pi) + j \sin(\pi) = -1 \quad | -1 | = 1; \phi(-1) = \pi$$

$$e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j \sin(\pi/2) = j \quad | j | = 1; \phi(j) = \pi/2$$

$$e^{-j\pi/2} = \cos(-\pi/2) + j \sin(-\pi/2) = -j \quad | -j | = 1; \phi(-j) = -\pi/2$$

$$\sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) = \frac{1}{2e^{j\pi/2}} (e^{j\omega_0 n} + e^{j\pi} e^{-j\omega_0 n})$$

$$= \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{-j\omega_0 n}$$

$$\cos(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

# Signal Sinusoïdal Discret Complexé

## Sinusoïde complexe périodique

Soit un signal  $x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  $\omega_0 = 2\pi f_0$

Pour que  $x[n] = x[n + kT_0]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , il faut :

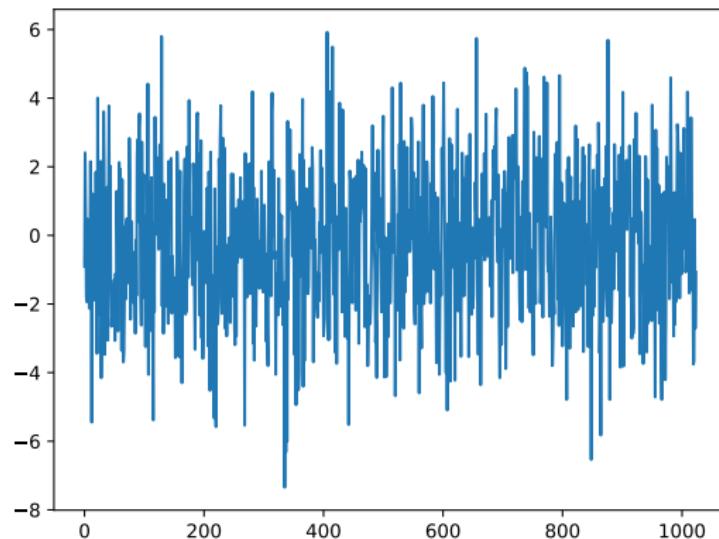
- ( $k = 1$ ) que  $e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} = e^{j\phi} e^{j\omega_0(n+T_0)}$ , donc  $T_0$  entier et  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ . Donc  $f_0$ , la fréquence fondamentale, est un nombre rationnel.
- Le cas “extrême” est le cas où  $T_0 = \infty$ , donc  $f_0 = 0$ , soit un signal continu sur son support, et valant  $x[n] = e^{j\phi}$ .
- Le cas où le signal est a-périodique correspond à  $T_0 = N$  ( $f_0 = 1/N$ ).
- Le cas “suivant” est le cas où  $T_0 = N/2$  et donc  $f_0 = 2/N$
- On déduit aisément qu'on aura les périodes  $T_0 = N/k$ ,  $k = 1, \dots, N/2$ , si  $N/k$  entier et donc les fréquences  $f_0 = k/N$ .

**Une sinusoïde discrète complexe peut s'écrire**

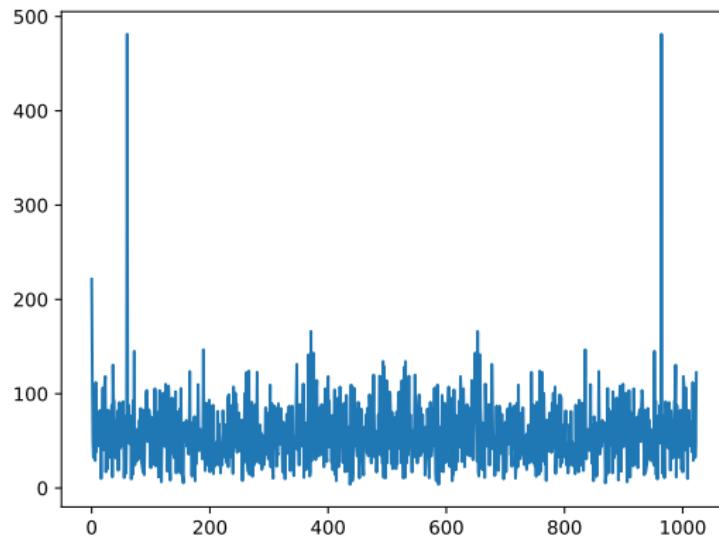
$$x[n] = e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- Si  $x[n]$  est de longueur  $N$ , il faut  $f_0 = \frac{k}{N}$ ,  $k$  entier.
- Si  $x[n]$  est de dimension infinie,  $f_0 = \frac{k}{N}$  est peut être quelconque.

## Signal Temporel



## Signal Temporel ... et sa vision Fréquentielle



# La base de Fourier : les sinusoïdes complexes

**On se limite aux signaux de dimension  $N$**

- En tant que sinusoïde :  $w_k[n] = e^{j2\pi \frac{k}{N}n} \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1$
- En tant que vecteur :  $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,N-1}$  et  $w_n^{(k)} = e^{j2\pi \frac{k}{N}n}$

Base orthogonale : soit  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i^*$ , on a alors

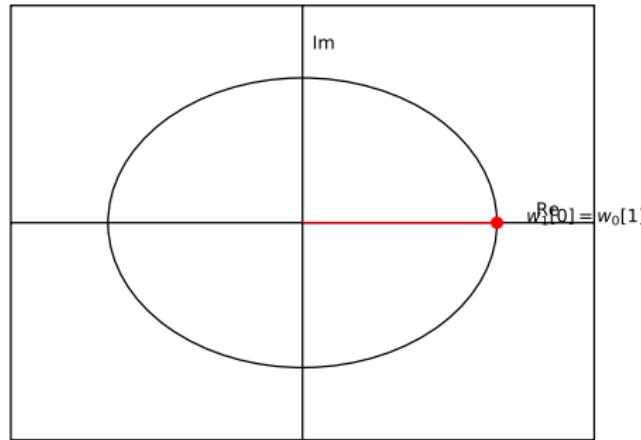
$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k')} \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N}i} e^{-j2\pi \frac{k'}{N}i} = \sum_{i=0}^{N-1} e^0 = N$$

**PAS NORMEE**: il faudrait un facteur de normalisation  $1/\sqrt{N}$ .

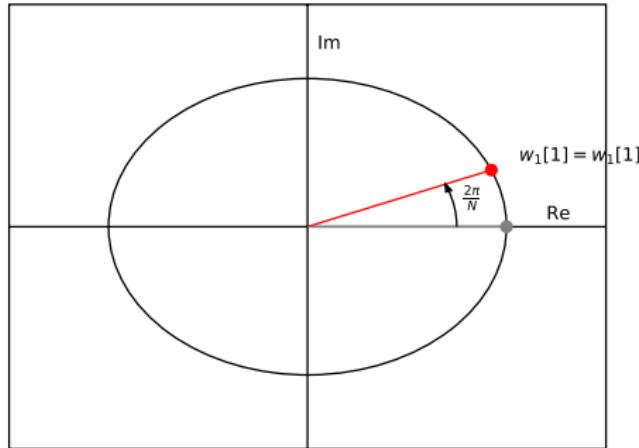
Et pour  $k \neq k'$  :

$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(k')} \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k}{N}i} e^{-j2\pi \frac{k'}{N}i} = \sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k-k'}{N}i} = 0$$

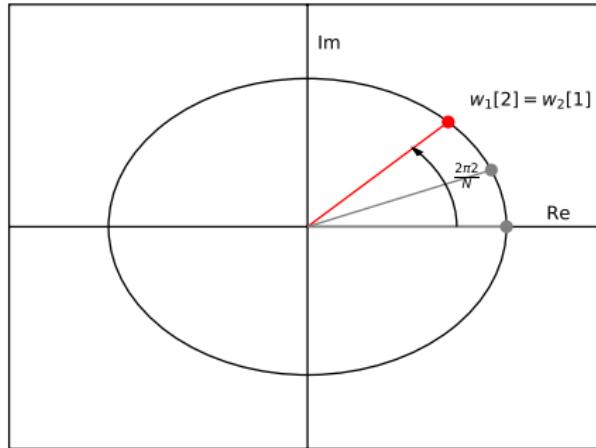
Que veulent dire ces fonctions de base



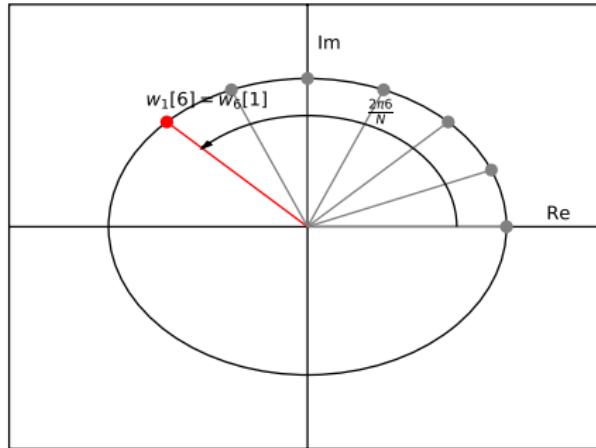
## Que veulent dire ces fonctions de base



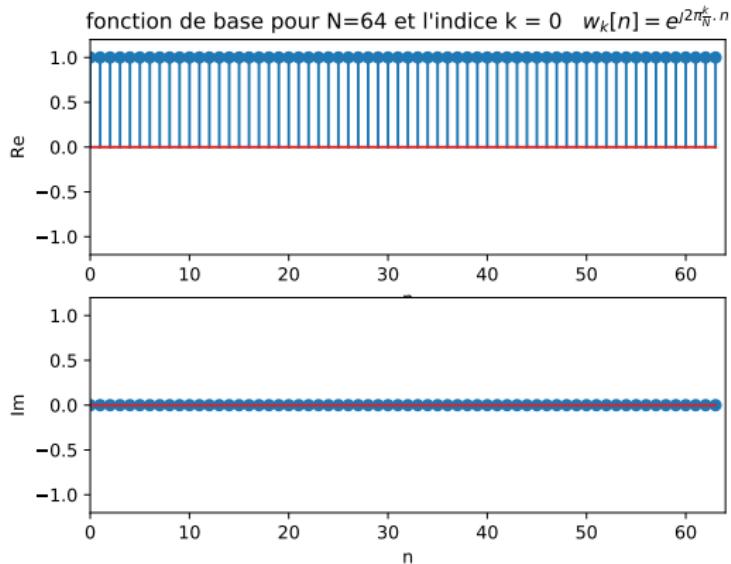
## Que veulent dire ces fonctions de base



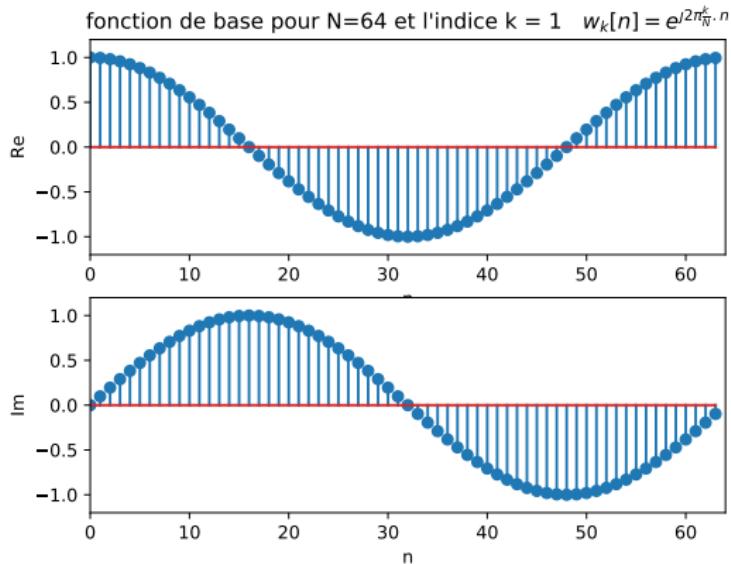
## Que veulent dire ces fonctions de base



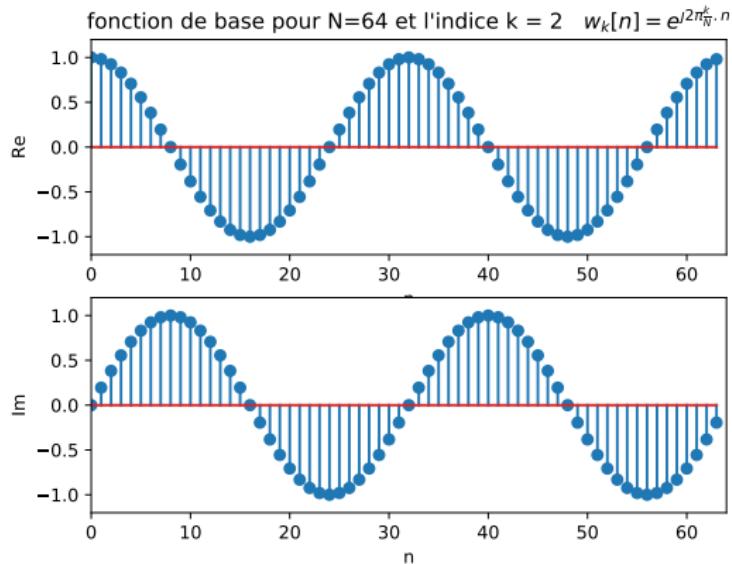
# Les fonctions de base en temporel



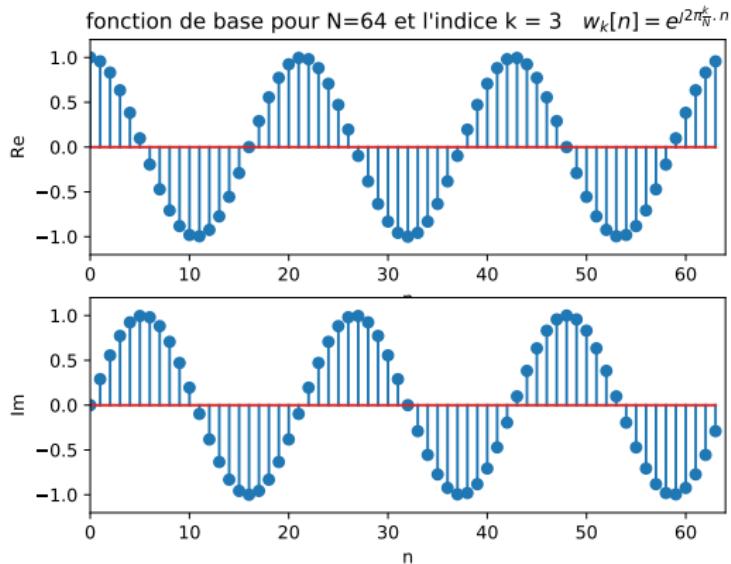
## Les fonctions de base en temporel



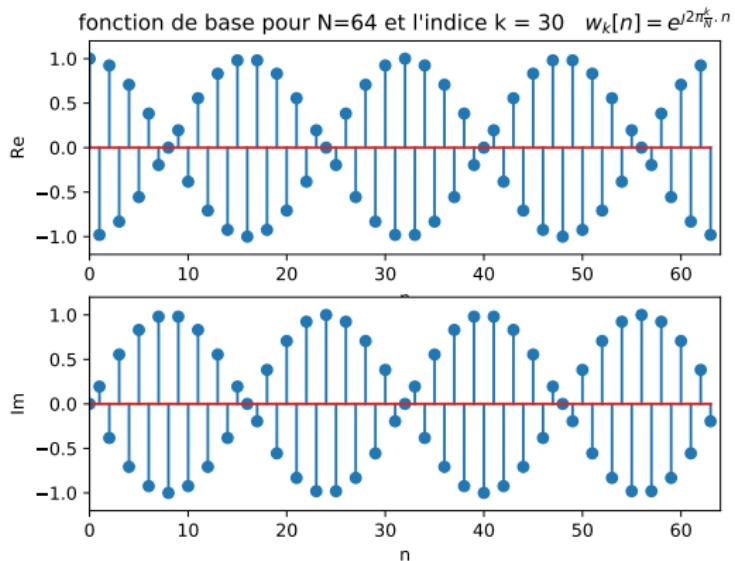
## Les fonctions de base en temporel



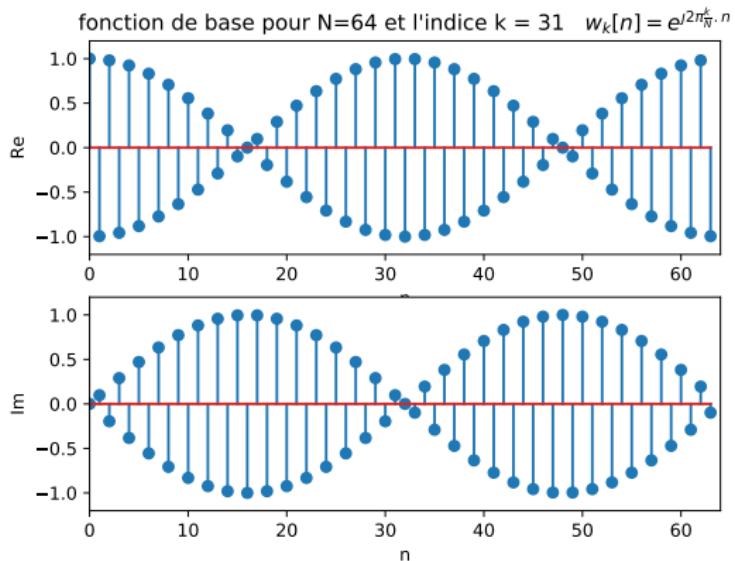
## Les fonctions de base en temporel



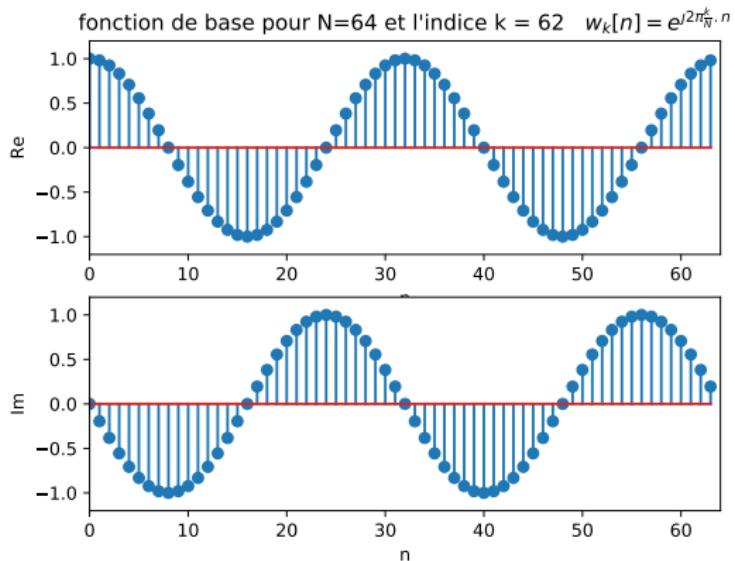
## Les fonctions de base en temporel



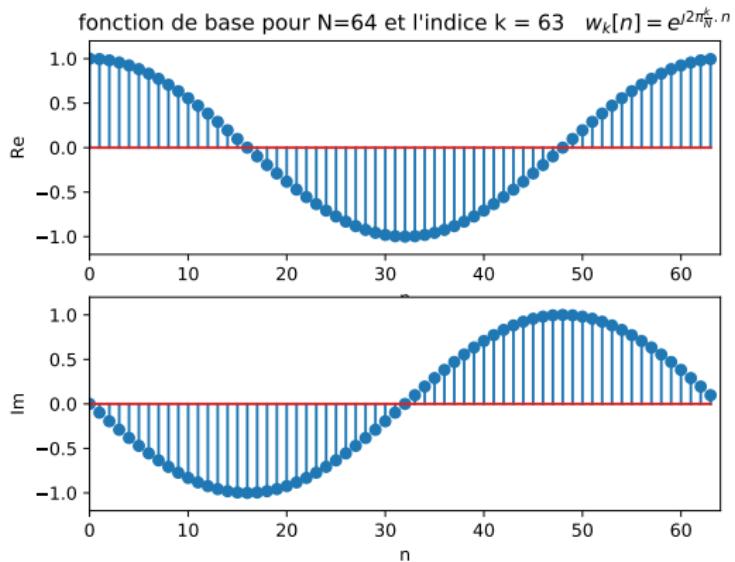
## Les fonctions de base en temporel



## Les fonctions de base en temporel



## Les fonctions de base en temporel



# Transformées de Fourier / changement de base

## Analyse - Définition de la DFT

$$X_k = \langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle$$

### DFT : Discrete Fourier Transform

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

## Synthèse - Définition de la DFT Inverse

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \mathbf{w}^{(k)}$$

### IDFT : Inverse Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk} s, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

## Transformée de Fourier : vue matricielle

**Changement de base = Multiplication par la matrice de changement de base**

On définit :  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  et la matrice  $\mathbf{W}$  telle que  $W_{n,m} = W_N^{nm}$  :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \cdots & W^{(N-1)} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{(N-1)} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

## Analyse -DFT matricielle

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

## DFT : Discrete Fourier Transform

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{k 2\pi}{N} n k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

## Synthèse - IDFT matricielle

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{X}$$

## IDFT : Inverse Discrete Fourier Transform

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} n k}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

## Traitement numérique du Signal

4: Transformée de Fourier Discrète

4.2 : Propriétés de la transformée de Fourier Discrète

Luc Deneire – deneire@unice.fr

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Décembre 2018

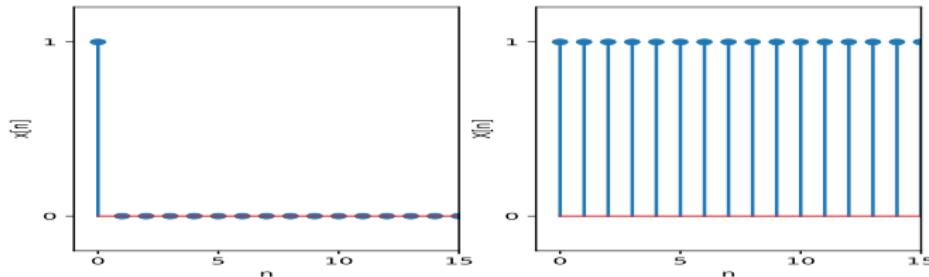
## La DFT est linéaire

Tout est linéaire ....

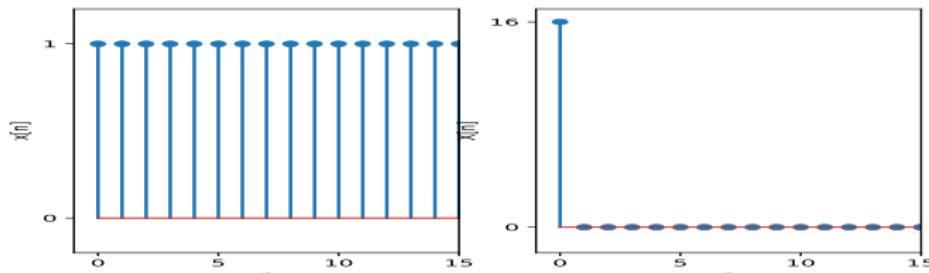
$$\text{DFT}(\alpha x[n] + \beta y[n]) = \alpha \text{DFT}(x[n]) + \beta \text{DFT}(y[n])$$

La DFT d'une impulsion est une constante et vice-versa

Soit  $x[n] = \delta[n]$  ( $x[n] \in \mathbb{C}^N$ ) :  $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} = 1$



Soit  $x[n] = \delta[n]$  : ( $x[n] \in \mathbb{C}^N$ ) :  $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} = N\delta[k]$

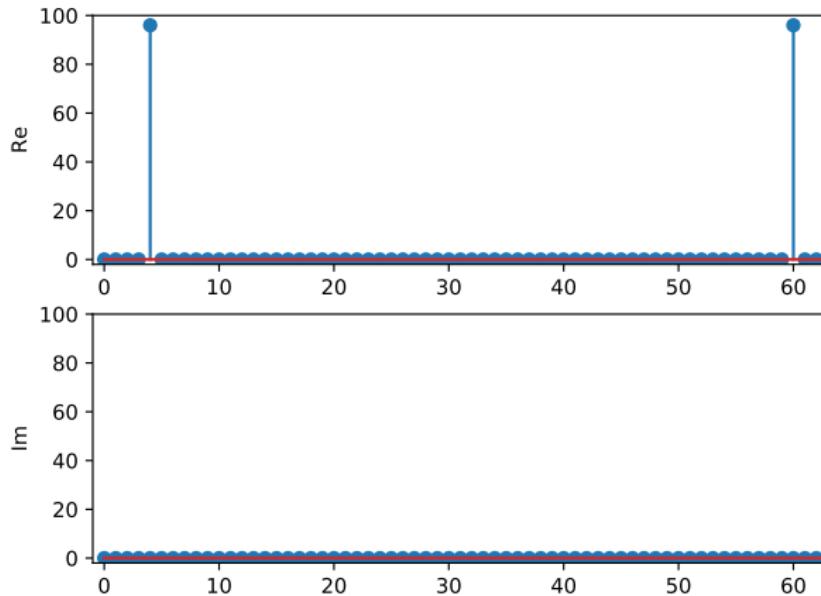


DFT d'un cosinus ( $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$ )

$$\begin{aligned}x[n] &= 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16} n\right) \\&= \frac{3}{2} \left[ e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right] \\&= \frac{3}{2} \left[ e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} 60n} \right] \\&= \frac{3}{2} (w_4[n] + w_{60}[n])\end{aligned}$$

DFT d'un cosinus ( $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$ )

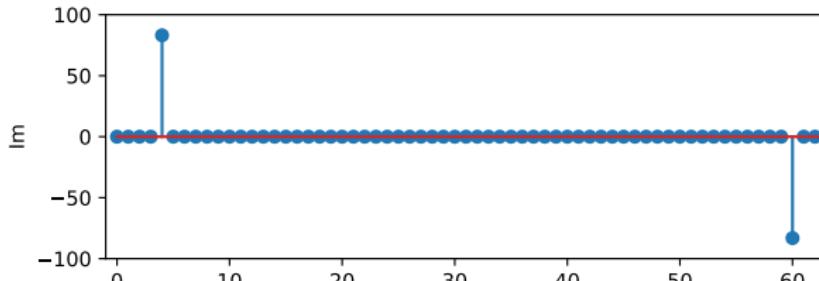
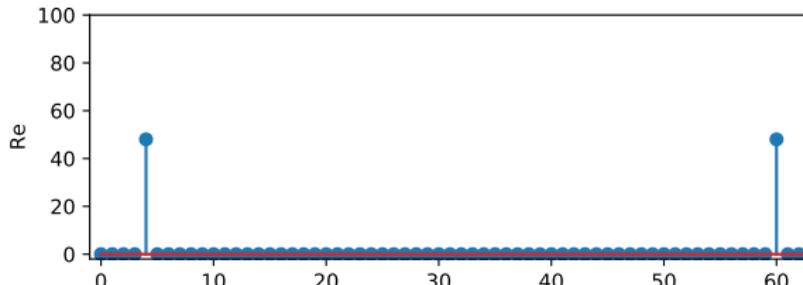
$$\begin{aligned} X[k] &= \langle w_k[n], x[n] \rangle \\ &= \frac{3}{2} \langle w_k[n], w_4[n] \rangle + \frac{3}{2} \langle w_k[n], w_{60}[n] \rangle \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 64 & \text{pour } k = 4, 60 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

DFT d'un cosinus ( $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$ )

DFT d'un cosinus déphasé ( $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$ )

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16}n + \frac{\pi}{3}\right) = 3/2 \left[ e^{j\frac{2\pi}{64}4n} e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{64}4n} e^{-j\frac{\pi}{3}} \right] = 3/2(e^{j\frac{\pi}{3}} w_4[n] + e^{-j\frac{\pi}{3}} w_{60}[n])$$

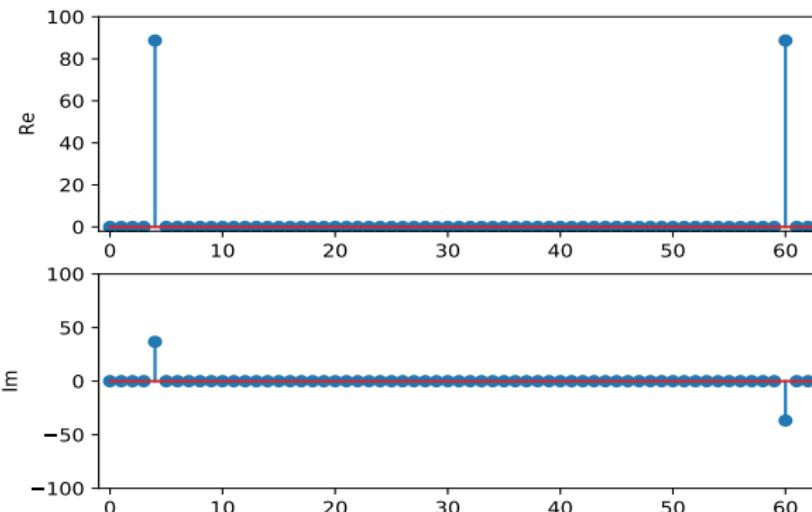
$$X[k] = \langle w_k[n], x[n] \rangle = 96e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(4) + 96e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(60)$$



DFT d'un cosinus retardé ( $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$ )

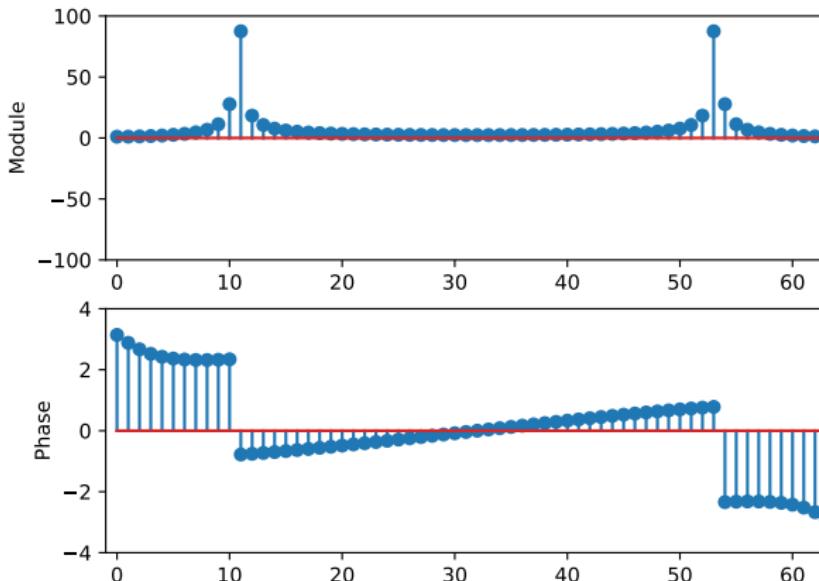
$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16}(n+1)\right) = 3/2 \left[ e^{j\frac{2\pi}{64}4n} e^{j\frac{2\pi}{16}} + e^{-j\frac{2\pi}{64}4n} e^{-j\frac{2\pi}{16}} \right] = 3/2(e^{j\frac{2\pi}{16}} w_4[n] + e^{-j\frac{2\pi}{16}} w_{60}[n])$$

$$X[k] = \langle w_k[n], x[n] \rangle = 96e^{j\frac{2\pi}{16}\delta(4)} + 96e^{-j\frac{2\pi}{16}\delta(60)}$$



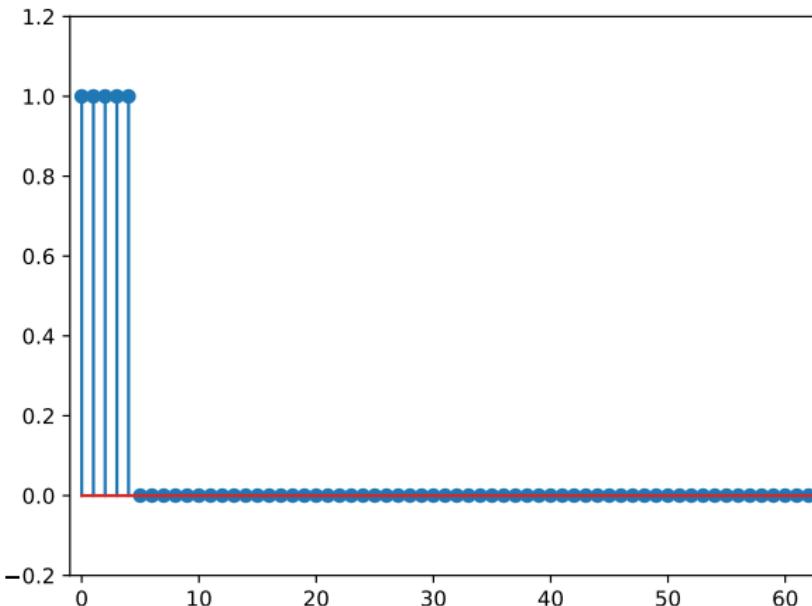
DFT d'un cosinus de fréquence non multiple de 1/N ( $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$ )

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{64} 10.75n\right)$$



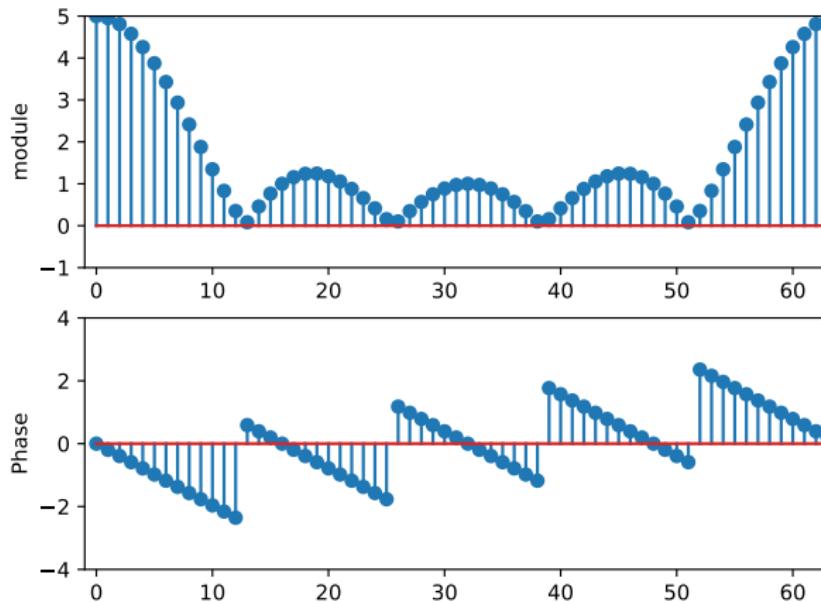
DFT d'un échelon de longueur  $M$  ( $x[n] \in \mathbb{C}^N$ )

$$x[n] = \sum_{l=0}^{M-1} \delta[n - l], n = 0, 1, \dots, N - 1$$



DFT d'un échelon de longueur  $M$  ( $x[n] \in \mathbb{C}^N$ )

$$\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \\
&= \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} Mk}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{N} k}} \\
&= \frac{e^{-j \frac{\pi}{N} Mk} \left[ e^{j \frac{\pi}{N} Mk} - e^{-j \frac{\pi}{N} Mk} \right]}{e^{-j \frac{\pi}{N} k} \left[ e^{j \frac{\pi}{N} k} - e^{-j \frac{\pi}{N} k} \right]} \\
&= \frac{\sin(\frac{\pi}{N} Mk)}{\sin(\frac{\pi}{N} k)} e^{-j \frac{\pi}{N} (M-1)k}
\end{aligned}$$

DFT d'un échelon de longueur  $M = 5$  ( $x[n] \in \mathbb{C}^N, N = 64$ )

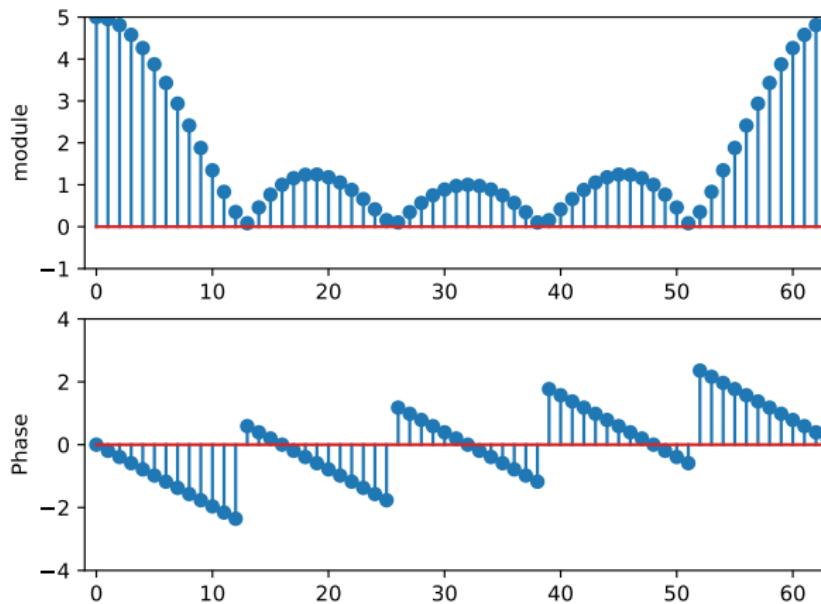
DFT d'un signal réel ( $x[n] \in \mathbb{R}^N$ )

**La DFT est toujours Complexé !**

$$\begin{aligned}
 X[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[N-k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} n(N-k)} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[k] e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \\
 &= \left( \sum_{n=0}^{N-1} x^*[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \right)^* \\
 &= X^*[k]
 \end{aligned}$$

Donc : symétrie en valeur absolue

## DFT d'un signal réel



# Signaux Périodiques de taille infinie

De la DFT à la DFS : Discrete Fourier Series

Soit un signal  $x[n]$  de taille finie  $n \in [0, \dots N - 1]$ , et sa DFT  $X[k]$ .

Comme  $W_N^{-nk} = W_N^{-(n+iN)k} (= W_N^{-n(k+iN)})$ ,

on peut écrire  $x[n + iN] = x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \forall i \in \mathbb{Z}$ .

Par convention, on écrira le signal périodisé  $\tilde{x}[n], n \in \mathbb{Z}$

# Signaux Périodiques de taille infinie

Périodisation temporelle et DFT

## Périodisation temporelle et DFT

Soit  $X[k], k \in [0, \dots, N - 1]$ , la DFT de  $x[n], n \in [0, \dots, N - 1]$  alors

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, n \in \mathbb{Z}$$

est le signal périodique de taille infinie comprenant  $\mathbf{x} = \{x[n]\}_{n=0, \dots, N-1}$  dans chaque période.

# Signaux Périodiques de taille infinie

De la DFT à la DFS : Discrete Fourier Series

## Série de Fourier Discrète (DFS) et Transformée de Fourier Discrète (DFT)

On définit alors la DFS

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{nk}, k \in \mathbb{Z}$$

correspondant à

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, n \in \mathbb{Z}$$

# Signaux apériodiques de taille infinie

Vers la Transformée de Fourier des Signaux à Temps Discret (DTFT)

- Pour les signaux de taille finie ( $N$ ) : fréquences  $\frac{k}{N}, k = 0, \dots, N - 1$
- Pour les signaux de taille infinie et périodiques (de période  $N$ ) : idem
- Pour les signaux de taille infinie et apériodiques : fréquences  $f$  continues (entre 0 et 1), pulsation  $\omega = 2\pi f$  continue entre 0 et  $2\pi$ .

## DTFT (Discrete-Time Fourier Transform)

La transformée de Fourier de signaux à Temps Discret d'un signal  $x[n]$  est donnée (si la série converge) par :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega}$$

La DTFT est une fonction :

- Complexe
- de la pulsation  $\omega$
- Périodique de période  $2\pi$  (car  $e^{j(\omega+2\pi)} = e^{j\omega}$ )

# Signaux apériodiques de taille infinie

Vers la Transformée de Fourier des Signaux à Temps Discret (DTFT)

## DTFT Inverse

La DTFT peut être inversée (si la série converge) par

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

## notation de la paire de transformées

$$x[n] \stackrel{\text{DTFT}}{=} X(e^{j\omega})$$

Quand le contexte indique clairement que la transformée est une DTFT, on écrit :

$$x[n] = X(e^{j\omega})$$

## DTFT Inverse

Sachant que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-k)} d\omega = 2\pi\delta[n-k]$$
$$\Rightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n')} d\omega = 2\pi x[n]$$

## Existence de la DTFT

Soit la série  $X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-jn\omega}$  ; DTFT =  $\lim_{M \rightarrow \infty} X_M(e^{j\omega})$ .

Donc la DTFT existe si  $x[n]$  est absolument sommable :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} X_M(e^{j\omega}) \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M |x[n]e^{-jn\omega}| = \sum_{n=-M}^M |x[n]| < \infty$$

En pratique, la DTFT existe si  $x[n]$  est de carré sommable, c'est à dire d'énergie finie.  
Dans ce cas :

- on a convergence au sens des moindres carrés :  

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X_M(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$$
- $X(e^{j\omega})$  peut être discontinu

## DTFT et changement de base

Soit un signal  $x[n]$  dans  $l_2(\mathbb{Z})$  (de carré sommable et  $n$  prenant ses valeurs dans  $\mathbb{Z}$ ). Pour toute valeur  $\omega_0$ , on peut voir la DTFT comme un produit intérieur de  $x[n]$  avec  $e^{j\omega_0 n}$ . On a donc une projection de  $x[n]$  sur un *vecteur de base*  $e^{j\omega_0 n}$  :

$$X(e^{j\omega}) = \langle e^{j\omega_0 n}, x[n] \rangle$$

Mais on a une infinité de vecteurs de base  $\{e^{j\omega n}\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ .

De plus,  $\langle e^{j\omega_0 n}, e^{j\omega_0 n} \rangle = \delta(\omega - \omega_0)$  et on a donc une base orthonormale ( $\delta(\omega)$  étant ici la fonction généralisée de Dirac).

On notera les transformations remarquables suivantes :

- $\alpha \stackrel{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \alpha\delta(\omega)$
- $\cos(\omega_0 n + \phi) \stackrel{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}[e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)]$
- $\sin(\omega_0 n + \phi) \stackrel{\text{DTFT}}{\rightleftharpoons} \frac{-j}{2}[e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0) - e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0)]$

# Symétries

- $x[-n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\omega})$
- $x^*[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\omega})$
- Si  $x[n]$  réel :  $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- Si  $x[n] = x[-n] \in \mathbb{R}$  :  $X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$
- Si  $x[n] = -x[-n] \in \mathbb{R}$  :  $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 0$

## Linéarité, décalage et énergie

- $\alpha x[n] + \beta y[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega})$
- $x[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- $e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$

Conservation d'énergie ... Egalité de Parseval :

$$\langle x[n], y[n] \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle X(e^{j\omega}), Y(e^{j\omega}) \rangle$$

Soit, en utilisant les définitions de produit intérieur sur  $l_2(\mathbb{Z})$  et sur  $L_2([-\pi, \pi])$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})d\omega$$

Théorème de Parseval : conservation d'énergie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

# Traitement numérique du Signal

Luc Deneire – [deneire@unice.fr](mailto:deneire@unice.fr)

Université Nice Sophia Antipolis - Polytech

Janvier 2019

# Eléments d'Analyse spectrale

## Objectifs

- Être capable d'analyser un signal en temps/fréquence (*ANALYSE SPECTRALE*)

## 5.1 : Short Time Fourier Transform

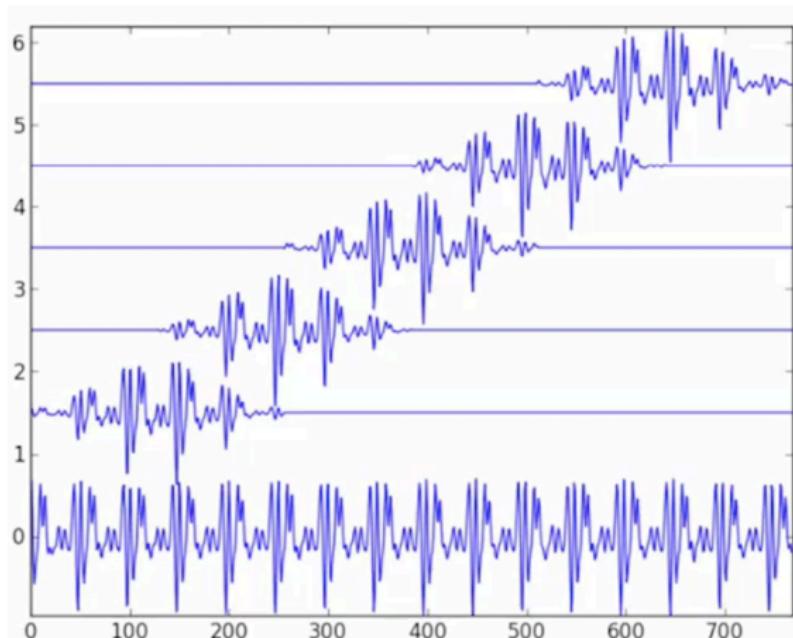
### L'équation de la STFT

$$X_l[k] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n]x[n + lH]e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad l = 0, 1, \dots,$$

- $\{w[n]\}$  : fenêtre d'analyse
- $l$  : numéro de la trame
- $H$  : incrément (Hop-size)

## Short Time Fourier Transform : exemple de fenêtre

$$xw_l[n] = w[n]x[n + lH] \quad l = 0, 1, \dots,$$



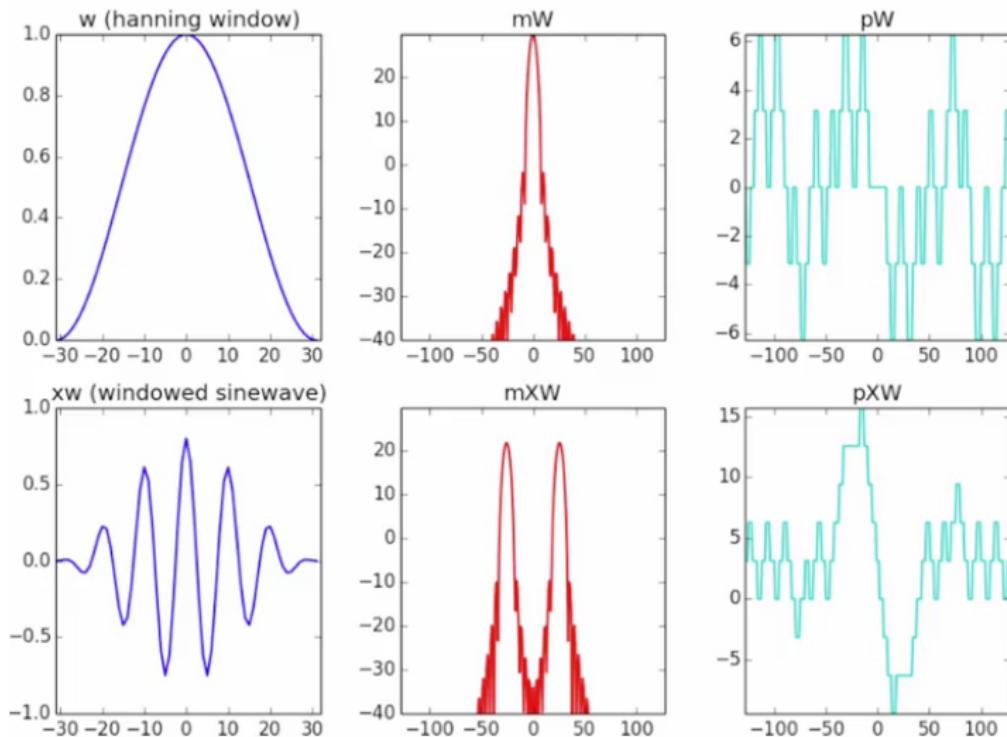
## STFT d'une sinusoïde fenêtrée

$$x[n] = A_0 \cos(\omega_0 n/N) = \frac{A_0}{2} \left[ e^{j\omega_0 n/N} + e^{-j\omega_0 n/N} \right]$$

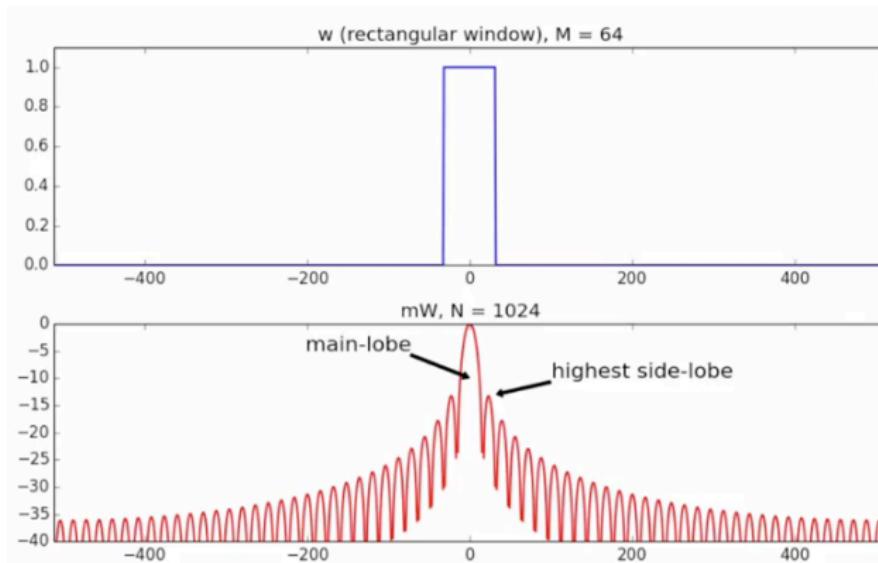
Prenons  $\omega_0 = 2\pi k_o$ ,  $A_0 = 2$  et  $l = 0$

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n] x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n] \left[ e^{j2\pi k_o n/N} + e^{-j2\pi k_o n/N} \right] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w[n] \left[ e^{-j\pi 2(k-k_o)n/N} + e^{-j2\pi(k+k_o)n/N} \right] \\ &= W[k - k_o] + W[k + k_o] \end{aligned}$$

## STFT d'une sinusoïde fenêtrée



## Fenêtre d'analyse



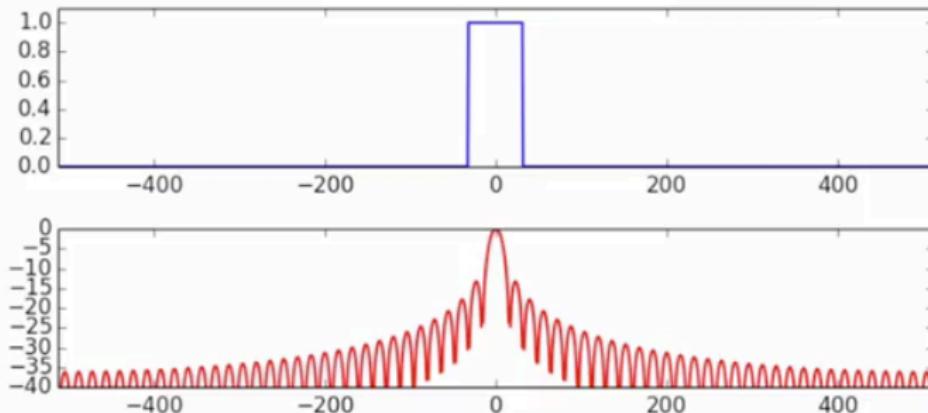
# Fenêtres d'analyse en Scipy

bartmann (M[, sym])	Return a modified Bartlett-Hann window.
bartlett (M[, sym])	Return a Bartlett window.
blackman (M[, sym])	Return a Blackman window.
blackmanharris (M[, sym])	Return a minimum 4-term Blackman-Harris window.
bohman (M[, sym])	Return a Bohman window.
boxcar (M[, sym])	Return a boxcar or rectangular window.
chebwin (M, at[, sym])	Return a Dolph-Chebyshev window.
flattop (M[, sym])	Return a flat top window.
gaussian (M, std[, sym])	Return a Gaussian window.
general-gaussian (M, p, sig[, sym])	Return a window with a generalized Gaussian shape.
hamming (M[, sym])	Return a Hamming window.
hann (M[, sym])	Return a Hann window.
kaiser (M, beta[, sym])	Return a Kaiser window.
nuttall (M[, sym])	Return a minimum 4-term Blackman-Harris window according to Nuttall.
parzen (M[, sym])	Return a Parzen window.
slepian (M, width[, sym])	Return a digital Slepian window.
triang (M[, sym])	Return a triangular window.

## Fenêtres d'analyse rectangulaire

$$w[n] = \begin{cases} 1, & n = -M/2, \dots, 0, \dots M/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$W[k] = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/M)}$$

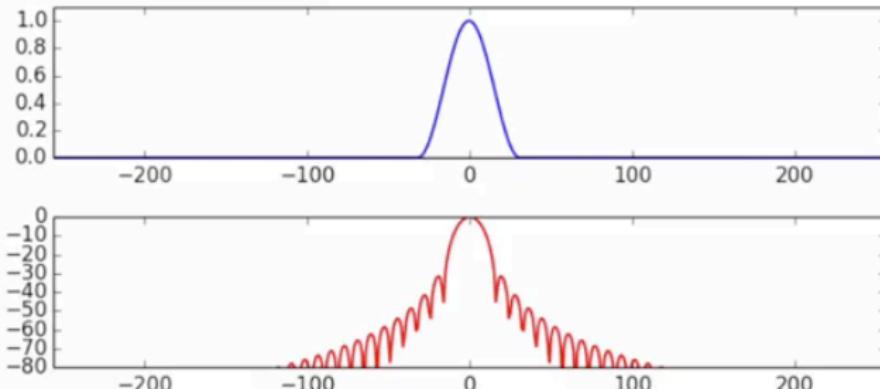


main-lobe width: 2 bins  
side-lobe level: -13.3 dB

## Fenêtres d'analyse de Hanning

$$w[n] = .5 + .5 \cos(2\pi n/M), \quad n = -M/2, \dots, 0, \dots M/2$$

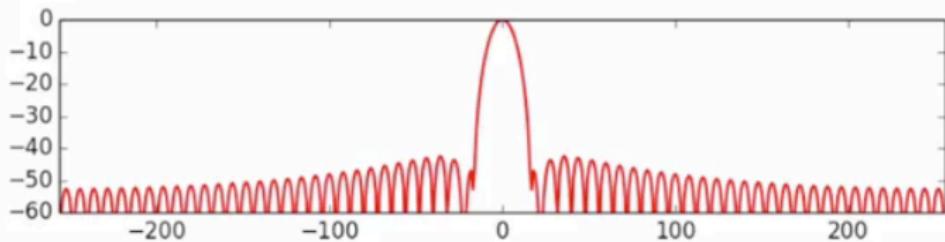
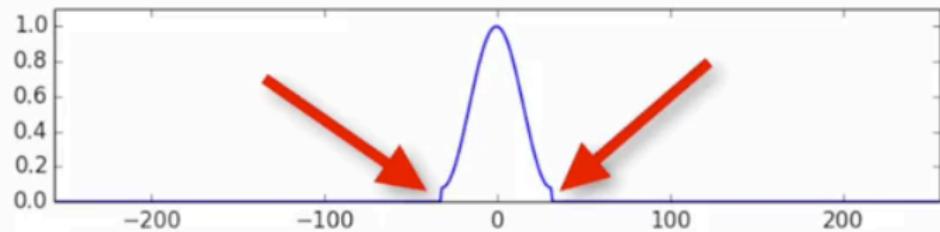
$$W[k] = .5 D[k] + .25(D[k-1] + D[k+1]) \quad \text{where } D[k] = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/M)}$$



main-lobe width: 4 bins  
side-lobe level: -31.5 dB

## Fenêtres d'analyse de Hamming

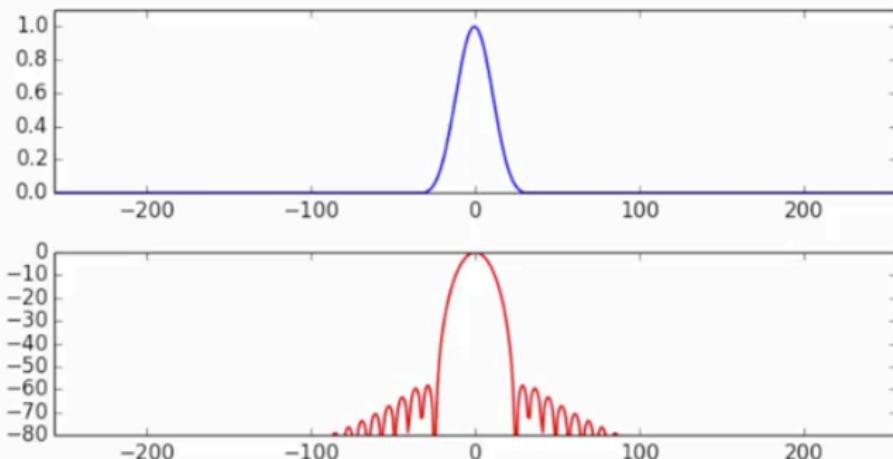
$$w[n] = .54 + .46 \cos(2\pi n/M), \quad n = -M/2, \dots, 0, \dots M/2$$



main-lobe width: 4 bins  
side-lobe level: -42.7 dB

## Fenêtres d'analyse de Blackmann

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M)$$

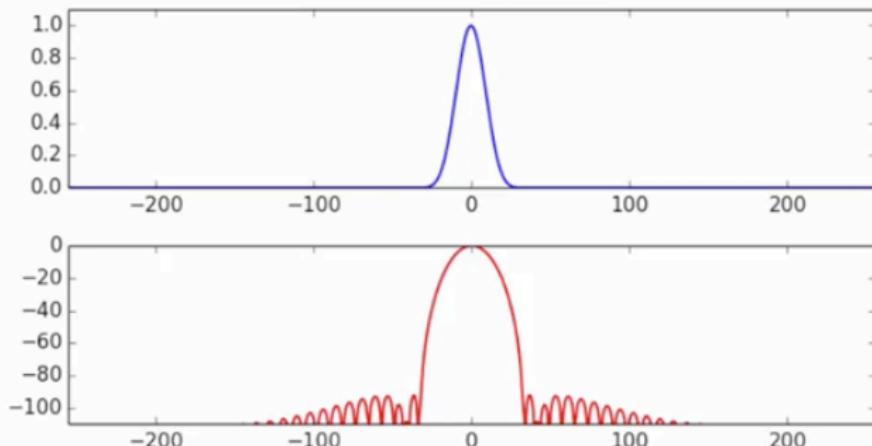


main-lobe width: 6 bins  
side-lobe level: -58 dB

## Fenêtres d'analyse de Blackmann-Harrix

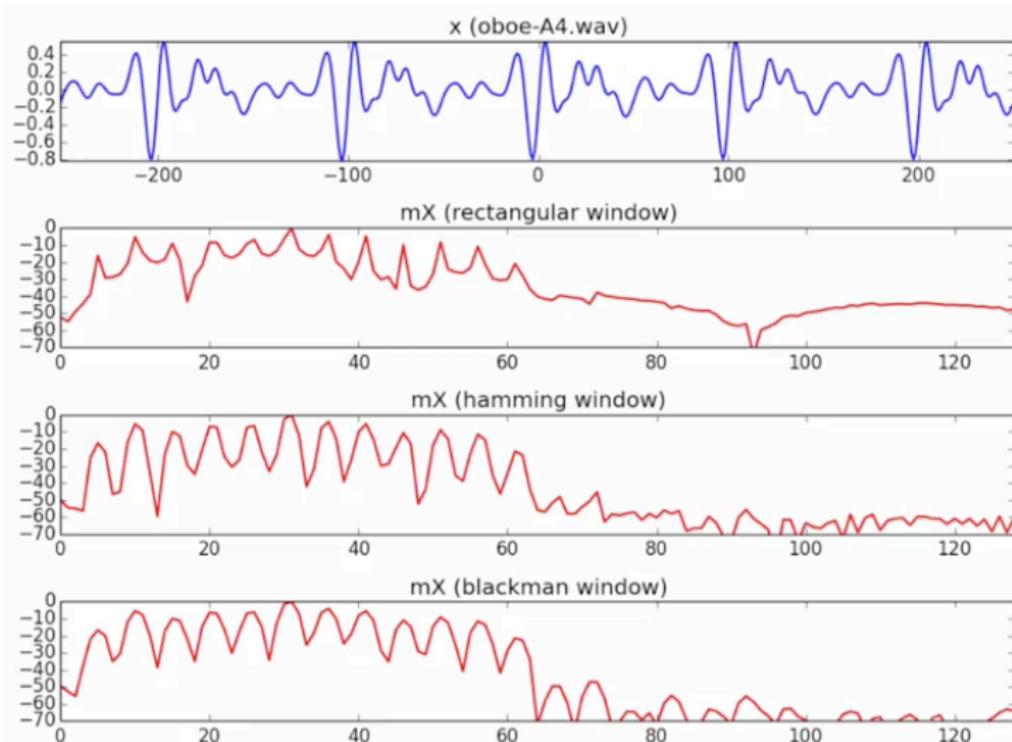
$$w(n) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^3 \alpha_l \cos\left(2nl\pi/M\right), \quad n = -M/2, \dots, 0, \dots, M/2$$

where  $\alpha_0 = 0.35875, \alpha_1 = 0.48829, \alpha_2 = 0.14128, \alpha_3 = 0.01168$



main lobe width: 8 bins  
side-lobe level: -92dB

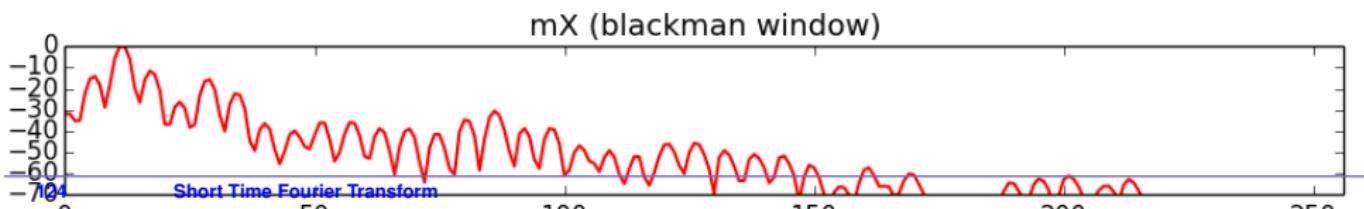
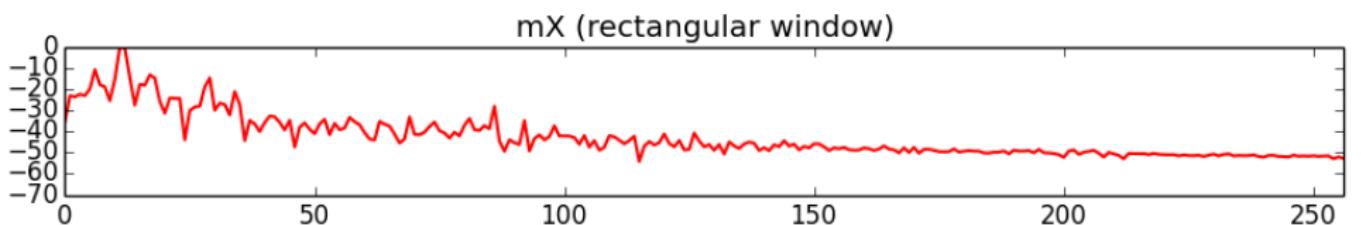
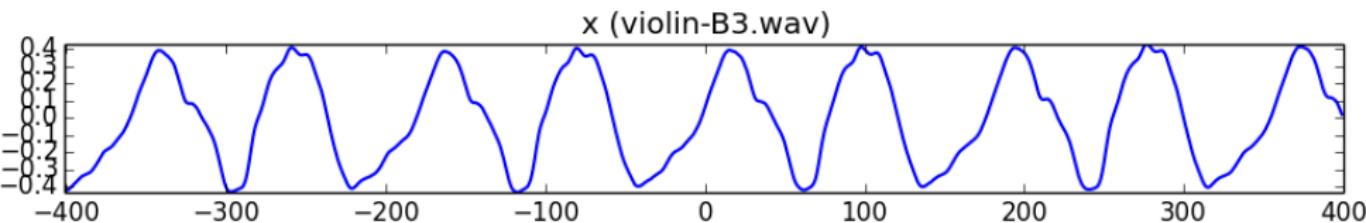
## Exemple d'analyse d'un signal fenêtré



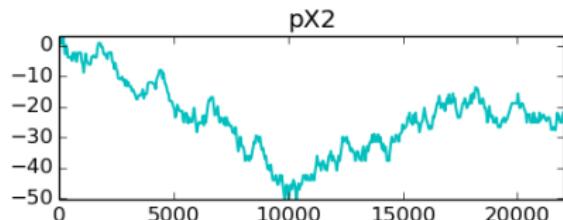
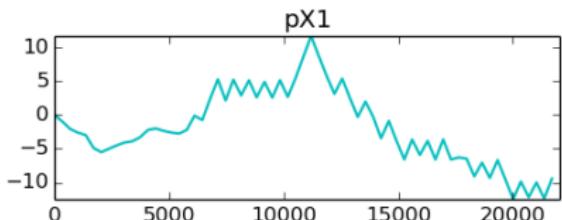
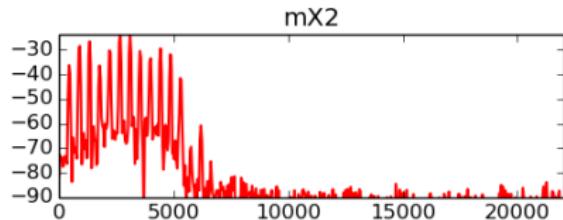
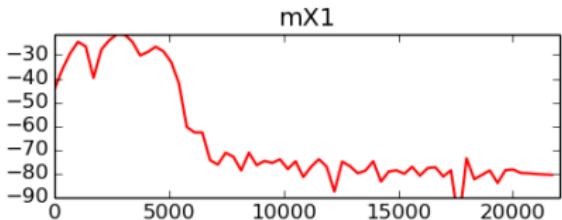
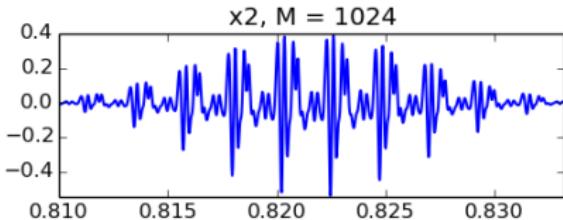
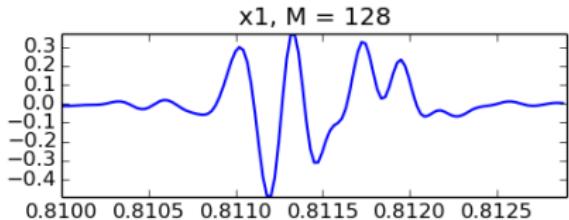
## STFT et fenêtre d'analyse

Rappel :

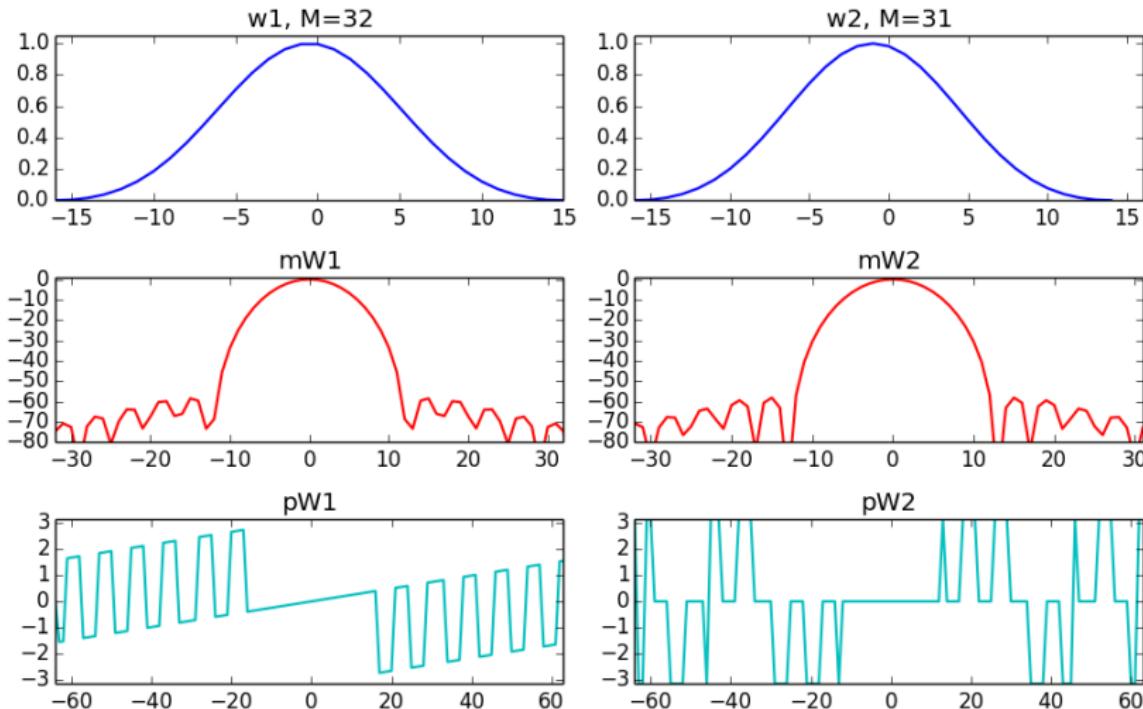
$$xw_l[n] = w[n]x[n + lH] \quad l = 0, 1, \dots,$$



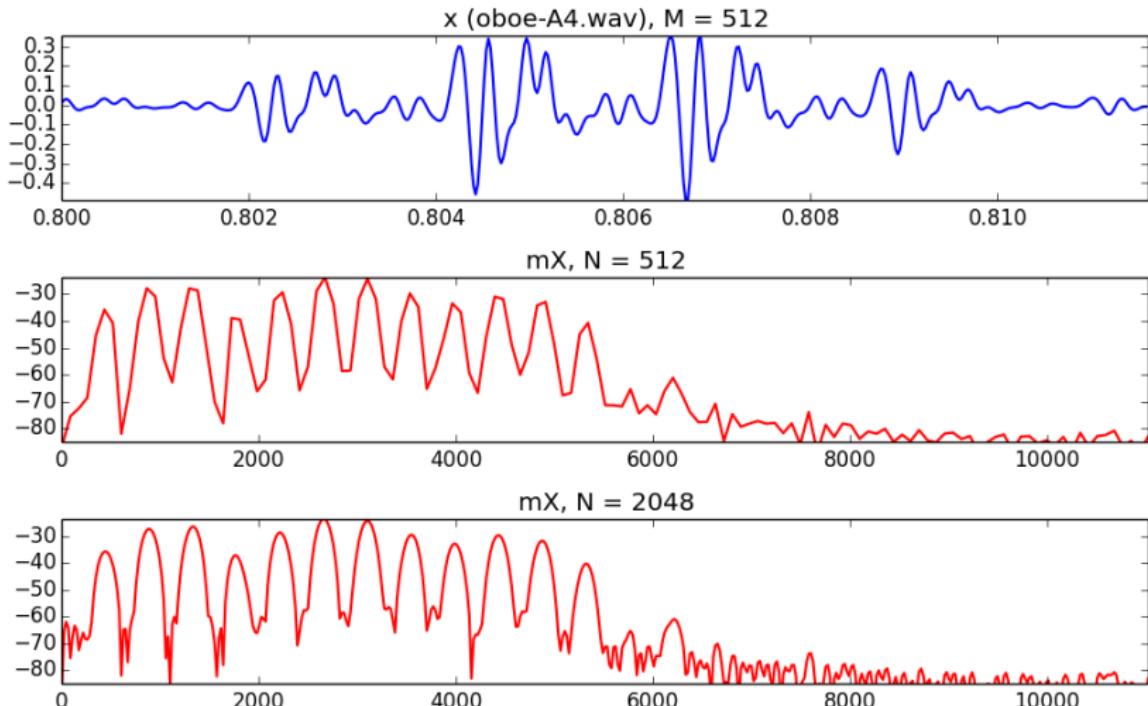
## Taille de la fenêtre d'analyse



## Parité de la fenêtre d'analyse

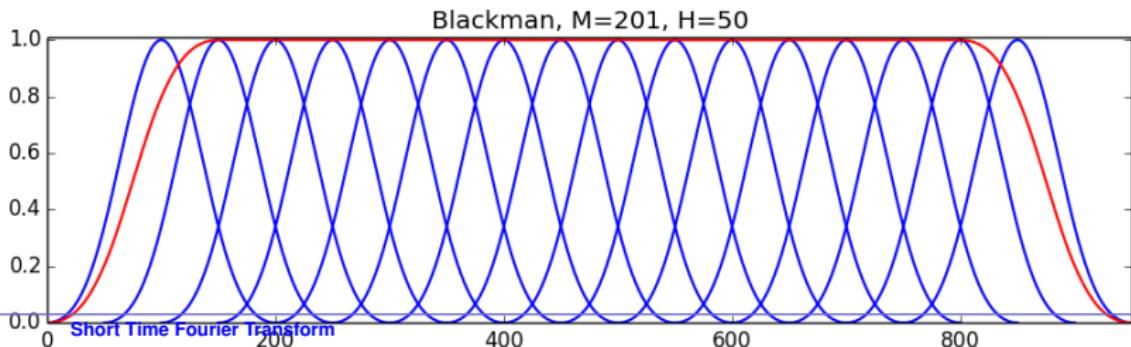
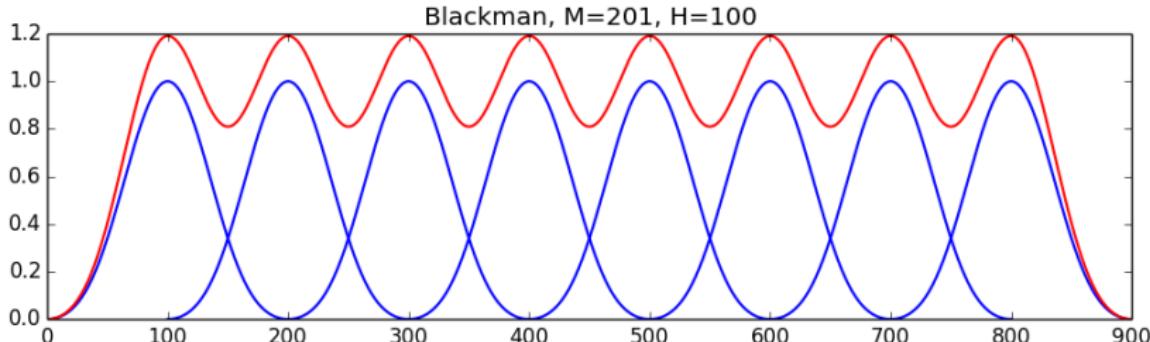


## Taille de la FFT (zero-padding)

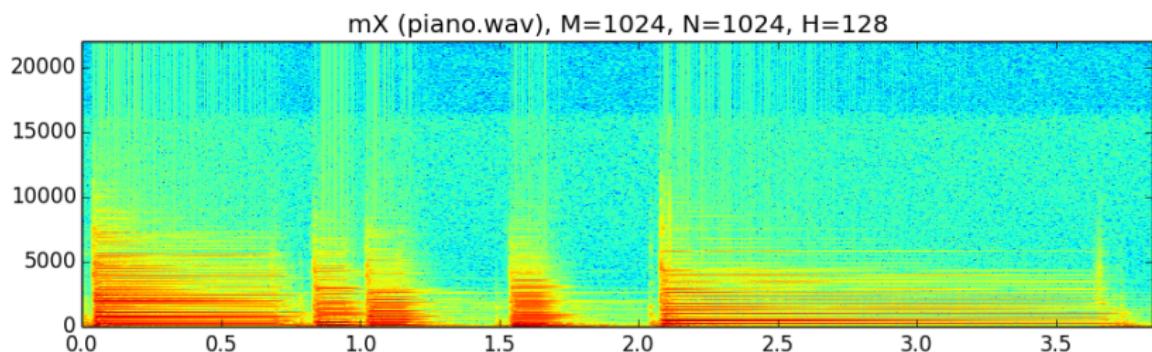
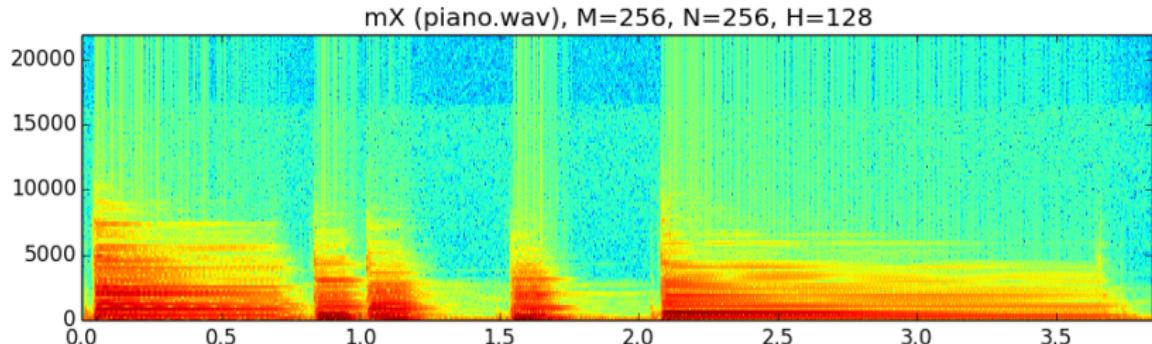


## Grandeur de l'incrément

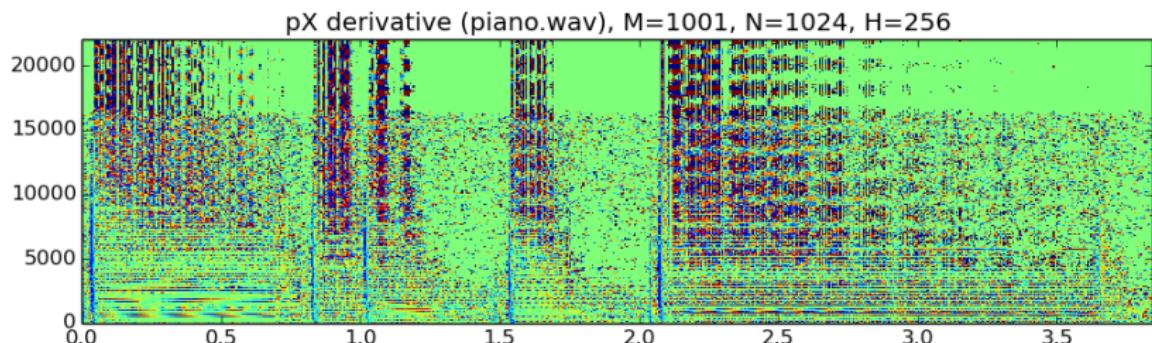
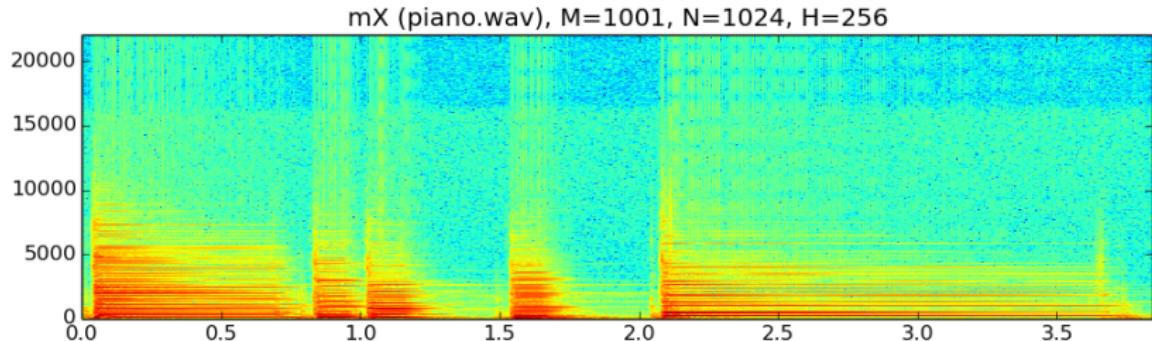
$$\text{Objectif } A_w[n] = \sum_{l=0}^{L-1} w[n - lH] = c$$



## Compromis temps/fréquence



## Spectrogramme d'amplitude et de phase



## STFT Inverse

$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} \text{Shift}_{IH,n} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} X_l[k] e^{j2\pi kn/N} \right]$$

Chaque trame (reconstituée) vaut :

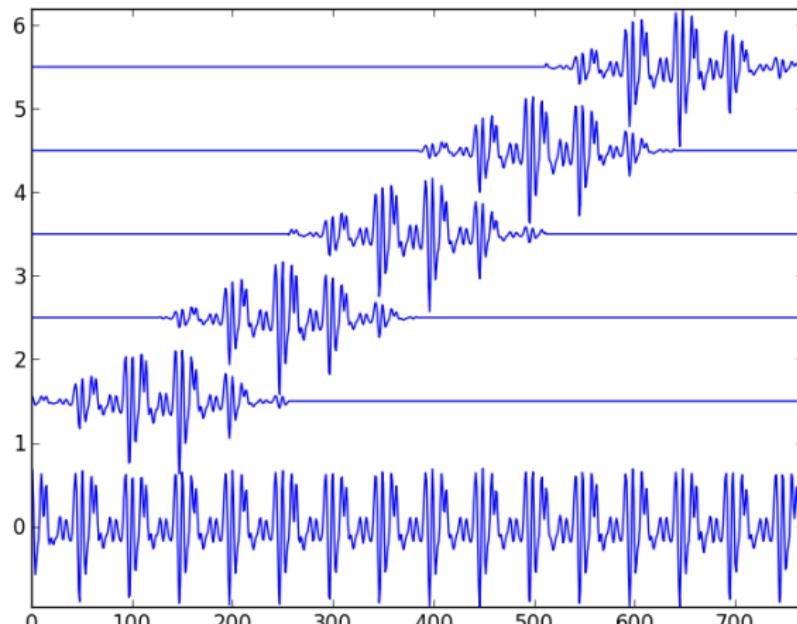
$$yw_l[n] = x[n + lH]w[n]$$

et la sortie globale vaut :

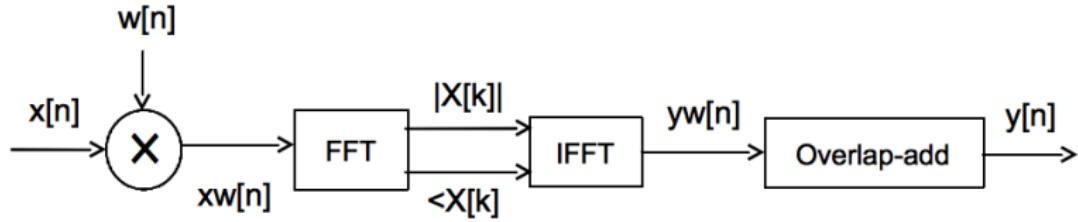
$$y[n] = \sum_{l=0}^{L-1} yw_l[n] = x[n] \sum_{l=0}^{L-1} w[n - lH]$$

## STFT Inverse : somme des signaux fenêtrés

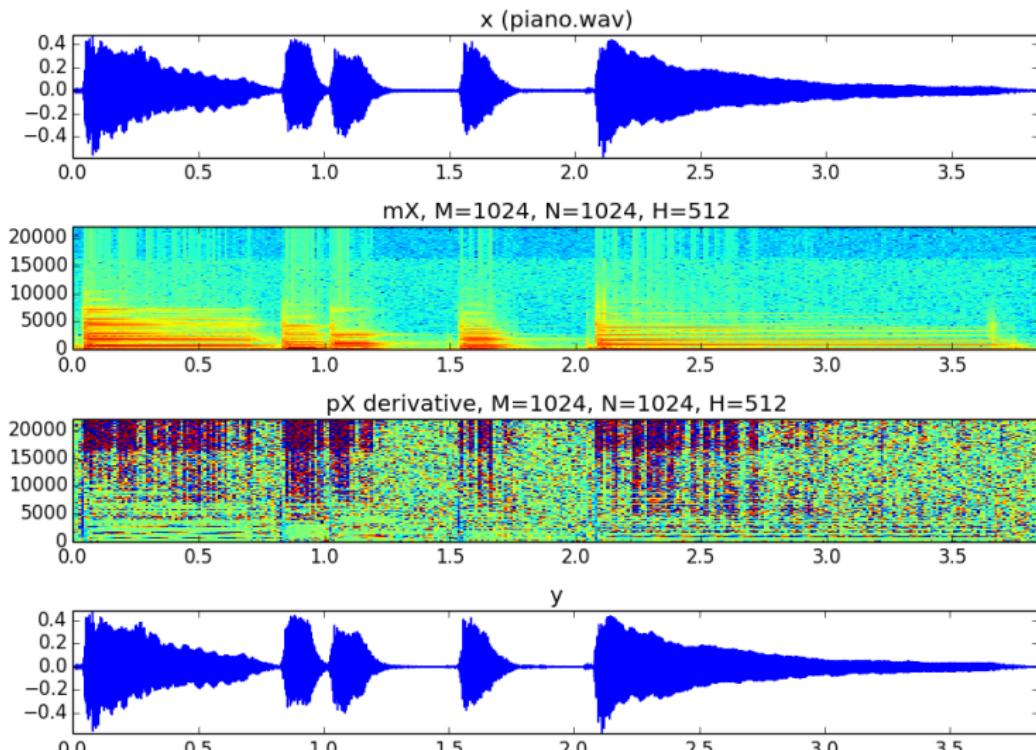
$$yw_i[n] = x[n + lH]w[n], \quad , l = 0, 1, \dots$$



## STFT: Analyse et synthèse



## STFT: Analyse et synthèse



## Références sur la STFT :

- Cours de Xavier Serra, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, sur Coursera entre autres
- <https://en.wikipedia.org/wiki/STFT>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Window\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function)
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Spectrogram>
- Cours de Julius O. Smith : <https://ccrma.stanford.edu/jos/sasp/>
- Sons de : <http://www.freesound.org/people/xserra/packs/13030>
- Graphiques et morceaux de code repris sous licence CC Attribution-Noncommercial-Share et licence Afferro GPL.
- Package complet de codes sur <https://github.com/MTG/sms-tools>