- HAI403I: Algorithme 3, le retour -

Cours 2 : Algorithmes gloutons

L2 informatique
Université de Montpellier

Les méthodes gloutonnes

- En un mot, faire à chaque étape le choix possible qui semble le meilleur.
  Parfois, ça marche et on obtient des bons algos...

- On voit dans ce chapitre des algorithmes gloutons simples et dont on peut prouver l'optimalité (d'autres sont plus 'célèbres' mais plus sophistiqués : l'algorithme de Kruskal, l'algorithme de compression de Huffman, voir Cours 3...).

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

Définition du problème

Entrée un ensemble $\mathcal{C}$ de cours $C_i = (d_i, f_i)$ [début, fin], $i = 1, \ldots, n$

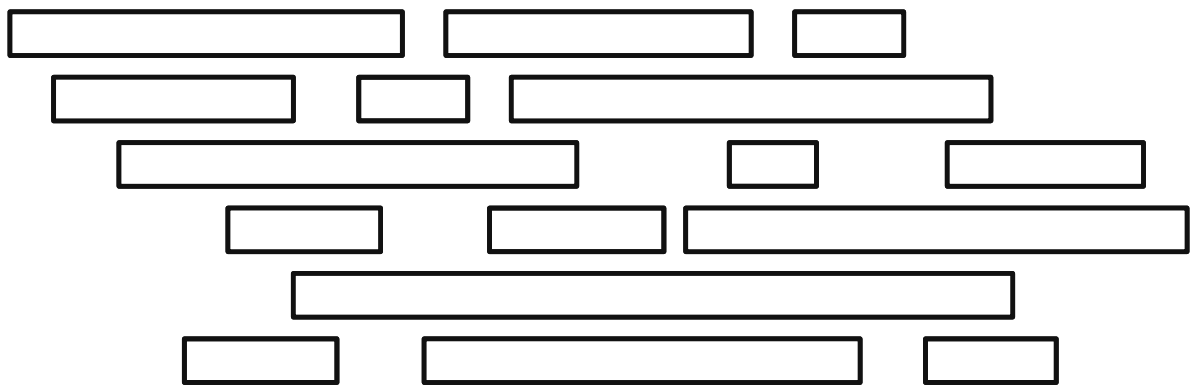
Deux cours C_i et C_j sont dits *compatibles* si $[d_i, f_i] \cap [d_j, f_j] = \emptyset$

Définition du problème

Entrée un ensemble $\mathcal{C}$ de cours $C_i = (d_i, f_i)$ [début, fin], $i = 1, \ldots, n$

Deux cours C_i et C_j sont dits *compatibles* si $[d_i, f_i] \cap [d_j, f_j] = \emptyset$

Sortie un ensemble ordonné maximal de cours $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ tels que pour tout $j < k$, $f_{i_j} \leq d_{i_{j+1}}$ $\rightsquigarrow$ cours compatibles



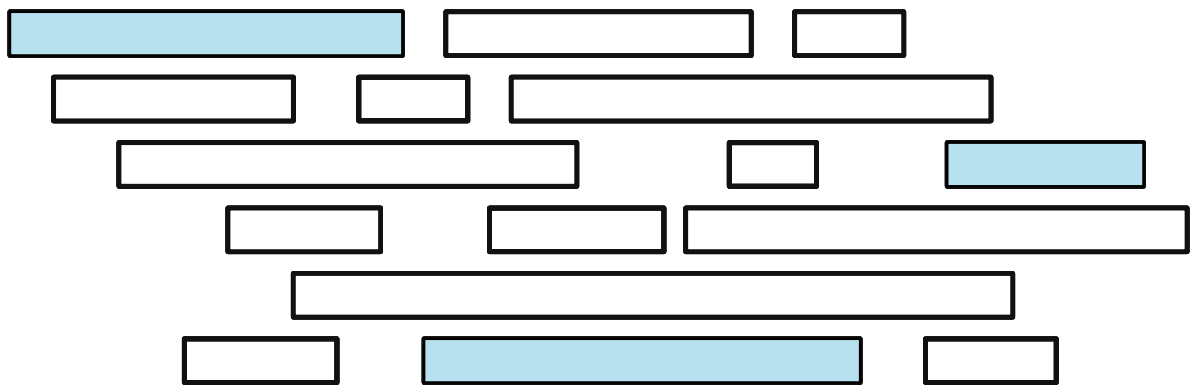
modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Définition du problème

Entrée un ensemble $\mathcal{C}$ de cours $C_i = (d_i, f_i)$ [début, fin], $i = 1, \ldots, n$

Deux cours C_i et C_j sont dits *compatibles* si $[d_i, f_i] \cap [d_j, f_j] = \emptyset$

Sortie un ensemble ordonné maximal de cours $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ tels que pour tout $j < k$, $f_{i_j} \leq d_{i_{j+1}}$ $\rightsquigarrow$ cours compatibles



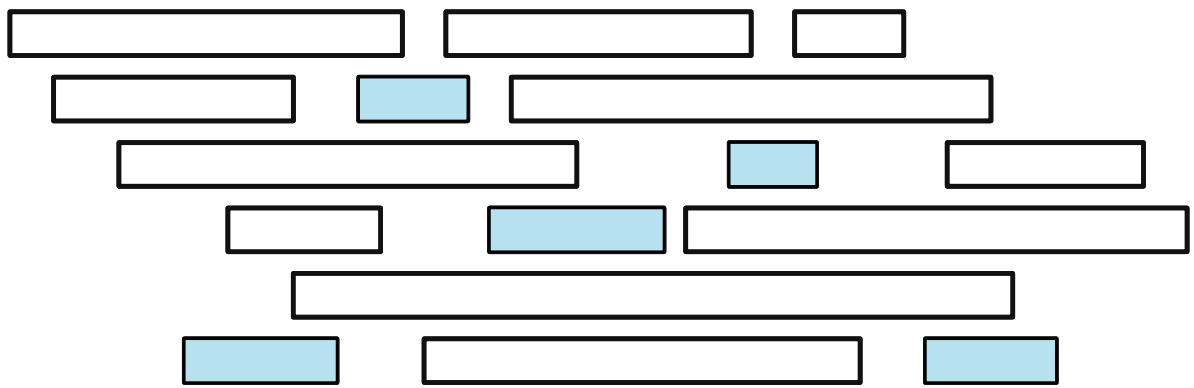
modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Définition du problème

Entrée un ensemble $\mathcal{C}$ de cours $C_i = (d_i, f_i)$ [début, fin], $i = 1, \ldots, n$

Deux cours C_i et C_j sont dits *compatibles* si $[d_i, f_i] \cap [d_j, f_j] = \emptyset$

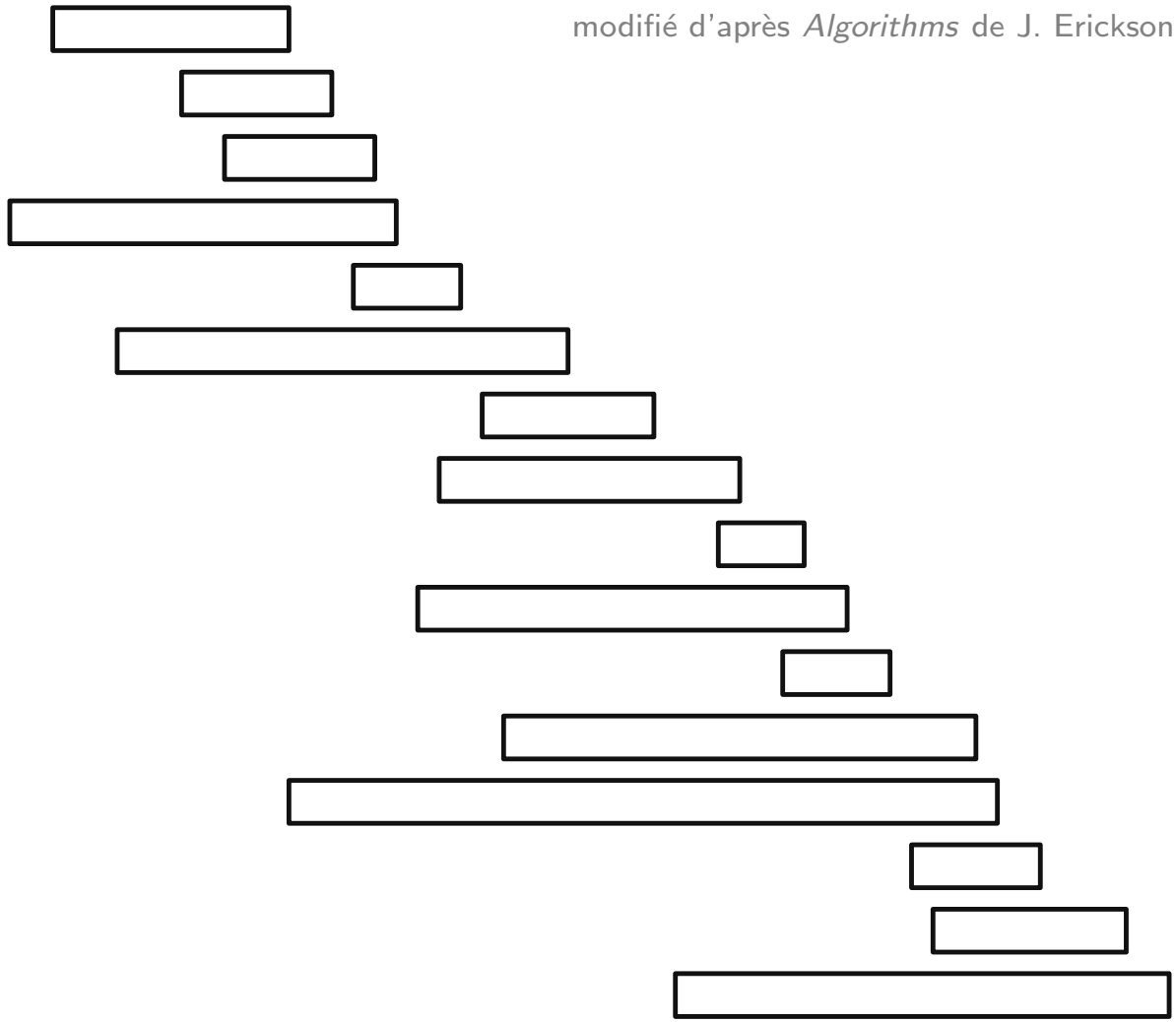
Sortie un ensemble ordonné maximal de cours $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ tels que pour tout $j < k$, $f_{i_j} \leq d_{i_{j+1}}$ $\rightsquigarrow$ cours compatibles



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Idée gloutonne

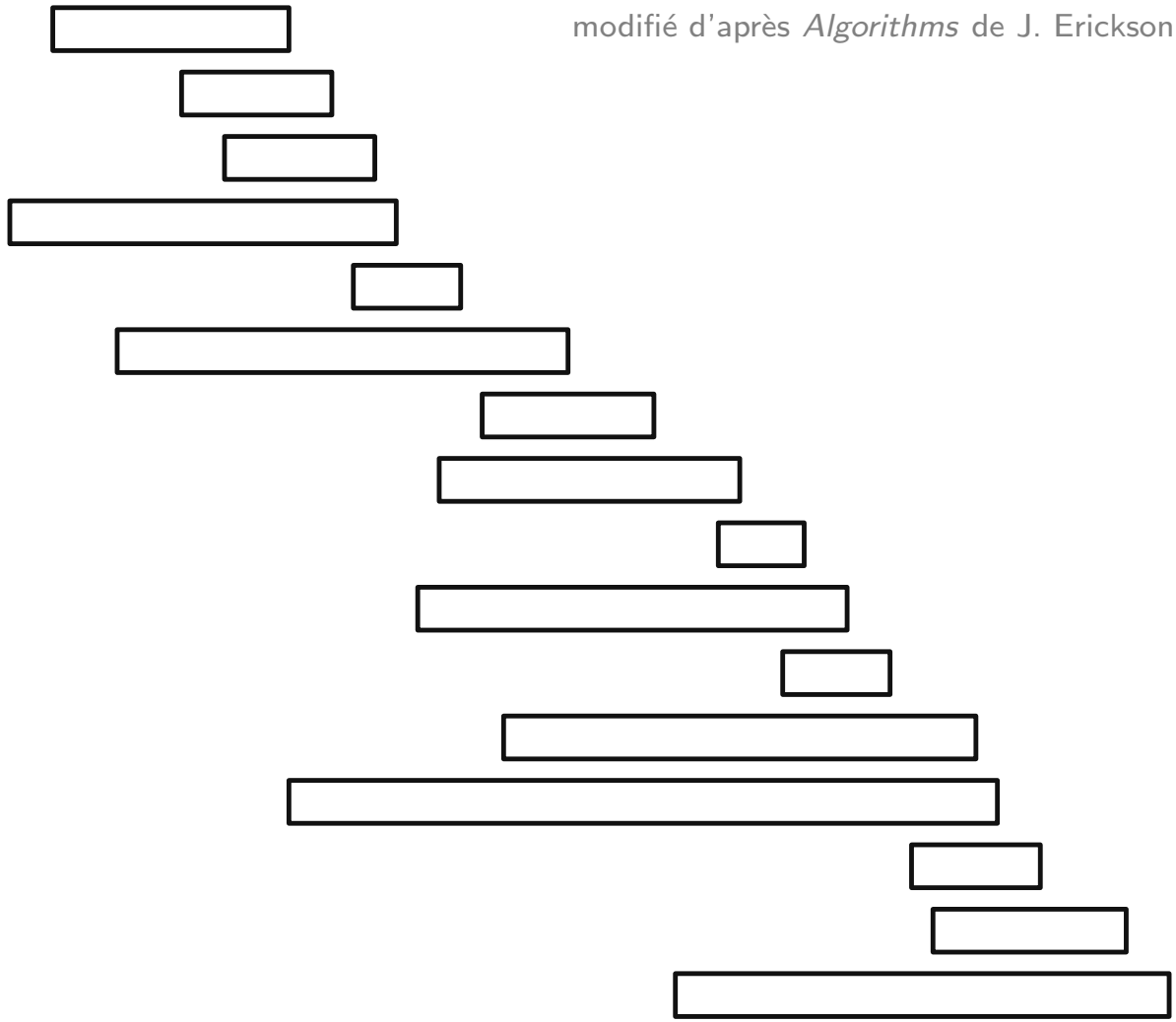
- Tri des cours par dates de fin croissantes



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Idée gloutonne

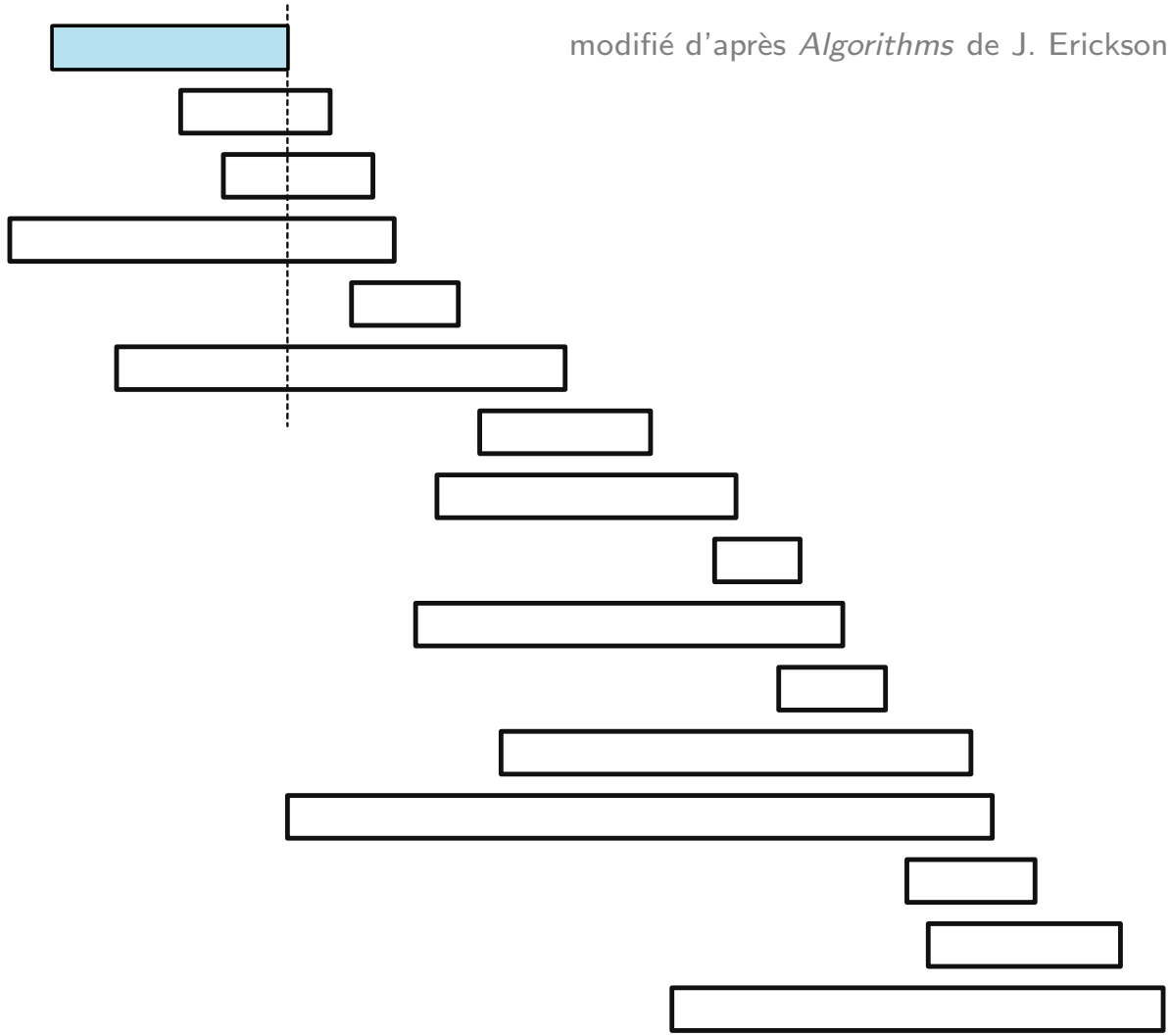
- Tri des cours par dates de fin croissantes
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit le plus tôt



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Idée gloutonne

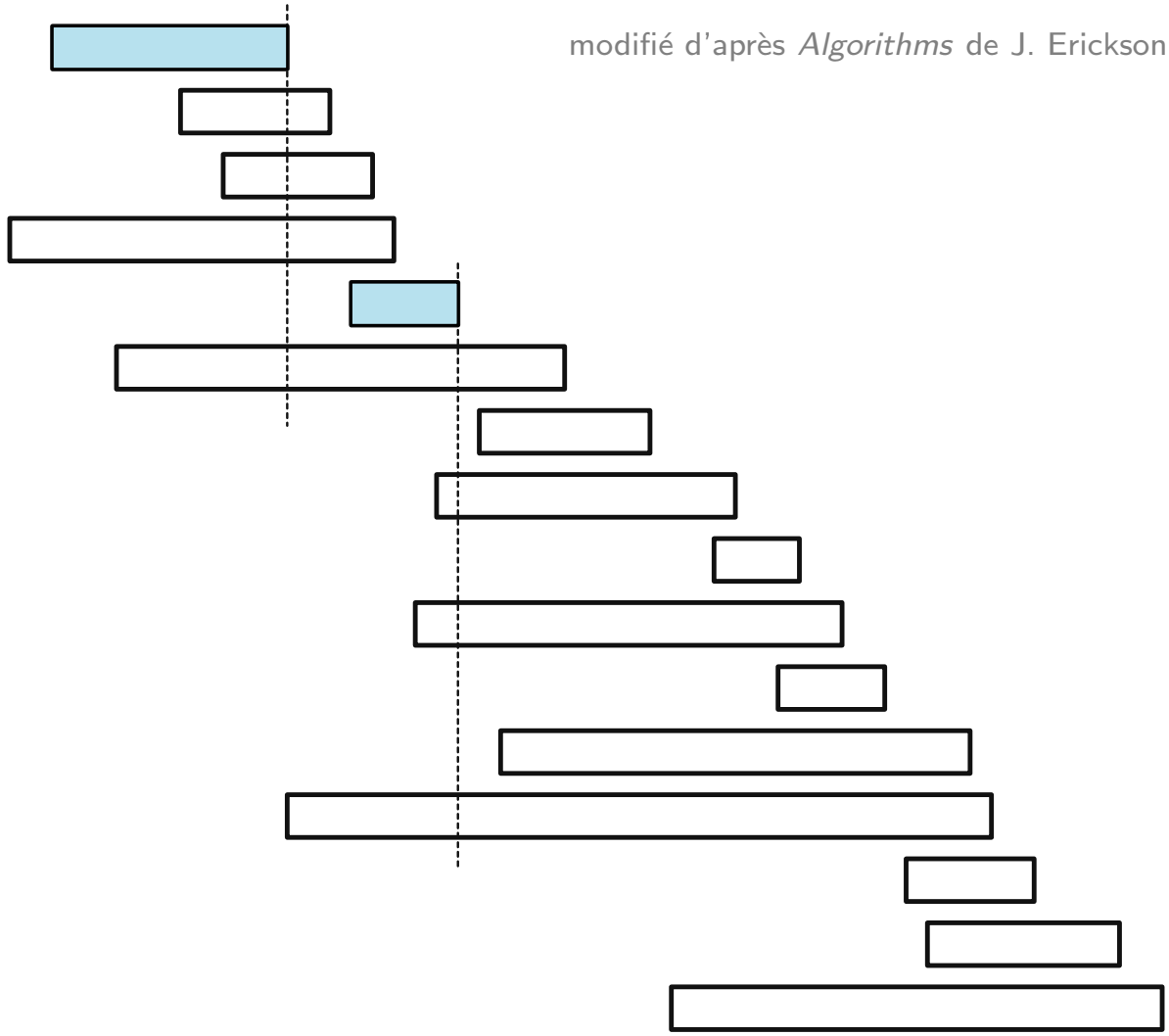
- Tri des cours par dates de fin croissantes
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit le plus tôt



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Idée gloutonne

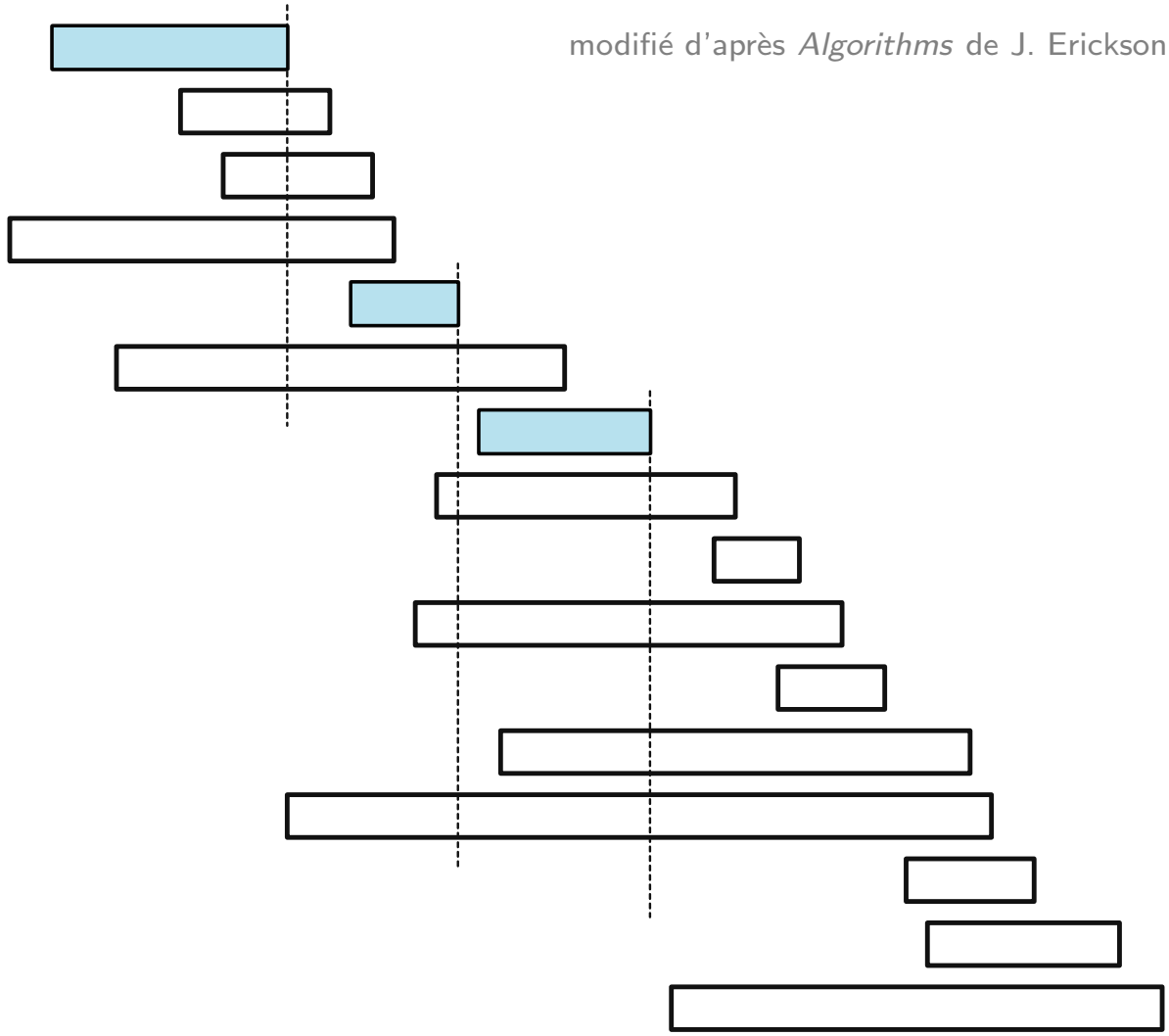
- Tri des cours par dates de fin croissantes
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit le plus tôt



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Idée gloutonne

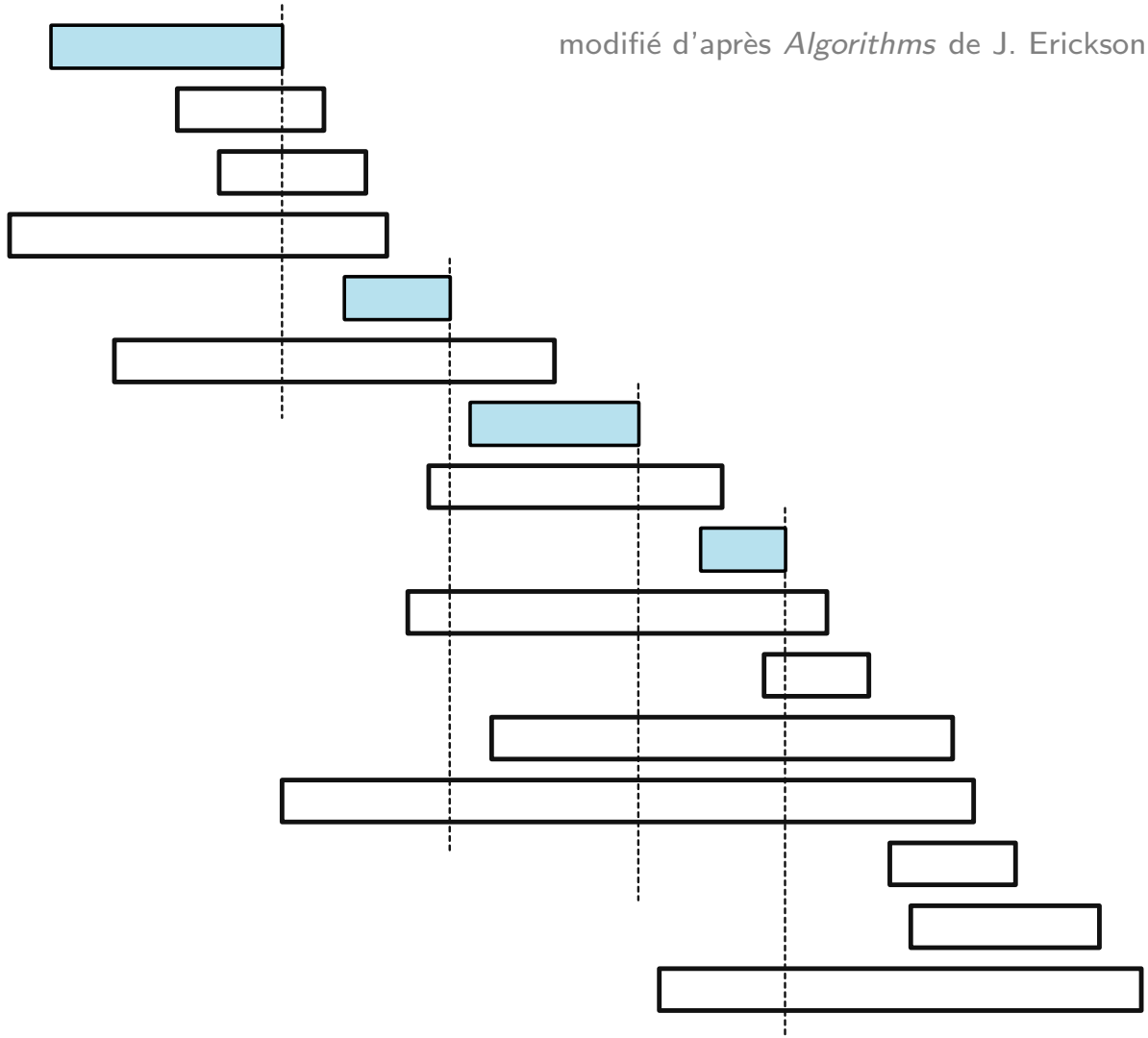
- Tri des cours par dates de fin croissantes
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit le plus tôt



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Idée gloutonne

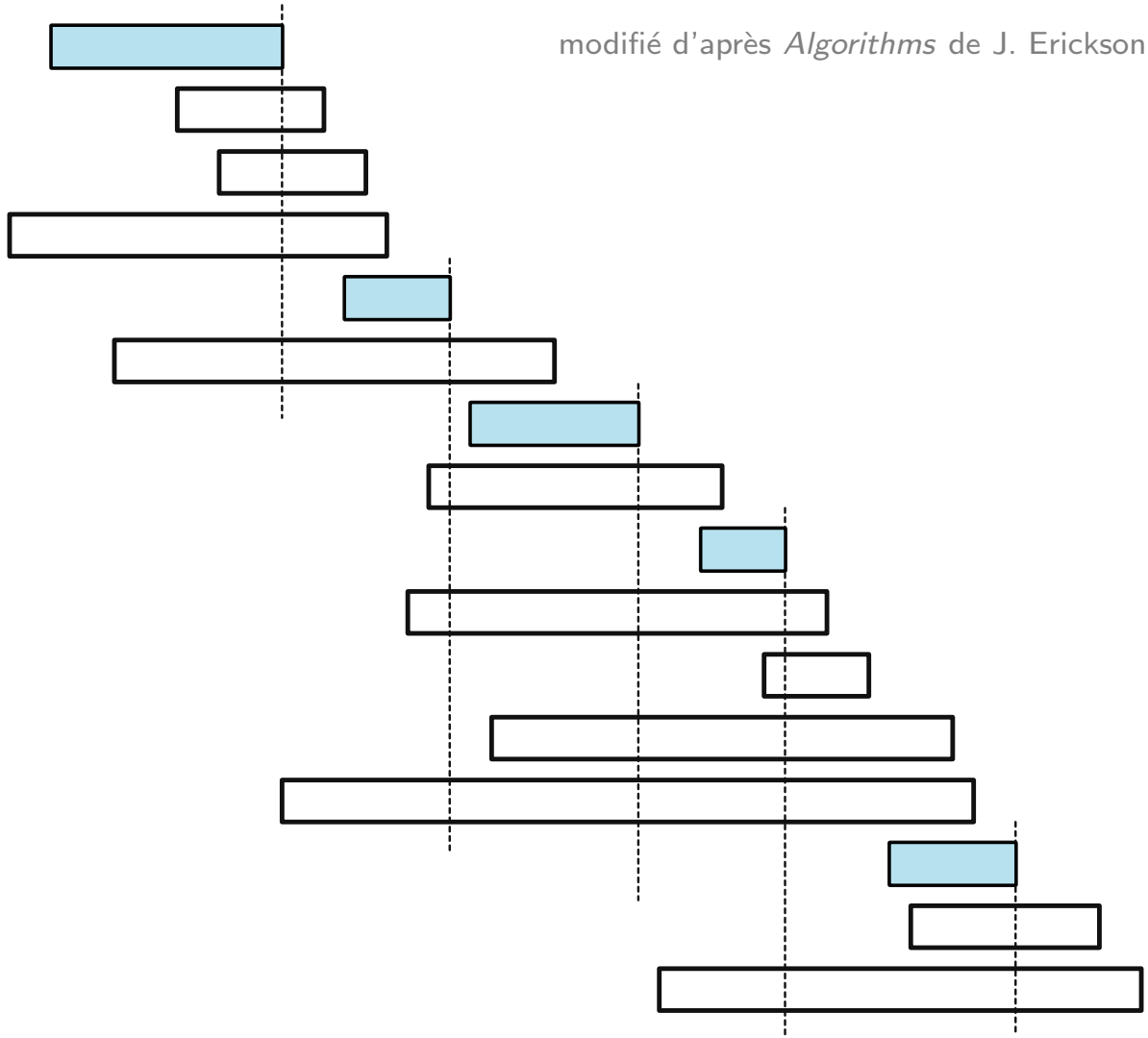
- Tri des cours par dates de fin croissantes
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit le plus tôt



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Idée gloutonne

- Tri des cours par dates de fin croissantes
- Choix *glouton* : sélectionner le cours qui finit le plus tôt



modifié d'après *Algorithms* de J. Erickson

Algorithme glouton

Algorithme : ChoixCoursGlouton(C)

Trier C en fonction des fins
$I \leftarrow \{C[1]\}$ // Cours choisis
$f \leftarrow$ Fin($C[1]$) // Fin du dernier cours choisi
pour $i = 2$ à n faire
    si Début($C[i]$) $\geq f$ alors
        $I \leftarrow I \cup \{C[i]\}$
        $f \leftarrow$ Fin($C[i]$)
retourner I

Algorithme glouton

Algorithme : ChoixCoursGlouton(C)

Trier C en fonction des fins
$I \leftarrow \{C[1]\}$ // Cours choisis
$f \leftarrow$ Fin($C[1]$) // Fin du dernier cours choisi
pour $i = 2$ à n faire
    si Début($C[i]$) $\geq f$ alors
        $I \leftarrow I \cup \{C[i]\}$
        $f \leftarrow$ Fin($C[i]$)
retourner I

Question

Quelle est la complexité de ChoixCoursGlouton ?

Algorithme glouton

Algorithme : ChoixCoursGlouton(C)

Trier C en fonction des fins
$I \leftarrow \{C[1]\}$ // Cours choisis
$f \leftarrow$ Fin($C[1]$) // Fin du dernier cours choisi
pour $i = 2$ à n faire
    si Début($C[i]$) $\geq f$ alors
        $I \leftarrow I \cup \{C[i]\}$
        $f \leftarrow$ Fin($C[i]$)
retourner I

Question

Quelle est la complexité de ChoixCoursGlouton ?
C'est le tri le plus coûteux (voir cours 4...) $\rightsquigarrow O(n \log n)$

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- Notons $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ les cours triés par dates de fin $\nearrow$.

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- Notons $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ les cours triés par dates de fin $\nearrow$.
- Petit Lemme *: il existe une solution optimale contenant* C_1

  En effet, soit $\mathcal{B} = (C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ une solution optimale.
  - Si $C_{i_1} = C_1$, on est content...
  - Sinon, par défintion de C_1, on a $f_1 \leq f_{i_1}$ et $(\mathcal{B} \setminus C_{i_1}) \cup C_1$ est aussi une solution optimale, contenant C_1 cette fois.

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- Notons $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ les cours triés par dates de fin $\nearrow$.
- Petit Lemme *: il existe une solution optimale contenant* C_1

  En effet, soit $\mathcal{B} = (C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ une solution optimale.
  - Si $C_{i_1} = C_1$, on est content...
  - Sinon, par défintion de C_1, on a $f_1 \leq f_{i_1}$ et $(\mathcal{B} \setminus C_{i_1}) \cup C_1$ est aussi une solution optimale, contenant C_1 cette fois.
- $\rightsquigarrow$ ChoixCoursGlouton fait le premier bon choix !

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- Notons maintenant $\mathcal{C}_1$ les cours *compatibles avec* C_1, triés par dates de fin croissantes (c'est-à-dire les cours dont la date de début est $\geq f_1$). On note $\mathcal{C}_1 = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{n_1}}\}$.

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- Notons maintenant $\mathcal{C}_1$ les cours *compatibles avec* C_1, triés par dates de fin croissantes (c'est-à-dire les cours dont la date de début est $\geq f_1$). On note $\mathcal{C}_1 = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{n_1}}\}$.
- Moyen Lemme *: il existe une solution optimale formée de* C_1 *et d'une solution optimale du problème sur* $\mathcal{C}_1$

  En effet, soit $\mathcal{B} = (C_1, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ une solution optimale du problème contenant C_1 (ça existe par le petit lemme).
  - Si $(C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ n'est pas une solution optimale pour $\mathcal{C}_1$, alors il existerait une meilleure solution $(C_{l_2}, \ldots, C_{l_{k+1}})$ sur $\mathcal{C}_1$.

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- Notons maintenant $\mathcal{C}_1$ les cours *compatibles avec* C_1, triés par dates de fin croissantes (c'est-à-dire les cours dont la date de début est $\geq f_1$). On note $\mathcal{C}_1 = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{n_1}}\}$.
- Moyen Lemme *: il existe une solution optimale formée de* C_1 *et d'une solution optimale du problème sur* $\mathcal{C}_1$

  En effet, soit $\mathcal{B} = (C_1, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k})$ une solution optimale du problème contenant C_1 (ça existe par le petit lemme).
  - Mais $(C_{l_2}, \ldots, C_{l_{k+1}})$ sont tous compatible avec C_1, et $(C_1, C_{l_2}, \ldots, C_{l_{k+1}})$ serait une meilleure solution que $\mathcal{B}$ au problème de départ, ce qui est exclu !

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- Notons maintenant $\mathcal{C}_1$ les cours *compatibles avec* C_1, triés par dates de fin croissantes (c'est-à-dire les cours dont la date de début est $\geq f_1$). On note $\mathcal{C}_1 = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{n_1}}\}$.
- Moyen Lemme *: il existe une solution optimale formée de* C_1 *et d'une solution optimale du problème sur* $\mathcal{C}_1$
- Du coup, par le Petit Lemme, comme il existe une solution optimale de $\mathcal{C}_1$ commençant par C_{j_1}, il existe une solution optimale du problème de départ commençant par (C_1, C_{j_1}).
  $\rightsquigarrow$ ChoixCoursGlouton fait aussi un second bon choix !

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :
  $\mathcal{P}_s$ = *'Si on note* $(C_{p_1}(= C_1), C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de ChoixCoursGlouton et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là, alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$*.'*

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :
  $\mathcal{P}_s =$ *'Si on note* $(C_{p_1}(= C_1), C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de ChoixCoursGlouton et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là, alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$*.'*
- $\mathcal{P}_1$ vraie par le Moyen lemme.

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :
  $\mathcal{P}_s$ = *'Si on note* $(C_{p_1}(= C_1), C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de ChoixCoursGlouton et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là, alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$*.'*
- Si $\mathcal{P}_s$ vraie, alors par le Moyen Lemme, il existe une solution opt. sur $\mathcal{C}_s$ formée du premier cours $C_{p_{s+1}}$ de $\mathcal{C}_s$ et d'une solution opt. sur les cours de $\mathcal{C}_s$ compatibles avec $C_{p_{s+1}}$. Et $\mathcal{P}_{s+1}$ est vraie !

Validité de l'algorithme

Théorème

ChoixCoursGlouton est optimal : il renvoie un ensemble maximal (d'indices) de cours compatibles, c-à-d qu'il n'existe pas d'ensemble strictement plus grand de cours compatibles.

Preuve

- On peut mettre en place la récurrence :
  $\mathcal{P}_s$ = *'Si on note* $(C_{p_1}(= C_1), C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *les s premiers choix de cours de ChoixCoursGlouton et* $\mathcal{C}_s$ *les cours compatibles avec tous ces cours là, alors il existe une solution au problème initial formée de* $(C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_s})$ *et d'une solution optimale sur* $\mathcal{C}_s$*.'*
- $\rightsquigarrow$ ChoixCoursGlouton renvoie une solution optimale au problème ! ■

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

Idée générale

Un algorithme glouton fait à chaque étape un choix localement optimal dans le but d'obtenir à la fin un optimum global.

Idée générale

Un algorithme glouton fait à chaque étape un choix localement optimal dans le but d'obtenir à la fin un optimum global.

Exemple du choix de cours

- Optimum local : cours qui minimise les incompatibilités
- Optimum global : maximum de cours compatibles

Idée générale

Un algorithme glouton fait à chaque étape un choix localement optimal dans le but d'obtenir à la fin un optimum global.

Exemple du choix de cours

- Optimum local : cours qui minimise les incompatibilités
- Optimum global : maximum de cours compatibles

Remarques

- Construction pas-à-pas d'une solution
- Algorithmes simples à concevoir... mais pas toujours parfaits !

$\rightsquigarrow$ Résolution exacte, approximation, heuristique

Concevoir des algorithmes gloutons

1. Décider d'un choix glouton
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant

Concevoir des algorithmes gloutons

1. Décider d'un choix glouton
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où ça ne marche pas
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.

Concevoir des algorithmes gloutons

Tri par durées croissantes
$\{[11, 14], [7, 12], [13, 19]\}$

1. Décider d'un choix glouton
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où ça ne marche pas
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.

Concevoir des algorithmes gloutons

Tri par durées croissantes
$\{[11, 14], [7, 12], [13, 19]\}$

1. Décider d'un choix glouton
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où ça ne marche pas
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.
3. Démontrer que l'algorithme est correct
   - Il existe une solution optimale contenant le choix local
   - Choix local + glouton pour le reste $\rightsquigarrow$ solution optimale

Concevoir des algorithmes gloutons

Tri par durées croissantes
$\{[11, 14], [7, 12], [13, 19]\}$

1. Décider d'un choix glouton
   - Ajout d'un nouvel élément à la solution en construction
   - Recommencer sur le sous-problème restant
2. Chercher un cas où ça ne marche pas
   - Si on en trouve, retourner en 1.
   - Sinon, continuer en 3.
3. Démontrer que l'algorithme est correct
   - Il existe une solution optimale contenant le choix local
   - Choix local + glouton pour le reste $\rightsquigarrow$ solution optimale
4. Étudier la complexité de l'algorithme

Algorithme glouton générique

Problème générique

Entrée Un ensemble fini X, avec une valeur v_x pour tout $x \in X$
Une propriété $\mathcal{P}$ que doivent vérifier les sous-ensembles de X qui sont solutions. De tels sous-ensembles sont dits acceptables

Hyp. $\mathcal{P}$ est *monotone vers le bas* : Si $A \subseteq X$ vérifie $\mathcal{P}$ et $B \subseteq A$ alors B vérifie $\mathcal{P}$

Sortie Un sous-ensemble A de X acceptable et qui maximise/minimise $v_A = \sum_{x \in A} v_x$ parmi tous les sous-ensembles acceptables

Algorithme glouton générique

Problème générique

Entrée Un ensemble fini X, avec une valeur v_x pour tout $x \in X$
Une propriété $\mathcal{P}$ que doivent vérifier les sous-ensembles de X qui sont solutions. De tels sous-ensembles sont dits acceptables

Hyp. $\mathcal{P}$ est *monotone vers le bas* : Si $A \subseteq X$ vérifie $\mathcal{P}$ et $B \subseteq A$ alors B vérifie $\mathcal{P}$

Sortie Un sous-ensemble A de X acceptable et qui maximise/minimise $v_A = \sum_{x \in A} v_x$ parmi tous les sous-ensembles acceptables

Exemple du choix de cours

- X : ensemble des cours, avec $v_x = 1$ pour tout x
- $\mathcal{P}$: être compatible

Algorithme glouton générique

Problème générique

Entrée Un ensemble fini X, avec une valeur v_x pour tout $x \in X$
Une propriété $\mathcal{P}$ que doivent vérifier les sous-ensembles de X qui sont solutions. De tels sous-ensembles sont dits acceptables

Hyp. $\mathcal{P}$ est *monotone vers le bas* : Si $A \subseteq X$ vérifie $\mathcal{P}$ et $B \subseteq A$ alors B vérifie $\mathcal{P}$

Sortie Un sous-ensemble A de X acceptable et qui maximise/minimise $v_A = \sum_{x \in A} v_x$ parmi tous les sous-ensembles acceptables

Algorithme : GloutonGénérique$(X, \mathcal{P})$

Trier X par *valeurs* décroissantes/croissantes + critère glouton de choix ;
$S \leftarrow \emptyset$;
pour $x \in X$ *(dans l'ordre du tri)* faire
  si $S \cup \{x\}$ *vérifie* $\mathcal{P}$ alors $S \leftarrow S \cup \{x\}$;
retourner S

Théorème des algorithmes gloutons

Théorème

Si pour toute instance X du problème avec la propriété $\mathcal{P}$, il existe une solution optimale S tq

- *le premier élément x_0 de X, trié, appartienne à S*
- *$S \setminus x_0$ soit une solution optimale du problème sur $X \setminus x_0$ pour la propriété $\mathcal{P}'$ où $A \subseteq X \setminus x_0$ vérifie $\mathcal{P}'$ si $A \cup \{x_0\}$ vérifie $\mathcal{P}$.*

Alors GloutonGénérique *est optimal.*

Théorème des algorithmes gloutons

Théorème

Si pour toute instance X du problème avec la propriété $\mathcal{P}$, il existe une solution optimale S tq

- *le premier élément x_0 de X, trié, appartienne à S*
- *$S \setminus x_0$ soit une solution optimale du problème sur $X \setminus x_0$ pour la propriété $\mathcal{P}'$ où $A \subseteq X \setminus x_0$ vérifie $\mathcal{P}'$ si $A \cup \{x_0\}$ vérifie $\mathcal{P}$.*

Alors GloutonGénérique est optimal.

Exemple du choix de cours

- X : ensemble des cours, avec $v_x = 1$ pour tout x
- $\mathcal{P}$: être compatible
- Tri : dates de fin croissantes
- Preuve :
  - Il existe un ensemble de cours optimal contenant le 1^{er} cours
  - En enlevant le 1^{er} cours, il reste un ensemble optimal pour les cours commençant après la fin du 1^{er} cours

Théorème des algorithmes gloutons

Théorème

Si pour toute instance X du problème avec la propriété $\mathcal{P}$, il existe une solution optimale S tq

- *le premier élément x_0 de X, trié, appartienne à S*
- *$S \setminus x_0$ soit une solution optimale du problème sur $X \setminus x_0$ pour la propriété $\mathcal{P}'$ où $A \subseteq X \setminus x_0$ vérifie $\mathcal{P}'$ si $A \cup \{x_0\}$ vérifie $\mathcal{P}$.*

Alors GloutonGénérique est optimal.

Preuve par récurrence sur $|X|$

- Si $|X| = 0$, la solution optimale est $\emptyset$
- Soit X une entrée avec $|X| > 0$. Par hyp. de récurrence, GloutonGénérique trouve une solution optimale S' sur $X \setminus \{x_0\}$ avec la propriété $\mathcal{P}'$. Donc $S' \cup \{x_0\}$ est optimale sur X avec la propriété $\mathcal{P}$, sinon on obtient une contradiction... ■

En pratique

- Il existe une théorie générale des algorithmes gloutons
  - basée sur la notion de matroïde
  - mais certains algorithmes « type glouton » ne rentrent pas exactement dans le moule

En pratique

- Il existe une théorie générale des algorithmes gloutons
  - basée sur la notion de matroïde
  - mais certains algorithmes « type glouton » ne rentrent pas exactement dans le moule
- Dans ce cours : étude de plusieurs exemples
  - utilisation du théorème pour faciliter les preuves

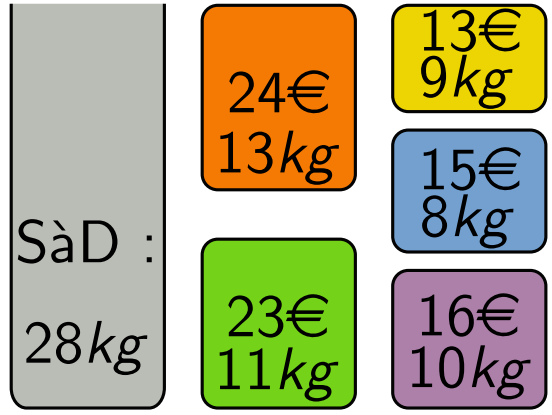
En pratique

- Il existe une théorie générale des algorithmes gloutons
  - basée sur la notion de matroïde
  - mais certains algorithmes « type glouton » ne rentrent pas exactement dans le moule
- Dans ce cours : étude de plusieurs exemples
  - utilisation du théorème pour faciliter les preuves

Objectifs :

- Savoir tenter une stratégie gloutonne
- Savoir détecter si elle marche ou non
- Savoir l'analyser (validité et complexité)

Problème du sac-à-dos

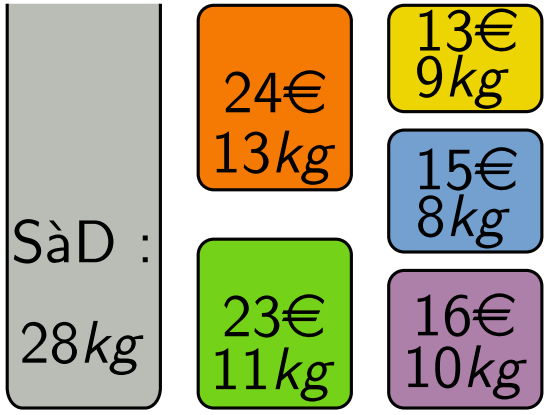


Définition du problème

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie un sous-ensemble des objets qui rentrent dans le sac ($\sum_i t_i \leq T$) et qui maximise la valeur totale ($V = \sum_i v_i$)

Problème du sac-à-dos



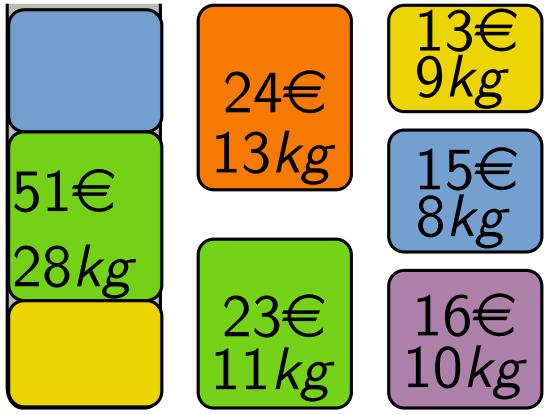
Définition du problème

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie un sous-ensemble des objets qui rentrent dans le sac ($\sum_i t_i \leq T$) et qui maximise la valeur totale ($V = \sum_i v_i$)

- Problème célèbre car utile
  - en théorie
  - en pratique
  - en cryptographie
- Difficile (NP-difficile $\rightsquigarrow$ module de Complexité)

Problème du sac-à-dos



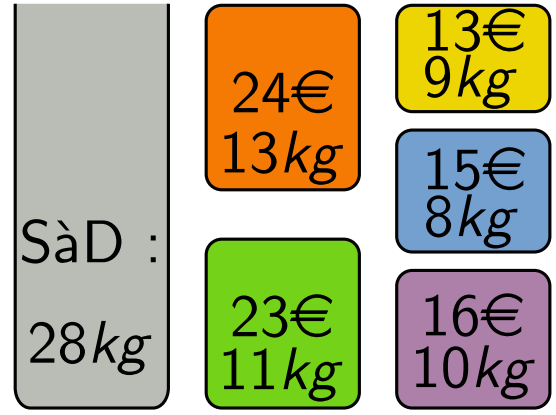
Définition du problème

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie un sous-ensemble des objets qui rentrent dans le sac ($\sum_i t_i \leq T$) et qui maximise la valeur totale ($V = \sum_i v_i$)

- Problème célèbre car utile
  - en théorie
  - en pratique
  - en cryptographie
- Difficile (NP-difficile $\rightsquigarrow$ module de Complexité)

Problème du sac-à-dos fractionnaire



Objets *fractionnables* :
on peut n'en prendre qu'une partie

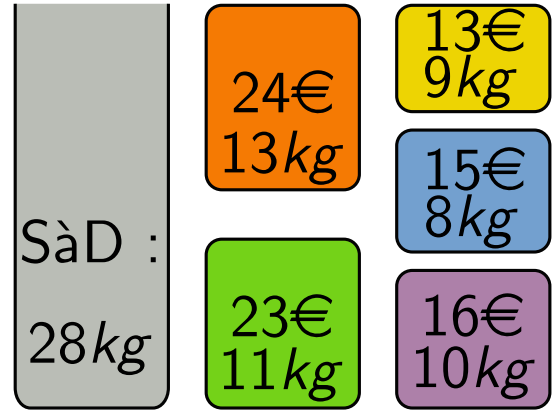
Définition

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie une fraction $x_i \in [0, 1]$ pour chaque objet, telle que

- le total ne dépasse pas la taille du sac : $\sum_i x_i t_i \leq T$
- la valeur totale est maximale : $V = \sum_i x_i v_i$

Problème du sac-à-dos fractionnaire



Objets *fractionnables* :
on peut n'en prendre qu'une partie

Définition

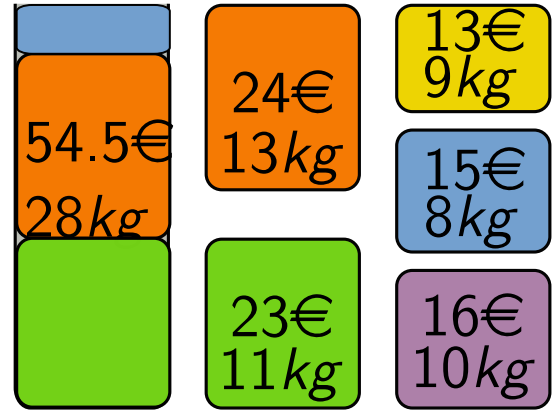
Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie une fraction $x_i \in [0, 1]$ pour chaque objet, telle que

- le total ne dépasse pas la taille du sac : $\sum_i x_i t_i \leq T$
- la valeur totale est maximale : $V = \sum_i x_i v_i$

- Problème simplifié !
- Approche pour résoudre le sac-à-dos

Problème du sac-à-dos fractionnaire



Objets *fractionnables* :
on peut n'en prendre qu'une partie

Définition

Entrée un ensemble d'objets, ayant une taille t_i et une valeur v_i
une taille T de sac-à-dos

Sortie une fraction $x_i \in [0, 1]$ pour chaque objet, telle que

- le total ne dépasse pas la taille du sac : $\sum_i x_i t_i \leq T$
- la valeur totale est maximale : $V = \sum_i x_i v_i$

- Problème simplifié !
- Approche pour résoudre le sac-à-dos

Algorithme glouton

Choix glouton : choisir l'objet de meilleur *rapport quantité - prix*

Algorithme glouton

Choix glouton : choisir l'objet de meilleur *rapport quantité - prix*

Algorithme : SÀDFRACGLOUTON(O, T)

Trier les objets $O_i = (t_i, v_i)$ par v_i/t_i décroissant
$R \leftarrow T$ `// Reste libre dans le sac-à-dos`
pour $i = 1$ *à* n *(dans l'ordre du tri)* faire
    si $t_i \leq R$ alors
        $x_i \leftarrow 1$
        $R \leftarrow R - t_i$
    sinon
        $x_i \leftarrow R/t_i$
        $R \leftarrow 0$
retourner $(x_1, \ldots, x_n)$

Algorithme glouton

Choix glouton : choisir l'objet de meilleur *rapport quantité - prix*

Algorithme : SÀDFRACGLOUTON(O, T)

Trier les objets $O_i = (t_i, v_i)$ par v_i/t_i décroissant
$R \leftarrow T$ `// Reste libre dans le sac-à-dos`
pour $i = 1$ *à* n *(dans l'ordre du tri)* faire
    si $t_i \leq R$ alors
        $x_i \leftarrow 1$
        $R \leftarrow R - t_i$
    sinon
        $x_i \leftarrow R/t_i$
        $R \leftarrow 0$
retourner $(x_1, \ldots, x_n)$

Lemme

La complexité de SÀDFRACGLOUTON est $O(n \log n)$.

Validité de l'algorithme

Lemme

Soit $O = \{(t_1, v_1), \ldots, (t_n, v_n)\}$ *un ensemble d'objets et* T *une taille de sac-à-dos, où* $v_1/t_1 \geq v_2/t_2 \geq \cdots \geq v_n/t_n$. *Alors il existe une solution optimale* $(x_1, \ldots, x_n)$ *sur l'entrée* (O, T) *telle que*

- $x_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 \leq T \\ t_1/T & \text{sinon} \end{cases}$
- $(x_2, \ldots, x_n)$ *est solution optimale sur l'entrée* $\{(t_2, v_2), \ldots, (t_n, v_n)\}$ *et* $T - t_1$

Preuve : voir TD...

$\rightsquigarrow$ Optimalité de SàdFracGlouton d'après le théorème des algorithmes gloutons !

1. Exemple 1 : choix de cours

2. Qu'est qu'un algorithme glouton ?

3. Exemple 2 : le sac-à-dos (fractionnaire)

4. Exemple spécial : approximation pour SetCover dans le plan

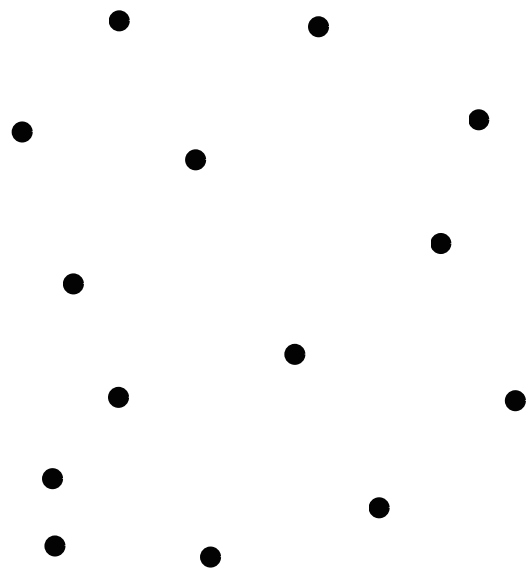
Le problème

SetCover

Entrée n maisons placées dans le plan

Sortie un ensemble minimal de maisons où placer une antenne Wifi :

- chaque antenne a une portée de 100 m
- toutes les maisons doivent être couvertes



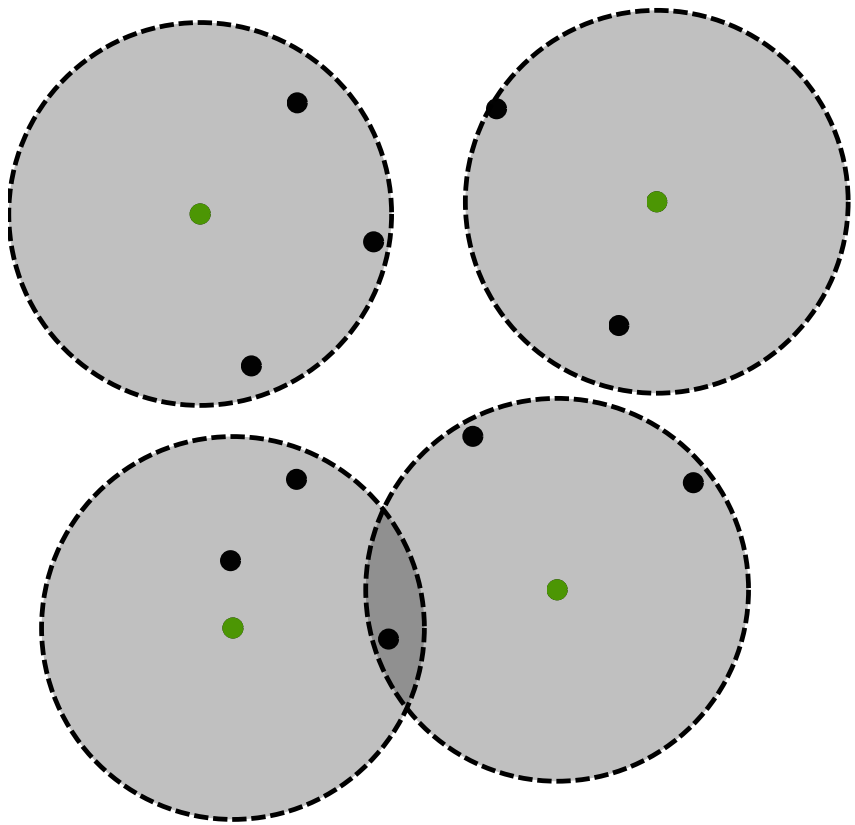
Le problème

SetCover

Entrée n maisons placées dans le plan

Sortie un ensemble minimal de maisons où placer une antenne Wifi :

- chaque antenne a une portée de 100 m
- toutes les maisons doivent être couvertes



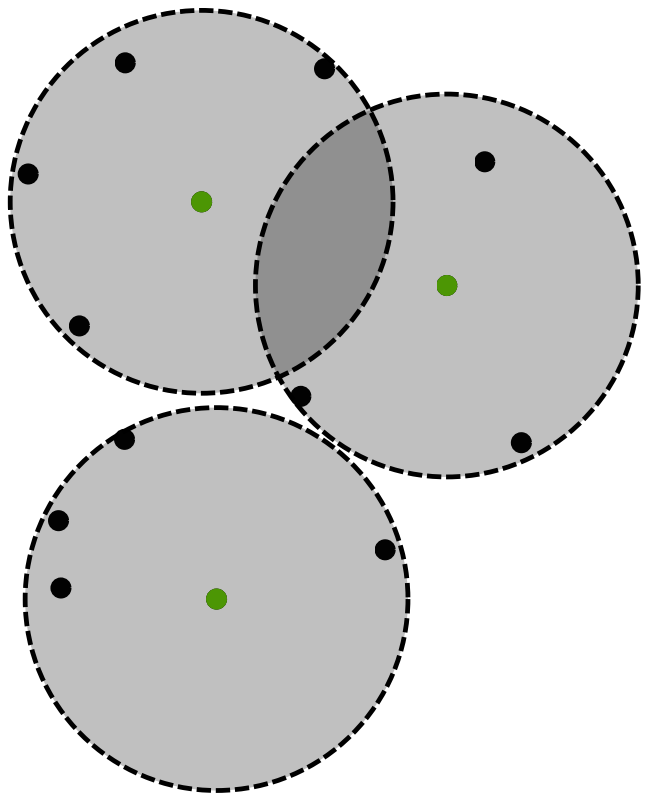
Le problème

SetCover

Entrée n maisons placées dans le plan

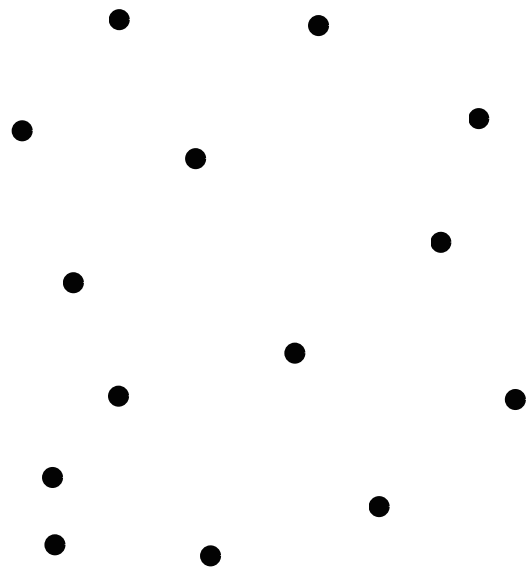
Sortie un ensemble minimal de maisons où placer une antenne Wifi :

- chaque antenne a une portée de 100 m
- toutes les maisons doivent être couvertes



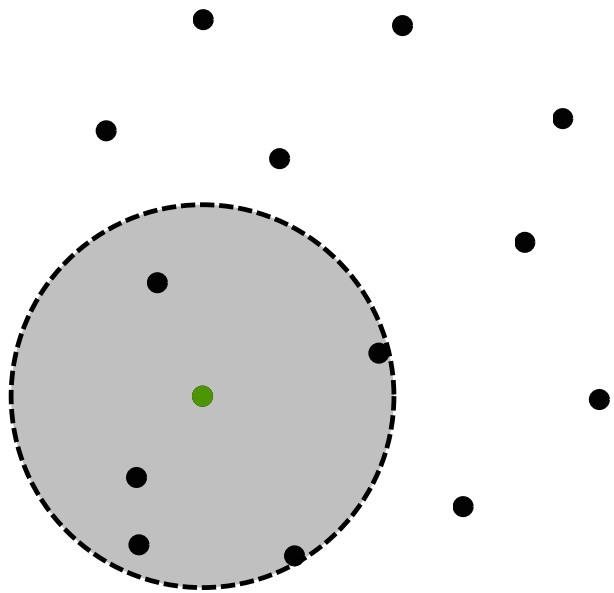
Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



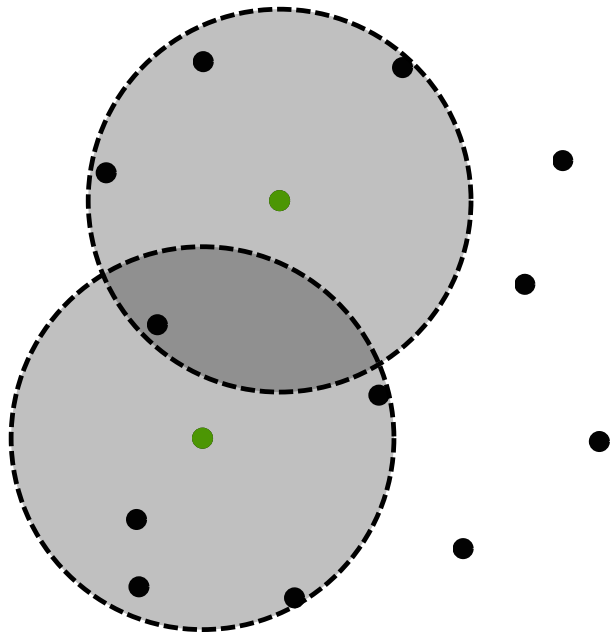
Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



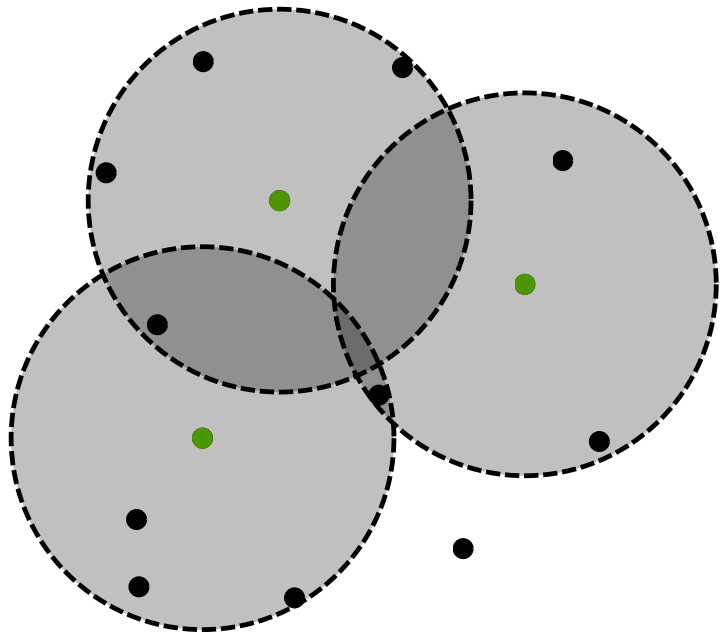
Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



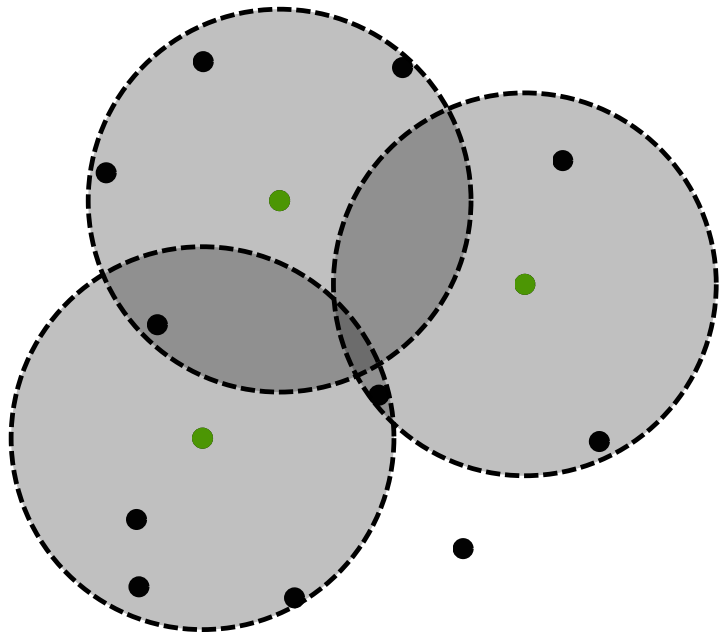
Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



Choix glouton

À chaque étape, on choisit la maison qui permet de couvrir le plus de maisons non encore couvertes



Choix non optimal mais...

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k *est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec* $\leq k.\log n$ *antennes*

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k.\log n$ antennes

Preuve

- Notons n_t le nbr de maisons *non-couvertes* après l'étape t.
  - $n_0 = n$

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k.\log n$ antennes

Preuve

- Notons n_t le nbr de maisons *non-couvertes* après l'étape t.
  - $n_0 = n$
  - Dans la solution optimale, k antennes couvrent toutes les maisons, et en particulier les n_t maisons non-couvertes après l'étape t
  - Il existe donc un emplacement qui va permettre de couvrir au moins $\frac{n_t}{k}$ maisons non-couvertes.

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k.\log n$ antennes

Preuve

- Notons n_t le nbr de maisons *non-couvertes* après l'étape t.
  - $n_0 = n$
  - Dans la solution optimale, k antennes couvrent toutes les maisons, et en particulier les n_t maisons non-couvertes après l'étape t
  - Il existe donc un emplacement qui va permettre de couvrir au moins $\frac{n_t}{k}$ maisons non-couvertes.
  - On a : $n_{t+1} \leq n_t - \frac{n_t}{k} = (1 - \frac{1}{k}).n_t$

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k.\log n$ antennes

Preuve

- Notons n_t le nbr de maisons *non-couvertes* après l'étape t.
- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}).n_t$

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k.\log n$ antennes

Preuve

- Notons n_t le nbr de maisons *non-couvertes* après l'étape t.
- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}).n_t$
- Comme pour $x > 0$ on a $1 - x \leq 2^{-x}$, on obtient $n_{t+1} \leq 2^{-\frac{1}{k}}.n_t$

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k.\log n$ antennes

Preuve

- Notons n_t le nbr de maisons *non-couvertes* après l'étape t.
- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}).n_t$
- Comme pour $x > 0$ on a $1 - x \leq 2^{-x}$, on obtient $n_{t+1} \leq 2^{-\frac{1}{k}}.n_t$
- D'où, $n_t \leq 2^{-\frac{1}{k}}.n_{t-1} \leq 2^{-\frac{2}{k}}.n_{t-2} \leq \cdots \leq 2^{-\frac{t}{k}}.n_0 = 2^{-\frac{t}{k}}.n$

Propriétés du choix glouton

Lemme

L'algorithme présenté peut être implanté en temps $O(n^3)$

Preuve : exercice de TD !

Lemme

Si k est le nombre minimal d'antennes nécessaires, l'algorithme trouve toujours une solution avec $\leq k.\log n$ antennes

Preuve

- Notons n_t le nbr de maisons *non-couvertes* après l'étape t.
- En résumé : $n_0 = n$ et pour tout $t \geq 0$ on a $n_{t+1} \leq (1 - \frac{1}{k}).n_t$
- Comme pour $x > 0$ on a $1 - x \leq 2^{-x}$, on obtient $n_{t+1} \leq 2^{-\frac{1}{k}}.n_t$
- D'où, $n_t \leq 2^{-\frac{1}{k}}.n_{t-1} \leq 2^{-\frac{2}{k}}.n_{t-2} \leq \cdots \leq 2^{-\frac{t}{k}}.n_0 = 2^{-\frac{t}{k}}.n$
- On est sûr d'avoir couvert toutes les maisons dès que $2^{-\frac{t}{k}}.n < 1$, c-à-d, $t > k.\log n$

■

Conclusion

Bilan

Pourquoi des algorithmes gloutons ?

- Algorithmes souvent simples et rapides...
- ... parfois optimaux
- ... parfois avec de bonnes propriétés
- ... parfois qui marchent en pratique
- ... parfois parfaitement inutiles !

Bilan

Pourquoi des algorithmes gloutons ?

- Algorithmes souvent simples et rapides...
- ... parfois optimaux
- ... parfois avec de bonnes propriétés
- ... parfois qui marchent en pratique
- ... parfois parfaitement inutiles !

Comment les utiliser ?

1. Chercher un choix glouton
2. Démontrer que c'est un bon choix (en théorie ou pratique)
3. Étudier la complexité obtenue