- HAI503I: Algorithmique 4 -

Cours 1 : Rappels de complexité, probabilités

L3 informatique
Université de Montpellier

1. Rappels de complexité
2. Rappels (?) de probabilités discrètes
3. Bits et entiers aléatoires ou pseudo-aléatoires
4. Tirage de réels, simulation de lois
5. Bornes des queues de distribution

Exemple de base

```
<inst. 1>;
pour i = 1 à n faire
    <inst. 2>;
pour i = 1 à n faire
    pour j = 1 à n faire
        <inst. 3>;
retourner var
```

- <inst. N> : opérations élémentaires

Exemple de base

```
1 <inst. 1>;
2 pour i = 1 à n faire
3     <inst. 2>;
4 pour i = 1 à n faire
5     pour j = 1 à n faire
6         <inst. 3>;
7 retourner var
```

- `<inst. N>` : opérations élémentaires
- L1 et L7 : $O(1)$
- L2 exécute n fois L3 : $O(n)$
- L5 exécute n fois L6 : $O(n)$
- L4 exécute n fois L5 : $O(n^2)$

Total

$$2 \times O(1) + O(n) + O(n^2) = O(n^2)$$

Exemple de base

```
1 <inst. 1>;
2 pour i = 1 à n faire
3     <inst. 2>;
4 pour i = 1 à n faire
5     pour j = 1 à n faire
6         <inst. 3>;
7 retourner var
```

- <inst. N> : opérations élémentaires
- L1 et L7 : $O(1)$
- L2 exécute n fois L3 : $O(n)$
- L5 exécute n fois L6 : $O(n)$
- L4 exécute n fois L5 : $O(n^2)$

Total

$2 \times O(1) + O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

En clair :

'Mon algo. a une complexité $O(n^2)$ (où $n =$ taille de l'entrée)'

$\rightsquigarrow$ si n est assez grand, le nb. d'opérations est $\leq$ constante$\times n^2$

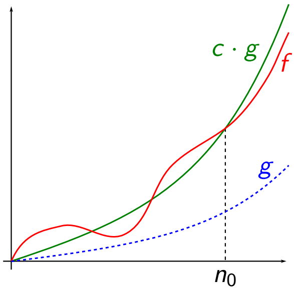
Notations de Landau

« Grand O »

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Alors $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{g})$ si

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, f(n) \leq c \cdot g(n).$$

« f est un grand O de g s'il existe une constante c et un entier n_0 tels que pour toute valeur n plus grande que n_0, $f(n)$ est inférieur ou égal à $c \cdot g(n)$ »



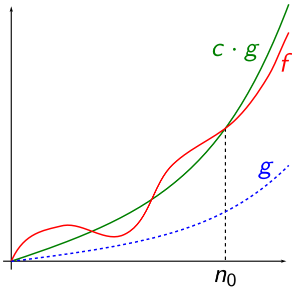
Notations de Landau

« Grand O »

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$. Alors $\boldsymbol{f = O(g)}$ si

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, f(n) \leq c \cdot g(n).$$

« f est un grand O de g s'il existe une constante c et un entier n_0 tels que pour toute valeur n plus grande que n_0, $f(n)$ est inférieur ou égal à $c \cdot g(n)$ »



À retenir

$f = O(g)$ si pour n suffisamment grand, f est plus petite que g, à une constante multiplicative près.

Utilisation en complexité

- Avantages pour la théorie :
  - Négliger les cas de bases
  - Pas besoin de compter chaque opération en détail
  - Flexibilité sur les opérations élémentaires

Utilisation en complexité

- Avantages pour la théorie :
  - Négliger les cas de bases
  - Pas besoin de compter chaque opération en détail
  - Flexibilité sur les opérations élémentaires
- Avantages pour la pratique :
  - Indépendant des détails de programmation (nb. de variables intermédiaires, ...)
  - Indépendant de l'environnement d'exécution : système d'exploitation, vitesse de la machine, compilateur, ...

Utilisation en complexité

- Avantages pour la théorie :
  - Négliger les cas de bases
  - Pas besoin de compter chaque opération en détail
  - Flexibilité sur les opérations élémentaires

- Avantages pour la pratique :
  - Indépendant des détails de programmation (nb. de variables intermédiaires, ...)
  - Indépendant de l'environnement d'exécution : système d'exploitation, vitesse de la machine, compilateur, ...

Un temps de calcul dépend du moment et de l'endroit.
Un résultat de complexité reste vrai **pour toujours !**

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
  - Les O se multiplient entre eux
  - Dans une somme, '*seul le plus grand O survit*'

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
  - Les O se multiplient entre eux
  - Dans une somme, '*seul le plus grand O survit*'
- **Comparatifs des fonctions de bases**
  - Les plus grands exposants de polynones *l'emportent*
  - '*Les exponentiels battent les polynomes qui battent les log*'

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
  - Les O se multiplient entre eux
  - Dans une somme, '*seul le plus grand O survit*'
- **Comparatifs des fonctions de bases**
  - Les plus grands exposants de polynones *l'emportent*
  - '*Les exponentiels battent les polynomes qui battent les log*'
- **Exemple :**

  $n.O(n) + 5n^3 + 3n + 9\log n + 1.4^n$
  $= O(n^2) + O(n^3) + O(n) + O(\log n) + O(1.4^n)$
  $= O(n^3) + O(\log n) + O(1.4^n)$
  $= O(1.4^n)$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
  - Les O se multiplient entre eux
  - Dans une somme, '*seul le plus grand O survit*'
- **Comparatifs des fonctions de bases**
  - Les plus grands exposants de polynones *l'emportent*
  - '*Les exponentiels battent les polynomes qui battent les log*'
- **Calculs de limites**
  - Si $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)} \right) = c$, alors pour $c \in \mathbb{R}_+$ on a $f = O(g)$ et pour $c = +\infty$ on a $f \neq O(g)$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
  - Les O se multiplient entre eux
  - Dans une somme, '*seul le plus grand O survit*'
- **Comparatifs des fonctions de bases**
  - Les plus grands exposants de polynones *l'emportent*
  - '*Les exponentiels battent les polynomes qui battent les log*'
- **Calculs de limites**
  - Si $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = c$, alors pour $c \in \mathbb{R}_+$ on a $f = O(g)$ et pour $c = +\infty$ on a $f \neq O(g)$
- **Exemple :**

  $f(n) = 2n$ et $g(n) = 10\sqrt{n}\log(n)$

  On a $\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2n}{10\sqrt{n}\log(n)} = \frac{\sqrt{n}}{5\log(n)}$

  Et $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

  Donc $f \neq O(g)$ (mais $g = O(f)$)

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
  - Les O se multiplient entre eux
  - Dans une somme, '*seul le plus grand O survit*'
- **Comparatifs des fonctions de bases**
  - Les plus grands exposants de polynones *l'emportent*
  - '*Les exponentiels battent les polynomes qui battent les log*'
- **Calculs de limites**
  - Si $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = c$, alors pour $c \in \mathbb{R}_+$ on a $f = O(g)$ et pour $c = +\infty$ on a $f \neq O(g)$
- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - Appel récursif sur une fraction de l'entrée : **Master Theorem**

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - **Exemple :**

AlgoRec1(n)

```
<inst. 1>;
AlgoRec1(n − 1);
AlgoRec1(n − 1);
<inst. 2>;
```

On note **t(n)** la complexité et **c** un majorant du temps des op. élémentaires

$t(n) \leq c + 2.t(n-1) \leq c + 2(c + 2.t(n-2))$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - **Exemple :**

AlgoRec1(n)

```
<inst. 1>;
AlgoRec1(n − 1);
AlgoRec1(n − 1);
<inst. 2>;
```

On note **t(n)** la complexité et **c** un majorant du temps des op. élémentaires

$t(n) \leq c + 2.t(n-1) \leq c + 2(c + 2.t(n-2))$

$t(n) \leq 3c + 4.t(n-2) \leq 3c + 4(c + 2.t(n-3))$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - **Exemple :**

AlgoRec1(n)

<inst. 1>;
AlgoRec1$(n-1)$;
AlgoRec1$(n-1)$;
<inst. 2>;

On note **t(n)** la complexité et **c** un majorant du temps des op. élémentaires

$t(n) \leq c + 2.t(n-1) \leq c + 2(c + 2.t(n-2))$
$t(n) \leq 3c + 4.t(n-2) \leq 3c + 4(c + 2.t(n-3))$
$t(n) \leq 7c + 8.t(n-3) \leq \ldots$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - **Exemple :**

AlgoRec1(n)

```
<inst. 1>;
AlgoRec1(n − 1);
AlgoRec1(n − 1);
<inst. 2>;
```

On note **t(n)** la complexité et **c** un majorant du temps des op. élémentaires

$t(n) \leq c + 2.t(n-1) \leq c + 2(c + 2.t(n-2))$
$t(n) \leq 3c + 4.t(n-2) \leq 3c + 4(c + 2.t(n-3))$
$t(n) \leq 7c + 8.t(n-3) \leq \dots$
$t(n) \leq (2^i - 1)c + 2^i.t(n-i) \leq \dots$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - **Exemple :**

AlgoRec1(n)

```
<inst. 1>;
AlgoRec1(n − 1);
AlgoRec1(n − 1);
<inst. 2>;
```

On note **t(n)** la complexité et **c** un majorant du temps des op. élémentaires

$t(n) \leq c + 2.t(n-1) \leq c + 2(c + 2.t(n-2))$

$t(n) \leq 3c + 4.t(n-2) \leq 3c + 4(c + 2.t(n-3))$

$t(n) \leq 7c + 8.t(n-3) \leq \ldots$

$t(n) \leq (2^i - 1)c + 2^i.t(n-i) \leq \ldots$

$t(n) \leq (2^n - 1)c + 2^n.t(0)$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - **Exemple :**

AlgoRec1(n)

```
<inst. 1>;
AlgoRec1(n − 1);
AlgoRec1(n − 1);
<inst. 2>;
```

On note **t(n)** la complexité et **c** un majorant du temps des op. élémentaires

$t(n) \leq c + 2.t(n-1) \leq c + 2(c + 2.t(n-2))$

$t(n) \leq 3c + 4.t(n-2) \leq 3c + 4(c + 2.t(n-3))$

$t(n) \leq 7c + 8.t(n-3) \leq \ldots$

$t(n) \leq (2^i - 1)c + 2^i.t(n-i) \leq \ldots$

$t(n) \leq (2^n - 1)c + 2^n.t(0)$

Finalement

$t(n) = O(2^n)$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - **Exemple :**

AlgoRec1(n)

```
<inst. 1>;
AlgoRec1(n − 1);
AlgoRec1(n − 1);
<inst. 2>;
```

On note **t(n)** la complexité et **c** un majorant du temps des op. élémentaires

$t(n) \leq c + 2.t(n-1) \leq c + 2(c + 2.t(n-2))$
$t(n) \leq 3c + 4.t(n-2) \leq 3c + 4(c + 2.t(n-3))$
$t(n) \leq 7c + 8.t(n-3) \leq \dots$
$t(n) \leq (2^i - 1)c + 2^i.t(n-i) \leq \dots$
$t(n) \leq (2^n - 1)c + 2^n.t(0)$

Finalement

$t(n) = O(2^n)$

Pour prouver la ligne de calcul rouge, il faudrait une réccurence propre !

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - Appel récursif sur une fraction de l'entrée : **Master Theorem**

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - Appel récursif sur une fraction de l'entrée : **Master Theorem**

Théorème

S'il existe trois entiers $a \geq 0$, $b > 1$, $d \geq 0$ et $n_0 > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)$$

Alors

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } b^d > a \\ O(n^d \log n) & \text{si } b^d = a \\ O(n^{\frac{\log a}{\log b}}) & \text{si } b^d < a \end{cases}$$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Cas des appels récursifs**
  - Dérouler le calcul de complexité
  - Appel récursif sur une fraction de l'entrée : **Master Theorem**

Théorème

S'il existe trois entiers $a \geq 0$, $b > 1$, $d \geq 0$ et $n_0 > 0$ tels que pour tout $n \geq n_0$,

$$\boldsymbol{T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)}$$

Alors

$$\boldsymbol{T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \textit{si } b^d > a \\ O(n^d \log n) & \textit{si } b^d = a \\ O(n^{\frac{\log a}{\log b}}) & \textit{si } b^d < a \end{cases}}$$

- **Exemple :** Tri-Fusion :
  - $t(n) \leq 2t(\lceil n/2 \rceil) + O(n)$: $a = 2$, $b = 2$, $d = 1$
  - Cas $b^d = a$: on obtient $t(n) = O(n^d \log n) = O(n \log n)$

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
- **Comparatifs des fonctions de bases**
- **Calculs de limites**
- **Cas des appels récursifs**

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand** O
- **Comparatifs des fonctions de bases**
- **Calculs de limites**
- **Cas des appels récursifs**
- **Cas des boucles** '*Tant que*'

Rappels de calculs avec les « grand O »

- **Sommes et produits de grand O**
- **Comparatifs des fonctions de bases**
- **Calculs de limites**
- **Cas des appels récursifs**
- **Cas des boucles** '*Tant que*'

- **Où trouver des rappels, s'entraîner ?**
  - Cours de L2, Complexité et Master Theorem disponible sous le Moodle du cours
  - Fiche de TD1

Probabilité

Le langage des probabilités permet de **modéliser** une expérience aléatoire, probabiliste.

Probabilité

Le langage des probabilités permet de **modéliser** une expérience aléatoire, probabiliste.

- Un tirage à pile ou face
- Un lancer de dé
- Le nombre de personnes dans une file d'attente
- Le tirage d'un nombre au hasard
- Une instance d'un algorithme prise au hasard
- ...

Probabilité

Le langage des probabilités permet de **modéliser** une expérience aléatoire, probabiliste.

- Un tirage à pile ou face
- Un lancer de dé
- Le nombre de personnes dans une file d'attente
- Le tirage d'un nombre au hasard
- Une instance d'un algorithme prise au hasard
- ...

Dans ce cours, on va s'en servir pour :

- Etudier la génération d'objets aléatoires sur machine
- Etudier des algorithmes probabilistes
- Analyser le comportement d'algorithmes déterministes 'en moyenne'

Probabilité

Espace probabilisé *discret*

- **Univers** : ensemble des résultats possibles de l'expérience probabiliste, souvent noté Ω
  - **Évènement primitif** : un élément de l'univers / un résultat possible
  - **Évènement** : sous-ensemble de l'univers / ensemble de résultats possibles

Probabilité

Espace probabilisé *discret*

- **Univers** : ensemble des résultats possibles de l'expérience probabiliste, souvent noté Ω
  - **Évènement primitif** : un élément de l'univers / un résultat possible
  - **Évènement** : sous-ensemble de l'univers / ensemble de résultats possibles
- **Probabilités** : une valeur pour chaque élément primitif x, notée $\Pr[x]$
  - **Probabilité d'un évènement** : somme des probabilités de ses éléments
  - Par convention : **somme totale** $= 1$

Probabilité

Espace probabilisé *discret*

- **Univers** : ensemble des résultats possibles de l'expérience probabiliste, souvent noté Ω
  - **Évènement primitif** : un élément de l'univers / un résultat possible
  - **Évènement** : sous-ensemble de l'univers / ensemble de résultats possibles
- **Probabilités** : une valeur pour chaque élément primitif x, notée $\Pr[x]$
  - **Probabilité d'un évènement** : somme des probabilités de ses éléments
  - Par convention : **somme totale** $= 1$

Exemple 1 : dé équilibré à 6 faces

- Univers : $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$
- Probabilité associée à chaque évènement : $\frac{1}{6}$
- $\Pr[$dé au moins 5$] = \Pr[\{$⚄, ⚅$\}] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Probabilité

Exemple 2 : jet de **deux** dés équilibrés à 6 faces

- Univers :

$$
\begin{aligned}
\Omega = \{ & (\epsdice{1},\epsdice{1}),(\epsdice{1},\epsdice{2}),(\epsdice{1},\epsdice{3}),(\epsdice{1},\epsdice{4}),(\epsdice{1},\epsdice{5}),(\epsdice{1},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{2},\epsdice{1}),(\epsdice{2},\epsdice{2}),(\epsdice{2},\epsdice{3}),(\epsdice{2},\epsdice{4}),(\epsdice{2},\epsdice{5}),(\epsdice{2},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{2},\epsdice{1}),(\epsdice{2},\epsdice{2}),(\epsdice{2},\epsdice{3}),(\epsdice{2},\epsdice{4}),(\epsdice{2},\epsdice{5}),(\epsdice{2},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{3},\epsdice{1}),(\epsdice{3},\epsdice{2}),(\epsdice{3},\epsdice{3}),(\epsdice{3},\epsdice{4}),(\epsdice{3},\epsdice{5}),(\epsdice{3},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{4},\epsdice{1}),(\epsdice{4},\epsdice{2}),(\epsdice{4},\epsdice{3}),(\epsdice{4},\epsdice{4}),(\epsdice{4},\epsdice{5}),(\epsdice{4},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{5},\epsdice{1}),(\epsdice{5},\epsdice{2}),(\epsdice{5},\epsdice{3}),(\epsdice{5},\epsdice{4}),(\epsdice{5},\epsdice{5}),(\epsdice{5},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{6},\epsdice{1}),(\epsdice{6},\epsdice{2}),(\epsdice{6},\epsdice{3}),(\epsdice{6},\epsdice{4}),(\epsdice{6},\epsdice{5}),(\epsdice{6},\epsdice{6})\}
\end{aligned}
$$

Probabilité

Exemple 2 : jet de **deux** dés équilibrés à 6 faces

- Univers :

$$
\begin{aligned}
\Omega = \{ & (\epsdice{1},\epsdice{1}),(\epsdice{1},\epsdice{2}),(\epsdice{1},\epsdice{3}),(\epsdice{1},\epsdice{4}),(\epsdice{1},\epsdice{5}),(\epsdice{1},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{2},\epsdice{1}),(\epsdice{2},\epsdice{2}),(\epsdice{2},\epsdice{3}),(\epsdice{2},\epsdice{4}),(\epsdice{2},\epsdice{5}),(\epsdice{2},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{2},\epsdice{1}),(\epsdice{2},\epsdice{2}),(\epsdice{2},\epsdice{3}),(\epsdice{2},\epsdice{4}),(\epsdice{2},\epsdice{5}),(\epsdice{2},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{3},\epsdice{1}),(\epsdice{3},\epsdice{2}),(\epsdice{3},\epsdice{3}),(\epsdice{3},\epsdice{4}),(\epsdice{3},\epsdice{5}),(\epsdice{3},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{4},\epsdice{1}),(\epsdice{4},\epsdice{2}),(\epsdice{4},\epsdice{3}),(\epsdice{4},\epsdice{4}),(\epsdice{4},\epsdice{5}),(\epsdice{4},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{5},\epsdice{1}),(\epsdice{5},\epsdice{2}),(\epsdice{5},\epsdice{3}),(\epsdice{5},\epsdice{4}),(\epsdice{5},\epsdice{5}),(\epsdice{5},\epsdice{6}),\\
& (\epsdice{6},\epsdice{1}),(\epsdice{6},\epsdice{2}),(\epsdice{6},\epsdice{3}),(\epsdice{6},\epsdice{4}),(\epsdice{6},\epsdice{5}),(\epsdice{6},\epsdice{6})\}
\end{aligned}
$$

C'est fastidieux... Souvent on ne donne pas Ω explicitement...

Probabilité

Exemple 2 : jet de **deux** dés équilibrés à 6 faces

- Univers : $\Omega = \{(⚀, ⚀), (⚀, ⚁), (⚀, ⚂), \ldots\}$
- Probabilité associée à chaque évènement : $\frac{1}{36}$

Probabilité

Exemple 2 : jet de **deux** dés équilibrés à 6 faces

- Univers : $\Omega = \{(⚀, ⚀), (⚀, ⚁), (⚀, ⚂), \ldots\}$
- Probabilité associée à chaque évènement : $\frac{1}{36}$
- $\Pr[\text{un des deux dés est } \geq 2] = \frac{31}{36}$
- $\Pr[\text{la somme des deux dés est paire}] = \cdots$

Probabilité

Exemple 2 : jet de **deux** dés équilibrés à 6 faces

- Univers : $\Omega = \{(⚀,⚀), (⚀,⚁), (⚀,⚂), \ldots\}$
- Probabilité associée à chaque évènement : $\frac{1}{36}$
- Pr[un des deux dés est $\geq 2] = \frac{31}{36}$
- Pr[la somme des deux dés est paire] $= \cdots$

Quand tous les évènements primitifs ont même probabilité, on parle de probabilité **uniforme**.

Probabilité

Exemple 2 : jet de **deux** dés équilibrés à 6 faces

- Univers : $\Omega = \{($⚀, ⚀$), ($⚀, ⚁$), ($⚀, ⚂$), \ldots\}$
- Probabilité associée à chaque évènement : $\frac{1}{36}$
- $\Pr[$un des deux dés est $\geq 2] = \frac{31}{36}$
- $\Pr[$la somme des deux dés est paire$] = \cdots$

Quand tous les évènements primitifs ont même probabilité, on parle de probabilité **uniforme**.

Dans ce cas là, en notant p la probabilité d'un évènement primitif, on a :
$\Pr[\Omega] = p.|\Omega| = 1$ donc $p = \frac{1}{|\Omega|}$
Et la probabilité d'un évènement A vaut :

$$\Pr[A] = p.|A| = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas possibles}}$$

Variable aléatoire

Définitions

- Une **variable aléatoire** est une fonction $X : \Omega \to V$ avec $V \subseteq \mathbb{R}$
- Pour $v \in V$:
  - « $X = v$ » est l'évènement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = v\}$ et $\Pr[X = v] = \sum_{\omega : X(\omega) = v} \Pr[\omega]$
  - « $X \leq v$ » est l'évènement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq v\}$ et $\Pr[X \leq v] = \sum_{\omega : X(\omega) \leq v} \Pr[\omega]$
  - etc...

Variable aléatoire

Définitions

- Une **variable aléatoire** est une fonction $X : \Omega \to V$ avec $V \subseteq \mathbb{R}$
- Pour $v \in V$:
  - « $X = v$ » est l'évènement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = v\}$ et $\Pr[X = v] = \sum_{\omega : X(\omega) = v} \Pr[\omega]$
  - « $X \leq v$ » est l'évènement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq v\}$ et $\Pr[X \leq v] = \sum_{\omega : X(\omega) \leq v} \Pr[\omega]$
  - etc...

Une variable aléatoire n'est ni une variable, ni aléatoire ☺

Exemple : dé équilibré à 6 faces

- Nombre de point obtenus :
  - X : {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅} $\to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $\Pr[X = t] = \frac{1}{6}$ pour tout $t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\Pr[X \leq 4] = \frac{2}{3}$
- Parité du dé :
  - Y : {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅} $\to \{0, 1\}$
  - $\Pr[Y = 0] = \Pr[Y = 1] = \frac{1}{2}$

Espérance

Définition

Soit $X : \Omega \to V$ une variable aléatoire. **L'espérance de X** est :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{v \in V} v \times \Pr[X = v]$$

Remarques

- Intuitivement : résultat obtenu *en moyenne*
- Attention : V peut-être infini...

Espérance

Définition

Soit $X : \Omega \to V$ une variable aléatoire. **L'espérance de X** est :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{v \in V} v \times \Pr[X = v]$$

Remarques

- Intuitivement : résultat obtenu *en moyenne*
- Attention : V peut-être infini...

Exemple : dé équilibré à 6 faces

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{v=1}^{6} v \times \Pr[X = v] = \sum_{v=1}^{6} \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$
- $\mathbb{E}[Y] = 0 \times \Pr[Y = 0] + 1 \times \Pr[Y = 1] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Probabilité conditionnelle

Définition

- La **probabilité de E sachant F** est $\Pr[E \mid F] = \frac{\Pr[E \cap F]}{\Pr[F]}$
- L'**espérance de X sachant F** est $\mathbb{E}[X \mid F] = \sum_{v \in V} t \times \Pr[X = v \mid F]$

Remarque

- C'est la probabilité que E arrive sachant que F s'est produit, et l'espérance de X sachant que F s'est produit.
- Cela revient à 'réduire' Ω aux évènements de F.

Probabilité conditionnelle

Définition

- La **probabilité de E sachant F** est $\Pr[E \mid F] = \frac{\Pr[E \cap F]}{\Pr[F]}$
- L'**espérance de X sachant F** est $\mathbb{E}[X \mid F] = \sum_{v \in V} t \times \Pr[X = v \mid F]$

Remarque

- C'est la probabilité que E arrive sachant que F s'est produit, et l'espérance de X sachant que F s'est produit.
- Cela revient à 'réduire' Ω aux évènements de F.

Exemple : dé équilibré à 6 faces

- $\Pr[X \geq 4 \mid Y = 0] = \Pr[\{X \geq 4\} \cap \{Y = 0\}]/\Pr[Y = 0] = \frac{1}{3}/\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{E}[X \mid Y = 1] = \sum_{v \in \{1,\ldots,6\}} v \times \Pr[X = v \mid Y = 1] =$ $1 \times \frac{1}{3} + 2 \times 0 + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times 0 + 5 \times \frac{1}{3} + 6 \times 0 = 3$

Indépendance

Définition

- Deux évènements sont **indépendants** si $\Pr[E \wedge F] = \Pr[E].\Pr[F]$
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si $\Pr[X = u \wedge Y = v] = \Pr[X = u].\Pr[Y = v]$ pour tous u, v

Remarque

En proba, l'usage est d'utiliser des notations logiques ($\vee$, $\wedge$, $\neg$) plus que des notations ensemblistes ($\cup$, $\cap$, ...)

Indépendance

Définition

- Deux évènements sont **indépendants** si $\Pr[E \wedge F] = \Pr[E].\Pr[F]$
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si $\Pr[X = u \wedge Y = v] = \Pr[X = u].\Pr[Y = v]$ pour tous u, v

Remarque

En proba, l'usage est d'utiliser des notations logiques ($\vee$, $\wedge$, $\neg$) plus que des notations ensemblistes ($\cup$, $\cap$, ...)

Exemples

Indépendance

Définition

- Deux évènements sont **indépendants** si $\Pr[E \wedge F] = \Pr[E].\Pr[F]$
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si
  $\Pr[X = u \wedge Y = v] = \Pr[X = u].\Pr[Y = v]$ pour tous u, v

Remarque

En proba, l'usage est d'utiliser des notations logiques ($\vee$, $\wedge$, $\neg$) plus que des notations ensemblistes ($\cup$, $\cap$, ...)

Exemples

- On lance deux dés, disons un bleu et un rouge.
- $E = \{$la valeur du dé rouge est paire $\}$
  $F = \{$la valeur du dé bleu est 3 ou 4 $\}$
  $G = \{$la valeur du dé rouge est 1 ou 2 ou 3$\}$
- E et F sont indépendants, E et G ne le sont pas...

Indépendance

Définition

- Deux évènements sont **indépendants** si $\Pr[E \wedge F] = \Pr[E].\Pr[F]$
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si
  $\Pr[X = u \wedge Y = v] = \Pr[X = u].\Pr[Y = v]$ pour tous u, v

Remarque

En proba, l'usage est d'utiliser des notations logiques ($\vee$, $\wedge$, $\neg$) plus que des notations ensemblistes ($\cup$, $\cap$, ...)

Exemples

- On lance deux dés, disons un bleu et un rouge.
- X = la valeur du dé rouge
  Y = la valeur du dé bleu
  Z = la somme des valeurs des dés rouge et bleu
- X et Y sont indépendantes, X et Z ne le sont pas...

Propriétés

Propriétés

- Soit E et F deux évènements :
  - $\Pr[\neg E] = 1 - \Pr[E]$
  - $\Pr[E \vee F] \leq \Pr[E] + \Pr[F]$ **Inégalité de Boole** ou **'Union bound'**
- Soit $X, Y : \Omega \to V$ deux variables aléatoires :
  - $\sum_{v \in V} \Pr[X = v] = 1$
  - $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ **Linéarité de l'espérance**
- Si $\Omega = \bigsqcup_i F_i$, partition de Ω en $(F_i)_i$
  - $\Pr[E] = \sum_i \Pr[E \mid F_i].\Pr[F_i]$ formule des **probabilités totales**
  - $\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X \mid F_i].\Pr[F_i]$ formule de **l'espérance totale**

Exemple d'algorithme probabiliste : calcul de π

Un exemple de la méthode de Monte-Carlo :

CalculPi(n) :

1. $c \leftarrow 0$
2. **Répéter** n fois :
3. $\quad x \leftarrow$ réel aléatoire entre 0 et 1
4. $\quad y \leftarrow$ réel aléatoire entre 0 et 1
5. $\quad$ **Si** $x^2 + y^2 \leq 1$ **alors** $c \leftarrow c + 1$
6. **Renvoyer** $4c/n$

Exemple d'algorithme probabiliste : calcul de π

Un exemple de la méthode de Monte-Carlo :

CalculPi(n) :

1. $c \leftarrow 0$
2. **Répéter** n fois :
3. $\quad x \leftarrow$ réel aléatoire entre 0 et 1
4. $\quad y \leftarrow$ réel aléatoire entre 0 et 1
5. $\quad$ **Si** $x^2 + y^2 \leq 1$ **alors** $c \leftarrow c + 1$
6. **Renvoyer** $4c/n$

Comment tirer des réels aléatoires ?

- Comment faire algorithmiquement (théorie) ?
- Comment faire sur un ordinateur (pratique) ?

Brique de base : Bits aléatoires

Théoriquement, dans un monde idéal :

- Accès à des *bits aléatoires* :
  - Une fonction $\textsc{RandomBit}()$ qui renvoie 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$
  - Appels consécutifs à $\textsc{RandomBit}()$ indépendants
- Construction d'*objets* aléatoires à partir des bits
  - entiers, rationnels, lettres d'un alphabet, ...
  - arbres, graphes, permutations, ...
  - reéls, ...
- Simulation de lois
  - bits biasés : par exemple un bit 0 avec proba $\frac{1}{3}$ et 1 avec proba $\frac{2}{3}$
  - tirer des évènements selon des probabilités non uniformes
  - tirer un point aléatoire dans un cercle, sur une sphère, un donuts...

Brique de base : Bits aléatoires

Théoriquement, dans un monde idéal :

- Accès à des *bits aléatoires* :
  - Une fonction $\textsc{RandomBit}()$ qui renvoie 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$
  - Appels consécutifs à $\textsc{RandomBit}()$ indépendants
- Construction d'*objets* aléatoires à partir des bits
  - entiers, rationnels, lettres d'un alphabet, ...
  - arbres, graphes, permutations, ...
  - reéls, ...
- Simulation de lois
  - bits biasés : par exemple un bit 0 avec proba $\frac{1}{3}$ et 1 avec proba $\frac{2}{3}$
  - tirer des évènements selon des probabilités non uniformes
  - tirer un point aléatoire dans un cercle, sur une sphère, un donuts...

Difficulté :

- Comment écrire une fonction $\textsc{RandomBit}()$?
- *Vrai* aléa est-il possible ? miracle quantique ? autres solutions ?
- Comment faire tout ce qu'on veut si on a accès à un $\textsc{RandomBit}()$ acceptable ?

Le pseudo-aléa

Solution déployée actuellement

- Générateurs *pseudo*-aléatoires
  - algorithme qui produit des bits qui *semblent* aléatoires
  - aspects théoriques et pratiques satisfaisants
- Générateurs de bits, mais aussi directement **d'entiers**, flottants, etc.
- Gérés dans des bibliothèques logicielles $\rightarrow$ `random` dans Python

Le pseudo-aléa

Solution déployée actuellement

- Générateurs *pseudo*-aléatoires
  - algorithme qui produit des bits qui *semblent* aléatoires
  - aspects théoriques et pratiques satisfaisants
- Générateurs de bits, mais aussi directement **d'entiers**, flottants, etc.
- Gérés dans des bibliothèques logicielles → `random` dans Python

Remarques

- Restent des algorithmes **déterministes** → suite fixée
- Entrée de l'algorithme : **graîne**
  - changer la graîne doit modifier *complètement* la suite
  - choix de graîne : quelque chose d'*imprévisible* ou au contraire de fixé

Exemple : générateurs congruentiels linéaires

Suite (X_n) définie par $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$

- X_0 doit être fixé : *graîne* du générateur
- a, c et m définissent le générateur
- parfois : seuls certains bits de X_n sont utilisés

Quelques choix classiques

- m premier, $c = 0$, a *primitif modulo* m (Lehmer)
- $m = 2^k$, $c = 0$, $a = 3$ ou $5 \bmod 8$
- m et c premiers entre eux, $a - 1$ divisible par les facteurs premiers de m

Exemple : générateurs congruentiels linéaires

Suite (X_n) définie par $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$

- X_0 doit être fixé : *graîne* du générateur
- a, c et m définissent le générateur
- parfois : seuls certains bits de X_n sont utilisés

Quelques choix classiques

- m premier, $c = 0$, a *primitif modulo* m (Lehmer)
- $m = 2^k$, $c = 0$, $a = 3$ ou $5 \bmod 8$
- m et c premiers entre eux, $a - 1$ divisible par les facteurs premiers de m

Exemples

- `rand()` de `stdlib.h` : $m = 2^{31}$, $a = 1103515245$, $c = 12345$
- `minstd_rand()` de `C++11` : $m = 2^{31} - 1$, $a = 48271$, $c = 0$
- `java.util.Random()` : $m = 2^{48}$, $a = 25214903917$, $c = 11$, bits 16 à 47
- `random()` de `Python` : algo de Mersenne-Twister, vecteurs de dimension 623, de période $m = 2^{19937} - 1$...

Conclusion sur l'aléa et le pseudo-aléa

Problématique du pseudo-aléa

- Construire des *bons* générateurs est difficile
- Limitations intrinsèques (période, etc.)

Bon, on fait quoi alors ?

- En théorie : on suppose l'accès à des bits parfaitement aléatoires
- En pratique : on utilise les générateurs des bibliothèques, en général suffisants
- Dans les deux cas : on dispose d'une source d'aléa, on simule des lois

Problématique

On sait

- tirer des bits aléatoires, ou
- tirer des entiers aléatoires

On veut

- tirer un nombre réel aléatoire
- tirer des bits *biaisés* : $\Pr[b = 0] \neq \Pr[b = 1]$
- choisir un élément dans un ensemble, *non uniformément* : par ex. un dé qui tombe une fois sur deux sur ⚅
- tirer un graphe aléatoire
- ...

Problématique

On sait

- tirer des bits aléatoires, ou
- tirer des entiers aléatoires

On veut

- tirer un nombre réel aléatoire
- tirer des bits *biaisés* : $\Pr[b = 0] \neq \Pr[b = 1]$
- choisir un élément dans un ensemble, *non uniformément* : par ex. un dé qui tombe une fois sur deux sur ⚅
- tirer un graphe aléatoire
- ...

But

- Construire des **algorithmes** pour ces tirages

Tirer un réel aléatoire, tirer un bit biaisé

Tirer un réel aléatoire entre 0 et 1

- À précision n : tirer n bits aléatoires $b_1, \ldots, b_n$ et renvoyer $\overline{0, b_1 \cdots b_n}^2$

Tirer un réel aléatoire, tirer un bit biaisé

Tirer un réel aléatoire entre 0 et 1

- À précision n : tirer n bits aléatoires $b_1, \ldots, b_n$ et renvoyer $\overline{0, b_1 \cdots b_n}^2$

Tirer un bit biaisé

Bit biaisé(p)

1. $x \leftarrow$ réel aléatoire entre 0 et 1
2. Si $x \leq p$: renvoyer 1
3. Sinon : renvoyer 0

En pratique

- `random()` dans différents langages renvoie $x \in [0, 1]$

Lois de probabilité

Définition

La **loi (ou distribution) d'une variable aléatoire** $X : \Omega \to V$ est la donnée de $\Pr[X = v]$ pour tout $v \in V$.

Exemple

La loi de la somme S de deux dés équilibrés est :

$\Pr[S = 2] = \frac{1}{36}$ $\quad$ $\Pr[S = 3] = \frac{2}{36}$ $\quad$ $\Pr[S = 4] = \frac{3}{36}$

$\Pr[S = 5] = \frac{4}{36}$ $\quad$ $\ldots$

Lois de probabilité

Définition

La **loi (ou distribution) d'une variable aléatoire** $X : \Omega \to V$ est la donnée de $\Pr[X = v]$ pour tout $v \in V$.

Exemple

La loi de la somme S de deux dés équilibrés est :
$\Pr[S = 2] = \frac{1}{36}$ $\Pr[S = 3] = \frac{2}{36}$ $\Pr[S = 4] = \frac{3}{36}$
$\Pr[S = 5] = \frac{4}{36}$ $\ldots$

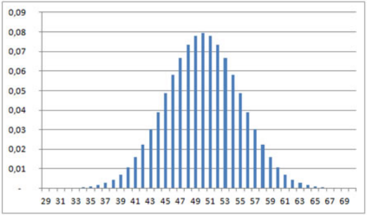
Quelques lois usuelles ($X : \Omega \to V$)

- **Uniforme** : $V = \{1, \ldots, n\}$ et
  $\Pr[X = v] = 1/|V| = 1/n$ pour tout $v \in V$
  Simulation par le tirage d'un entier entre 1 et $|V|$
- **Bernoulli**(p) : $V = \{0, 1\}$ et
  $\Pr[X = 1] = p$ et $\Pr[X = 0] = 1 - p$
  Simulation par tirage d'un bit aléatoire biaisé

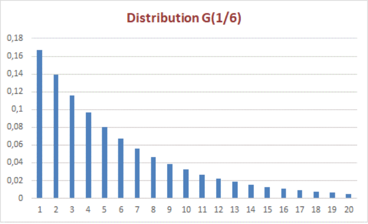
Lois de probabilité

Quelques lois usuelles ($X : \Omega \to V$)

- **Binomiale**(p, n) : $V = \{0, \ldots, n\}$ et
  $\Pr[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k$ pour $k = 0, \ldots, n$
  Somme de n variables de Bernoulli de paramètre p
- **Géométrique**(p) : $V = \mathbb{N}$ et $\Pr[X = n] = p(1-p)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
  Premier apparition du '1' dans une suite de variables de Bernoulli de paramètre p



Loi Binomiale(0.5,100)

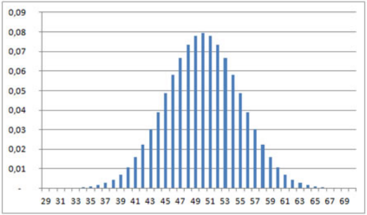


Loi Géométrique($\frac{1}{6}$)

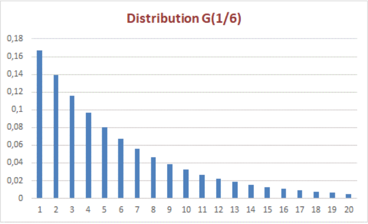
Lois de probabilité

Quelques lois usuelles $(X : \Omega \to V)$

- **Binomiale**(p, n) : $V = \{0, \ldots, n\}$ et
  $\Pr[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k$ pour $k = 0, \ldots, n$
  Somme de n variables de Bernoulli de paramètre p
- **Géométrique**(p) : $V = \mathbb{N}$ et $\Pr[X = n] = p(1-p)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
  Premier apparition du '1' dans une suite de variables de Bernoulli de paramètre p



Loi Binomiale(0.5,100)



Loi Géométrique$(\frac{1}{6})$

En Pyhton, `random.binomial(n, p)`, `random.geometric(p)`....

Exemple de loi plus complexe

Retour à Monte Carlo

Comment tirer (x, y) aléatoirement dans le disque D de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 ?

$$D = \{(x, y) \ : \ -1 \leq x, y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- Tirer x et y dans $[-1, 1] \to 2 \cdot \textsc{random}() - 1$
- Assurer que $x^2 + y^2 \leq 1 \to$ méthode du *rejet* (ou de *Monte Carlo*)

Monte Carlo

1. $(x, y) \leftarrow (1, 1)$
2. Tant que $x^2 + y^2 > 1$:
3. $\quad x \leftarrow 2 \cdot \textsc{random}() - 1$
4. $\quad y \leftarrow 2 \cdot \textsc{random}() - 1$
5. Renvoyer (x, y)

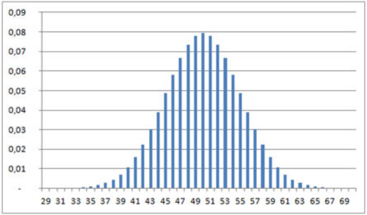
Propriétés

- L'algorithme renvoie bien $(x, y) \in D$
- On peut montrer qu'ils sont uniformément répartis
- Complexité : $\Pr[(x, y) \in D] = \frac{\pi}{4}$ $\to$ espérance de $\frac{4}{\pi}$ essais : $O(1)$

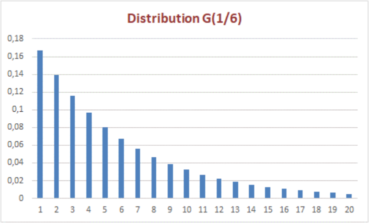
Queues de distribution

Queue d'une ditribution

Sur la représentation graphique de la loi, c'est la partie qui s'éloigne de la moyenne.



Loi Binomiale(0.5,100)

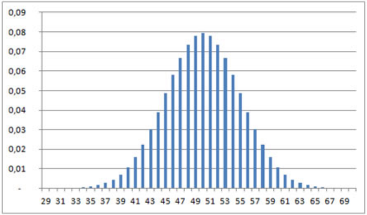


Loi Géométrique$(\frac{1}{6})$

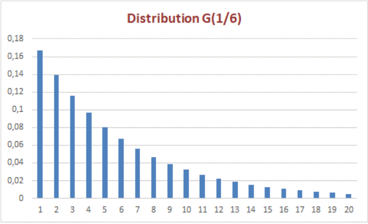
Queues de distribution

Queue d'une ditribution

Sur la représentation graphique de la loi, c'est la partie qui s'éloigne de la moyenne.



Loi Binomiale(0.5,100)



Loi Géométrique$(\frac{1}{6})$

La Théorie des Probabilités

Un des buts : fournir des bornes sur les queues de distribution

Queues de distribution

Inégalité de Markov

Soit $X : \Omega \to V$ une variable aléatoire **positive** ($V \subseteq \mathbb{R}^+$).
Pour tout $t > 0$, on a : $\Pr[X \geq t] \leq \frac{1}{t}.\mathbb{E}[X]$

Preuve On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{v \in V} v.\Pr[X = v] \\
&= \sum_{v<t} v.\Pr[X = v] + \sum_{v \geq t} v.\Pr[X = v] \\
&\geq \sum_{v \geq t} v.\Pr[X = v] \qquad \text{car } X \text{ est positive} \\
&\geq t.\sum_{v \geq t} \Pr[X = v] = t.\Pr[X \geq t]
\end{aligned}$$

Bilan final

Utiliser de l'aléa en algorithmique

- On suppose une source parfaite
- On utilise des lois simples — souvent
- Si loi complexe $\rightarrow$ algorithme — rarement
- Implantations :
  - bibliothèque `random` de Python (pseudo-aléa)
  - On ignore la différence avec le *vrai* aléa

Preuves en présence d'aléa

- Aléa parfait $\rightarrow$ probabilités
- Propriétés de base (probabilités conditionnelles, espérance, ...)

Revoir les probabilités

- Exercices au TD1
- Poly « Probabilités discrètes » sur Moodle