L2 Informatique,
Arithmétique HAI306X
Devoir à la maison

Préambule

On suppose connu les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, dont on rappelle quelques propriétés caractéristiques

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres naturels et vérifie l'axiomatique suivante
   — l'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel
   — Tout entier naturel n a un unique successeur, souvent noté $s(n)$ ou $n+1$
   — Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur
   — Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
   — *Principe de récurrence* : Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$
   On rappelle les propriétés suivantes :
   — Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément
   — Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément
2. L'ensemble $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres relatifs

Problème

Numération à la Cauchy dans $\mathbb{Z}$

« ... pour que l'on puisse offrir le résultat d'un calcul comme digne d'être adopté avec confiance ce que l'on doit faire ce n'est pas de recommencer deux fois le même calcul en suivant la même route, attendu qu'il est assez naturel que l'on retombe dans une erreur déjà commise ; c'est au contraire de tout disposer de manière que, par deux systèmes d'opérations fort distinctes, on doive se trouver ramené à des résultats identiques. »

Cauchy propose d'écrire les nombres avec deux espèces de chiffres, les uns dits positifs, dont 0, les autres dits négatifs, que l'on peut décorer du symbole $-$ mais nous le décorerons avec une barre supérieure. En base 10, cela donne

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

ou

$$\bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Un nombre qui s'écrit $a = 4\bar{3}2\bar{2}\bar{1}5$ signifie $a = 400000 - 30000 + 2000 - 200 - 10 + 5$, soit $a = 371795$ en base 10.

La liste des nombres de 1 à 20 s'écrit dans le système de Cauchy :

$1 = 1$	$6 = 10 - 4 = 1\bar{4}$	$11 = 11$	$16 = 20 - 4 = 2\bar{4}$
$2 = 2$	$7 = 10 - 3 = 1\bar{3}$	$12 = 12$	$17 = 20 - 3 = 2\bar{3}$
$3 = 3$	$8 = 10 - 2 = 1\bar{2}$	$13 = 13$	$18 = 20 - 2 = 2\bar{2}$
$4 = 4$	$9 = 10 - 1 = 1\bar{1}$	$14 = 14$	$19 = 20 - 1 = 2\bar{1}$
$5 = 5$	$10 = 10 - 0 = 10$	$15 = 15$	$20 = 20 - 0 = 20$

1. Convertir dans le système de Cauchy les nombres suivants : $8257, 1536, 1234, 8876$.
2. Montrer que l'écriture dans le système de Cauchy n'est pas unique.

3. Montrer que l'écriture de l'opposé d'un nombre dans $\mathbb{Z}$ s'effectue en décorant d'une barre les chiffres sans barre et en enlevant la décoration de la barre pour ceux qui en ont une.
4. Dresser les tables de pythagore de l'addition et de la multiplication en écrivant chaque résultat dans le système de Cauchy :

$+$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5
$\overline{5}$											
$\overline{4}$											
$\overline{3}$											
$\overline{2}$											
$\overline{1}$											
0											
1											
2											
3											
4											
5											

$\times$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5
$\overline{5}$											
$\overline{4}$											
$\overline{3}$											
$\overline{2}$											
$\overline{1}$											
0											
1											
2											
3											
4											
5											

5. Poser les additions suivantes dans le système de Cauchy :

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & \overline{4} & 0 & 5 & \overline{1} \\ + & 1 & \overline{1} & \overline{2} & 4 & \overline{4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 1 & 4 & \overline{4} & 0 & \overline{5} \\ + & 4 & 1 & 4 & \overline{1} & \overline{4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & \overline{1} & 4 & \overline{4} & \overline{2} & 5 \\ + & 2 & 4 & \overline{3} & \overline{4} & 1 \\ \hline \end{array}$$

On prendra garde que les retenues peuvent être positives ou négatives !

6. Poser les multiplications suivantes dans le système de Cauchy :

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 2 & \overline{4} \\ \times & 5 & \overline{4} & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 4 & \overline{3} & 5 \\ \times & 1 & \overline{3} & \overline{3} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \overline{4} & 0 & 4 \\ \times & 3 & \overline{3} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Généralisation de la numération à la Cauchy dans une base quelconque

On se fixe une base $b \geq 3$, un entier $a > 0$ et $2a+1$ chiffres qui représentent les entiers de $-a$ à a. Comme précédemment, on note les chiffres représentant des entiers négatifs en les décorant d'une barre $\overline{1}, \overline{2}, \ldots$.

1. Quel est le plus grand nombre N représentable avec n chiffres ?
2. Montrer que si $b/2 < a < b$, alors on peut représenter tout entier avec cette numération.
3. Montrer qu'un nombre est strictement positif si et seulement si son premier chiffre est un chiffre positif.
4. **Algorithme de l'addition** Soient deux entiers à additionner $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k$ et $y = \sum_{k=0}^{m-1} y_k b^k$.

   Il s'agit dans cette question de justifier que la variation de l'algorithme de l'école pour l'addition de x et y qui consiste à ajouter les chiffres de même poids (x_k avec y_k) ne propage pas de retenue r_{k+1} sur le rang suivant et fonctionne.

   Sans perte de généralité, on peut supposer que $x = \sum_{k=0}^{n} x_k b^k$ et $y = \sum_{k=0}^{n-1} y_k b^k$, c'est-à-dire que les premiers chiffres de x ou y peuvent être supposés 0.

   On définit deux suites :
   — $(r_k)_{0 \leq k \leq n}$, la suite des retenues
   — $(c_k)_{0 \leq k \leq n}$, la suite des chiffres
   de la somme $x + y$, par les relations de récurrence :

$$r_0 = 0 \text{ et } \forall 0 \leq k \leq n-1, r_{k+1} = \begin{cases} \overline{1}, & \text{si } x_k + y_k \leq -a, \\ 0, & \text{si } -a < x_k + y_k < a, \\ 1, & \text{si } x_k + y_k \geq a. \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, c_k = x_k + y_k - br_{k+1} \text{ et } c_n = 0$$

(a) Montrer que pour tout k compris entre 0 et n, la retenue r_k ne dépend pas de la retenue r_{k-1} du rang précédent ;

(b) Montrer que pour tout k compris entre 0 et n, on a $-a \leq c_k \leq a$;

(c) Montrer que $x + y = \sum\limits_{k=0}^{n+1} (c_k + r_k) b^k$;

Système de numération bijectif

Les systèmes de numération précédents ont l'inconvénient de ne pas être bijectifs en ce sens que, pour le système de Cauchy, il est redondant. Des nombres ont plusieurs écritures différentes avec des chiffres différents. Dans le système classique, il nécessite pour l'unicité d'écriture de demander que le premier chiffre est non nul. Un système bijectif établirait une bijection entre tous les entiers de $\mathbb{N}$ et tous les mots écrits dans un alphabet fini.

Il est facile d'en imaginer un simple. C'est celui de la numération additive, qui ne nécessite qu'un seul symbole 1. Un entier n est alors codé par le mot de longueur n ne contenant que des 1 !

On va définir dans cette partie un système de numération de position sans le chiffre 0 et qui est bijectif en le sens précédent.

En base 10, cela signifie qu'il nous faut un symbole supplémentaire pour représenter 10, on va le noter A On représente alors tout entier de la manière suivante :

— La chaîne vide $\emptyset$ représente 0 ;

— Le mot représenté par une chaîne de caractères non vide

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

représente comme en numération de position usuelle le nombre

$$a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} \cdots + a_1 A + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$$

La liste des nombres de 1 à 20 s'écrit dans ce système :

$1 = 1$	$6 = 6$	$11 = 11$	$16 = 16$
$2 = 2$	$7 = 7$	$12 = 12$	$17 = 17$
$3 = 3$	$8 = 8$	$13 = 13$	$18 = 18$
$4 = 4$	$9 = 9$	$14 = 14$	$19 = 19$
$5 = 5$	$10 = \mathrm{A}$	$15 = 15$	$20 = 1 * \mathrm{A} + \mathrm{A} = 1\mathrm{A}$

1. Montrer que pour tout entier n il y a exactement 10^n nombres à n chiffres.
   Plus généralement, soit $b \geq 2$ une base et un ensemble de chiffres pour représenter les nombres de 1 à b. On représente alors tout entier de la manière suivante :
   — La chaîne vide $\emptyset$ représente 0 ;
   — Le mot représenté par une chaîne de caractères non vide

   $$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

   représente comme en numération de position usuelle le nombre

   $$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} \cdots + a_1 b + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k$$

2. Montrer qu'il y a une bijection entre les entiers de $\mathbb{N}$ et les mots écrits avec les chiffres de 1 à b.