





Modèles de calcul
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
TD 3
LES JETONS DE ROSZÀ : SUITE(S) ET FIN
Auteurs : G. Lafitte et B. Durand
modifié par V. Prince

Exercice 1 Prédicats


On dit d'un prédicat ¹ $p(\bar{x})$ qu'il est récursif primitif s'il existe un programme  tel que :

$$\begin{aligned} \text{p}(\bar{x}) = 1 &\Leftrightarrow p(\bar{x}) \text{ est vrai} \\ \text{p}(\bar{x}) = 0 &\Leftrightarrow p(\bar{x}) \text{ est faux} \end{aligned}$$

On utilisera donc 0 comme le booléen False et 1 comme le booléen True.

1. Montrez que le prédicat suivant est récursif primitif en donnant un programme : “ x est égal à zéro”.
2. Trouvez un programme  pour la fonction suivante : $f_1 : (x) \mapsto \neg x$ où \neg est le *non* logique.
3. Trouvez des programmes ,  pour les fonctions suivantes : $f_2 : (x, y) \mapsto x \& y$ ($x|y$) où $\&$ et $|$ sont respectivement les *et* et *ou* logiques.
4. Montrez que les prédicats suivants sont récursifs primitifs en donnant un programme qui les calcule :
 - a) $x > 0$,
 - b) $x \leq y$,
 - c) $x \geq y$,
 - d) $x = y$,
 - e) x est pair.
5. Donnez un programme de la fonction
$$f_3 : (x, y, z) \mapsto \text{si } x \text{ alors } y \text{ sinon } z$$
6. On dit qu'un ensemble E est récursif primitif si le prédicat $p(x) = x \in E$ est récursif primitif.
Donnez des exemples d'ensembles récursifs primitifs.

Exercice 2 Arithmétique : vers les parties entières de fonctions à image réelle

1. On cherche à calculer la partie entière de la racine carrée d'un nombre entier x .
 - a) Commencer par calculer la fonction $f_1 : x \mapsto x^2$, que vous nommerez .
 - b) , ensuite, proposez un programme pour calculer la fonction suivante :
$$f_1 : x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$
 Pour cela il faut bien trouver la fonction de base , et la fonction de récurrence qui va dépendre du fait que x est un carré ou pas.

1. Dans cet exercice, un prédicat est une fonction n -aire des entiers vers $\{\text{True}, \text{False}\}$. Ainsi un prédicat prend des entiers en entrée et donne en sortie un booléen.

2. De la même manière, on cherche à écrire une fonction partie entière du logarithme en base 2. On rappelle la définition de ce dernier :
 $\log_2(x) = a \leftrightarrow x = 2^a$. on voit que les nombres qui ne sont pas des puissances entières de 2 auront un logarithme binaire réel, d'où la nécessité de ne prendre que la partie entière de ce logarithme. Comme la fonction n'est pas définie si $x = 0$ alors on propose la formulation suivante :
 $f_1 : x \mapsto \lfloor \log_2(x+1) \rfloor$
 Ecrivez la fonction de base. Dites ce que vaut la fonction de récurrence (vous aurez à utiliser une conditionnelle).

Exercice 3 Quelques fonctions

1. La fonction factorielle $f_1 : x \mapsto !x$ est-elle récursive primitive ?
 Si oui écrivez la suite de jetons qui lui correspond.
2. Trouvez des programmes pour les fonctions suivantes :
 - a) $f_1 : x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$
 - b) $f_2 : (x, y) \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$
3. Que calcule cette dernière fonction ?

Exercice 4 L'arithmétique contre-attaque

Montrez que les prédicats et fonctions suivants sont rékursifs primitifs.

1. $\text{div}(x, y) = "(x+1) \text{ divise } y"$
2. $f_2 : (x, y) \mapsto \left\lfloor \frac{x}{y+1} \right\rfloor$
3. $f_2 : (x, y) \mapsto x \bmod (y+1)$
4. $p(x) = "x \text{ est un nombre premier}"$
5. Proposez un programme pour la fonction suivante :
 $f_2 : (x, y) \mapsto C_x^y$ le nombre de combinaisons de y éléments dans x si $y < x$.
6. $\pi : f_1 = n \mapsto p_{n+1}$ où p_n est le n^{e} nombre premier. (Ainsi, $\pi(0) = 2, \pi(1) = 3, \text{etc.}$)

Exercice 5 Borne récursive primitive

1. Soit f une fonction définie récursivement de la façon suivante à partir de la fonction g :

$$f : (i+1, \bar{x}) \mapsto g(f(0, \bar{x}), f(1, \bar{x}), \dots, f(i, \bar{x}))$$

- a) Comment peut-on utiliser une fonction g récursive primitive (et donc avec une arité fixée) dans cette définition ?
 - b) Une fonction f définie ainsi est-elle récursive primitive ?
2. Pouvez vous donner un programme réalisant la fonction suivante ?
 $f_2 : (x, y) \mapsto \prod_{i=1}^x (i+y)^2$