HLMA101 - Partie A : Généralités

Chapitre 3
Ensembles

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2019-2020

Sommaire

Ensemble

Un ensemble est une collection d'éléments (des objets mathématiques).
Il y a un ensemble qui ne contient aucun élément :
$\emptyset$ (ensemble vide)
Pour dire qu'un objet x est élément d'un ensemble E :

- x est élément de E
- x est dans E
- x appartient à E
- **Notation :** $x \in E$

Si x n'est pas un élément de E : $x \notin E$

Souvent : ensemble en majuscule, éléments en minuscule.

Définition des ensembles

En extension On liste tous les éléments de l'ensemble :
$\{a_0, a_1, \dots\}$ une liste d'éléments
Ex : $\{1;2;4;-1;13\}$ $\{(1;2);(1;0);(-1,1)\}$

En compréhension On voit l'ensemble comme formé des éléments d'un ensemble ("plus gros") qui vérifient une certaine propriété :
$\{x \in E / P(x)\}$ où E est un ensemble et P une propriété
Ex : $\{t \in \mathbb{R} / t^2 - 5 \leqslant 2\}$

En forme paramétrique On décrit les éléments comme l'ensemble des valeurs prise par une expression quand les variables "parcourent" certains ensembles :
$\{f(t) / t \in T\}$ où T est un ensemble et f une fonction
Ex : $\{4k+7 / k \in \mathbb{N}\}$ $\{2n+3p / n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}\}$
$\{2n+1 / n \in \mathbb{Z}$ et $-2 \leqslant n \leqslant 6\}$

Passage paramétrique vers compréhension

$$\{f(t) / t \in T\} = \{x \in F / \exists t \in T, x = f(t)\}$$

À condition de pouvoir identifier l'ensemble F dans lequel f prend ses valeurs.

Résolution d'équations

Quand on résout une équation, on part d'une définition en compréhension (l'ensemble des éléments qui vérifient telle équation) pour essayer de pouvoir écrire ce même ensemble sous une forme plus explicite : en extension (on liste les solutions) ou sous forme paramétrique.

Sommaire

Inclusion

On écrit $E \subset F$ lorsque tous les éléments de E appartiennent aussi à F.
Formellement : $E \subset F \iff \forall x \in E, x \in F$
On dit que E est inclus dans F, que E est une sous-ensemble de F, que E est une partie de F, ou encore que F contient E.

Attention : Ne pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$!

Proposition

Pour tout ensemble E :
$\emptyset \subset E$
$E \subset E$

Preuve.

Parties d'un ensemble

L'ensemble des toutes les parties d'un ensemble (i.e. tous ses sous-ensembles) est un ensemble noté $\mathscr{P}(E)$.

C'est un ensemble dont les éléments... sont des ensembles.

Exemple

$E = \{a, b\}$
$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Remarque : un ensemble à un élément est appelé **singleton**, un ensemble a deux éléments une **paire**.

Exercice : Déterminer $\mathscr{P}(\emptyset)$ et $\mathscr{P}(E)$ pour $E = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.

Cardinal d'un ensemble fini

Si un ensemble E a un nombre fini d'éléments, on dit qu'il est fini et on appelle cardinal de E (noté $\mathrm{Card}(E)$ ou $\#E$) le nombre d'éléments de E.

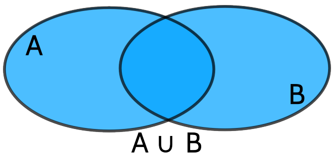
Théorème

Si E est un ensemble fini, alors

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

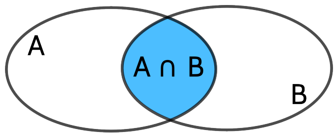
Union

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
$A \cup B$, réunion (ou union) de A et B, est l'ensemble des élément qui appartiennent à A **ou** à B.
$\forall x \in E, (x \in A \cup B) \iff ((x \in A) \vee (x \in B))$



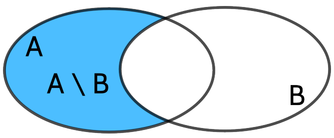
Intersection

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
$A \cap B$, intersection de A et B, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B.
$\forall x \in E, (x \in A \cap B) \iff ((x \in A) \wedge (x \in B))$



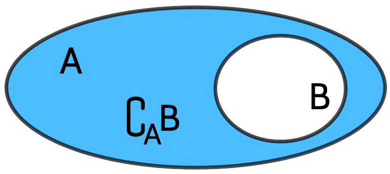
Exclusion

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
$A \setminus B$, A privé de B, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** n'appartiennent **pas** à B.
$\forall x \in E, (x \in A \setminus B) \iff ((x \in A) \wedge (x \notin B))$



Complémentaire

Soit A un sous-ensembles d'un ensemble E.
$\complement_E A$ (ou $\complement A$ s'il n'y a pas de doute), le complémentaire de A (dans E), est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
On le note parfois $\bar{A}$.
$\forall x \in E, (x \in \complement A) \iff (x \notin A)$



Produit cartésien

Soit A et B deux ensembles.
$A \times B$, le produit cartésien de A et B (lu "A croix B"), est l'ensemble des couples d'éléments dont le premier est dans A et le second dans B.
$A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$.

Attention : Si $A \neq B$, $A \times B \neq B \times A$ (il y a un ordre).

Généralisation

Pour plusieurs ensembles on peut écrire $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$
Dans le cas d'un même ensemble : $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ (n fois)

Exemple : $\mathbb{R}^n$ pour les n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^2$ pour décrire le plan (2 coordonnées), $\mathbb{R}^3$ pour décrire l'espace.

Exemples et usages

- $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{Z} \setminus \{1\})$
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^2$
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- $\{r + k\frac{\pi}{2} / (r, k) \in [0, \frac{\pi}{4}] \times \mathbb{Z}\}$
- $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, \quad ab = cd$
- $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = r$

Sommaire

Inclusion d'ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
Pour prouver $A \subset B$, il faut prouver $\forall a \in A, a \in B$.

Méthode :

Soit $a \in A$,
…
Donc $a \in B$ ∎

Exemple : Soit A et B deux ensembles, montrer que $A \cap B \subset A \cup B$.

Égalité d'ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.
Pour prouver $A = B$, on peut prouver $A \subset B$ et $B \subset A$
i.e. $\forall a \in A, a \in B$ **et** $\forall b \in B, b \in A$.

Rédaction :

Prouvons $A \subset B$
Soit $a \in A$,
…
Prouvons $B \subset A$
Soit $b \in B$
…
On a donc $A = B$ ∎

Non appartenance

Comment démontrer que $x \notin A$?

- On peut démontrer que $x \in \complement A$
- On peut raisonner par l'absurde : On suppose $x \in A$ … et on trouve une contradiction.

Liens logique – ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'une ensemble E.

$x \in A \cap B$	est équivalent à	$x \in A$ et $x \in B$
$x \in A \cup B$	est équivalent à	$x \in A$ ou $x \in B$
$x \in A \setminus B$	est équivalent à	$x \in A$ et $x \notin B$
$x \in \complement A$	est équivalent à	$x \notin A$
$A \subset B$	est équivalent à	$\forall x \in E, (x \in A) \implies (x \in B)$
$A = B$	est équivalent à	$\forall x \in E, (x \in A) \iff (x \in B)$

Propriétés des opérateurs ensemblistes

Pour A, B et C des parties d'un ensemble E :

- $(A \cup B) = (B \cup A)$
- $(A \cap B) = (B \cap A)$
- $((A \cup B) \cup C) = (A \cup (B \cup C))$
- $((A \cap B) \cap C) = (A \cap (B \cap C))$
- $(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$
- $(A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Retour sur l'implication

Soit A et B des sous-ensembles d'un ensemble E.
Dans chaque situation, identifier le sous-ensemble de E constitué des éléments x pour lesquels $(x \in A) \implies (x \in B)$.