TD1 - Syntaxe

Logique Propositionnelle - HAI304I

Exercice 1 Pour chacune des formules suivantes construites sur l'alphabet constitué de l'ensemble de symboles propositionnels $\mathcal{S} = \{p, q, r, s\}$, des connecteurs $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, des constantes $\{\bot, \top\}$ et des parenthèses $\{(,)\}$, donner :

1. Son statut vis-à-vis de la logique des propositions : sont-elles ou non des propositions (i.e. des formules bien formées du langage propositionnel) sur $\mathcal{S}$? Autrement dit, appartiennent-elles à $\texttt{PROP}(\mathcal{S})$. Si c'est le cas, vous préciserez à partir de quels atomes et avec quelles règles cette proposition a été obtenue.
2. L'arborescence associée à la formule (uniquement pour celles qui sont bien formées).

$F_1 = p)q(\wedge$
$F_2 = \neg((q \Rightarrow r) \vee p)$
$F_3 = (\neg p \Leftrightarrow \top)$
$F_4 = (\wedge p(q))$
$F_5 = q$
$F_6 = p \wedge q$
$F_7 = \neg(p)$
$F_8 = (q \vee q)$
$F_9 = (p \wedge q \wedge r)$
$F_{10} = (((p \wedge q)\neg r) \Rightarrow p)$
$F_{11} = ((p \Rightarrow (r \Rightarrow q)) \wedge p)$
$F_{12} = ((p \Leftrightarrow \bot) \vee t)$
$F_{13} = (\neg\neg(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg q \vee r))$
$F_{14} = (p \vee (\neg q \wedge (r \wedge s)))$
$F_{15} = (((p \vee (\neg q \wedge p)) \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow (\neg r \vee q)))$

Exercice 2 On souhaite définir une notion de longueur d'une fbf qui donnerait le nombre de symboles, constantes et connecteurs apparaissant dans la fbf. Définir par induction cette fonction `longueur`.

Exercice 3 Soit $\texttt{PROP}(\mathcal{S})$ l'ensemble des fbf construites sur un ensemble de symboles propositionnels $\mathcal{S}$ et soit deux fbf de $\texttt{PROP}(\mathcal{S})$:

$$A = (\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow (r \vee p)))$$

$$B = (((p \wedge \bot) \vee (\neg r \Rightarrow p)) \Leftrightarrow q)$$

1. Dessiner les arborescences associées à A et B
2. Calculer les ensembles $\texttt{SP}(A)$ et $\texttt{SP}(B)$ où `SP` est l'application vue en cours qui définit l'ensemble des symboles propositionnels d'une formule.
3. Définir par induction l'application `prof` de $\texttt{PROP}(\mathcal{S})$ dans l'ensemble des entiers naturels qui à toute fbf P associe la profondeur de l'arborescence syntaxique associée à P.
4. Calculer les entiers $\texttt{prof}(A)$ et $\texttt{prof}(B)$.

Exercice 4 Une sous-formule d'une fbf F est une fbf F' qu'il est nécessaire de produire lors de la construction de F par le processus d'induction.

1. Soit $F = ((\neg p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((s \Rightarrow (\neg p \wedge r)) \Leftrightarrow (\neg q \wedge s)))$, dites si les formules suivantes sont des sous-formules de F : p, $(p \wedge r)$, $(q \wedge r)$, $\neg(p \wedge r)$, $(p \Rightarrow q)$, $(p \Rightarrow (q \wedge r))$, $(\neg p \Rightarrow q)$, $(\neg p \Rightarrow (q \wedge r))$, $(\neg p \wedge r)$, $((s \Rightarrow (\neg p \wedge r)) \Leftrightarrow (\neg q \wedge s))$
2. Quel est l'ensemble des sous-formules de la formule $((\neg p \wedge r) \Rightarrow \neg p)$?
3. Donnez une définition par induction de l'application `sub` qui associe à une fbf l'ensemble de ses sous-formules.

Exercice 5 Soit l'application `sub` précédente et l'application `nbc` de $\texttt{PROP}(\mathcal{S})$ dans $\mathbb{N}$ qui, à toute fbf F, associe le nombre de connecteurs de F, et soit la fbf $A = ((p \wedge q) \Rightarrow (\neg r \vee p))$.

1. Donner $\texttt{sub}(A)$ et $\texttt{nbc}(A)$, puis vérifier que $|\texttt{sub}(A)| \leq 2 \times \texttt{nbc}(A) + 1$.
2. Donner une définition par induction de l'application `nbc`.
3. Montrer par induction structurelle qu'une fbf F ayant n occurrences de connecteurs a au plus $2n + 1$ sous-fbf. Autrement dit, que pour toute fbf F, $|\texttt{sub}(F)| \leq 2 \times \texttt{nbc}(F) + 1$.

Exercice 6 Que faudrait-il modifier dans la définition inductive du langage des propositions pour prendre en compte un connecteur binaire « ou exclusif » noté $\oplus$? Même question avec un connecteur binaire « non et » noté **`nand`** et avec un connecteur ternaire « Si Alors Sinon » noté _?_ : _.

Exercice 7 On considère désormais les conventions introduites en cours permettant de supprimer certaines parenthèses des fbf :

$$(+\texttt{liant}) \quad \neg\ ,\ \wedge_G\ ,\ \vee_G\ ,\ \Rightarrow_D\ ,\ \Leftrightarrow_G \quad (-\texttt{liant})$$

1. Pour chacune des formules <u>bien formées</u> de l'exercice 1, donner la formule correspondante éliminant un maximum de parenthèses.
2. Pour chacune des fbf suivantes non parenthésée, donner la fbf complètement parenthésée correspondante et dessiner l'arborescence syntaxique correspondante :

$\neg p \wedge q$	$\neg p \Rightarrow \neg\neg q \Rightarrow r$
$p \wedge q \wedge r$	
$p \vee q \wedge r$	$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow p \Leftrightarrow q$
$p \wedge q \vee r$	$p \vee \neg q \wedge r \vee s \Leftrightarrow s \Leftrightarrow p \Rightarrow r \wedge p \Rightarrow \neg r$