Algèbre linéaire et analyse 1
(HLMA101 – Année universitaire 2020–2021)

Feuille d'exercices N°2

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. Remplacez les pointillés dans les formules suivantes par le symbole adéquat : « $\in$ », « $\subset$ » ou « $=$ ».
(a) $1 \ldots \mathbb{N}$; (c) $\{1\} \ldots \mathbb{N}$; (e) $A \ldots B \Leftrightarrow \forall y \ldots A, y \ldots B$;
(b) $\{2,3\} \ldots \mathbb{N}$; (d) $1 \ldots \{1\}$; (f) $A \ldots B \Leftrightarrow \forall y \ldots A, y \ldots B$ et $\forall y \ldots B, y \cdots A$
(où A et B sont des parties d'un ensemble E dans les deux derniers).

Question 2. On pose $A = \{1,2,4\}$, $B = \{1,3,4\}$ et $C = [-2,4[$. Déterminer les ensembles $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $C \setminus A$, $C \cap \mathbb{Z}$ et $C \cap \mathbb{N}$.

Question 3. Écrire explicitement l'ensemble des parties de $X = \{\heartsuit, \sharp, \diamond\}$.

Question 4. Soit $A = \{0,1,8\}$ et $B = \{\{0\},\{1,2\},\{1\}\}$. Vrai ou faux ?
(a) $A \in \mathbb{N}$;
(b) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$;
(c) $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$;
(d) $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$;
(e) $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Question 5. Vrai ou faux ?
(a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|a-b| \leq |a| - |b|$; (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(2x) = 2E(x)$;

2. Travaux dirigés

Exercice 1. On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe, c'est-à-dire si et seulement si
$$\forall \alpha, \beta \in A, [\alpha, \beta] \subset A.$$
Démontrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle.

Exercice 2. Vrai ou faux ?
(a) La réunion de deux intervalles est un intervalle.
(b) L'union d'un ensemble minoré avec un ensemble majoré est un ensemble borné.
(c) L'intersection d'un ensemble minoré avec un ensemble majoré est un ensemble borné.

Exercice 3 (thème). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire les ensembles suivants en langage mathématique.
(1) L'image de $[0,1[$ par f.
(2) L'ensemble des antécédents de 1 par f.
(3) L'ensemble des entiers naturels pairs dont l'image par f est inférieure ou égale à 5.

Exercice 4 (version). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Décrire les ensembles suivants en langage naturel.
(1) $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x') = y\}$
(2) $\{y \in \mathbb{R} \mid \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x > A \text{ et } f(x) = y\}$
(3) $\mathbb{Z} \cap \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 < f(y) < 5\}$

Exercice 5. Soit $\{a_1, \ldots, a_N\}$ un ensemble de N nombres réels. Soit C un autre réel, et on suppose que
$$a_1 + \cdots + a_N \geq C.$$
Montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $a_i \geq \frac{C}{N}$.

Exercice 6. Le plus grand élément de l'ensemble $\{x,y\}$ est noté $\max(x,y)$ (et de même on note $\min(x,y)$ le plus petit...) ; démontrer que, pour tous x et y réels,
$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}\ .$$

3. Révisions et approfondissement

Exercice 7. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}.$$

On suppose que A et B sont l'une et l'autre majorées. Montrer que $A + B$ est majorée.

Exercice 8. Écrire avec des symboles mathématiques l'ensemble des carrés des nombres rationnels compris entre 0 et 4.

Exercice 9. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :
(P1) $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$;
(P2) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, |a - b| < \varepsilon$.
Montrer que
- (a) A est majorée et B est minorée ;
- (b) $\sup A \leq \inf B$;
- (c) $\sup A = \inf B$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée. Démontrer l'énoncé :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq A \text{ et } f(x + 1) - f(x) < 1\,.$$

Défi. Soit A la partie de $\mathbb{R}$ formée des nombres décimaux de $[0, 1]$ dont l'écriture décimale comprend au moins deux chiffres non nuls différents et ne contient pas le chiffre 9. L'ensemble A a-t-il une borne supérieure ? Une borne inférieure ? Si oui, les déterminer. Sont-elles dans A ?