Nombres complexes

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

Depuis leur introduction au XVI^e siècle par des mathématiciens tels que Cardan ou Tartaglia qui cherchaient à exprimer les solutions des équations du troisième degré d'une manière générale, les nombres complexes n'ont cessé d'envahir les domaines scientifiques comme les mathématiques, la physique ou les sciences de l'ingénieur pour n'en nommer que quelques uns. Ils donnent souvent une méthode de résolution simple à des problèmes difficiles voire virtuellement impossibles à résoudre autrement. Comme il est devenu indispensable de pouvoir effectuer des calculs élémentaires sur des quantités complexes, nous passons en revue dans ce chapître leurs caractéristiques essentielles.

1 Description et notations

1.1 Représentation géométrique

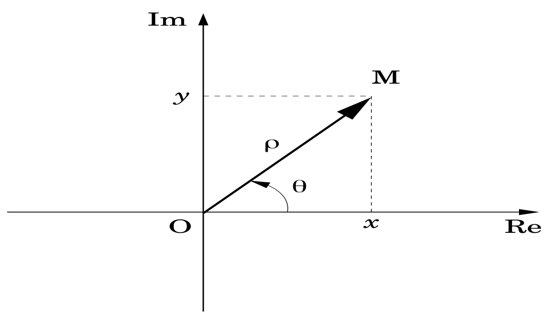

FIGURE 5.1 – Représentation d'un nombre complexe $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ dans le plan complexe.

Les nombres complexes forment une extension bi-dimensionnelle des nombres réels. On les note traditionnellement par la lettre z et on note leur ensemble par la lettre $\mathbb{C}$. Le nombre complexe z est défini par deux nombres réels x et y. À ce couple de nombres réels, on peut faire correspondre un point M du plan de coordonnées (x, y) comme sur la figure 5.1. On peut aussi associer ce couple de coordonnées au vecteur $\overrightarrow{OM}$. L'axe des abscisses (Ox) est appelé *axe réel* et celui des ordonnées (Oy), *axe imaginaire*. Cette représentation géométrique permet de comprendre au moins en partie la pertinence des notations suivantes.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

1.2 Forme cartésienne

Sous forme cartésienne, on écrit le nombre complexe z :

$$z = x + iy. \tag{5.1}$$

Le nombre i est appelé *unité imaginaire* et il est tel que

$$i^2 = -1. \tag{5.2}$$

Le réel x est appelé *partie réelle* de z et noté $\mathrm{Re}(z)$. Le réel y est appelé sa *partie imaginaire* et noté $\mathrm{Im}(z)$. Ainsi, l'abscisse et l'ordonnée de M correspondant au nombre z sont clairement séparées puisque le nombre i multiplie uniquement *l'ordonnée* du point M.

1.3 Forme polaire

Naturellement, comme le nombre complexe z peut être associé au point M ou plus exactement au vecteur $\overrightarrow{OM}$, on peut en donner une représentation *polaire*. Il suffit pour cela de donner la distance $\rho = OM$ et l'angle θ que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ fait avec l'axe (Ox) comme indiqué sur la figure 5.1. Comme $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, on obtient en remplaçant dans (5.1)

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{5.3}$$

La formule d'Euler (1748) permet de réduire encore cette écriture. Elle stipule en effet que

$$\cos\theta + i\sin\theta = \exp(i\theta). \tag{5.4}$$

On déduit de cette expression la propriété suivante très importante de l'exponentielle complexe

$$e^{i(\theta+k\pi)} = (-1)^k e^{i\theta}. \tag{5.5}$$

On obtient donc

$$z = \rho e^{i\theta}. \tag{5.6}$$

Par définition ρ est appelé *module* de z et l'angle θ, son *argument*. Nous revenons sur ces quantités dans la section suivante.

2 Calcul complexe

2.1 Manipulations algébriques de base

Le manipulation algébrique des nombres complexes est en tout point semblable à celle des nombres réels. On peut ajouter, retrancher, multiplier et diviser les nombres complexes comme on le ferait pour des nombres réels et simplifier les expressions obtenues en tenant compte du fait que $i^2 = -1$. Ainsi, par exemple, pour $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}(x+iy)+(a+ib) &= (x+a)+i(y+b),\\ (x+iy)(a+ib) &= (xa-yb)+i(ya+xb),\\ \frac{x+iy}{a+ib} &= \frac{xa+yb}{a^2+b^2}+i\,\frac{ya-xb}{a^2+b^2}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Pour obtenir cette dernière égalité, nous avons multiplié le numérateur et le dénominateur de la fraction originale par $(a-ib)$ ce qui nous a permis d'éliminer la partie imaginaire du dénominateur et donc d'obtenir le résultat de l'opération sous forme cartésienne.

De même, on peut travailler sur les complexes exprimés sous leur forme polaire. Par exemple, avec $(\rho, r) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\rho e^{i\theta}\right)\left(re^{i\phi}\right) &= \rho r e^{i(\theta+\phi)},\\ \frac{\rho e^{i\theta}}{re^{i\phi}} &= \frac{\rho}{r}e^{i(\theta-\phi)}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

La première égalité montre que la règle de multiplication des exponentielles ($e^x e^y = e^{x+y}$) rend les calculs de multiplication très faciles sous forme polaire. De même, la division aboutit à un résultat très simple quand on utilise le fait que $1/e^x = e^{-x}$.

42 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Montrez la troisième égalité de (5.7).

2.2 Définitions utiles

Dans tout ce qui suit, on suppose que $z = x + iy = \rho \exp(i\theta)$.

1. On appelle *module* de z et on note $|z|$ le nombre réel positif
$$|z| = \rho = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{5.9}$$
Le module est une valeur absolue. Remarquez que, dans la représentation géométrique du nombre complexe z, c'est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Il est donc *toujours positif ou nul* et n'est nul que si $z = 0$. D'autre part, $|zz'| = |z||z'|$ mais $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).
2. On appelle *argument* de z et on note $\arg(z)$, l'angle θ de la forme polaire de z.
$$\arg(z) = \theta. \tag{5.10}$$
Vu la périodicité de l'exponentielle complexe (cf. (5.5)), $\arg(z)$ peut être défini modulo 2π. Les physiciens appellent souvent θ, la *phase* de l'exponentielle complexe. Celle-ci joue un rôle prépondérant en physique des ondes et en particulier en optique ondulatoire où elle permet d'expliquer les phénomènes d'interférences et de diffraction.
3. On appelle *complexe conjugué* de z et on note $\bar{z}$ la quantité
$$\bar{z} = x - iy = \rho \exp(-i\theta). \tag{5.11}$$
La conjugaison complexe obéit aux lois suivantes :
$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}, \quad \bar{\bar{z}} = z. \tag{5.12}$$

En utilisant ces définitions on voit que

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{5.13}$$

43 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Donnez les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants ($z = x + iy$) :

$$z^2 \quad ; \quad z\overline{z} \quad ; \quad \frac{z}{\overline{z}}.$$

2.3 Quelques résultats essentiels

1. **Très important !**
   Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles ! Donc si $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$z = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0). \tag{5.14}$$
   On en déduit que l'égalité de deux nombres complexes a lieu si et seulement si les parties réelles sont égales **et** les parties imaginaires sont égales.
   $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2). \tag{5.15}$$
2. Passage Polaire → Cartésien. Soit $z = \rho e^{i\theta}$, alors $z = x + iy$ avec
   $$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \tag{5.16}$$
3. Passage Cartésien → Polaire. Soit $z = x + iy$, alors $z = \rho e^{i\theta}$ avec
   $$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{5.17}$$
   Avec cette définition, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.
4. Formule de Moivre (1730)
   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{5.18}$$
5. Expression complexe des fonctions sinus et cosinus
   $$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \tag{5.19}$$
6. Valeurs remarquables
   $$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i2\pi} = 1. \tag{5.20}$$

44 Exercice ⋆ Corr. p. ??

En utilisant la formule d'Euler (5.4)*, montrez les égalités* (5.18)*,* (5.19) *et* (5.20)*.*

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

45 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Donnez la forme cartésienne des expressions complexes suivantes :

$$z_1 = 2e^{i\pi/3}, \quad z_2 = \frac{1+i}{1-i}$$

46 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Donnez la forme polaire des expressions complexes suivantes :

$$c_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad c_2 = 1 + i, \quad c_3 = 1 - i, \quad c_4 = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$$

En utilisant c_2 et c_3 sous leur forme polaire, retrouvez le résultat que vous avez obtenu pour z_2 dans l'exercice précédent.
Indication : Pour la forme polaire de c_4, observez que $c_4 = c_1c_2$!

3 Exercices facultatifs

47 Exercice ⋆ Corr. p. ??

On suppose que a et b sont des entiers et qu'ils s'écrivent comme somme de deux carrés de nombres entiers $a = n_1^2 + n_2^2$ et $b = m_1^2 + m_2^2$. En utilisant le fait que a et b peuvent s'écrire $a = |n_1 + in_2|^2$ et $b = |m_1 + im_2|^2$, montrez que le produit ab peut encore s'écrire comme la somme de deux carrés de nombres entiers.
Indication : $|z_1||z_2| = |z_1z_2|$!

48 Exercice ⋆ Corr. p. ??

En utilisant le résultat

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}, \quad z \neq 1,$$

montrez que

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

49 Exercice

⋆ **Corr. p.** ??

En utilisant les propriétés des exponentielles complexes retrouvez les formules d'addition trigonométrique (2.5).
Indication : Utilisez $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$.

50 Exercice

⋆ **Corr. p.** ??

En utilisant le fait que $e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ *donnez la valeur exacte de* $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$*. Comparez vos résultats à ceux obtenus dans l'exercice 6.*