Algèbre linéaire et analyse 1
(HLMA101 – Année universitaire 2020–2021)

Feuille d'exercices N°9

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. On énonce le théorème des valeurs intermédiaires : « si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors...
(a) ... $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$ ».
(b) ... $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ ».
Compléter avec la bonne conclusion (justifier).

Question 2. Vrai ou faux ?
(a) Une fonction continue est dérivable.
(b) Une fonction dérivable est continue.
(c) Si f n'est pas dérivable en a, alors f n'est pas continue en a.

2. Travaux dirigés

Exercice 1. Justifier que l'équation $e^x + x^3 = 5$ a une et une seule solution sur $\mathbb{R}$. Déterminer cette solution à 10^{-2} près par une méthode de dichotomie (à l'aide d'une calculatrice).

Exercice 2. Montrer que l'application $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+x}$ est strictement croissante (sans utiliser de dérivée) puis que pour tout $y \in]-1, 1[$ il existe un unique $x \in]-1, +\infty[$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un point fixe, c'est-à-dire un réel x de $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que f est constante égale à 1 ou constante égale à -1.

Exercice 5. La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 6. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle dérivable en 0 ? Même question pour la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 7. Démontrer que les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

3. Révisions et approfondissement

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période 1, c'est-à-dire que $f(x + 1) = f(x)$ pour tout x réel. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0 + \frac{1}{2}) = f(x_0)$ (*indication* : essayer d'utiliser la fonction définie par $g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$ pour tout t réel).

Exercice 9. Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est injective et continue avec $f(a) < f(b)$, alors f est strictement croissante.

Exercice 10. Soit f une fonction dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

admet une limite lorsque x tend vers a.

Exercice 11. Essayer de prolonger par continuité les fonctions suivantes :
(a) en 0 la fonction f définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$;
(b) en $\frac{\pi}{2}$ la fonction g définie pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$ par $g(x) = \sin(x)/\ln\left(\left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)$.
(c) en 0 la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $h(x) = \sin(x)\sin(1/x)$.

Défi. On suppose que la température varie continûment à la surface du globe. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés où la température est identique.