Planche d'Exercices n°4 : Applications Linéaires, Bases

Partie I : Révisions et pré-Requis.

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $tr(A) = \sum_i a_{ii}$ si $A = (a_{ij})_{ij}$;
2. $ev : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $ev(f) = f(1)$;
3. $\Delta : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Delta(aX^2 + bX + c) = b^2 - 4ac$;
4. $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = xy$;
5. $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(x, y) = x + y$;
6. $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\tau(x, y) = (x + y, x.y)$;
7. $T : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $f \longmapsto T(f)$ où, pour tout x, $T(f)(x) = f(x + 1)$;
8. $\mathcal{E} : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$, $y \longmapsto \mathcal{E}(y) = y'' - 3y' + 2y$;
9. $c : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $c(f) = f \circ \exp$;
10. $Q : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $Q(f) = f^2$.

Le cas échéant, préciser : endomorphisme ? Isomorphisme ? Forme linéaire ? ...

Exercice 2. Soit $E = F \oplus G$, une décomposition en somme directe d'un e.v E. Soit aussi l'application $\omega : F \times G \to E$, définie par $\omega(x, y) = x + y$.

1. Vérifier la linéarité de ω.
2. L'application ω est-elle un isomorphisme ?

Exercice 3. Ici, les ensembles E_i sont des espaces vectoriels réels.

1. Donner un exemple d'une famille libre de $E_1 = \mathbb{R}^3$ qui ne soit pas génératrice.
2. Donner un exemple d'une famille génératrice de $E_2 = \mathbb{R}^4$ qui ne soit pas libre.
3. Rappeler qui est la base canonique de $E_3 = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Trouver une base pour $E_4 = 0$ (l'espace nul).

Exercice 4. Pour tout espace vectoriel E et tout scalaire λ, nous avons une application $H_\lambda : E \longrightarrow E$, définie par $H_\lambda(x) = \lambda.x$.

1. Montrer que H_λ est linéaire.
2. H_λ est-elle bijective ? Auquel cas, préciser l'isomorphisme réciproque H_λ^{-1}.

Exercice 5. Fixons une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Interpréter le noyau de l'application $\kappa : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\kappa(B) = AB - BA$ (vérifier au préalable la linéarité de κ).

Partie II : Entraînement.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'application : $f(x,y,z) = (x+y+z)(1,1,1)$.

1. Montrer que f est linéaire. En donner la matrice.
2. Préciser les dimensions des noyau et image de f.
3. Rappeler le Théorème du Rang. Avons-nous $\mathbb{R}^3 = Im(f) \oplus Ker(f)$?

Exercice 7. Tous les espaces vectoriels sont réels.

1. Existe-t-il une application linéaire non injective $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$?
2. Existe-t-il une application linéaire non surjective $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$?
3. Existe-t-il une application linéaire $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ surjective mais non injective ?

Exercice 8. (Sujet de CC2 2018) Soit $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$, la base canonique de $\mathbb{R}^3$; soit α, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\alpha(x,y,z) = (3x-8y-28z, -2x+5y+18z, x-2y-8z)$.

1. Vérifier que les vecteurs $c_1' = (4,-2,1)$, $c_2' = (3,-2,1)$ et $c_3' = (-8,5,-2)$ forment une famille libre $\mathcal{C}' = (c_1', c_2', c_3')$; en déduire que $\mathcal{C}'$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice A de α dans la base $\mathcal{C}$. Si A' est la matrice de α dans la base $\mathcal{C}'$, rappeler la formule la reliant à A (on notera P la matrice de passage).
3. Expliciter la matrice A'.

Exercice 9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par : $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$, $\varphi(0,1,0) = (2,1,0)$ et $\varphi(0,0,1) = (3,2,1)$.

1. Expliciter φ et en donner la matrice Φ. L'application φ est-elle bijective ?
2. Pour $\psi = \varphi - id$, montrer que nous avons $\psi^3 = 0$; l'endomorphisme ψ est-il bijectif ?
3. De $\psi^3 = 0$, déduire la formule $\Phi^3 - 3\Phi^2 + 3\Phi - I_3 = 0$.

Exercice 10. Soit une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et soit $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, ..., b_n\} \subset E$.

1. Montrer que si f est injective et $\mathcal{B}$ est libre, alors $f(\mathcal{B})$ est une partie libre (de F).
2. Montrer que si f est surjective et $\mathcal{B}$ génère E, alors $f(\mathcal{B})$ génère F.
3. En déduire des hypothèses pour que $f(\mathcal{B})$ soit une base de F.

Exercice 11. La trace d'une matrice réelle $A = (a_{ij})_{ij}$, carrée d'ordre n, est le nombre $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (somme des éléments diagonaux).

1. Définir précisément l'application trace tr ; montrer qu'elle est linéaire.
2. Si $B = (b_{ij})_{ij}$ est une autre matrice carrée d'ordre n, a-t-on $tr(AB) = tr(A)tr(B)$?
3. Comparer les deux nombres $tr(AB)$ et $tr(BA)$.

Exercice 12. Soit l'espace vectoriel des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ et soit l'endomorphisme D de E, défini par $D(P) = P'$ (la dérivation).

1. Décrire le noyau de D. L'endomorphisme D est-il injectif ?
2. Décrire l'image de D : l'endomorphisme D est-il surjectif ? Un isomorphisme ?
3. Pourquoi n'avons-nous pas "injectif$\Longleftrightarrow$surjectif" ici ?
4. Reprendre ces questions avec l'endomorphisme I : $I(\sum_{i=0}^n a_i X^i) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i$.
5. Montrer que nous avons $D \circ I = id$. Qu'en penser ?

Exercice 13. Soit l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$: $u(x,y) = (-x,0)$.

1. Pour le polynôme $P(X) = X^2 + X$, vérifier la formule $P(u) = 0$.
2. Si $v = id + u$, quel polynôme $Q(X)$ de degré 2 vérifie $Q(v) = 0$?
3. Combien de matrices $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ vérifient $P(A) = 0$? (systèmes non linéaires)
4. Montrer qu'il existe une infinité d'endomorphismes w de $\mathbb{R}^2$, tels que $P(w) = 0$.

Exercice 14. Pour un entier $n \geq 1$, soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ (polynômes réels de degré $\leq n$).

1. E est-il un e.v ? $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est-il s.e.v de E ?
2. Soit l'ensemble $F' = X\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ($F' = \{X.P | P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$) : vérifier qu'il s'agit d'un s.e.v de E. En préciser la dimension.
3. Avons-nous $F' = F$? Avons-nous F' isomorphe à F ?

Exercice 15. Soit un espace vectoriel réel E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.

1. Donner un exemple non nul d'un tel endomorphisme u pour $E = \mathbb{R}^2$ (et $E = \mathbb{R}^3$).
2. Montrer, en toute généralité, l'équivalence suivante : $u^2 = 0 \iff Im(u) \subset Ker(u)$.
3. Pour E de dimension 2 et $u \neq 0 = u^2$, vérifier que nous avons $Ker(u) = Im(u)$.
4. Pour E de dimension 3 et $u^2 = 0$, l'égalité $Ker(u) = Im(u)$ est-elle possible ?

Exercice 16. Soient un espace vectoriel E (de dimension finie $n > 0$) et $u \in \mathcal{L}(E)$, tels que $u^d = 0$ pour un certain entier d.

1. Montrer que l'endomorphisme u ne saurait être bijectif.
2. Montrer que l'endomorphisme $v = 1 - u$ est bijectif, de réciproque $v^{-1} = \sum_{i=0}^{d} u^i$.

Exercice 17. Pour l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$: $u(x,y,z) = (z,x,y)$.

1. Donner la matrice de u relativement à la base canonique de E.
2. Pour $P(X) = X^3 - 1$, montrer que $P(u) = 0$.
3. En déduire que u est inversible.
4. Expliciter l'endomorphisme $(u + id)^{2019}$.

Exercice 18. Soient des polynômes réels non nuls $P_0, P_1, ..., P_n$, de degrés distincts.

1. Montrer que la famille $\mathcal{P} = (P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
2. Préciser qui est le s.e.v $Vect(\mathcal{P})$, si $\mathcal{P}$ vérifie : $\forall i,\ d^\circ(P_i) = i$.

Exercice 19. Soit le polynôme $P(X) = X^3 - 7X^2 - X + 1$; soit aussi un endomorphisme ε d'un e.v E, tel que $P(\varepsilon) = 0$.

1. Montrer que ε est inversible dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ (on explicitera l'inverse ε^{-1}).
2. Vérifier que le polynôme $P(X)P(-X)$ est pair et l'expliciter.
3. En déduire un polynôme $Q(X)$, tel que : $d^\circ Q(X) = 3$ et $Q(\varepsilon^2) = 0$.

Exercice 20. Soit une application linéaire $f : E \longrightarrow F$.

1. Pour des s.e.v E_1 et E_2 de E, montrer la formule $f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$.
2. Soit l'application linéaire $\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$, définie par $\varphi(x,y) = (x+y, x+y)$ et soient les s.e.v $G_1 = \mathbb{K}(1,0)$ et $G_2 = \mathbb{K}(0,1)$. Calculer $\varphi^{-1}(G_1)$, $\varphi^{-1}(G_2)$ et $\varphi^{-1}(G_1 + G_2)$.
3. Pour des s.e.v F_1 et F_2, la formule $f^{-1}(F_1 + F_2) = f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2)$ est-elle vraie ?

Partie III : Approfondissement.

Exercice 21. Rappel : tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel est naturellement un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction additive : pour tous x, x', $f(x + x') = f(x) + f(x')$.

1. Si $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application additive, montrer que φ est $\mathbb{Q}$-linéaire.
2. Si f est supposée continue et additive, en déduire que f est $\mathbb{R}$-linéaire. *Indication :* utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la linéarité de la restriction $f|_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 22. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $a \in \mathcal{L}(E)$.

1. Construire un isomorphisme $E \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire la formule : $dim(E) = n^2$.
2. Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $\mathcal{A} = (I, A, A^2, ..., A^{n^2})$ est liée.
3. En déduire un polynôme non nul $P(X)$, tel que : $P(a) = 0$ et $d^\circ P(X) \leq n^2$.

Exercice 23. Soient : un e.v E, un vecteur $e \in E$ et une forme linéaire f sur E.

1. Considérons l'application $F : E \longrightarrow E$, $F(x) = f(x)e$: vérifier qu'elle est linéaire.
2. Décrire l'image et le noyau de F, lorsque $e \neq 0_E$.
3. Pour le polynôme $P(X) = X^2 - f(e)X$, vérifier que nous avons $P(F) = 0$.

Exercice 24. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons une fonction $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $e_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. On considère la famille (infinie) $\mathcal{E} = (e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. Expliquer l'écriture $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i e^{\lambda_i x}$ (λ_i distincts), pour tout $f \in Vect(\mathcal{E})$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{E}$ est libre.
3. Soit $f \in Vect(\mathcal{E})$, $f \neq 0 : f(x) = \sum_{i=1}^n a_i e^{\lambda_i x}$ (λ_i distincts). Calculer $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, attention : il y a plusieurs cas suivant $\max_i(\lambda_i)$ et $\min_i(\lambda_i)$, positifs ou négatifs.
4. En déduire que la famille $\mathcal{E}$ n'est pas génératrice.

Exercice 25. Soit une application linéaire $f : E \longrightarrow F$. Si G est un s.e.v de E, montrer la formule : $f^{-1}(f(G)) = G + Ker(f)$.

Exercice 26. Pour tous espaces vectoriels E et F, soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \longrightarrow F$. Tout $e \in E$ définit une application $\Psi_e : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow F$, $\Psi_e(f) = f(e)$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est naturellement un espace vectoriel.
2. Pour tout vecteur $e \in E$, vérifier que Ψ_e est linéaire.
3. En déduire un isomorphisme $\mathcal{L}(E, F) \cong F$ lorsque E est une droite vectorielle.

Exercice 27. Soit l'espace vectoriel $E = E_1 \times E_2$, produit d'espaces vectoriels E_1 et E_2. Soient les applications $\pi_1 : E \to E_1$ et $\pi_2 : E \to E_2$, avec $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ et $\pi_2(x_1, x_2) = x_2$.

1. Montrer leur linéarité. Sont-elles toujours injectives ? Toujours surjectives ?
2. Mêmes questions avec les applications $\iota_1 : E_1 \to E$ et $\iota_2 : E_2 \to E$, définies par $\iota_1(x) = (x, 0)$ et $\iota_2(y) = (0, y)$.
3. Quels liens entretiennent les s.e.v $Ker(\pi_1)$, $Ker(\pi_2)$, $Im(\iota_1)$ et $Im(\iota_2)$?
4. Expliciter les circonstances où π_1 et ι_1 sont des isomorphismes réciproques.