

TD 6 - Méthode de résolution

Logique Propositionnelle - HAI304I

Exercice 1 Montrez que l'on peut produire la clause vide par la méthode de résolution à partir la forme clausale suivante :

$$\{\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{\neg a_1, \neg b_1\}, \{\neg a_2, \neg b_2\}, \{\neg a_3, \neg b_3\}, \{\neg b_1\}, \{\neg a_1, \neg b_3\}, \{\neg a_2, \neg b_3\}, \{\neg b_2, a_2\}\}$$

Exercice 2 – Démontrez par la méthode de résolution que : $\{a \Rightarrow b, c \wedge d \Rightarrow a, e \Rightarrow c, d \wedge e\} \models b$

Exercice 3 – Montrez à l'aide de la méthode de résolution que $\neg p$ n'est pas la conséquence logique de $\{p \Rightarrow q \vee r, q \Rightarrow r \Rightarrow s, \neg s\}$ c'est-à-dire que : $\{p \Rightarrow q \vee r, q \Rightarrow r \Rightarrow s, \neg s\} \not\models \neg p$.

Exercice 4 – Grâce à la méthode de résolution, déterminez si la formule suivante est satisfiable ou non :

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D)$$

Exercice 5 - Après mise sous forme clausale, utilisez la méthode de résolution avec la stratégie en largeur (cf. algorithme vu en cours) pour dire si les formules suivantes sont satisfiables ou non :

$$(\neg(b \wedge a) \Rightarrow (a \Leftrightarrow b)) \wedge \neg(\neg a \vee b)$$

$$(\neg p \wedge (\neg q \vee r) \vee (p \Rightarrow q \wedge \neg r)) \wedge (p \Leftrightarrow \neg q)$$

Exercice 6 – Montrez que la formule suivante est valide à l'aide de la méthode de résolution :

$$(a \vee b \Rightarrow a \vee c) \Rightarrow a \vee (b \Rightarrow c)$$

Exercice 7 – Soit les formules bien formées suivantes de la logique des propositions :

$$A = \neg(q \wedge \neg r) \wedge (p \Rightarrow q \vee r \wedge \neg p) \qquad B = \neg(r \Rightarrow s) \vee \neg p \vee r \wedge s$$

1. Calculer les valeurs de vérité de A et B pour l'interprétation I suivante : $I(p) = 1, I(q) = 0, I(r) = 1$ et $I(s) = 1$. Que peut-on en conclure sur A et B ?
2. Mettre A sous forme clausale.
3. Montrer par la méthode de résolution que B est la conséquence logique de A ($A \models B$).

Exercice 8 – On a démontré en cours que la règle de résolution produit des conséquences logiques, c'est-à-dire que si C_r est produite par résolution à partir de C_1 et C_2 alors $\{C_1, C_2\} \models C_r$.

1. Soit F une forme clausale et C une clause, démontrez que si C est dérivable de F par une séquence de résolution ($F \vdash_{res} C$) alors $F \models C$, par induction sur la longueur n de la dérivation.
2. En déduire, la **correction** de la méthode de résolution, c'est-à-dire que s'il existe une dérivation qui permet de produire la clause vide à partir de F ($F \vdash_{res} \emptyset$) alors F est insatisfiable.

Exercice 9 – Correction et complétude de la méthode de résolution s'énoncent ainsi : « une forme clausale F est insatisfiable ssi il existe une séquence de résolution à partir de F terminant par la clause vide (une telle séquence de résolution est appelée réfutation) ». Mais comment choisir les différentes clauses à résoudre pour obtenir une telle réfutation ? La stratégie en largeur vue en cours garantit de calculer toutes les résolvantes possibles. L'ensemble des résolvantes possibles étant fini cette stratégie garantit de ne pas rater la clause vide (on dit que la stratégie est complète). Cependant cette stratégie est assez coûteuse ! La “**unit-resolution**” est une stratégie qui ne calcule les résolvantes qu'entre une clause unitaire et une clause quelconque. L'objectif de cette exercice est de montrer que cette stratégie n'est complète que sur les formes clausales de Horn. On rappelle qu'une forme clausale de Horn ne contient que des clauses de Horn, c'est-à-dire des clauses qui ne contiennent au plus qu'un seul littéral positif.

1. Appliquez l'unit-résolution à la forme clausale $\{\{a, c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg c\}, \{\neg b\}\}$
2. Cette forme clausale est-elle de Horn ?
3. Montrez que l'unit-résolution est correcte.
4. Montrez que l'unit-resolution n'est pas complète (donc exhibez un contre-exemple à la propriété de complétude).
5. Donnez un modèle de la forme clausale de Horn : $\{\{p, \neg q\}, \{q, \neg p\}, \{\neg q, \neg p\}\}$.
6. Montrez que si toutes les clauses d'une forme clausale de Horn contiennent au moins 2 littéraux, alors cette forme clausale possède au moins un modèle.
7. Soient C_1 et C_2 deux clauses de Horn « résolubles », leur résolvante est-elle de Horn ? Justifiez votre réponse.
8. Finalement prouvez que l'unit-résolution est complète pour les formes clausales de Horn.