Corrigé de la feuille d'exercices N°7

novembre 2020

Question 1.

On suppose que l'assertion consiste à définir formellement le terme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
Le cours donne :

limite finie d'une fonction en l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(x > \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \Big)$$

Ce qui correspond bien à la proposition ici réordonnée :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \delta > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big((x > A) \Rightarrow (|f(x) - \ell| < \delta) \Big)$$

C'est-à-dire : aussi petite que soit une distance δ, il existe un nombre A tel que, quelque soit un réel, s'il est plus grand que A, la distance entre son image par par f et ℓ est inféreieure à δ.

Question 2.

(a) Vrai - Avoir une limite est une condition plus stricte qu'avoir une limite épointée.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \backslash \{x_0\},\ \Big(|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Big) \quad \text{limite épointée}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Big) \quad \text{limite classique}$$

(b) Faux - car la limite peut très bien n'être qu'épointée, par exemple si :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(c) Vrai - car d'après le cours si une fonction f admet une limite en un point x_0 qui appartient par ailleurs à son ensemble de définition, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(d) Faux - où il suffit de reprendre l'exemple du point (b) : $0 \in \mathcal{D}_f$, et pourtant f n'a pas de limite en 0, mais seulement une limite épointée.

Question 3.

(a) NON - considérer par exemple $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x$

(b) OUI - car 0 est une limite finie, on peut donc appliquer la formule

$$\lim f \cdot g = \lim f \cdot \lim g$$

(c) NON - par exemple c'est faux pour $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto -x + 4$, et donc pour lesquelles le graphe de $f + g$ est une parabole dont les branches sont orientées vers le haut.

(d) OUI - car d'une part on applique la formule :

$$\lim \lambda g = \lambda \lim g$$

avec $\lambda = -1$, d'où $\lim -g = -\lim g = +\infty$, puis on remarque que la forme n'est alors plus indéterminée : "$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$"

Exercice 1.

Pour x non nul, $\frac{3x+1}{x-7} = \frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{7}{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{1} = 3$, c'est-à-dire que, pour une distance ε aussi petite que l'on veut, il y a un nombre A tel que, dès lors que x lui est inférieur, la distance $|f(x)-3|$ est inférieure à ε. Étant donné $\varepsilon = 10^{-6}$, exhibons un A convenable.

Soit x < 0. Alors :

$$|f(x) - 3| = \left| \frac{3x+1}{x-7} - \frac{3 \cdot (x-7)}{x-7} \right| = \left| \frac{22}{x-7} \right| = \frac{22}{7-x}$$

étant donné que $x < 0$. Donc :

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| < 10^{-6} &\Leftrightarrow \frac{22}{7-x} < 10^{-6} \\ &\Leftrightarrow x < 7 - \frac{22}{10^{-6}} \end{aligned}$$

On choisit donc $A = 7 - 22 \cdot 10^6$.

Exercice 2.

$\diamond$ Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

• En utilisant des propriétés connues :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

D'où, par composition de limites finies : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$

• En revenant à la définition de la limite (et ayant une idée du résultat) :

On cherche à montrer que quelque soit une distance ε, on peut exhiber un nombre A tel que, quelque soit $x > A$, la distance $|f(x) - 3|$ est inférieure strictement à ε.

Analyse

Soit $\varepsilon > 0$.
Montrons qu'on peut choisir un A tel que : $\forall x > A,\ |f(x) - 3| < \varepsilon$.

Soit $x > 1$.

Alors, étant donné que par conséquent $x - 1 > 0$,

$$\begin{aligned} |f(x) - 1| < \varepsilon &\Leftrightarrow |\frac{x+1}{x-1} - \frac{X-1}{x-1}| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x > \frac{2}{\varepsilon} + 1 \end{aligned}$$

On pose donc $A = \frac{2}{\varepsilon} + 1$

Synthèse

Soit $\varepsilon > 0$. Étant donné $A = \frac{2}{\varepsilon} + 1$, on a bien :

$$x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

Donc, ε étant quelconque,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ (x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon)$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

$\diamond$ Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$

C'est-à-dire montrons que : $\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x > 1,\ \Big(|x-1| < \eta \Rightarrow f(x) > A\Big)$

Analyse

Soit A > 0. Construisons un η convenable.

Quelque soit $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) > A &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > A \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)+2}{x-1} > A \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > A - 1 \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{2}{x-1} > A \Rightarrow \frac{2}{x-1} > A - 1$$

et (on rappelle que $x > 1$) :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} > A &\Leftrightarrow x - 1 < \frac{2}{A} \\ &\Leftrightarrow |x-1| < \frac{2}{A} =: \eta \end{aligned}$$

Synthèse

Soit $A > 0$. On pose $\eta = \frac{2}{A}$. D'après l'analyse qui précède on a bien (en « remontant la chaîne d'implications ») :

$$\forall x > 1,\ \Big(|x-1| < \eta \Rightarrow f(x) > A\Big)$$

Or A était quelconque, d'où :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x > 1,\ \Big(|x-1| < \eta \Rightarrow f(x) > A\Big),$$

ce qu'il fallait démontrer.

$\diamond$ Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$

C'est-à-dire montrons que :
$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x < 1,\ \Big(|x-1| < \eta \Rightarrow f(x) < -A\Big)$

Soit $A > 0$. Quelque soit $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x < 1,\ f(x) < -A &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < -A \\
&\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x-1} < -A \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < -(A+1) \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{1-x} > A+1 \\
&\Leftrightarrow 1 - x < \frac{2}{A+1} \\
&\Leftrightarrow |x-1| < \frac{2}{A+1} =: \eta
\end{aligned}$$

étant donné que $x < 1$.

D'après cette analyse, et comme $\eta = \frac{2}{A+1} > 0$, on a bien :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x < 1,\ \Big(|x-1| < \eta \Rightarrow f(x) < -A\Big) \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

Exercice 3.

Dans le cours, avec ses notations, on montre :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(|x-x_0| < \eta \Rightarrow |(f+g)(x) - (l+l')| < \varepsilon\Big)$$

Ici, il s'agit de montrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(|x-x_0| < \eta \Rightarrow |(f-g)(x) - (l-l')| < \varepsilon\Big)$$

Donc l'argument suivant de la démonstration originale :

$$|(f+g)(x) - (l+l')| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'|$$

Doit être remplacé par le suivant :

$$|(f-g)(x)-(l-l')| = |(f(x)-l)-(g(x)-l')| \leq |f(x)-l|+|-(g(x)-l')| = |f(x)-l|+|g(x)-l'|$$

Ici il s'agit surtout de vous encourager à pratiquer les démonstrations du cours, car elles recellent des techniques pouvant se révéler utiles dans d'autres contextes.

Exercice 4.

• Idée : pour un nombre décimal grand, par exemple 100,47,
on a $\frac{E(100)}{100{,}47} = \frac{100}{100{,}47} \simeq 1$, donc on s'attend à 1 comme réponse. Ensuite, un fait notable sur la partie entière est que l'on peut l'encadrer par un entier et son successeur. On va utiliser ce fait.

Démonstration :

Soit $x > 0$.

On a : $x - 1 < E(x) \leq x$
D'où : $1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$ (on rappel que x est non nul)

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc, par passage de l'inégalité à la limite, puis encadrement, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$$

• Idée : dès qu'un nombre x est supérieur strictement à 1, la partie entière de son inverse vaut zéro, on a donc dans ce cas $xE(\frac{1}{x}) = 0$, on s'attend donc à une limite nulle.

Démonstration :

$$\lim_{x \to +\infty} xE(\tfrac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left(x > A \Rightarrow xE(\tfrac{1}{x}) < \varepsilon \right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'idée précédente, n'importe quel $A \geq 1$ conviendra. On pose donc $A = 1$.

Soit $x > 1$. On a bien $xE(\frac{1}{x}) = 0 < \varepsilon$.

$x > A$ était quelconque ; $\varepsilon > 0$ aussi, d'où le résultat.

Exercice 5.

(a) Soit $x > 0$.

On a : $\frac{x^2+2|x|}{x} = \frac{x^2+2x}{x} = x + 2$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2+2|x|}{x} = 2$

De même, si $x < 0$, $\frac{x^2+2|x|}{x} = x - 2$,

Et : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x^2+2|x|}{x} = -2$

Il n'y a donc pas de limite classique en $x = 0$, mais une limite à gauche et une limite à droite qui sont distinctes.

Pouvez-vous tracer le graphe de cette fonction ?

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, qui n'est pas un multiple entier de π.

Alors : $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$

Or $\lim\limits_{x\to\pi} 1-\cos x = 2$

En fait on vient de calculer la limite d'une fonction continue en un point où elle est définie, qui est donc sa valeur en ce point.

Donc : $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = 2$

(c) D'après la première identité remarquable,

$$(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) = (1+x)-(1-x) = 2x$$

D'où (où x se doit d'être non nul) :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$$

(d) D'après la deuxième identité remarquable,

$$(\sqrt[3]{1+x^2}-1)\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right) = 1+x^2-1 = x^2$$

D'où (où x se doit encore d'être non nul) :

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{3}$$