Algèbre linéaire et calcul matriciel

(HAI406 – Année universitaire 2021–2022)

Feuille d'exercices N°1

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. Soit F le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Écrire la définition *paramétrique* du plan affine $\mathcal{P}$ dirigé par F passant par $A(0,-1,1)$.

Question 2. On considère le plan $\mathcal{P} = \{(3-t+2s, 1+2t-3s, t) \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$. Expliciter le plan vectoriel directeur de $\mathcal{P}$ ainsi qu'un point appartenant à $\mathcal{P}$.

Question 3. Écrire la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)$ dans les cas suivants :

(a) $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 4$, et $a_{i,j} = 2i - 3j$;

(b) A est la matrice à quatre lignes et quatre colonnes dont les coefficients diagonaux sont égaux à leur numéro de ligne et les coefficients extra-diagonaux sont égaux à 7.

Question 4. Écrire les matrices des coefficients et augmentée du système : $\begin{cases} 5t + 6x - z = 56 \\ 2x + 5z + t - x - \frac{y}{2} = 1 \\ 45z + 7y - 2 = 0 \end{cases}$, puis écrire les systèmes (en fixant les noms des variables) de matrices augmentées :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Travaux dirigés

Exercice 1. Trouver une famille de vecteurs qui engendre le sous-espace vectoriel $E = \left\{ \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ -z \\ 0 \end{pmatrix},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
Thème de réflexion : de combien de vecteurs a-t-on besoin au minimum ?

Exercice 2. Donner une représentation sous forme paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $4x + 2y = 8$ dans le plan, puis du plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y - z = 7$ dans l'espace, puis de l'intersection Δ des plans $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y + 2z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $x - y - z = 1$.

Exercice 3. Soient a, b et c trois réels avec $(a,b) \neq (0,0)$ et soit D la droite du plan d'équation $ax + by = c$. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'énoncé suivant : « $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x,y) \in D) \Rightarrow b \neq 0$ ». Ces énoncés sont ils vrais ou faux ? Démontrer rigoureusement.

Exercice 4. Donner un système de deux équations linéaires caractérisant les points du plan de $\mathbb{R}^4$ passant par $P_0 : (1,0,-1,0)$ et dirigé par le sous-espace engendré par les vecteurs

$$U = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

3. Révisions et approfondissement

Exercice 5. Donner une représentation sous forme paramétrique et une équation de la droite $\mathcal{D}_1$ du plan passant par les points $A_1\,(0,-1)$ et $A_2\,(1,2)$ et de la droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à $\mathcal{D}_1$ passant par $B\,(-1,0)$.

Exercice 6. Montrer que le sous-espace affine dirigé par le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et passant par $(1,1,1)$ est le plan d'équation $x + 2y + z = 4$.

Défi. On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2 x + (2m-1)y + mz = 3$$

Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant à tous les plans P_m.