Le calcul des séquents pour la logique propositionnelle

Notes de cours - M. Leclère

1 Les objets manipulés par le calcul des séquents LK_0

1.1 Les séquents

On a des **séquents** qui représentent des disjonctions de conclusion $C_1, C_2, \dots C_n$ formulées sous une conjonction d'hypothèses $H_1, H_2, \dots, H_k$. Chaque énoncé, qu'il soit conclusion ou hypothèse, est une formule bien formée de la logique des propositions. On représente un séquent en séparant les hypothèses et conclusions par le symbole $\vdash$. Par exemple : $(a \vee b), \neg c \ \vdash \ \neg(a \Rightarrow c), (b \wedge \neg c)$ signifie : *"j'affirme que $\neg(a \Rightarrow c)$ ou $(b \wedge \neg c)$ sous les hypothèses $(a \vee b)$ et $\neg c$".*

1.2 Les schémas de séquent

On utilise également des **schémas de séquent** qui sont comme des filtres qui sélectionnent les séquents répondant à certains critères. En fait un schéma de séquent défini un langage : l'ensemble de tous les séquents qui respectent ce schéma. Un schéma de séquent est donné sous la même forme générale qu'un séquent (un ensemble d'énoncés hypothèses suivi du symbole $\vdash$ et d'un ensemble d'énoncés conclusions), mais les différents énoncés ne sont pas directement des formules bien formées de la logique des propositions, mais plutôt des contraintes sur les formules (voire les ensembles de formules) qu'ils représentent.

Ainsi, dans un schéma de séquent on a deux types de **variables** :

— les lettres grecques Γ (Gamma) ou Δ (Delta) qui peuvent être remplacéee par n'importe quel ensemble (y compris l'ensemble vide) de formules bien formées de la logique des propositions,

— les lettres majuscules P ou Q qui peuvent être remplacées par n'importe quelle formule bien formée de la logique des propositions,

— les connecteurs et constantes logiques ne peuvent pas être remplacés.

On dit qu'un séquent S est reconnu par un schéma de séquent SS, quand il existe une substitution s des variables du schéma SS par des (ensembles de) formules du séquent S tel que $s(SS) = S$, c'est-à-dire qu'en appliquant ce remplacement sur le schéma SS on produit le séquent S.

Exemple le schéma $\Gamma \vdash \Delta, P \wedge Q$ reconnait les séquents :

1. $a \vdash b, c \wedge d$
2. $a, b \vee c \vdash a \wedge (e \Rightarrow (c \vee a))$
3. $\vdash a \wedge b$
4. $a \wedge b \vdash c, d \Rightarrow a, \neg c, a \wedge b$
5. $a \wedge b \vdash \neg c \wedge b, (b \Rightarrow c) \wedge d, e \vee a$

Notons, avec le séquent 5, que l'ordre des formules hypothèses et propriétés n'a pas d'importance et que certains séquents ont plusieurs façons d'être reconnus par un schéma. Par exemple, sur ce séquent Γ ne peut être remplacé que par $a \wedge b$, mais on a deux choix pour les autres variables :

— soit Δ est remplacé par $(b \Rightarrow c) \wedge d, e \vee a$, P rempalcé par $\neg c$ et Q remplacé par b,

— soit Δ est remplacé par $\neg c \wedge b, e \vee a$, P remplacé par $(b \Rightarrow c)$ et Q remplacé par d.

Par contre le schéma ne reconnait pas les séquents :

1. $a \vdash b, c \vee d$
2. $a, b \vee c \vdash$
3. $b \wedge c \vdash a \Rightarrow (c \wedge b)$

2 Les règles d'inférence

On dispose d'un ensemble de **règles d'inférences** qui permettent de dériver de nouveaux séquents à partir de séquents existants. Ces règles sont formulées en utilisant des schémas de séquent. Ces règles sont données sous la forme de "fraction" où la partie "numérateur" contient un ensemble de schémas de séquents, les séquents **antécédents**, hypothèses et la partie dénominateur "contient" un unique schéma de séquent appelé le **conséquent**.

Exemple La règle du $\wedge$ à gauche du conséquent notée $\wedge_{\mathsf{g}}$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash \Delta} \wedge_{\mathsf{g}}$$

Cette règle contient un seul séquent antécédent $\Gamma, P, Q \vdash \Delta$ et le séquent conséquent $\Gamma, P \wedge Q \vdash \Delta$.

Attention, lors de l'utilisation d'une règle, une même variable doit être remplacée par la même formule (ou le même ensemble de formules) dans tous les schémas de séquents de la règle.

2.1 Utilisation d'une règle

Pour appliquer une règle à un séquent il faut que ce séquent soit reconnu par le conséquent de la règle. L'application consiste alors à produire les séquents obtenus à partir des antécédents de la règle en utilisant les mêmes remplacements de variables que pour le conséquent. Les règles s'appliquent donc de bas en haut (du dénominateur vers le numérateur).

Exemple Si l'on cherche à appliquer la règle $\wedge_{\mathsf{d}}$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P \qquad \Gamma \vdash \Delta, Q}{\Gamma \vdash \Delta, P \wedge Q} \wedge_{\mathsf{d}}$$

au séquent

$$a \wedge b \vdash \neg c \wedge b, (b \Rightarrow c) \wedge d, e \vee a$$

selon les remplacements Γ par $a \wedge b$, Δ par $\neg c \wedge b, e \vee a$, P par $(b \Rightarrow c)$ et Q par d, on produit les deux séquents correspondant aux deux schémas antécédents :

$$a \wedge b \vdash \neg c \wedge b, (b \Rightarrow c), e \vee a$$

$$a \wedge b \vdash \neg c \wedge b, d, e \vee a$$

Notation Il est d'usage de présenter cette application de règle par une fraction (étiquetée par le nom de la règle) dont le dénominateur contient le séquent sur lequel la règle est appliquée et le numérateur contient les séquents produits :

$$\frac{a \wedge b \vdash \neg c \wedge b, (b \Rightarrow c), e \vee a \qquad a \wedge b \vdash \neg c \wedge b, d, e \vee a}{a \wedge b \vdash \neg c \wedge b, (b \Rightarrow c) \wedge d, e \vee a} \wedge_{\mathsf{d}}$$

2.2 Les règles d'inférence du système LK_0

LK ("klassische prädikatenlogik") est un système de déduction introduit par Gentzen qui formalise la logique classique du premier ordre. Dans le cadre de ce cours, on se limite à LK_0 qui n'introduit qu'un sous-ensemble des règles du système LK permettant de traiter la logique classique des propositions.

On a trois types de règles :

— Les règles axiomatiques qui n'ont pas de séquent antécédent (la partie numérateur), on les appelle des **axiomes**. L'application de ces règles ne produit pas de nouveaux séquents. Il y a 3 axiomes dans le système LK_0 ;

— Les règles qui ont un seul antécédent, on les appelle les règles de **type** α. Il y en a 5 dans le système LK_0 ;

— Les règles qui ont deux antécédents, on les appelle les règles de **type** β. Il y en a 5 dans le système LK_0.

En dehors des 3 règles axiomatiques, il y a deux règles par connecteur : une pour le cas où le connecteur c apparait en partie gauche du conséquent notée c_{g} et une pour le cas où le connecteur apparait en partie droite du conséquent notée c_{d}. Chaque règle analyse les conditions qui porte sur les opérandes du connecteur pour que le conséquent soit démontré. Par exemple, la règle $\wedge_{\mathsf{g}}$ dit que pour prouver Δ sous les deux hypothèses Γ et $P \wedge Q$, il suffit de prouver Δ sous les trois hypothèses Γ, P et Q. Ce qui correspond bien à la sémantique du $\wedge$.

Voici les 13 règles :

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash \Delta, P}\ ax \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta \qquad \Gamma, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \vee Q \vdash \Delta}\ \vee_{\mathsf{g}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\mathsf{d}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P, Q}{\Gamma \vdash \Delta, P \vee Q}\ \vee_{\mathsf{d}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\mathsf{g}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P \qquad \Gamma, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash \Delta}\ \Rightarrow_{\mathsf{g}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P}{\Gamma, \neg P \vdash \Delta}\ \neg_{\mathsf{g}} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta, Q}{\Gamma \vdash \Delta, P \Rightarrow Q}\ \Rightarrow_{\mathsf{d}}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg P}\ \neg_{\mathsf{d}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, P, Q \qquad \Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \Leftrightarrow Q \vdash \Delta}\ \Leftrightarrow_{\mathsf{g}}$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash \Delta}{\Gamma, P \wedge Q \vdash \Delta}\ \wedge_{\mathsf{g}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, P \qquad \Gamma \vdash \Delta, Q}{\Gamma \vdash \Delta, P \wedge Q}\ \wedge_{\mathsf{d}} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta, Q \qquad \Gamma, Q \vdash \Delta, P}{\Gamma \vdash \Delta, P \Leftrightarrow Q}\ \Leftrightarrow_{\mathsf{d}}$$

3 Les démonstrations

Réaliser une preuve d'un séquent consiste à enchaîner des applications de règles jusqu'à qu'il n'y ait plus de séquents à démontrer ou de règles applicables. Etant donné un ensemble $\mathcal{E}$ de séquents contenant initialement le séquent que l'on cherche à démontrer, on itère les pas suivants :

1. choisir un séquent S dans l'ensemble $\mathcal{E}$;
2. choisir une règle R pouvant s'appliquer sur ce séquent S ;
3. si aucune règle ne s'applique sur ce séquent alors `Echec` (le séquent initial n'admet pas de démonstration) ;
4. sinon
   (a) choisir une application de R sur S (cas où le schéma du conséquent de R permet différente reconnaissance de S) ;
   (b) supprimer le séquent S de $\mathcal{E}$;
   (c) ajouter à $\mathcal{E}$ les séquents produits par l'application de R sur S ;
5. si $\mathcal{E}$ est vide alors `Succès` (on a une démonstration du séquent initial) ;
6. sinon itérer à l'étape 1.

On observera que cet algorithme est triplement indéterministe : on laisse le choix du séquent S à prendre dans $\mathcal{E}$, on laisse le choix de la règle R à appliquer sur le séquent, on laisse le choix de l'application de la règle R sur S. Cela signifie donc qu'un séquent peut admettre plusieurs preuves.

Notation Il est d'usage de présenter une telle preuve par un arbre d'applications de règles (donc de fractions) dont la racine, que l'on place en bas, a pour dénominateur le séquent à démontrer et les feuilles (se trouvant en haut) ont des numérateurs vides (elles correspondent donc à des applications d'axiomes).

Définition Un séquent est **démontré** quand on arrive à produire une preuve qui termine sur `Succès`. Cette preuve constitue une **démonstration** du séquent. Un séquent qui admet une démonstration est aussi appelé un **théorème**.

Exemple Voici une démonstration du séquent $a \vdash \neg(a \Rightarrow b), b \wedge (c \vee a)$ obtenue, de bas en haut, en appliquant d'abord la règle $\neg_\mathsf{d}$, puis la règle $\Rightarrow_\mathsf{g}$ et en appliquant la règle ax sur le séquent de gauche et les règles $\wedge_\mathsf{d}$ qui crée à nouveau 2 branches et ax pour l'un puis $\vee_\mathsf{d}$ et ax pour l'autre :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a \vdash a, b \wedge (c \vee a)}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{a, b \vdash b}\,\mathsf{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{a, b \vdash c, a}\,\mathsf{ax}}{a, b \vdash c \vee a}\,\vee_\mathsf{d}}{a, b \vdash b \wedge (c \vee a)}\,\wedge_\mathsf{d}}{a, a \Rightarrow b \vdash b \wedge (c \vee a)}\,\Rightarrow_\mathsf{g}}{a \vdash \neg(a \Rightarrow b), b \wedge (c \vee a)}\,\neg_\mathsf{d}$$

4 Adéquation de la méthode des séquents

La propriété d'adéquation d'un système de preuve à une sémantique énonce que tout ce que permet de démontrer le système correspond à une notion sémantique particulière entre les énoncés du séquent (on parle de correction) et que dès que cette notion sémantique particulière est avérée entre énoncés alors le séquent correspondant est démontrable (on parle de complétude).

Nous démontrons ici que les séquents démontrables par $\mathcal{LK}_0$ correspondent à des conséquences logiques. Pour cela nous énonçons d'abord trois propriétés sur les règles du système. Leur preuve sera vue en TD.

Propriété 1. Pour toute règle axiomatique, le séquent conclusion de la règle correspond à une conséquence logique.

Propriété 2. Pour toute règle, si les séquents antécédents de la règle correspondent à des conséquences logiques alors le séquent conclusion correspond à une conséquence logique.

Propriété 3. Pour toute règle, si le séquent conclusion de la règle correspond à une conséquence logique alors les séquents antécédents correspondent à des conséquences logiques.

Théorème 1 (Correction)**.** Si $H_1, H_2, \ldots, H_k \ \vdash \ C_1, C_2, \ldots C_n$ est un théorème du système $\mathcal{LK}_0$ alors $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\} \ \models \ C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$.

Démonstration. On prouve le théorème de correction par induction sur la hauteur $h \geq 1$ de l'arbre de preuve (hauteur = longueur du plus long chemin de la racine à une feuille).

(base) Si $h = 1$ alors la seule règle appliquée est une règle axiomatique. Par la propriété 1 le séquent correspond à une conséquence logique.

(induction) Supposons que tout séquent démontré par un arbre de preuve de hauteur h, avec $1 \leq h \leq n$, corresponde à une conséquence logique. Démontrons alors qu'un séquent démontré par un arbre de hauteur $n + 1$ correspond à une conséquence logique. Soit R la première règle appliquée à la racine pour prouver le séquent. Les séquents antécédents sont donc démontrés par un arbre de preuve de hauteur $h \leq n$ et donc par hypothèse d'induction correspondent à des conséquences logiques. Par la propriété 2, le séquent conclusion correspond donc lui aussi à une conséquence logique.

$\square$

Théorème 2 (Complétude)**.** Si $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\} \models C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$ alors le séquent $H_1, H_2, \ldots, H_k \vdash C_1, C_2, \ldots$ est un théorème.

Idée de la démonstration. On définit une notion de nombre de connecteurs d'un séquent. Puis on procède par récurrence sur ce nombre en s'appuyant sur la propriétés 1 et 3. □

Corollaire. Utilisation de la méthode des séquents :

1. $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\} \models C$ si et seulement si le séquent $H_1, H_2, \ldots, H_k \vdash C$ est un théorème.
2. F est valide si et seulement si le séquent $\vdash F$ est un théorème.
3. F est insatisfiable si et seulement si le séquent $F \vdash$ est un théorème.

Un outil, développé par des étudiants de L3, permet de faire des preuves de validité de formule à l'aide du système LK_0. Vous pouvez le télécharger sur le Moodle du cours.