HLMA 203
Polynômes

I Définitions :

→ $\mathbb{K} = \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$

→ Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :
$\forall x \in \mathbb{K}, \; P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0$.

Exemple :

> $x + \frac{1}{x}$ n'est pas un polynôme car ce n'est pas une fonction de $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ car elle n'est pas définie en 0.

> $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$ donc c'est un polynôme.

Définitions :

→ Le nombres $a_0, a_1, \dots a_n$ s'appellent les coefficients de P.

→ Le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que a_k existe s'appelle le degré de P.

⇒ Le coef a_k s'appelle coefficient dominant

→ Les polynômes sont des fonctions qu'on peut fabriquer avec les opérateurs + et × utilisé un nombre fini de fois.

Polynômes 2

Théorème :

> Un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls

> Deux polynômes sont égaux ssi tous leurs coefficients sont égaux.

II Opérations sur les Polynômes

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ des polynômes.

Alors $P+Q$ est une fonction tel que $x \mapsto P(x)+Q(x)$

et $P.Q$ est une fonction tel que $x \mapsto P(x).Q(x)$

→ Ces fonctions sont bien définis, mais sont-elles des Polynômes ?

1) Somme de Polynômes

Preuve :

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$

Alors, $P(x)+Q(x) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k$

Donc $P+Q$ est bien un polynôme de coefficients $a_k + b_k$ pour $k = [0, \dots, \max(n,m)]$.

Exemple : $P(x) = X^3 + X^2 - 1$; $Q(x) = X+2$

$P(x) + Q(x) = X^3 + X^2 + X + 1$.

⚠ Le coefficient dominant d'une somme n'est pas la somme des coefficients dominants.

Cependant, le coefficient de degré k pour $k \in \mathbb{N}$ est égale à la somme des coefficients de degré k.

Exemple :

$P(x) = X^3 + X^2 - 1$ $\begin{cases} \text{coef dominant} = 1 \\ a_0 = -1 \,;\, a_2 = 1 \,;\, a_3 = 1 \,;\, a_1 = 0 \end{cases}$

$Q(x) = 2X^2 + X + 2$ $\begin{cases} \text{coef dominant} = 2 \\ a_0 = 2 \,;\, a_1 = 1 \,;\, a_2 = 2 \,;\, a_3 = 0 \end{cases}$

$P(x) + Q(x) = X^3 + 3X^2 + X + 1$ $\begin{cases} \text{coef dominant} = 1 \neq 1 + 2 \\ a_0 = 1\,(2-1) \,;\, a_1 = 1\,(1+0) \\ a_2 = 3\,(2+1) \,;\, a_4 = 1\,(1+0) \end{cases}$

2) Produits de Polynômes

Preuve :

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$

Alors, $P(x) \cdot Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Propriété : $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, $\deg(P.Q) = \deg P + \deg Q$

Polynômes 4

Exemple :

Soit $P(x) = X^3 + X^2 - 1$ et $Q(x) = X + 2$

$(P.Q)(x) = (X^3 + X^2 - 1)(X+2)$

$= X^4 + 3X^3 + 2X^2 - X - 2$

$c_4 = 1 = \sum_{i=0}^{4} a_i b_{4-i}$

$= a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0$

$= -1 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 2$

$= 1$

$c_3 = \ldots$

$c_2 = \ldots$

$c_1 = \ldots$

$c_0 = \ldots$

⚠ Le coefficient dominant d'un produit est le produit des coefficients dominants.

Ex : Degré (P) = n ; Degré (Q) = m

→ Degré (P.Q) = n . m

Propriétés :

> Commutativité : $P + Q = Q + P$
$P.Q = Q.P$

> Associativité : $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
$P.(Q.R) = (P.Q).R$

→ Permet d'écrire : $P + Q + R$ et $P.Q.R$

> Distributivité : $P.(Q + R) = P.Q + P.R$

> Symétrie : $P + (-P) = 0$

3) Division de Polynômes

Soit P et Q des polynômes avec $Q \neq 0$

Ainsi, on dira que Q divise P (noté $Q \mid P$)

que Q est un diviseur de P

que P est un multiple de Q.

S'il existe un polynôme R tel que $P = Q.R$

<u>Exemple :</u> $X \nmid X+1$ mais $X \mid X^2 + X$

puisque $X^2 + X = X(X+1)$

<u>Théorème :</u>

$\forall P_1$ et $P_2 \in \mathbb{K}[x]$ avec $P_2 \neq 0$, il existe un unique couple de polynômes Q et $R \in \mathbb{K}[x]$ avec $\deg(R) < \deg(P_2)$ tel que $P_1 = (P_2 . Q) + R$

<u>Méthode :</u>

Divisons $X^2 + 3X + 2$ par $X+1$

$$
\begin{array}{r|l}
X^2 + 3X + 2 & X+1 \\
\cline{2-2}
-(X^2 + X) \quad & X + 2 \\
\cline{1-1}
2X + 2 & \\
-(2X + 2) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$\rightarrow X^2 + 3X + 2 = (X+1)(X+2) + 0$

4) PGCD de deux polynômes

Définitions :

> Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

Exemple : $x^2 + 2x + 1$ est unitaire

$2x^2 + x + 1$ n'est pas unitaire

> Le plus grand commun diviseur (PGCD) de deux polynômes non nuls P et Q est le diviseur commun unitaire de plus haut degré de P et Q.

Théorème : Algorithme d'Euclide

Soit P_0 et P_1 deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[x]$,

soit : $P_0 = P_1 . Q_0 + P_2$ (division Euclidienne de P_0 par P_1)

$P_1 = P_2 . Q_1 + P_3$ // //

. . .

On construit ainsi une suite de polynômes de degrés strictements inférieurs décroissants, donc cette suite est forcément finie. PGCD(P_1, P_0) est le dernier terme non-nul de la suite, divisé par son coefficient dominant (le PGCD est unitaire).

Exemple : Soit $P_0(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $P_1(x) = x^2 + 2x + 1$

$$\begin{array}{r|l} \overset{P_0}{x^3 + x^2 + x + 1} & \overset{P_1}{x^2 + 2x + 1} \\ \hline -(x^3 + 2x^2 + x) & x - 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ +(x^2 + 2x + 1) & \\ \hline P_2 \quad 2x + 2 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r|l} \overset{P_1}{x^2 + 2x + 1} & 2x + 2 \\ \hline -(x^2 + x) & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \hline x + 1 \quad P_3 & \\ -x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Polynôme 7

Le dernier reste non-nul est donc $P_3 = X + 1$

$\rightarrow PGCD(P_0, P_1) = X + 1$ (P_3 divisé par son coeff dominant)

Théorème de Bezout

Soit P et $Q \in \mathbb{K}[x]$ et D leur PGCD

Alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[x]$ premiers entre eux.

tels que $UP + VQ = D$

Exemple :

$$P(x) = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
$$Q(x) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

$$\begin{array}{r|l} X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 & X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\ -(X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3) & X^3 \\ \hline X^2 + X + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 & X^2 + X + 1 \\ -(X^4 + X^3 + X^2) & X^2 \\ \hline X + 1 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & X + 1 \\ -(X^2 + X) & X \\ \hline 1 & \end{array}$$

1 PGCD

$$P(x) = Q(x) . X^3 + \boxed{X^2 + X + 1}$$
$$Q(x) = (X^2 + X + 1) . X^2 + \boxed{X + 1}$$
$$X^2 + X + 1 = (X + 1) . X + 1$$

$$\Rightarrow 1 = X^2 + X + 1 - \boxed{(X+1)} . X$$
$$= X^2 + X + 1 - X . (Q(x) - X^2 . (X^2 + X + 1))$$
$$= -X . Q(x) - \boxed{(X^2 + X + 1)} (1 - X^3)$$

$$= -X \cdot Q(x) + (1+X^3) \cdot (P(x) - X^3 \cdot Q(x))$$
$$= (1+X^3) \cdot P(x) + Q(x) \cdot (-X - X^3(1+X^3))$$

$\rightarrow U = 1+X^3 \qquad V = -X - X^3 \cdot (1+X^3)$
$$= -X^6 - X^3 - X$$

Propriété :

Soit $PPCM(P, Q)$ le plus petit commun multiple de P et Q.

$$PPCM(P, Q) \times PGCD(P, Q) = P \times Q$$

Définition :

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est premier ssi :
- il est unitaire
- Et ses deux seuls diviseurs unitaires sont 1 et P.

Théorème fondamental de l'algèbre :

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$ de degré non nul, $\exists !\, \lambda(P) \in \mathbb{K}$ (λ étant le coefficient dominant de P), un unique ensemble de n polynômes premiers $P_1, P_2 \dots P_n$ et un unique ensembles d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que
$$P = \lambda(P) \cdot (P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n)$$

Les polynomes premiers sont :
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les polynomes de degré 1
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les polynomes de degré 1 ou pour lesquels $\Delta < 0$.

$\Rightarrow$ Tout polynôme de degrée > 1 possèdent au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Propriété :

Tout polynôme P non-premier se décompose :

- Sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots \times Q(x)$$

- Sur $\mathbb{C}$ de la forme :

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\ldots \times (x - c_1)(x - c_2)\ldots$$

Avec r_i les racines réels et c_i les racines complexes.

Exemples:

1) Soit le polynôme $X^3 + 1$ avec -1 comme racine évidente.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 1 & X+1 \\ -(X^3 + X^2) & \overline{X^2 - X + 1} \\ \hline -X^2 + 1 & \\ -(-X^2 - X) & \\ \hline X + 1 & \\ -(X+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

→ Sur $\mathbb{R}$:

$$X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1)$$

→ Sur $\mathbb{C}$:

$$X^3 + 1 = (X+1)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Trouvons les racines dans $\mathbb{C}$ grâce à $Q(x) = X^2 - X + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= -1^2 - 4 \times 1 \times 1$$
$$= -3$$

$$c_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \qquad c_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

2) Soit $P(x) = X^2 + 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= -8$$ → Pas de racine dans $\mathbb{R}$

$$c_1 = \frac{-i\sqrt{8}}{2} \qquad c_2 = \frac{i\sqrt{8}}{2}$$

→ Sur $\mathbb{R}$: Pas de décomposition

→ Sur $\mathbb{C}$:

$$X^2 + 2 = \left(X + \frac{i\sqrt{8}}{2}\right)\left(X - \frac{i\sqrt{8}}{2}\right)$$

4) Division suivant les puissances croissantes

Théorème :

Étant donné deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[x]$ avec $P_2(0) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'ordre souhaité ; il existe un couple de polynômes (R, Q) avec $\text{Degré}(Q) \leq n$ tels que :

$$P_1(x) = P_2(x)\, Q(x) + X^{n+1} R(x).$$

Pour obtenir cela, on réalise une division à l'ordre.

⚠ Différence avec la division ordinaire :
- Il y a un critère d'arrêt (n)
- On a une condition sur le degré du quotient
- Au lieu de $P_2 \neq 0$ on demande $P_2(0) \neq 0$.

Exemple :

$$\begin{array}{l|l} 1 + X + X^2 & 1 + X \\ -(1 + X) & 1 + X^2 - X^3 \\ \hline \quad X^2 & \\ \quad -(X^2 + X^3) & \\ \hline \quad -X^3 & \\ \quad -(-X^3 - X^4) & \\ \hline \quad X^4 & \end{array}$$

Ordre : 3

$\rightarrow 1 + X + X^2 = (1+X).(1+X^2-X^3) + X^4$

5) Développement de Taylor

Formule de Taylor : $f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \dfrac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \ldots$

$$+ f^{(n)}(a).\frac{(x-a)^n}{n!} + o(x^n)$$

avec $o(x^n)$ tel que $\lim\limits_{x \to a} o(x^n) \to 0$

Polynômes 11

Exemple :

Calculer le développement de Taylor de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 à l'ordre 3.

Or, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Et formule de Taylor de cos(x) à l'ordre 3 =

$$\cos(x) = \cos(0) + \cos'(0).x + \cos''(0).\frac{x^2}{2!} + \cos'''(0).\frac{x^3}{3!}$$
$$= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + o(x^3)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Et formule de Taylor de sin(x) =

$$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0).x + \sin''(0).\frac{x^2}{2!} + \sin'''(0).\frac{x^3}{3!}$$
$$= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} o(x^3)$$

Opérons une division par puissances croissante de sin(x) et cos(x) d'ordre 3

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} \\ \hline -\left(x - \frac{x^3}{2}\right) & x + \frac{x^3}{3} \\ \frac{x^3}{3} & \\ \ldots & \end{array}$$

(La suite ne nous intéresse pas)

→ le développement de Taylor de $x \mapsto \tan(x)$ est :

$$x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$