Dérivation

3

1 Définition

Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x. Dans son intervalle de définition, on définit la dérivée de $f(x)$ au point x_0 par la limite - si elle existe et si elle est finie :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.1}$$

Pour que cette limite existe, il faut qu'elle soit indépendante du signe de h, c'est à dire que les limites à droite ($h > 0$) et à gauche ($h < 0$) soient les mêmes. Par exemple, la fonction $|x|$ n'est pas dérivable au point $x = 0$ car pour $h > 0$ la limite (3.1) donne 1 alors que pour $h < 0$, elle donne -1. La limite dépend donc du signe de h en ce point, ce qui montre que la fonction n'est pas dérivable en $x = 0$. En revanche, $|x|$ est dérivable partout ailleurs.

La notation $f'(x)$ est due à Lagrange. Une autre notation de la dérivée d'une fonction f au point x_0 est celle de Leibniz : $\frac{df}{dx}(x_0)$. Celle-ci est très utilisée en science (notamment en physique). Elle rend bien compte du fait que la dérivée est un taux d'accroissement (accroissement de f, i.e. df, divisé par celui de x, dx).

2 Taux de variation, extrema...

La dérivée de la fonction f au point x_0 représente son *taux de variation* en ce point. On peut d'ailleurs donner une définition équivalente à l'expression (3.1) qui rend ce point plus apparent :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.2}$$

Plus la dérivée en $x = x_0$ est grande (en valeur absolue) plus la fonction f varie rapidement en ce point. Géométriquement, la dérivée représente aussi le coefficient directeur de la droite tangente en x_0 au graphe de $f(x)$, c'est à dire encore, la tangente de l'angle α que cette droite fait avec l'axe des abscisses (Ox) (voir Fig. 3.1).

On déduit de ce qui précède les propriétés suivantes importantes de la dérivée :

— Si $f'(x_0) > 0$, la fonction $f(x)$ est croissante au point x_0.
— Si $f'(x_0) < 0$, la fonction $f(x)$ est décroissante au point x_0.
— Si $f'(x_0) = 0$ et que $f'(x)$ change de signe lorsque x passe par la valeur x_0, la fonction $f(x)$ admet un extremum (minimum ou maximum) en x_0.

Cette dernière propriété est très importante puisque qu'elle permet de localiser rapidement les maxima ou minima d'une fonction dans un intervalle où celle-ci est dérivable. Il suffit de chercher les points où la dérivée de $f(x)$ s'annule et de calculer sa dérivée seconde en ces points. En effet, si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, f atteint un *minimum* en x_0 alors que si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, f

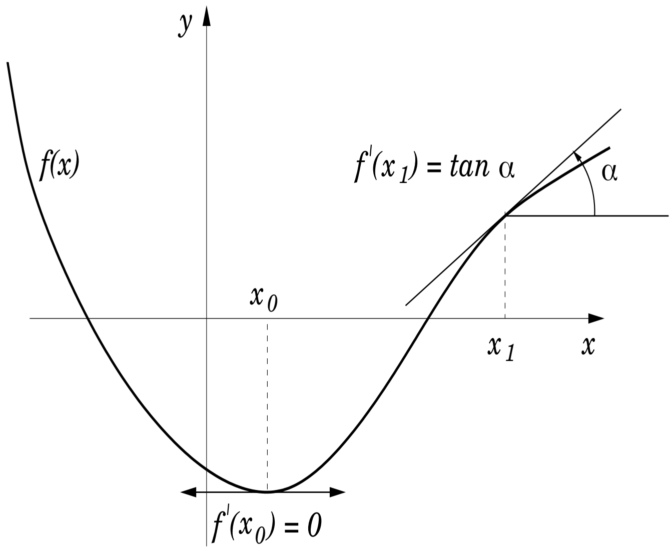

FIGURE 3.1 – *Relation entre dérivée et tangente. Minimum en x_0.*

atteint un *maximum* en x_0. Si $f''(x_0) = 0$, il est nécessaire d'étudier le changement de signe de $f'(x)$ lorsque x passe par x_0 [1].

3 Règles de dérivation

Le calcul de la dérivée d'une fonction s'effectue le plus souvent en décomposant son expression en fonctions plus "simples" et en utilisant quelques règles de calculs rappelées ci-après.

— **Linéarité** : Quels que soient (a, b) constants et $f(x)$ et $g(x)$ dérivables,

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$$

— **Produit** : Quels que soient $f(x)$ et $g(x)$ dérivables,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

— **Quotient** : Quels que soient $f(x)$ et $g(x)$ dérivables et $g(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

— **Composition** : Quels que soient $f(u)$, dérivable en $u = g(x)$ et $g(x)$, dérivable en x,

$$(f \text{ o } g)(x)' := (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Remarque : la dérivée des fonctions composées se retient bien à partir de la notation de Leibniz. En effet, si $k(x) = f(g(x))$ alors la règle de dérivation s'écrit :

$$\frac{dk}{dx}(x) = \frac{df}{dg}(g(x))\frac{dg}{dx}(x) \text{ ou, plus rapidement } \frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

1. Un exemple simple de telle fonction est $f(x) = x^3$. En effet, $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Mais $f''(0) = 0$. On ne peut conclure immédiatement. En fait, comme $f'(x) = 3x^2$ reste positif lorsque x passe par 0, $x = 0$ n'est pas un extremum de $f(x) = x^3$.

4 Dérivées des fonctions courantes

Fonctions	Dérivées	Domaine
x^ν	$\nu x^{\nu-1}$	$x \in \mathbb{R}^{+*},\ \nu \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0,\ x \in \mathbb{R}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$	$x \in \mathbb{R}$

TABLE 3.1 – Dérivées usuelles. Le domaine de définition indiqué est celui de la fonction dérivée. Remarque : pour trouver la primitive d'une fonction usuelle, il suffit de lire le tableau à l'envers. . . et ne pas oublier qu'une primitive est définie à une constante près !

Ce tableau permet donc, avec la règle de dérivation des fonctions composées, de calculer entre autres les dérivées d'exponentielle, puissance ou logarithme de fonctions dérivables. Ainsi, par exemple, si $g(x) = \exp(f(x))$, alors $g'(x) = \exp(f(x))f'(x)$, etc...

24 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Dérivez les fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^2 - x + 1\ ;\ g(x) = \frac{1+x}{1-x}\ ;\ k(x) = e^{x^2}\ ;\ l(x) = 2^x\ ; m(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

25 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2}$. Déterminer la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

26 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Déterminez une primitive des fonctions suivantes :

1. *Forme uu' :*

$$f(x) = 3(3x+1)^4 \ ; \ g(x) = (2x+7)^6 \ ; \ h(x) = \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4 \ ; \ k(x) = \sin x \cos x$$

2. *Forme $\frac{u'}{u}$:*

$$f(x) = \frac{-1}{(2-x)^2} \ ; \ g(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \ ; \ h(x) = \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$$

27 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1. *Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$.*
2. *En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$.*

28 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Un constructeur cherche à construire une maison rectangulaire de surface au sol maximale sur un terrain en forme de triangle rectangle comme l'indique la Fig. 5.2. Les dimensions du terrain et de la maison sont indiquées sur la figure 4.

1. *Quelle est la surface A du terrain en fonction de H et L ?*
2. *Montrez que la surface au sol de la maison, S, peut s'écrire*

$$S = \frac{H}{L}a(L-a)$$

3. *En déduire la valeur a^* de a qui rend S maximale ainsi que la valeur b^* correspondante.*
4. *Quel pourcentage de la surface du terrain la surface au sol de la maison couvre-t-elle ?*

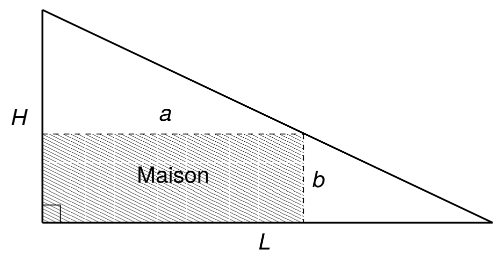

FIGURE 3.2 – Terrain et maison

29 Exercice

⋆ Corr. p. ??

Pour des raisons de coût, on cherche à minimiser la surface totale d'un récipient cylindrique dont le volume est fixé. On appelle h la hauteur de ce cylindre et r le rayon de sa base.

1. *Exprimez le volume V et la surface totale S (surfaces de base + surface latérale) du cylindre présenté en Fig. 5.3 en fonction de r et h.*
2. *Le volume V étant fixé (constant), exprimez h en fonction de V et r et utilisez cette relation pour exprimer S en fonction de V et r uniquement.*
3. *En déduire les dimensions, h_m, r_m et la surface S_m du cylindre de surface minimale. Quel est le rapport entre la hauteur h_m et le rayon r_m ?*
4. *Le volume choisi vaut $V = 2\pi \simeq 6,28...$ litres. Que valent h_m et r_m (en cm) et S_m (en cm^2) ?*
5. *Si au lieu d'avoir choisi un récipient cylindrique, on avait choisi un récipient cubique de même volume V, la surface totale de ce dernier aurait-elle été plus petite ou plus grande que celle du cylindre ? Même question pour une sphère de même volume.*

4.1 Formule de Taylor

Si une fonction est n fois dérivable au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$ alors,

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = & f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) \\ & + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R(x). \end{aligned}} \tag{3.3}$$

Le reste $R(x)$ est tel que $R(x)/(x-a)^n$ tend vers 0 lorsque $x \to a$.

Cette formule est très importante puisqu'elle permet de connaître le comportement d'une fonction autour d'un point a grâce aux dérivées de la fonction en ce point. Elle permet d'effectuer un *développement limité* en $x = a$, c'est à dire d'approximer $f(x)$ par un polynôme en a.

Donnons quelques exemples. Comme $\exp x$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut la développer en $x = 0$ et obtenir

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{3.4}$$

De même, pour la fonction $\cos x$, en développant autour de $x = 0$, on obtient

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.5}$$

5 Dérivée partielle

5.1 Définition

La notion de dérivée peut s'étendre au cas de fonctions de plusieurs variables, par exemple aux fonctions du type $f(x, y)$. On appelle alors dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à la variable x le taux d'accroissement de f en un point (x_0, y_0) lorsque x varie et que y reste constant (et donc égal à y_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.6}$$

De même, la dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à y au point (x_0, y_0) est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{3.7}$$

Les dérivées partielles de $f(x, y)$ donnent donc une idée de la manière dont cette fonction varie lorsque toutes les variables sont fixées sauf celle qui est précisément indiquée dans la notation de la dérivée partielle : par exemple, $\frac{\partial f}{\partial x}$ indique que seul x est sensé varier dans le calcul du taux d'accroissement de f.

5.2 Exemples

Prenons l'exemple de $f(x, y) = xy^2 + y + 1$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 1$$

Pour la première dérivation, nous avons considéré que y est une constante dans la mesure où x est la variable par rapport à laquelle la dérivation s'effectue. Les termes y^2, y et 1 sont donc des "constantes", d'où le résultat. En revanche, dans la dérivation partielle par rapport à y, c'est x et 1 qui sont considérés comme "constants" et y comme variable. Donc $\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = x\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2xy$, etc...

30 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Calculer les dérivées partielles par rapport à x et y des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 y^3$
2. $f(x, y) = \cos(xy)$
3. $f(x, y) = e^{x \sin y} + x + 1$
4. $f(x, y) = x^y$

6 Exercices Facultatifs

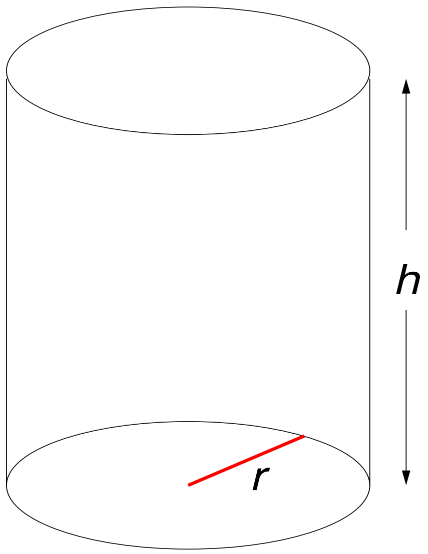

FIGURE 3.3 – Cylindre de hauteur h et de rayon de base r.

31 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Dans le cas où néglige les frottements sur l'air, les équations horaires du mouvement d'un projectile (ponctuel) lancé depuis le sol ($z = 0$) avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec le sol sont données par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \\ x & = & v_0 t \cos\alpha \end{array} \right.$$

Le paramètre $g \simeq 10\ m.s^{-2}$ est la constante de la gravitation.

1. *Ecrivez la trajectoire du projectile sous la forme $z = f(x)$.*
2. *Montrez que la portée, L, du tir (distance parcourue par le projectile avant de retomber sur le sol) est donnée par*
$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$
3. *Déduisez-en l'angle de tir α_M qui rend la portée maximale ainsi que la valeur de cette portée, L_M.*
4. *Pour $\alpha = \alpha_M$, quelle doit être la vitesse initiale v_0 pour que la durée T de la trajectoire soit de 1 seconde ?*
5. *Toujours pour $\alpha = \alpha_M$, calculez la hauteur maximale z_M à laquelle monte le projectile en fonction de L_M.*

32 Exercice ⋆ Corr. p. ??

En utilisant la règle des fonctions composées dérivez $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}$, $x > 0$. *Vérifiez votre résultat en simplifiant d'abord la fonction et en la dérivant ensuite.*
Indication : La formule $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dk}\frac{dk}{dx}$ s'avère très utile dans ce cas précis. Trouvez les fonctions f, g, h et k appropriées !

33 Exercice ⋆ Corr. p. ??

En utilisant la formule de Taylor donner le développement de la fonction $\sin x$ autour de $x = 0$ jusqu'au terme d'ordre x^3 inclus. En déduire la limite

$$a = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$