Physique générale
HLPH101

Bertrand Plez
Coralie Weigel
Matthieu George

version du 10/09-2020

Avertissement :

Ce document regroupe les principaux éléments formant la base du cours de physique générale de L1S1 du portail Curie de la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier. Il ne remplace pas l'exposé fait en cours par les enseignants. Il sert de base pour la fixation des concepts abordés.

L'utilisation idéale que vous pouvez en faire consiste à étudier chaque chapitre *avant* qu'il soit abordé en cours par l'enseignant. Le cours sera ainsi beaucoup plus aisé à suivre, votre prise de note en sera grandement facilitée et vous aurez les bonnes questions déjà prêtes [1]. Nous pourrons ainsi nous concentrer sur les vraies difficultés. Vous retiendrez bien mieux les concepts abordés, et pour être pragmatique, réussirez beaucoup mieux les examens.

Faites et refaites tous les calculs, et tentez de résoudre les exercices d'application ou exemples proposés en fin de chaque chapitre sans regarder les solutions. Essayez seul, essayez à plusieurs, essayez plusieurs fois. N'attendez pas que tout vous tombe dans le bec !

Ces notes sont basées sur les notes de cours de son auteur, ainsi que l'ensemble des documents produits par les enseignants de cette UE, en particulier Matthieu George, Thierry Taliercio et Jérôme Dorignac. La partie sur les vecteurs est un diaporama qui a été produit dans le cadre de l'UE de Physique expérimentale de L1S1, aux alentours de 2005, par un auteur devenu anonyme.

1. Des figures viendront enrichir ce document en cours de semestre, mais en allant aux CM vous aurez toutes les figures nécessaires pour tout comprendre ! !

Introduction

La physique aujourd'hui décrit un univers varié et complexe, des particules aux étoiles, et à l'univers dans son ensemble. Elle nous permet d'étudier la structure des protéines et leur repliement, elle permet la modélisation du climat. Elle est présente partout dans la technologie, des chauffe-eaux aux téléphones portables. Après un 19e siècle triomphaliste où la physique classique basée sur des concepts mécanistes prétendait tout expliquer, sont arrivées les révolutions du 20e siècle : mécanique quantique, relativité, ... La physique montre alors que le déterminisme ne permet pas toujours la prédiction de l'exact état futur d'un système. La physique reste une science en évolution, en construction permanente. Elle se construit sur l'expérience, la modélisation, la simulation numérique et le développement théorique. Nous allons voir ici quelques éléments de base qui vous seront nécessaires pour bien entrer dans votre cursus universitaire. La plupart des notions sont ici empruntées à la mécanique classique, et restent cantonnées à des systèmes très simples d'une seule particule, et des mouvements dans le plan. Deux chapitres traitent de la démarche scientifique, de la notion de modèle, et de la mesure et des incertitudes qui y sont associées. Ces chapitres sont particulièrement importants, et ont des applications bien au delà du domaine de la physique. Enfin l'ensemble de ce cours vous permet une mise à niveau en mathématiques sur les concepts de vecteurs, dérivation, intégration, ... Même si vous ne vous destinez pas à des études de physique, vous pouvez tirer de nombreux bénéfices de ce cours. A vous de vous en emparer !

Chapitre 1

Statique des forces

1.1 Concept de force

Une approche pour modéliser l'action d'un système [1] sur un autre utilise le concept de force [2]. La force est l'action exercée par un système sur un autre et qui peut conduire à un changement de l'état de mouvement de celui-ci. Ainsi une brique posée sur une table horizontale reste immobile si elle n'est soumise qu'à la force de gravitation de la Terre qui l'attire vers le bas, et à l'interaction avec la table qui l'empêche de passer au travers. Si on rajoute une force horizontale, en poussant avec notre main par exemple, on peut si la poussée est suffisante mettre la brique en mouvement. Une force peut aussi conduire à la déformation d'un objet, comme dans le cas d'une ressort ou d'un élastique sur lequel on tire, ou d'une planche qui ploie sous un poids. La déformation de l'objet peut être décrite en utilisant des forces internes, d'interaction entre les molécules qui le composent par exemple. La mécanique des solides traite de ces aspects, mais nous laisserons les forces internes de côté ici, à l'exception des manifestation de celles-ci qui sont la tension d'un fil ou d'un ressort.

1.2 Point matériel

Nous traiterons ici uniquement de la mécanique du point. L'objet étudié est modélisé par un point. C'est à dire que le caillou, la planète ou le skieur sont assimilés à un point, affecté d'une masse : un point matériel. On voit immédiatement qu'on ne pourra pas traiter les rotations de l'objet étudié.

1. un système est ici un objet physique, tel une particule, un caillou, un ressort, une planète, qu'on isole de façon un peu artificielle du reste de l'univers. On peut parler aussi de corps, ou plus précisément ici de point matériel (voir plus loin)

2. Ce n'est pas la seule approche. La mécanique analytique utilise la notion d'énergie, dans le Lagrangien et l'Hamiltonien, et permet de résoudre les mêmes problèmes. C'est elle qui est à la base du formalisme de la mécanique quantique

On sera limité au mouvement de son centre de masse. On peut bien sûr généraliser ce que nous allons voir à des objets dotés d'un certain volume. Il faut alors ajouter le concept de moment cinétique qui permet de tenir compte de la rotation.

1.3 Représentation et addition des forces

L'outil mathématique utilisé pour représenter les forces est le vecteur. Ceci est naturel, car comme on le voit sur les exemples cités plus haut, une force agit dans une certaine direction, un sens [3], et avec une certaine intensité. On peut aussi souvent définir un point d'application, au moins de façon formelle. Si j'appuie avec mon doigt sur un objet, la force de contact s'applique au point où mon doigt touche l'objet. Dans le cas de la brique posée sur la table, la notion de point d'application perd de sa pertinence, on parle plutôt de surface de contact. Enfin pour la force de gravitation agissant sur la brique, elle est due à l'interaction de chaque particule de la brique avec chacune des particules de la Terre, et donc elle est répartie dans l'ensemble du volume de la brique. On peut cependant montrer dans ce cas que le point d'application effectif est le barycentre (le centre de gravité) de la brique [4]. Une autre justification de l'utilisation des vecteurs pour décrire les forces est que si deux forces agissent sur un système, on peut montrer expérimentalement que leur effet cumulé peut être calculé en utilisant la règle du parallélogramme. Nous modéliserons donc chaque force par un vecteur de norme l'intensité de la force, et de direction et sens ceux dans lesquels s'exerce la force. Le point d'application sera toujours le point matériel ici. Dans le cas d'objets étendus, des points d'application différents peuvent conduire à une rotation du système [5]. L'unité de force dans le système d'unités international (SI) est le Newton (N) [6]. Voir le
. 6 pour quelques rappels sur les vecteurs.

1.4 Les quatre interactions fondamentales

Toutes les forces qui se manifestent dans les systèmes que nous étudions peuvent se ramener aux quatre interactions fondamentales. Vous noterez ici l'emploi du terme interaction plutôt que celui de force. L'interaction dit bien que deux corps *inter-agissent*, c'est à dire agissent l'un sur l'autre et réciproquement. Quand on dit que la Terre attire le caillou que je tiens dans ma

3. Ici la direction est par exemple la verticale, alors que le sens est vers le haut ou vers le bas. Il existe deux sens le long d'une direction donnée.
4. Les effets de marée montrent bien cependant que l'interaction se fait dans l'ensemble du volume des corps
5. Voir par exemple l'effet de la force exercée par deux doigts au lancement d'une toupie. On parle alors de moment d'une force, ou de couple.
6. $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg.m.s^{-2}}$

main, on oublie que le caillou attire la Terre de la même manière, avec la même intensité, mais dans le sens opposé. Le caillou attire la Terre vers le haut. Si je lâche le caillou, il tombe vers la Terre, et la Terre monte vers le caillou ! Evidemment, comme la masse de la Terre est beaucoup plus grande que celle du caillou, son accélération est beaucoup plus faible, et nous supposons implicitement que la Terre reste immobile. Mais ce n'est pas tout à fait exact. Ce qui reste immobile est le barycentre du système (Terre + caillou) [7]. On voit ici apparaître la notion d'action - réaction : *Si le corps A exerce une action (force) sur B, alors B exerce la même action sur A, dans le sens opposé* (voir 5.4).

Passons maintenant en revue les quatre interactions fondamentales.

1.4.1 La gravitation

L'expérience montre en mécanique classique qu'un point matériel A de masse m_A attire un point matériel B de masse m_B avec une force de gravitation donnée par :

$$\vec{F_{AB}} = -G\frac{m_A m_B}{AB^2}\frac{\vec{AB}}{AB}, \tag{1.1}$$

où $G = 6.67408\ 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ est la constante de gravitation. La force exercée par B sur A est bien sûr $\vec{F_{BA}} = -\vec{F_{AB}}$ (principe d'action-réaction).

On peut montrer (théorème de Gauss) qu'un corps sphérique homogène de masse M exerce une force de gravitation sur les points matériels alentours qui peut être calculée en assimilant la sphère à un point de masse M. Ainsi la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un point matériel de masse m placé à sa surface est donnée par

$$\vec{F_{\oplus m}} = -G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2}\vec{u}, \tag{1.2}$$

où $R_\oplus$ et $M_\oplus$ sont respectivement le rayon et la masse de la Terre, et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre vers le point matériel. On voit immédiatement qu'on peut écrire cette force comme le poids à la surface de la Terre

$$\vec{P} = m\vec{g}, \tag{1.3}$$

avec le vecteur champ de gravitation, dirigé du point considéré vers le centre de la Terre

$$\vec{g} = -G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}\vec{u}. \tag{1.4}$$

7. Ceci est beaucoup plus évident dans le cas d'une planète en orbite autour du barycentre du système planétaire dans lequel elle se trouve. L'étoile fait de même. En observant le mouvement de l'étoile on peut en déduire la présence de la planète et certaines de ses particularités, alors même qu'elle échappe à une détection directe. C'est cette méthode qui a permis de découvrir la première exoplanète, 51 Peg B, en 1995, et de nombreuses autres depuis.

Sa norme[8] à la surface de la Terre est $g \approx 9.81\,\mathrm{m.s^{-2}}$. L'orientation de $\vec{g}$ dépend bien sûr de la position sur Terre, et la valeur de g est légèrement variable, car la Terre n'est pas une sphère parfaite homogène. Toutefois, on considère souvent que $\vec{g}$ est constant localement, sur des petits volumes. On approxime alors le poids d'un point matériel par une force constante dirigée verticalement vers le bas.

1.4.2 L'interaction Coulombienne

La force d'interaction électrostatique s'exerce entre particules chargées au repos. L'unité de charge SI est le Coulomb (C). Une charge q_a placée en A exerce sur une charge q_b placée en B la force Coulombienne

$$\vec{F_{AB}} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{q_a\,q_b}{AB^2}\frac{\vec{AB}}{AB}, \tag{1.5}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9\ 10^9$ en SI. On a bien sûr $\vec{F_{BA}} = -\vec{F_{AB}}$. Notez que cette force peut être attractive ou répulsive suivant le signe des charges, contrairement à la force de gravitation qui est toujours attractive. Comme dans le cas de l'interaction gravitationnelle on peut définir le champ électrostatique en B, dû à une charge q_a placée en A, tel que

$$\vec{E_A}(B) = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{q_a}{AB^2}\frac{\vec{AB}}{AB}, \tag{1.6}$$

la force exercée par q_a sur q_b pouvant s'écrire[9]

$$\vec{F_{AB}} = q_b\vec{E_A}(B). \tag{1.7}$$

1.4.3 L'interaction forte

Cette interaction est responsable de la cohésion des quarks à l'intérieur des protons et neutrons. Sa portée est réduite à environ 10^{-15}m, avec à cette échelle une intensité environ égale à 137 fois celle de la force électromagnétique. Elle est aussi responsable de la cohésion des noyaux atomiques. Sa description relève de la chromodynamique quantique.

1.4.4 L'interaction faible

Elle se manifeste par la radioactivité β, en particulier par la désintégration du neutron en proton, électron et antineutrino. Elle a une portée inférieure à l'interaction forte, et reste donc comme elle confinée à l'intérieur

8. Vérifiez le calcul en utilisant $M_\odot = 5.972\ 10^{24}$ kg et $R_\odot = 6.371\ 10^3$ km.

9. En fait pour une charge en mouvement, la force électromagnétique est $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, où $\vec{B}$ est le champ magnétique.

des noyaux. La théorie électrofaible, description quantique, offre une description unifiée des interactions électromagnétique et faible. Les interactions fortes et faibles entre fermions (comme les protons et neutrons) s'opèrent par échange de particules, les bosons.

1.5 Quelques autres forces

Les forces qui suivent sont toutes le résultat d'interactions fondamentales entre un grand nombre de particules, dont on modélise l'effet sur les corps étudiés par une force unique macroscopique.

1.5.1 Force de rappel d'un ressort

Un ressort idéal [10] de longueur au repos l_0 exerce sur l'opérateur qui l'étire ou le comprime jusqu'à la longueur l, une force $\vec{T}$ dont l'intensité est proportionnelle à l'allongement

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}, \tag{1.8}$$

où le vecteur unitaire $\vec{u}$ est dirigé du ressort vers l'opérateur (cf. Fig. 1.1). On appelle la constante $k > 0$ la raideur du ressort. Son unité SI est le

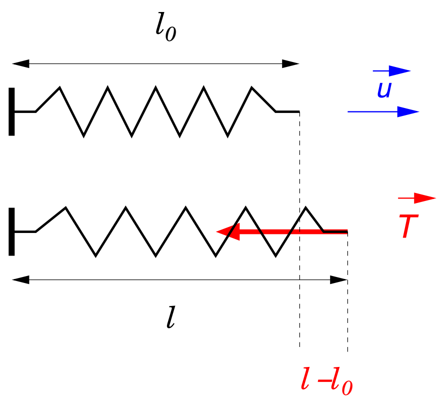


FIGURE 1.1 – Ressort à l'équilibre (en haut) ; ressort en étirement (en bas). L'extrémité gauche du ressort est attachée à un point fixe, l'opérateur agit sur son extrémité droite.

N.m^{-1}. Si le ressort est allongé, la force qu'exerce le ressort est dirigée de l'opérateur vers le ressort, si le ressort est comprimé c'est l'inverse. Le ressort exerce une force qui tend à ramener sa longueur à la longueur d'équilibre l_0. Cette loi [11] n'est valable que pour les petits allongements. Pour un ressort réel, si la déformation est trop importante la force n'est plus proportionnelle

10. ou un élastique, dans le cas de l'allongement
11. Loi de Hooke, 1678

à l'allongement. Au delà de la limite élastique, dans le régime plastique, le ressort ne reviendra plus à sa longueur d'origine si on le relâche. Le ressort idéal est linéaire et élastique.

1.5.2 Tension d'un fil

Les fils ou cables qui interviennent dans les problèmes que nous traiterons sont idéaux, c'est à dire souples, non-élastiques et sans masse. Un fil qui relie un point fixe et un point matériel exerce sur ce dernier une force colinéaire au fil. L'intensité de cette dernière peut être calculée si l'on connait les autres forces auxquelles est soumis le point matériel. Ainsi un point matériel de masse m suspendu à l'équilibre au bout d'un fil attaché au plafond est soumis à une force de pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$. Comme le point matériel est à l'équilibre, le fil exerce une force de module identique et de sens opposé. La tension du fil vaut dans ce cas $\vec{T} = -\vec{P}$. La tension est la même en tout point du fil.

1.6 Systèmes soumis à plusieurs forces et équilibre statique d'un point matériel

Les corps sont la plupart du temps soumis à plusieurs forces extérieures simultanément. Un bon exemple est celui d'un corps plongé dans un fluide, qui est soumis, en plus de la pesanteur, à un ensemble de forces de pression dont l'intensité et la direction varient sur toute sa surface (voir Par. 1.8). Il est intéressant d'analyser quelques cas particulier en faisant un bilan des forces, de leur point d'application, en traçant un schéma (essayez vous même !) : voiture en montée, contact pied-sol lors de la marche à pied, freinage à vélo, etc

Dans des cas particuliers, le sytème peut se retrouver à l'équilibre. Examinons le cas d'un verre posé sur une table. Le poids du verre est exactement compensé par la force de contact de la table (voir Par. 1.7). La somme des forces est égale à zéro. Ceci reste vrai si le verre et la table sont installés dans un train en translation rectiligne uniforme par rapport au laboratoire immobile. Ce n'est plus vrai dans un référentiel accéléré, comme par exemple le train qui prend de la vitesse, freine ou prend un virage : nous avons tous vécu l'expérience du verre qui glisse de la table lors d'un virage un peu brusque. *Le référentiel immobile, ou en translation uniforme est dit galiléen* (cf. Par. 5.1). C'est dans ce type de référentiel qu'on peut écrire pour un système à l'équilibre

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}, \tag{1.9}$$

pour un point matériel soumis à n forces $\vec{F}_i$. En fait cette condition de l'équilibre statique est la deuxième loi de Newton (voir Par. 5.3) énoncée pour une accélération nulle, et donc un vecteur vitesse constant. D'ailleurs, n'oubliez pas que le verre posé sur la table de votre salon est en fait en rotation avec la Terre, en révolution autour du Soleil, en rotation dans la Galaxie, ...[12]

1.7 Forces de contact, frottement solide

Quand deux solides sont en contact, ils exercent l'un sur l'autre une force, dite de contact[13], qui est le résultat de l'interaction des nuages électroniques de l'un et l'autre. Cette interaction électromagnétique produit une répulsion, ainsi qu'une adhésion, qui est décrite par la composante de frottement de la force de contact. Il y a donc une composante perpendiculaire à la surface de contact entre les deux solides, la composante normale, et une composante parallèle à la surface de contact, qui est la force de frottement. En l'absence de frottement, la force de contact est donc perpendiculaire à la surface de contact. On peut calculer la composante normale en faisant un bilan des forces s'exerçant sur le système. Par exemple dans le cas d'une brique posée sur un plan horizontal et soumise à la pesanteur terrestre, les forces s'exerçant sur la brique sont le poids de la brique, résultant de l'interaction entre la brique et la Terrre, et la force de contact due à l'interaction des électrons de la table avec ceux de la brique. La brique étant immobile, la somme de ces forces doit s'annuler, et on trouve que la force de contact est dirigée verticalement vers le haut, et que son module vaut le poids de la brique. Si on appuie sur la brique, la force de contact augmente en module, dans la limite de résistance de la brique et du support. Si on appuie trop fort, la cohésion interne de la brique ou du support peut s'avérer insuffisante et mener à une rupture.

1.7.1 Frottement solide

Si on exerce sur la brique de l'exemple précédent une force qui n'est pas perpendiculaire à la surface de contact, la force de contact n'est plus perpendiculaire à la surface de contact. Il apparait une composante parallèle à cette surface. Dans les situations statiques (équilibre), l'expérience montre que cette force de frottement, la composante tangentielle de la force

12. Votre salon n'est donc pas un référentiel galiléen. On peut cependant sur des temps et des distances courts supposer que le salon est immobile ou en translation rectiligne uniforme, et modéliser les expériences de physique qui s'y déroulent comme dans un référentiel galiléen. Des mesures précises montreront cependant que ce référentiel n'est pas galiléen et est accéléré (expérience du pendule de Foucault par exemple).

13. On la nomme souvent abusivement réaction du support, mais nous réserverons le terme de réaction au contexte "action-réaction"

de contact, $\vec{C_T}$, n'éxède jamais une valeur fixée par

$$\frac{\|\vec{C_T}\|}{\|\vec{C_N}\|} < \mu_s, \tag{1.10}$$

où $\vec{C_N}$ est la composante normale de la force de contact, et μ_S est le coefficient de frottement statique, dont la valeur dépend des matériaux en contact et de la rugosité de leurs surfaces, mais pas de l'aire en contact. Dans les situations dynamiques, quand il y a mouvement de l'un des solides par rapport à l'autre, on a la condition suivante

$$\frac{\|\vec{C_T}\|}{\|\vec{C_N}\|} = \mu_d, \tag{1.11}$$

où μ_D est le coefficient de frottement dynamique, dont la valeur ne dépend pas de la vitesse de déplacement relatif. Ces coefficients sont typiquement inférieurs à 1. On a toujours $\mu_s > \mu_d$ pour un couple de matériaux donné. Il faut donc dépasser un certain seuil pour mettre en mouvement un objet subissant du frottement solide, mais une fois le mouvement amorcé la force nécessaire pour le maintenir est plus faible.

Ces lois du frottement solide ont été énoncées par Amontons et Charles Coulomb au 18^e siècle.

1.7.2 Exemple : objet en équilibre sur un plan incliné

En présence de frottement, la condition d'équilibre d'un objet sur un plan incliné (cf. Fig. 1.2) s'écrit

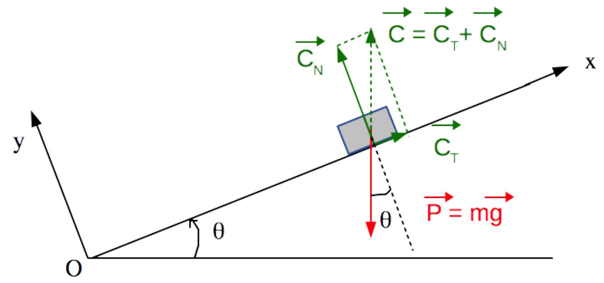


FIGURE 1.2 – Equilibre d'un objet sur un plan incliné, avec frottement.

$$\vec{P} + \vec{C} = \vec{0}, \tag{1.12}$$

ou encore

$$m\vec{g} + \vec{C_N} + \vec{C_T} = \vec{0}. \tag{1.13}$$

Afin de projeter cette équation vectorielle, on choisit [14] l'axe Ox orienté suivant le plan incliné, et l'axe Oy perpendiculaire, c'est à dire orienté parallè-

14. Notez que le choix fait ici est arbitraire. On peut choisir n'importe quel repère pour faire le calcul. Le résultat sera toujours le même. Essayez !

lement au vecteur $\vec{C_N}$. En écrivant $\vec{C_N} = C_N\vec{e_y}$ et $\vec{C_T} = C_T\vec{e_x}$, on obtient alors :

$$-mg\sin\theta + C_T = 0 \tag{1.14}$$
$$-mg\cos\theta + C_N = 0. \tag{1.15}$$

La composante normale vaut donc $C_N = mg\cos\theta$, et celle de frottement $C_T = mg\sin\theta$. D'après l'Eq. (1.10), il ne peut y avoir équilibre que si $C_T/C_N < \mu_s$, c'est à dire si $\tan\theta < \mu_s$. Si l'angle θ dépasse cette condition alors le solide se met à glisser.

1.8 Notion de pression, force d'Archimède

La pression est une grandeur scalaire que l'on peut définir, dans le cas d'une force $\vec{F}$ perpendiculaire à une surface S, par $p = \frac{\|\vec{F}\|}{S}$. Son unité est le Pascal (1 Pa= 1 $\mathrm{N.m^{-2}}$). Ainsi la pression due à la présence de l'atmosphère terrestre est d'environ 10^5 Pa au niveau de la mer. Cela représente une force de 10 $\mathrm{N.cm^{-2}}$, soit le poids d'une masse de 1 kg sur une surface telle que l'ongle de votre petit doigt [15] ! Nous ne nous en rendons pas compte, car la même pression règne à l'intérieur de notre corps. Ainsi une bouteille en plastique garde sa forme tant que la pression à l'intérieur est la même qu'à l'extérieur. Si on la ferme au sommet d'une montagne puis qu'on descend dans la vallée, la bouteille s'écrase sous l'effet de la différence de pression.

1.8.1 Théorème d'Archimède

Archimède, plus de deux siècles avant notre ère, énonce que *"tout corps plongé dans un fluide au repos subit une force verticale dirigée vers le haut, égale à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé"*. On appelle cette force la force d'Archimède. Quand on plonge un objet dans un fluide (liquide ou gaz), une pression s'exerce en tout point de cet objet, mais la pression est plus grande en bas qu'en haut de l'objet, car le poids de la colonne de fluide y est plus grand. La force d'Archimède résulte du gradient de pression dans le fluide, lui-même dû au champ gravitationnel.

La résultante des forces de pression s'appliquant sur toute la surface de l'objet peut être trouvée facilement, en remplaçant par la pensée l'objet par un corps de même forme et même volume, mais constitué du même fluide que celui dans lequel il baigne. Ce corps fictif constitué de fluide est évidemment à l'équilibre. Donc son poids est exactement compensé par la force d'Archimède. C'est la même force d'Archimède (l'opposé du poids de

15. Ce poids est le poids de la colonne d'air au dessus de votre ongle. Vous pouvez en déduire la masse de l'atmosphère, et ensuite son épaisseur, en faisant en particulier l'hypothèse simplificatrice que c'est une couche homogène. Faites-le !

fluide déplacé) qui s'applique sur l'objet de même forme, de quelque matière qu'il soit constitué, puisque c'est une force de surface !

1.9 Exercices d'application

Pour l'ensemble de ces exercices, posez correctement le problème : système étudié, repère, bilan des forces, et détaillez l'ensemble des calculs, afin de bien assimiler la méthodologie.

1.9.1

Soit un ressort idéal en position verticale, de longueur au repos l_0. Une de ses extrémités est attachée au plafond. A son autre extrémité est attachée une masse M de 1 kg. Sachant que la constante de raideur du ressort est 10^3 N/m, quelle est la longueur du ressort à l'équilibre ?

1.9.2

La masse et le ressort de l'exercice précédent sont cette fois posés sur un plan incliné de 30° avec l'horizontale. Une extrémité du ressort est attachée en haut du plan incliné. La masse peut glisser sans frottement. Quelle est la longueur du ressort à l'équilibre ?

1.9.3

Soit une masse M posée sur un plan incliné qui fait un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement statique entre la masse et le plan est $\mu_s = 0.1$. Trouvez la plage d'angles possibles pour que M soit à l'équilibre.

1.9.4

Soit une masse M de 1 kg suspendue au plafond par deux fils idéaux faisant un angle de 65° par rapport à la verticale. Quelle est la tension dans chaque fil ?

L'angle entre les deux fils et le plafond est maintenant de 35° et 75°. Quelle est la tension dans chaque fil ? Quelle doit être la longueur du fil le plus horizontal si le fil le plus vertical a une longueur de 1 m ?

Chapitre 2

Unités, dimensions, ordres de grandeurs et incertitudes de mesure

Voir les diaporamas :
— *CH 2 (partie 1) - OdG Unites Dimensions / diapos*
— *CH 2 (partie 2) - Mesures et incertitudes / diapos*
sur la page *Moodle* de l'UE HLPH101 Physique générale.

Chapitre 3

Cinématique

L'objet de la cinématique est l'étude du mouvement sans se soucier de ses causes. L'étude du mouvement d'un corps consiste à décrire l'évolution temporelle de sa position, et de son orientation. Comme nous nous cantonnons à la cinématique du point, nous ne discuterons pas de l'orientation (rotations) des corps étudiés. Ce que nous verrons s'applique au centre de gravité de ces corps.

Il nous faut donc disposer d'un repère pour préciser la position dans l'espace et d'une horloge pour mesurer le temps. Nous allons ainsi définir les notions de référentiel, de repère, et les vecteurs position, vitesse et accélération.

3.1 Systèmes de coordonnées, et vecteur position

L'espace dans lequel nous décrivons le mouvement en mécanique classique est un espace euclidien à trois dimensions. Il faut un étalon de longueur, ce qui permet ensuite de fixer la position d'un point quelconque par rapport à un point de référence, l'origine, à l'aide de trois paramètres seulement. On peut définir différents systèmes de coordonnées, et on choisira celui qui est le plus adapté à la symétrie du problème.

3.1.1 coordonnées cartésiennes

On définit trois axes orthogonaux Ox, Oy, Oz. Ce système d'axes est muni d'une base [1] de vecteurs unitaires $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Ceci constitue le repère d'origine O. La position d'un point M de coordonnées (x_M, y_M, z_M) vérifie

$$\vec{OM} = x_M \vec{e_x} + y_M \vec{e_y} + z_M \vec{e_z}. \tag{3.1}$$

Les trois composantes $x_M \vec{e_x}$, ... sont les projections du vecteur $\vec{OM}$ sur les trois axes Ox, ... (voir Fig. 3.1)

1. qui est donc orthonormée

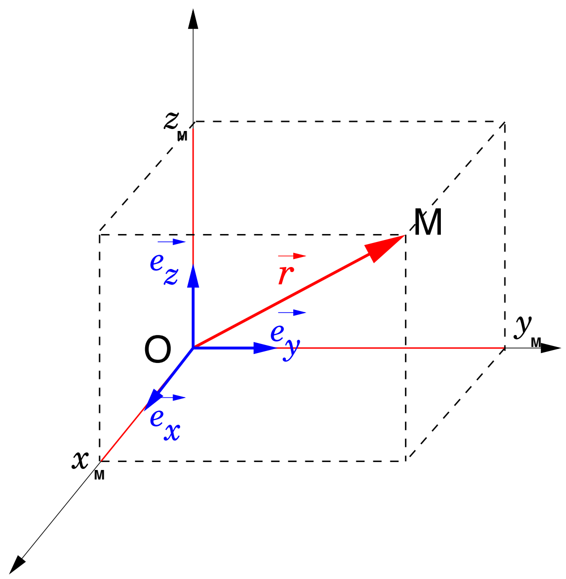


FIGURE 3.1 – Coordonnées cartésiennes.

Ce système de coordonnées cartésien est particulier en ce sens que les trois axes sont équivalents, il n'y a pas de symétrie particulière, et il existe une bijection entre les points de l'espace et les coordonnées (x, y, z) dans $\mathbf{R}^3$. Ainsi la norme du vecteur $\vec{OM}$ s'écrit $\sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$.

3.1.2 coordonnées cylindriques, coordonnées polaires

Certains problèmes font apparaitre une symétrie particulière, comme l'étude de la rotation autour d'un axe. Il est alors intéressant de définir un repère prenant en compte cette symétrie, ce qui permet de simplifier les calculs.

coordonnées polaires à deux dimensions

Dans le repère polaire, le vecteur $\vec{OM}$ est donné par (voir Fig. 3.2)

$$\vec{OM} = \rho_M \vec{e_\rho}. \tag{3.2}$$

Les coordonnées de M sont (ρ_M, θ_M). ρ_M est défini comme la distance entre

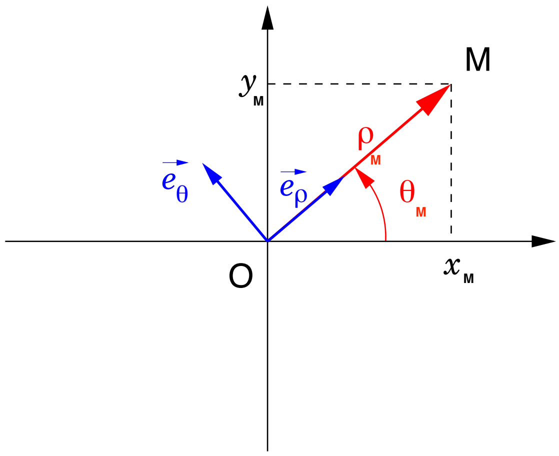


FIGURE 3.2 – Coordonnées polaires.

O et M, et θ_M comme l'angle entre Ox et OM. On couvre tout le plan en imposant $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Notez que le vecteur de base $\vec{e_\theta}$ n'intervient pas dans la définition de $\vec{OM}$. Les vecteurs de base $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ changent d'orientation selon la position du point M, ce qui est radicalement différent du cas cartésien où les vecteurs de base sont invariants. Ici la base orthonormée ($\vec{e_\rho}$,$\vec{e_\theta}$,$\vec{e_z}$) est variable. Nous verrons que cela a des conséquences lors du calcul des vecteurs vitesse et accélération.

coordonnées cylindriques à trois dimensions

Dans le repère cylindrique, le vecteur $\vec{OM}$ est donné par (voir Fig. 3.3)

$$\vec{OM} = \rho_M \vec{e_\rho} + z_M \vec{e_z}. \tag{3.3}$$

Les coordonnées de M sont (ρ_M, θ_M, z_M), avec z_M inchangée par rapport au repère cartésien[2]. La projection M' de M sur le plan xOy, permet de

2. Dans la suite, et pour alléger les équations, on abandonnera souvent l'indice M des coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.

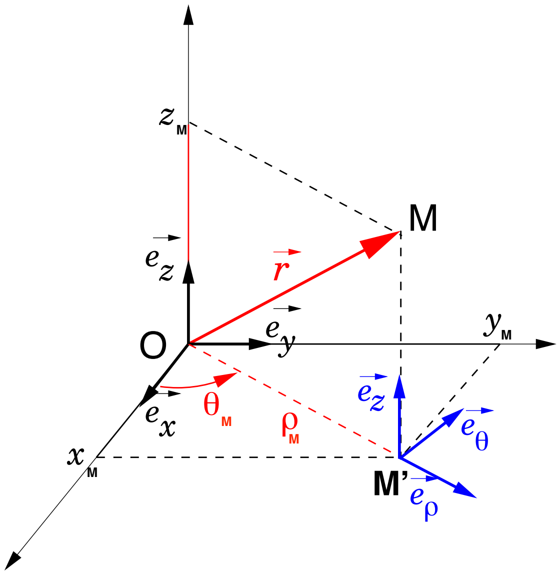


FIGURE 3.3 – Coordonnées cylindriques.

définir ρ_M comme la distance entre O et M', et θ_M comme l'angle entre Ox et OM'. On couvre tout l'espace en imposant $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, et $z \in \mathbf{R}$. Si on se restreint au plan xOy, on retrouve les coordonnées polaires (ρ, θ).

Comme pour les coordonnées polaires : le vecteur de base $\vec{e_\theta}$ n'intervient pas dans la définition de $\vec{OM}$ et les vecteurs de base $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ changent d'orientation selon la position du point M. Ici la base orthonormée $(\vec{e_\rho},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ est en partie variable.

3.1.3 Transformation de coordonnées

La position d'un point peut être donnée dans un repère ou un autre. Les coordonnées ne sont que des étiquettes. On peut passer des coordonnées cylindriques aux cartésiennes

$$x = \rho \cos\theta \tag{3.4}$$

$$y = \rho \sin\theta \tag{3.5}$$

$$z = z, \tag{3.6}$$

et inversement

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.7}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho} \tag{3.8}$$

$$z = z. \tag{3.9}$$

3.1.4 dérivées des vecteurs de base cylindrique

Nous avons vu que la base cylindrique étant liée au point étudié, deux des vecteurs de base sont variables avec la position dans l'espace. On voit sur la Fig. 3.3 que l'orientation des vecteurs de base ne dépend que de θ. On peut donc examiner ce qui se passe quand cet angle varie en calculant les dérivées $\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}$. Pour cela on écrit ces vecteurs en fonction de la base cartésienne fixe $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$, puis on dérive. On obtient

$$\vec{e_\rho} = \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y} \tag{3.10}$$

$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y}. \tag{3.11}$$

Le calcul de la dérivée de ces vecteurs par rapport à θ donne

$$\frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta} = -\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y} = \vec{e_\theta} \tag{3.12}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\cos\theta\vec{e_x} - \sin\theta\vec{e_y} = -\vec{e_\rho}. \tag{3.13}$$

On voit quer la dérivation par rapport à θ de ces vecteurs de base les fait tourner de $\pi/2$. La dérivée seconde conduit à une rotation de π, ce qui revient à changer leur signe.

3.2 Vecteurs vitesse et accélération

3.2.1 Notion de référentiel

Le mouvement d'un point matériel est perçu différemment par deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre. Par exemple une personne assise dans un train se déplaçant en ligne droite à vitesse constante voit le sac posé à ses pieds comme immobile. Un observateur sur le quai voit un sac animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme. Si la personne dans le train fait tomber son crayon, elle le voit tomber verticalement [3]. La personne sur le quai mesure un mouvement parabolique.

Cet exemple important nous permet de souligner la relativité du mouvement et la nécessité de préciser par quel observateur le mouvement est

3. ceci n'est vrai que parce que le train est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au quai, que nous supposons immobile, ou plus précisément, parce que nous considérons le train comme un référentiel galiléen

analysé. Remarquons qu'à aucun moment nous n'avons fait de distinction entre le temps qui s'écoule pour le voyageur et pour l'observateur à quai. C'est en effet un postulat de la mécanique classique (non relativiste) que de considérer que le temps s'écoule de la même manière pour tous les observateurs. Nous sommes ainsi amenés à introduire le concept de référentiel comme l'espace lié [4] à l'observateur auquel on associe une horloge. L'observateur peut alors déclarer qu'un objet se situe en un point particulier M de cet espace à l'instant t.

Nous aurons l'occasion de rencontrer plusieurs référentiels : le *référentiel terrestre* a son origine en un point à la surface de la Terre et ses axes sont fixes par rapport à la Terre. C'est celui du laboratoire. Le *référentiel géocentrique* a son origine au centre de la Terre et ses axes sont dirigés parallèlement à ceux du référentiel héliocentrique. Il est en mouvement de translation non-uniforme par rapport à ce dernier. Le *référentiel héliocentrique* a pour origine le centre du Soleil et ses axes pointent vers des étoiles lointaines. Le *référentiel de Copernic* a son origine au centre de masse du système solaire et ses axes sont dirigés vers des étoiles lointaines. Il est presque galiléen [5], mais le système solaire est animé d'un mouvement de translation non-uniforme dans la Galaxie, qui elle-même est en mouvement.

3.2.2 Vecteur vitesse

On peut caractériser la rapidité avec laquelle un corps se déplace par rapport à un référentiel en utilisant le rapport entre la distance parcourue Δl et le temps de parcours Δt. On en déduit la vitesse moyenne $v = \Delta l/\Delta t$, dont l'unité SI est le $\mathrm{m.s^{-1}}$. Cette vitesse constitue une information intéressante, mais pas très fine. Elle ne nous donne aucun détail sur ce qui s'est passé entre le point de départ et le point d'arrivée (accélération, freinage, arrêt...). On définit donc (la norme de) la vitesse instantanée par

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}, \tag{3.14}$$

qui nous donne la variation de la vitesse au cours du temps.

Cependant, pour parfaitement caractériser le mouvement du corps étudié il est nécessaire de connaitre aussi la direction dans laquelle il se déplace. Pour cela il faut utiliser la notion de *vecteur*.

Si le mobile est à la position M au temps t, et à la position M' au temps $t + \Delta t$, on définit le vecteur vitesse comme

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M\vec{M}'}{\Delta t}. \tag{3.15}$$

4. c'est à dire fixe par rapport à l'observateur

5. Le fait de pouvoir qualifier un référentiel de galiléen ou pas dépend de la précision des mesures effectuées.

En utilisant le théorème de Chasles et l'origine du repère, on peut écrire $\vec{MM'} = \vec{OM'} - \vec{OM}$, et donc

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{OM'} - \vec{OM}}{\Delta t}. \tag{3.16}$$

Le *vecteur vitesse* s'écrit donc

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}. \tag{3.17}$$

Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

En dérivant l'expression (3.1) on obtient [6]

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}. \tag{3.18}$$

On utilise souvent la notation de Newton pour les dérivées par rapport au temps, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, ce qui donne

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}. \tag{3.19}$$

Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

Cette fois il faut dériver l'expression (3.3), ce qui donne [7]

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}. \tag{3.20}$$

Le terme $\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}$ se calcule de la façon suivante, en utilisant (3.12) et (3.13)

$$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \frac{d\vec{e_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}. \tag{3.21}$$

On obtient finalement

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z}. \tag{3.22}$$

On appelle $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire, qu'on note souvent ω.

3.2.3 Vecteur accélération

De la même manière que la vitesse nous renseigne sur la façon dont la position varie au cours du temps, nous pouvons définir une quantité permettant de mesurer la manière dont la vitesse varie au cours du temps. Le *vecteur accélération* s'écrit

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}. \tag{3.23}$$

6. Les autres termes sont nuls, car les vecteurs de base sont invariants.
7. le terme $z\frac{d\vec{e_z}}{dt}$ est nul, car $\vec{e_z}$ est invariant.

L'unité SI de l'accélération est le m.s^{-2}.

Il n'est pas nécessaire de définir la dérivée de l'accélération, car c'est l'accélération qui est la quantité pertinente que l'on relie aux forces appliquées à un système, en dynamique classique.

Expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes

La dérivée de la vitesse (3.18) permet d'écrire

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z}, \tag{3.24}$$

que l'on peut noter

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z}. \tag{3.25}$$

Expression de l'accélération en coordonnées cylindriques

Cette fois-ci on dérive l'expression (3.22)

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \ddot{z}\vec{e_z} + \dot{z}\frac{d\vec{e_z}}{dt}. \tag{3.26}$$

En utilisant le fait que $\vec{e_z}$ est invariant, et l'equation (3.21) ainsi qu'une expression similaire pour $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$, on obtient finalement [8]

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}. \tag{3.27}$$

Cas du mouvement circulaire uniforme

Examinons le cas $\dot{z} = 0$, c'est à dire un mouvement plan suivant xOy. Si ρ est constant, le mouvement est circulaire. Si de plus la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, l'accélération pour un mouvement *circulaire uniforme* s'écrit

$$\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} = -\rho\omega^2\vec{e_\rho} = -\frac{v^2}{\rho}\vec{e_\rho}, \tag{3.28}$$

où l'on a utilisé le fait que le module de la vitesse [9] $v = \rho\frac{d\theta}{dt}$. Notez que cette accélération est dirigée vers le centre de la trajectoire circulaire. Elle est centripète.

Cas du mouvement circulaire

Dans ce cas plus général, $\dot{\theta}$ n'est pas une constante. L'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques (3.27) donne alors :

$$\vec{a} = \rho\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \rho\dot{\omega}\vec{e_\theta} - \rho\omega^2\vec{e_\rho}, \tag{3.29}$$

8. Faites-le !
9. on dit aussi la célérité, afin de réserver le terme de vitesse pour le vecteur $\vec{v}$.

qu'on peut aussi écrire :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{\rho}\vec{e_\rho}. \tag{3.30}$$

On peut ainsi définir deux composantes de l'accélération pour le cas de ce mouvement, l'accélération normale $\vec{a_n}$ et l'accélération tangentielle $\vec{a_t}$:

$$\vec{a_n} = -\frac{v^2}{\rho}\vec{e_\rho} \tag{3.31}$$

$$\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}. \tag{3.32}$$

3.3 Retour sur les notions de référentiel et repère

Il est primordial de distinguer le référentiel du repère. La vitesse par exemple est définie par rapport à un référentiel : le livre sur votre porte-bagage est immobile dans le référentiel du vélo, mais se déplace à la vitesse du vélo dans le référentiel lié au sol. Un fois le vecteur vitesse défini dans un référentiel donné on peut en exprimer les composantes dans n'importe quel repère lié au référentiel, cartésien, cylindrique ou autre, quelle que soit son origine. *Le vecteur vitesse, ou accélération, ne dépend pas du repère dans lequel on le calcule, mais il dépend du référentiel !*

3.4 Exercices d'application

3.4.1

Soit un point M ayant pour coordonnées cartésiennes $x(t) = v_0 t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 0$.

1. Donnez la définition de la vitesse $v(\vec{t})$ et de l'accélération $a(\vec{t})$ du point M, puis calculez $v(\vec{t})$ et $a(\vec{t})$ en coordonnées cartésiennes.
2. Calculez $\|v(\vec{t})\|$ et $\|a(\vec{t})\|$. Comment qualifie-t-on ce type de mouvement ?
3. Représenter les graphes des équations horaires $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$, commenter.

3.4.2

Soit un point M ayant pour accélération $a(\vec{t}) = A\vec{e_x}$.

1. Calculez les vecteurs vitesse et position, $v(\vec{t})$ et $\vec{OM}(t)$, du point M en coordonnées cartésiennes.
2. Calculez $\|v(\vec{t})\|$ et $\|a(\vec{t})\|$. Comment qualifie-t-on ce type de mouvement ?
3. Représenter les graphes des équations horaires $a(t)$, $v(t)$ et $x(t)$, commenter.

3.4.3

On étudie le mouvement d'un point en rotation avec une vitesse angulaire ω constante, autour d'un axe vertical fixe Δ. On appelle R le rayon de la trajectoire ainsi décrite.

1. Déterminez l'expression du module de la vitesse $v(t)$ de ce mobile.
2. Déterminez l'expression de l'accélération du mobile.
3. Le mobile considéré est suspendu à un fil inextensible, sans masse, de longueur l, faisant un angle α avec l'axe Δ pendant la rotation. Déterminez la relation liant v, l et α.

3.4.4

Soit un point M ayant pour coordonnées cartésiennes $x(t) = R \cos \omega t$, $y(t) = R \sin \omega t$, $z(t) = H 2\pi t/\omega$, où ω est une constante.

1. Quel est le type de mouvement dans le plan xOy ? Dans l'espace ?
2. Donnez la définition de la vitesse $v\vec{(t)}$ et de l'accélération $a\vec{(t)}$ du point M, puis calculez $v\vec{(t)}$ et $a\vec{(t)}$ en coordonnées cartésiennes.
3. Calculez $\|v\vec{(t)}\|$ et $\|a\vec{(t)}\|$.
4. Exprimez $O\vec{M}$ et calculez $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques.
5. Calculez $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{a}\|$.

Chapitre 4

Travail et énergie

L'énergie est une notion centrale de la physique. C'est une des grandeurs pour lesquelles on peut écrire une loi de conservation, une grandeur invariante. Cela ne vaut que si on considère un système suffisamment grand, qui inclut toutes les interactions possibles. L'énergie existe sous de nombreuses formes : énergie cinétique, mécanique, radiative, thermique, ... Elle peut être transférée d'un système à un autre, par exemple au moyen du travail de forces mécaniques, ce qui est le cas en mécanique classique. Vous verrez d'autres types d'énergie et de transfert d'énergie en thermodynamique.

Nous nous restreindrons ici, par simplicité, à des corps que l'on peut, au moins approximativement, décrire par un point matériel, c'est-à-dire un objet ponctuel affecté d'une masse.

4.1 Point matériel, masse, quantité de mouvement

4.1.1 Point matériel

Dans le cadre de la dynamique du point, les corps étudiés sont modélisés par un point affecté d'une masse. Ce point est placé au centre de masse du système, ou centre de gravité, ou encore barycentre. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, la position d'un point matériel est parfaitement définie à un instant donné par ses trois coordonnées dans un repère attaché à un référentiel. On achève de préciser physiquement un point matériel en donnant sa masse. Autrement dit, un point matériel est caractérisé à chaque instant par sa position (trois coordonnées d'espace) et sa masse, exprimée en kg en SI. On peut bien sûr traiter en dynamique les systèmes à masse variable, telle une fusée prenant son envol, mais nous ne le ferons pas dans le cadre de ce cours.

4.1.2 Masse

La notion de masse est un concept fondamental en physique, qui a deux origines a priori distinctes : la masse pesante qui se manifeste au travers de l'interaction gravitationnelle, et la masse inertielle qui caractérise la résistance d'un corps à toute modification de son mouvement, c'est-à-dire son inertie (cf. Par. 5.3). Il est établit expérimentalement, à une précision relative de 10^{-13} à ce jour, que ces deux masses sont égales, ce qui n'est au départ pas du tout évident [1]. La relativité générale d'Einstein est construite sur le principe d'équivalence, que ces deux masses sont égales.

4.1.3 Quantité de mouvement

Quand on applique une force à un corps, l'état de mouvement de celui-ci change. Une bonne illustration de ce qui se passe est fournie par une balle de tennis posée sur un sol horizontal et que l'on frappe d'un coup de marteau : la balle se met en mouvement à une certaine vitesse. Si l'on effectue la même expérience avec une boule de pétanque, la vitesse acquise par celle-ci sera moins importante que celle de la balle. Le changement de l'état de mouvement [2] d'un objet de masse importante nécessite une force plus grande [3] que pour un corps de masse moindre. Cette résistance au changement, cette *inertie* est mesurée par la masse d'inertie. On montre expérimentalement que si la force est appliquée de la même manière, la balle et la boule ont des vitesses en rapport inverse du rapport de leurs masses. Le produit de leur masse par leur vitesse est le même. C'est ce qu'on appelle la quantité de mouvement [4].

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{4.1}$$

L'unité SI de quantité de mouvement est le kg.m.s^{-1}.

Notez que, alors que la masse est un invariant qui ne dépend pas du référentiel en mécanique classique, la quantité de mouvement dépend du référentiel choisi.

4.2 Travail d'une force

L'action d'une force pendant un certain temps est susceptible de produire une variation de la quantité de mouvement d'un corps, comme le montre bien une écriture un peu différente de la deuxième loi de Newton : $d\vec{p} = \vec{F}dt$ [5]. De

1. Un satellite, Microscope, a été lancé par le CNES en avril 2016 pour améliorer cette précision à 10^{-15}, voir par exemple : https ://lejournal.cnrs.fr/articles/le-principe-dequivalence-a-lepreuve.

2. c'est à dire une variation de son vecteur vitesse $\vec{v}$, et donc de sa direction et/ou de sa célérité.

3. ou plus exactement un produit force $\times$ temps d'application plus grand

4. momentum en Anglais

5. voir équation 5.1.

façon équivalente on peut examiner l'action d'une force sur un point matériel en mouvement sur une certaine distance en calculant l'intégrale sur le chemin parcouru de $\vec{F}.d\vec{r}$. Cette quantité infinitésimale, pour un déplacement élémentaire $d\vec{r} = d\vec{OM}$, est appelée le travail élémentaire.

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $d\vec{r}$ s'écrit :

$$dW = \vec{F}.d\vec{r}. \tag{4.2}$$

Le travail d'une force le long d'un chemin menant d'un point A à un point B se calcule par une intégrale le long du chemin :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}. \tag{4.3}$$

L'unité SI de travail est le Joule (J), équivalent au kg.m^2.s^{-2}.

On remarque que selon l'orientation de la force par rapport au mouvement, le travail peut être positif ou négatif. On parle de travail moteur ou résistant.

4.2.1 Propriétés du travail

On voit immédiatement que :

- le travail est additif[6] :

$$W(\vec{F_1} + \vec{F_2} + ...) = W(\vec{F_1}) + W(\vec{F_2}) + ... \tag{4.4}$$

- le travail d'une force perpendiculaire au mouvement est nul[7].

- on peut aussi écrire $dW = \vec{F}.\vec{v}dt$.

- le travail d'une force dépend du référentiel dans lequel on le calcule, alors que la force est invariante par changement de référentiel.

4.2.2 Exemples

Travail de la force de rappel d'un ressort

Considérons un ressort idéal de raideur k et de longueur à vide l_0. On place l'axe Ox dans l'alignement du ressort, et l'origine coincide avec la position de l'extrémité libre du ressort à vide, de sorte que si on l'étire $\vec{T} = -kx\vec{e_x}$. Le travail élémentaire de la tension du ressort pour un trajet $d\vec{r} = dx\vec{e_x}$ est donc : $dW = -kx\vec{e_x}.dx\vec{e_x} = -kxdx$. Le travail de la force de rappel du ressort d'un point A de coordonnée x_A à un point B de coordonnée x_B est :

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_{x_A}^{x_B} -kxdx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2). \tag{4.5}$$

6. du fait des propriétés du produit scalaire

7. idem. Par conséquent, le travail de la composante normale d'une force de contact est nul. Seule la composante tangentielle, de frottement, travaille.

Travail du poids

Dans un champ de pesanteur uniforme, $\vec{g}$, le travail du poids d'un point matériel de masse m qui se déplace du point A au point B peut se calculer facilement en connaissant uniquement les altitudes des points A et B. En effet, on peut écrire le produit scalaire $m.\vec{g}.d\vec{r} = mgdr\cos\theta$, où θ est l'angle entre le vecteur $\vec{g}$ et le vecteur $d\vec{OM} = d\vec{r}$. Si l'axe Oz est orienté vers le haut, comme $\vec{g}$ est orienté vers le bas, l'angle entre l'axe Oz et $d\vec{r}$ est $\pi - \theta$. On peut donc écrire $dz = dr.\cos(\pi - \theta) = -dr.\cos\theta$. Par conséquent, $dW = -mgdz$. Donc finalement le travail du poids sur un chemin quelconque entre A et B d'altitudes respectives z_A et z_B est :

$$W_{AB}(poids) = -mg(z_B - z_A) \tag{4.6}$$

4.3 Puissance

Si on applique une force pour effectuer un déplacement, tel que soulever une masse dans un champ de pesanteur, le travail développé ne dépend pas du temps mis pour effectuer le mouvement. Par contre on se rend compte que si on veut raccourcir le temps de déplacement, l'effort à fournir revêt un caractère différent. Ceci est dû à la quantité d'énergie à fournir par unité de temps. On traduit cela par la notion de puissance.

La *puissance instantanée* d'une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point matériel de vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}. \tag{4.7}$$

L'unité SI de puissance est le Watt (W), équivalent au kg.m^2.s^{-3}.

4.4 Théorème de l'énergie cinétique

Pour un point matériel de masse m constante soumis à un ensemble de forces de résultante $\vec{F}$, on peut écrire le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen donné, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ ou encore $m\vec{a} = \vec{F}$ (voir Par. 5.3). En formant le produit scalaire de cette quantité avec la vitesse on obtient :

$$m\vec{a}.\vec{v} = \vec{F}.\vec{v} = m\vec{v}(\vec{a_t} + \vec{a_n}), \tag{4.8}$$

où on a décomposé l'accélération suivant ses composantes normales et tangentielles. Comme la composante normale est perpendiculaire à la vitesse et que $a_t = \frac{dv}{dt}$, on a

$$\vec{F}.\vec{v} = mv\frac{dv}{dt} = \frac{d(\frac{mv^2}{2})}{dt}. \tag{4.9}$$

On peut alors écrire

$$\vec{F}.\vec{v}dt = \vec{F}.d\vec{r} = d(\frac{mv^2}{2}), \tag{4.10}$$

qu'on peut ensuite intégrer entre deux instants t_1 et t_2 correspondant à deux positions A_1 et A_2 du point matériel, pour obtenir :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{A_1A_2}(\vec{F}), \tag{4.11}$$

où v_1 et v_2 sont les vitesses du point matériel aux positions respectives A_1 et A_2.

On définit *l'énergie cinétique* E_c d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel donné :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2. \tag{4.12}$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'énonce alors :
La variation d'énergie cinétique d'un point matériel au cours d'un déplacement entre deux positions i et f est égale au travail de la résultante des forces appliquées sur ce point lors du déplacement :

$$\Delta E_c = E_c(f) - E_c(i) = W_{if}(\vec{F}) \tag{4.13}$$

4.5 Energie potentielle et forces conservatives

Les forces dont le travail ne dépend pas du chemin suivi pour aller d'un point A à un point B sont dites conservatives. Pour ces forces le travail ne dépend que des positions des points de départ et d'arrivée. Ces forces conservatives revêtent une importance particulière.

Nous avons vu que c'est le cas du poids, et c'est aussi celui de la force de rappel d'un ressort, ainsi que de la force électrostatique, qui sont donc toutes conservatives. Ce n'est pas le cas du frottement, ou d'une force motrice propulsant un véhicule, qui sont non-conservatives.

4.5.1 Energie potentielle

Le fait que le travail des forces conservatives ne dépend que des extrémités de la trajectoire considérée permet de définir une fonction de la position dans l'espace qui autorise le calcul de ce travail simplement par la différence entre la valeur de la fonction au point de départ et celle au point d'arrivée. On appelle cette fonction l'énergie potentielle.

On définit *l'énergie potentielle* E_p pour une force conservative $\vec{F_c}$ de la façon suivante [8] :

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}_c.d\vec{r} = -W_{AB}(\vec{F_c}). \tag{4.14}$$

L'énergie potentielle a la même unité SI que le travail, le Joule (J). Notez qu'on ne peut calculer que des différences d'énergie potentielle. On peut donc choisir arbitrairement une origine, où l'énergie potentielle est nulle.

4.5.2 Exemples

Le poids

Nous avons calculé au Par. 4.2.2 le travail du poids dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$. On en déduit immédiatement que

$$E_p(B) - E_p(A) = mg(z_B - z_A). \tag{4.15}$$

On définit souvent l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du sol. Dans ce cas on a $E_p(M) = mgz_M$, où z_M est l'altitude du point M.

La force de Coulomb

Pour la force de Coulomb (cf. Eq. (1.5)) due à une charge Q et s'exerçant sur une charge q, on trouve par intégration [9], et en fixant $E_p(\infty) = 0$:

$$Ep(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \tag{4.16}$$

où r est la distance entre les deux charges électriques.

Le rappel d'un ressort

Nous avons calculé au Par. 4.2.2 le travail de la force de rappel d'un ressort. On en déduit :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{4.17}$$

avec $x = l - l_0$ l'allongement du ressort. On a choisit ici l'origine de l'énergie potentielle pour l'allongement nul, c'est à dire à la position de repos du ressort.

---

8. En inversant cette définition on voit qu'on peut définir la force comme dérivant d'une énergie potentielle : $dE_p = -\vec{F_c}.d\vec{r}$ et donc $\vec{F_c} = -\vec{\nabla}E_p$. La force est donnée en tout point par le gradient de l'énergie potentielle.

9. Faites le !

4.6 Théorème de l'énergie mécanique

Considérons maintenant un point matériel soumis à un ensemble de forces, conservatives et non-conservatives. On peut calculer la résultante des forces conservatives d'une part, $\vec{F_c}$, et la résultante des forces non-conservatives d'autre part $\vec{F_{nc}}$. Le calcul du travail de l'ensemble de ces forces lors d'un déplacement de A à B donne :

$$W_{AB}(\vec{F_c}+\vec{F_{nc}}) = E_c(B) - E_c(A). \tag{4.18}$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$W_{AB}(\vec{F_c}) = -(E_p(B) - E_p(A)). \tag{4.19}$$

En injectant l'équation (4.19) dans l'équation (4.18), on trouve :

$$W_{AB}(\vec{F_{nc}}) = E_c(B) + E_p(B) - (E_c(A) + E_p(A)). \tag{4.20}$$

On définit donc *l'énergie mécanique* E_m d'un point matériel M comme la somme des énergies cinétique E_c et potentielle E_p de ce point matériel

$$E_m(M) = E_c(M) + E_p(M). \tag{4.21}$$

On peut récrire l'équation (4.20), afin d'énoncer le théorème de l'énergie mécanique :

La variation d'énergie mécanique d'un point matériel lors d'un déplacement d'une position A à une position B est égale au travail des forces non-conservatives agissant sur lui lors de ce déplacement :

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{F_{nc}}). \tag{4.22}$$

Il en résulte que si le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique est conservée !

Ce théorème de l'énergie mécanique et celui de l'énergie cinétique sont des outils très puissants de résolution des problèmes de mécanique. Les calculs sont souvent plus aisés que lorsqu'on utilise l'équation différentielle du mouvement (voir chapitre 5).

4.7 Exemples d'utilisation des théorèmes de l'énergie cinétique et mécanique

Chute libre et lancer vertical

Un point matériel de masse m est initialement maintenu immobile à l'altitude z_0. On le lâche et il est alors en chute libre. Initialement, son énergie potentielle gravitationnelle est [10] $E_p(z_0) = mgz_0$. Son énergie cinétique est

10. en choisissant le zéro de cette énergie potentielle au niveau du sol, en $z = 0$.

$E_c(z_0) = 0$. Au niveau du sol : $Ep(0) = 0$ et $E_c(0) = \frac{1}{2}mv(0)^2$. Comme la seule force intervenant, le poids, est conservative, l'énergie mécanique du point matériel est conservée : $E_p(z_0)+E_c(z_0) = E_p(0)+E_c(0)$. On en déduit $mgz_0 = \frac{1}{2}mv(0)^2$, et donc que sa vitesse à son arrivée au sol est $v(0) = \sqrt{2gz_0}$.

Si on lance le point matériel depuis $z = 0$ vers le haut, avec une vitesse initiale verticale v_0, en l'absence de frottement, la conservation de l'énergie mécanique donne $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgz_{\max}$, avec $z_{\max}$ l'altitude maximale atteinte là où la vitesse s'annule. Il s'ensuit que $z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Après la descente, quand le point matériel touche le sol, il a atteint la vitesse v_0 [11].

Glissement horizontal sans / avec frottement

Un point matériel glisse librement à l'horizontale, sans frottement, sur un support. Les seules forces intervenant sont le poids, conservatif, et la force de contact, perpendiculaire au mouvement, et effectuant un travail nul. L'énergie mécanique est donc conservée, $E_{pf} + E_{cf} = E_{pi} + E_{ci}$, où les indices f et i dénotent les états final et initial. Comme E_p est invariant, on en déduit que la vitesse est constante. Cela est bien ce qu'on trouve pour un corps soumis à une résultante des forces nulle, à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

Si on considère maintenant un frottement constant $\vec{F}$ entre le plan et le corps en glissement, le bilan des forces nous donne $\sum \vec{f_i} = \vec{F}$. Calculons la distance d'arrêt si le corps est lancé avec une vitesse initiale v_0. On peut alors écrire : $E_{cf} - E_{ci} = W_{if}(\vec{F}) = -F.x_{\max}$, où $x_{\max}$ est la distance d'arrêt. On a donc $0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -F.x_{\max}$. On en déduit $x_{\max} = \frac{mv_0^2}{2F}$. Si le coefficient de frottement dynamique est μ_d, on obtient $x_{\max} = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}$.

Glissement sur plan incliné sans / avec frottement

On incline d'un angle α par rapport à l'horizontale le plan sur lequel glisse notre point matériel qu'on lance vers le haut suivant la ligne de pente maximale, avec une vitesse initiale v_0. On prend le point de lancement comme origine de l'axe Ox, qui est orienté suivant la ligne de pente maximale. En reprenant le cas sans frottement, et donc conservatif pour les raisons exposées au paragraphe précédent, on trouve cette fois $E_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 = E_m(x_{\max}) = mgh_{\max} = mgx_{\max}\sin\alpha$. Ce qui permet de conclure :

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}. \tag{4.23}$$

11. Montrez-le !

Notez que si $\alpha = 0$, à l'horizontale, on retrouve $x_{\max} = \infty$, puisque la vitesse se conserve. Si $\alpha = \pi/2$, on retrouve $x_{\max} = h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$, qui est le cas du lancer vertical, bien entendu.

Si on inclut un frottement solide avec le support, il faut tenir compte du travail de cette force, $\vec{F} = -\mu_d.mg.\cos\alpha.\vec{e_x}$ (cf Par. 5.6.4) dans le bilan énergétique. On obtient ainsi

$$\Delta E_m = E_m(x_{\max}) - E_m(0) = W\vec{F} = \int_0^{x_{\max}} \vec{F}\vec{dx} = -\mu_d.mg.\cos\alpha.x_{\max}. \tag{4.24}$$

Comme par ailleurs $E_m(x_{\max}) = mg.x_{\max}.\sin\alpha$, et $E_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$, on en déduit [12] :

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha(1 + \frac{\mu_d}{\tan\alpha})}. \tag{4.25}$$

Le deuxième terme du dénominateur représente l'effet du frottement. Sans lui on retrouve bien sûr l'expression de l'Eq. (4.23).

Notez qu'en l'absence de frottement une fois $x_{\max}$ atteint, le mobile entame une redescente, alors qu'avec du frottement solide il se peut qu'il reste en arrêt en $x_{\max}$, car le coefficient de frottement statique μ_s est plus élevé que μ_d. Cela se produit si $\mu_s mg\cos\alpha > mg\sin\alpha$, c'est à dire si $\mu_s > \tan\alpha$.

Oscillation d'un ressort

On considère un ressort de raideur k glissant librement sur un plan horizontal, dont une extrémité est attachée à un mur vertical. On attache une masse ponctuelle m à son extrémité libre. Son élongation est mesurée par $x = l - l_0$, où l_0 est sa longueur au repos.

Son énergie mécanique à un instant quelconque s'écrit

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{4.26}$$

Si on suppose que le ressort est lâché à l'allongement x_m avec une vitesse nulle, on a initialement $E_m(0) = \frac{1}{2}kx_m^2$. La seule force qui travaille, la force de rappel du ressort, est conservative et on peut donc écrire que E_m est conservée. On obtient $v^2 = \frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)$. En $x = \pm x_m$, $v = 0$, alors que la vitesse maximale est atteinte en $x = 0$, et vaut $v = \sqrt{\frac{k}{m}}x_m$. L'énergie du système est purement cinétique au passage à la position d'équilibre, et purement potentielle aux élongations maximales $x = \pm x_m$.

Notez qu'en écrivant la conservation de l'énergie mécanique du système, c'est à dire que la dérivée temporelle de l'expression (4.26) est nulle, on trouve l'équation différentielle du mouvement Eq. (5.30). [13]

12. ... Faites-le !
13. Faites-le !

Chapitre 5

Dynamique du point matériel

La dynamique a pour objet de relier le mouvement d'un corps aux actions mécaniques qu'il subit, via les équations différentielles du mouvement de ce corps dans un référentiel donné.

Dans ce chapitre, nous allons poser les lois de Newton qui permettent de décrire le mouvement d'un corps soumis à des forces, qui sont la cause du mouvement. Nous nous restreindrons toutefois par simplicité à des corps que l'on peut, au moins approximativement, décrire par un point matériel, c'est-à-dire un objet ponctuel affecté d'une masse. C'est pourquoi ce chapitre est intitulé dynamique du point matériel. Cette étude est importante dans la mesure où elle constitue un préalable nécessaire à l'étude des mouvements des corps solides ou déformables.

Nous allons donc voir comment on établit les équations du mouvement d'un point matériel lorsque les forces agissant sur lui sont connues, et comment on résout les plus simples d'entre elles. Notons que la résolution des équations différentielles du mouvement requiert souvent des méthodes numériques. Nous nous restreindrons cependant ici à des problèmes pouvant être résolus analytiquement.

5.1 Référentiel galiléen

Il est assez délicat de définir un référentiel galiléen [1]. On considère en général que le référentiel de Copernic, dont l'origine est le barycentre du système solaire et dont les axes sont définis par les directions de trois étoiles très éloignées, est galiléen. Ainsi, *tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic sont aussi galiléens.*

Toutefois, dans la plupart des applications qui nous préoccupent, le référentiel terrestre, lié à la surface de la terre, peut être considéré comme galiléen

1. On dit aussi un référentiel d'inertie. C'est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique (voir Par. 5.2)

avec une bonne approximation. Ceci revient à négliger le mouvement de rotation de la terre sur elle-même et autour du barycentre du système solaire, par rapport au référentiel de Copernic. Aussi, lorsque nous parlerons de "référentiel du laboratoire" ou de "référentiel terrestre", nous considérerons, sauf mention contraire, que ces référentiels sont galiléens. Notez cependant que la rotation du pendule de Foucault par rapport au laboratoire ou la rotation des vents dans les anticyclones ou dépressions sont des manifestations du caractère non-galiléen du référentiel terrestre [2].

Le temps est absolu en dynamique newtonienne. Il est le même dans tous les référentiels.

5.2 Première loi de Newton : principe d'inertie

Un point matériel qui n'est soumis à aucune action mécanique (force) est dit isolé. La mécanique classique postule qu'il existe une classe particulière de référentiels, dits galiléens, par rapport auxquels un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme. Notons que cela implique que dans cette classe de référentiels, le point matériel a un vecteur vitesse constant, c'est à dire une accélération nulle. Cela implique aussi que sa quantité de mouvement $\vec{p} = \vec{cte}$.

5.3 Deuxième loi de Newton, et équation différentielle du mouvement

La loi fondamentale de la dynamique relie la variation de quantité de mouvement d'un point matériel à la force qui lui est appliquée. Elle s'écrit sous forme d'une équation différentielle, *dans un référentiel galiléen* :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{5.1}$$

où $\vec{F}$ est le vecteur somme de toutes les forces appliquées au point matériel, c'est à dire $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$.

Si la masse du point matériel est constante, alors on peut écrire :

$$m = cte \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{soit} \quad m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{ou encore} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{5.2}$$

2. Ce n'est pas le cas des tourbillons dans les siphons de baignoires ou de lavabos ! Les distances et vitesses y sont trop petites pour être influencées par autre chose que l'agitation résiduelle de l'eau avant le vidage.

5.4 Troisième loi de Newton : action - réaction

Ce principe stipule que si un point matériel M_1 exerce sur M_2 une force $\vec{f_{12}}$, alors M_2 exerce sur M_1 une force égale et opposée, autrement dit $\vec{f_{21}} = -\vec{f_{12}}$. Nous avons vu ce principe lorsque nous avons discuté les interactions fondamentales (voir Par. 1.4) : la pomme attire la Terre comme la Terre attire la pomme. Cela se comprend peut-être mieux si vous pensez à deux personnes debout A et B qui se poussent l'une l'autre, par les paumes de leurs mains par exemple, en restant immobile l'une par rapport à l'autre. La force que A exerce sur B est exactement opposée à la force que B exerce sur A. Cela fonctionne qu'ils soient en mouvement (s'ils patinent sur la glace par exemple), ou qu'ils s'arcboutent sur place. En vertu de ce principe toutes les forces internes s'annulent entre elles dans un système constitué d'un grand nombre de particules, et on peut étudier le mouvement du système global en ne considérant que les forces externes.

5.5 Equation du mouvement et conditions initiales

Prenons le cas général d'un point matériel M de masse m invariante dont on étudie le mouvement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Une fois le bilan des forces effectué, et la résultante [3] des forces calculée, on peut écrire $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$. Cette équation vectorielle permet d'obtenir trois équations scalaires en la projetant sur les trois axes du repère choisi. On choisit bien entendu un système de coordonnées adapté à la symétrie du problème afin de limiter la complexité des calculs. A priori, la résultante des forces peut dépendre du temps t, de la position (x, y, z) et de la vitesse $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= m\ddot{x} \\ F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= m\ddot{y} \\ F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= m\ddot{z} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ces équations donnent donc les trois composantes de l'accélération en fonction du temps, si le champ de force est connu. En procédant par intégrations successives on peut déterminer les trois composantes de la vitesse, puis de la position, en fonction du temps. A chacune de ces intégrations, une constante inconnue apparait, et il nous faut six conditions permettant de les calculer. On utilise souvent une valeur de la position et de la vitesse à un instant donné. C'est ce qu'on appelle les conditions initiales.

3. la somme vectorielle

5.6 Exemples de résolution de problèmes simples de dynamique

Pour résoudre un problème de dynamique classique du point, on procède de la manière suivante :
- Définir le système étudié
- Définir le référentiel, et un repère associé
- Faire le bilan des forces
- Ecrire le principe fondamental de la dynamique, effectuer sa projection sur les axes du repère, puis résoudre par intégrations successives, en utilisant les conditions initiales [4].

Voyons quelques exemples simples.

5.6.1 Chute libre sans vitesse initiale

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m invariante soumis uniquement à l'influence d'un champ de pesanteur constant $\vec{g}$. Il n'y a donc pas de frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et on utilise un repère cartésien.

On peut donc écrire [5]

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad \text{et donc} \quad \vec{a} = \vec{g}. \tag{5.4}$$

La masse n'intervient donc pas dans ce problème ! Si on oriente le repère afin que le plan horizontal du sol soit défini par xOy, la seule direction sur laquelle l'accélération est non nulle est la direction Oz : $a_z = g_z = -g$. Par intégrations successives, on obtient :

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0_x} & \text{puis} \quad x &= v_{0_x} t + x_0 \\ v_y &= v_{0_y} & y &= v_{0_y} t + y_0 \\ v_z &= -gt + v_{0_z} & z &= -\frac{gt^2}{2} + v_{0_z} t + z_0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si on prend comme conditions initiales en $t = 0$, $\vec{OM} = h\vec{e_z}$ et $\vec{v} = \vec{0}$, alors la solution est

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = -\frac{gt^2}{2} + h \tag{5.6}$$

$$v_x = 0 \qquad v_y = 0 \qquad v_z = -gt. \tag{5.7}$$

4. Nous avons vu dans le chapitre 4 que l'on peut résoudre ces problème à l'aide du concept d'énergie, souvent de façon beaucoup plus simple, mais parfois moins complète.

5. Notez qu'en fait on a $m_i\vec{a} = m_g\vec{g}$, avec m_i la masse d'inertie, et m_g la masse gravitationnelle. C'est le principe d'équivalence (Par. 4.1.2) qui nous permet d'écrire $m_i = m_g$.

On peut calculer le temps de chute t_c, en cherchant l'instant où $z = 0$:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{5.8}$$

La vitesse maximale atteinte, juste au moment de toucher le sol, est :

$$v_z(t_c) = -\sqrt{2gh}, \tag{5.9}$$

dont le signe indique qu'elle est dirigée vers le bas, c'est à dire $\vec{v}(t_c) = v_z(t_c).\vec{e_z} = -\sqrt{2gh}.\vec{e_z}$. Donc le module de la vitesse en $z = 0$ est $v = \sqrt{2gh}$, on retrouve ici le même résultat qu'en utilisant les théorèmes énergétiques (chapitre 4).

5.6.2 Tir balistique sans frottement

La situation est la même que précédemment, sauf que le point matériel M est lancé avec une vitesse initiale dans le champ de pesanteur. On a donc toujours l'équation (5.4) et sa solution générale (5.5). La différence est dans les conditions initiales. Pour rester dans un cas simple, si on part de la même position initiale, avec une vitesse en $t = 0$ telle que $(v_{0_x}, 0, 0)$, on trouve

$$x = v_{0_x} t \tag{5.10}$$

$$y = 0 \tag{5.11}$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + h. \tag{5.12}$$

Le mouvement se fait à célérité constante suivant Ox, et de façon uniformément accéléré suivant Oz. La trajectoire [6] du mobile M peut être déterminée en "éliminant" le temps des équations du mouvement. Pour cela on substitue l'expression du temps de l'équation (5.10) $t = x/v_{0_x}$ dans l'équation (5.12), ce qui donne :

$$z = -\frac{g}{2v_{0_x}^2} x^2 + h. \tag{5.13}$$

La trajectoire est donc une portion de parabole. Notez que le temps de chute est inchangé par rapport au cas précédent. La vitesse maximale par contre est différente, car en plus de la composante verticale qui est celle trouvée en (5.9), il y a la composante suivant Ox. Le module de la vitesse en $z = 0$ est $v = \sqrt{v_{0_x}^2 + 2gh}$.

On peut généraliser cette étude au cas d'une vitesse et d'une position initiales quelconques.

6. La trajectoire d'un mobile est l'ensemble des points de l'espace lié à l'observateur que le mobile a parcourus au cours du temps.

5.6.3 Frottement visqueux proportionnel à la vitesse

Le frottement visqueux est exercé par un fluide sur un mobile qui le traverse. C'est une force due aux collisions entre les particules du fluide (gaz ou liquide) et le mobile en mouvement. Il existe différent régimes de frottement fluide. A faible vitesse, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse du mobile par rapport au fluide :

$$\vec{F_f} = -\gamma \vec{v}, \tag{5.14}$$

où la grandeur γ, reliée à la viscosité du fluide, a comme unité SI le kg.s^{-1}. Pour des vitesses plus importantes, le frottement est plutôt proportionnel au carré de la vitesse.

Prenons le cas d'un mobile de masse m invariante en mouvement à faible vitesse dans un fluide, sous l'influence d'un champ de pesanteur uniforme. Un bilan des forces nous permet d'écrire l'équation différentielle du mouvement :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \gamma \vec{v}, \tag{5.15}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\gamma}{m}\vec{v}. \tag{5.16}$$

Notez qu'ici la masse intervient. Si la force de frottement est fixée [7], on voit que le corps en mouvement sera d'autant moins sensible à cette force de frottement que sa masse, et donc son inertie, sera élevée. Dans sa chute, une bouteille pleine accélère plus rapidement qu'une bouteille vide !

Nous allons nous placer ici dans le cas simple de la chute verticale avec vitesse initiale verticale.

L'intégration de l'équation différentielle (5.16) est plus complexe que ce que nous avons vu jusqu'ici. Cependant votre cours de calculus vous permet de le faire, car c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Une fois projetée sur la direction Oz [8], elle s'écrit en effet :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m}v = -g. \tag{5.17}$$

La solution homogène, sans second membre est :

$$v_h = A\exp(-\frac{\gamma}{m}t). \tag{5.18}$$

7. En plus de la viscosité du fluide, elle dépend essentiellement de la taille, de la forme et de l'état de surface du mobile.

8. Les projections sur Ox et Oy donnent identiquement 0 car il n'y a pas de force dans le plan xOy, et la vitesse initiale n'a pas de composante dans xOy.

L'équation (5.17) a pour solution particulière $v_p = cte$. En introduisant cette solution dans l'équation, on obtient :

$$v_p = -\frac{gm}{\gamma}. \tag{5.19}$$

La solution générale est donc :

$$v = A\exp(-\frac{\gamma}{m}t) - \frac{gm}{\gamma}. \tag{5.20}$$

Il reste à déterminer la constante d'intégration en utilisant la condition initiale $v(0) = v_0$. On obtient :

$$A = v_0 + \frac{gm}{\gamma} \tag{5.21}$$

et donc :

$$v = (v_0 + \frac{gm}{\gamma})\exp(-\frac{\gamma}{m}t) - \frac{gm}{\gamma}. \tag{5.22}$$

On remarque que, partant de la vitesse initiale v_0, le mobile voit sa vitesse tendre asymptotiquement vers une vitesse limite égale à $-\frac{gm}{\gamma}$. La vitesse initiale est "oubliée". Si le mobile a une vitesse initiale plus grande que la vitesse limite, il ralentit, sinon il accélère.

Notez que l'on peut trouver cette vitesse limite sans intégrer l'équation différentielle. Il suffit pour cela de poser $dv/dt = 0$ dans l'équation (5.17), c'est à dire chercher la condition pour une accélération nulle et donc une vitesse constante. Cela correspond à $m\vec{g} + \vec{F_f} = 0$.

Physiquement on comprend bien pourquoi il existe une vitesse limite : la force de pesanteur dirigée vers le bas, dans le sens du mouvement, est constante, alors que la force de frottement s'oppose au mouvement, et augmente avec la vitesse. Il existe donc forcément une vitesse ou les deux forces sont de module égal, et de sens opposé, conduisant à une accélération nulle, et donc à la vitesse limite !

5.6.4 Glissement / équilibre sur un plan incliné

On considère un point matériel de masse m posé sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. On souhaite déterminer si le point matériel glisse ou non en fonction de l'angle α, connaissant le coefficient de frottement statique, μ_s.

Le point est soumis à deux forces : le poids $\vec{P}$ et la force de contact avec le plan, $\vec{C}$, qui peut elle-même être décomposée en force normale, $\vec{C_n}$, et force de frottement, $\vec{C_t}$. On obtient :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{C}. \tag{5.23}$$

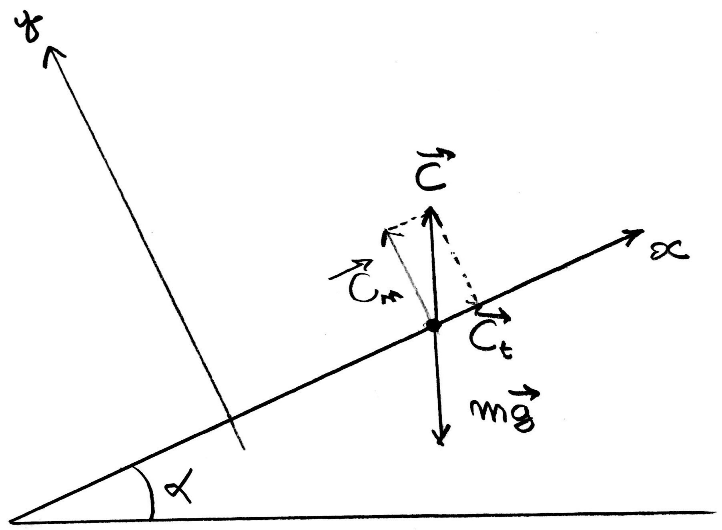


FIGURE 5.1 – point matériel à l'équilibre sur un plan incliné avec frottement.

En adoptant un repère tel que sur la Fig. 5.1, les projections sur Ox et Oy amènent :

$$m\ddot{x} = C_t - mg\sin\alpha \tag{5.24}$$

$$0 = -mg\cos\alpha + C_n. \tag{5.25}$$

La composante normale est constante et vaut $C_n = mg\cos\alpha$.

condition d'immobilité

La condition d'immobilité s'écrit $C_t = mg\sin\alpha$, et donc on trouve dans ce cas $\frac{C_t}{C_n} = \tan\alpha$. Or on sait qu'en condition statique, le coefficient de frottement impose $\frac{\|\vec{C}_t\|}{\|\vec{C}_n\|} < \mu_s$.

On trouve finalement que pour que le point matériel reste immobile il faut que $\tan\alpha < \mu_s$. Si cette condition n'est pas réalisée, il se met en mouvement.

glissement

Si l'angle α dépasse la condition d'équilibre, il y a glissement, et il faut remplacer μ_s par le coefficient de frottement dynamique μ_d dans les équations, avec la condition $\frac{\|\vec{C_t}\|}{\|\vec{C_n}\|} = \mu_d$. L'équation (5.24) devient

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha, \tag{5.26}$$

qu'on intègre une première fois pour obtenir :

$$\dot{x} = gt(\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha) + cte. \tag{5.27}$$

Si on fixe l'instant initial de glissement comme origine du temps, la vitesse initiale est nulle et donc la constante d'intégration vaut 0. Comme il y a glissement, $\tan\alpha > \mu_s$ et puisque $\mu_s > \mu_d$, on a $\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha < 0$, et par conséquent $\dot{x} < 0$. Le mobile glisse bien dans la direction Ox négative. En intégrant une deuxième fois, on trouve :

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}(\mu_d\cos\alpha - \sin\alpha), \tag{5.28}$$

en plaçant l'origine des axes à la position du mobile en début de glissement, à t=0.

5.7 Oscillateur harmonique : exemple du ressort horizontal sans frottement

L'oscillateur harmonique [9] est un modèle fondamental en physique. On le retrouve dans l'étude des oscillateurs mécaniques tel le pendule, les oscillateurs électriques comme les circuits RLC, la vibration des molécules, les ondes, etc.

Nous considérons ici uniquement l'exemple d'un ressort posé sur un plan horizontal sans frottement, attaché à une extrémité à un mur vertical, avec une masse fixé à son autre extrémité. La masse n'intervient ici que pour son inertie, car le poids s'exerce dans la direction verticale et est compensé par la force de contact du plan $\vec{C}$. Le mouvement s'effectue dans la direction horizontale, suivant l'axe Ox. La longueur à vide du ressort est l_0. Le ressort est étiré puis lâché sans vitesse initiale.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, dans le référentiel fixé au sol :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{C} + \vec{T}, \tag{5.29}$$

avec $\vec{T}$ la force de rappel du ressort. La projection sur l'axe Ox donne, en opérant le changement de variable $x = l - l_0$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \tag{5.30}$$

9. et ses généralisations amorti, excité, et anharmonique

où k est la constante de raideur du ressort. Ceci est l'équation de l'oscillateur harmonique, valable dans le cadre des approximations faites ici : ressort idéal linéaire sans masse, et absence de frottement. La solution peut s'écrire [10] :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{5.31}$$

avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation de l'oscillateur, d'unité SI la s^{-1}, et l'amplitude A et la phase ϕ fixées par les conditions initiales. Si la vitesse initiale est nulle et l'élongation initiale $l(t=0) - l_0 = x_0$, on a : $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. Le mouvement est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

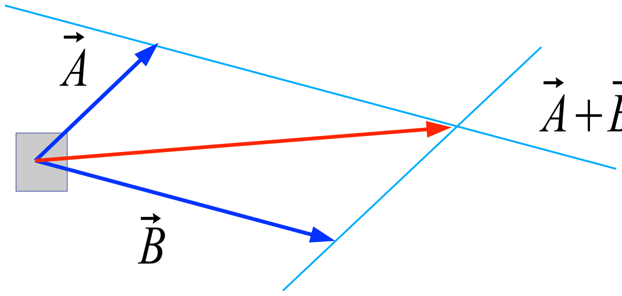
10. voir votre cours de calculus

Chapitre 6

Annexe 1 : Rappels sur les vecteurs

Addition des vecteurs

Comment additionner deux forces appliquées au même point ?



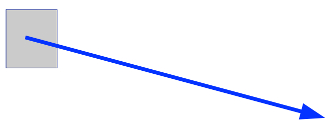
Règle du parallélogramme

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

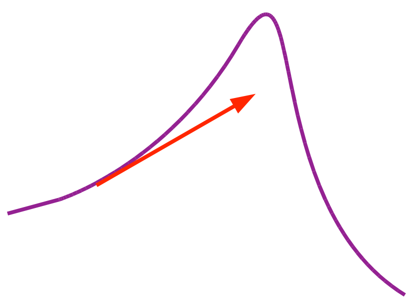
Rappels sur les vecteurs

Les vecteurs : représentation mathématique de quantités possédant une intensité et une direction

Force

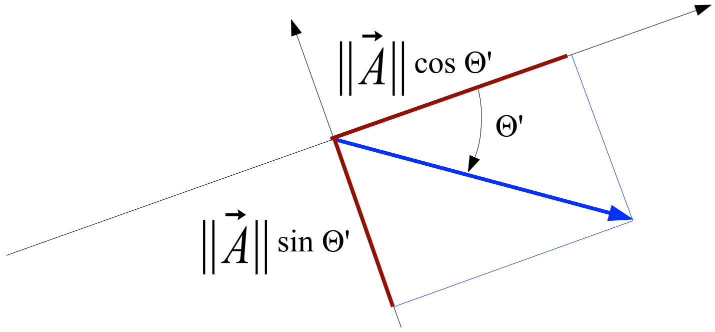


vitesse



Coordonnées des vecteurs

Le repère peut être librement choisi

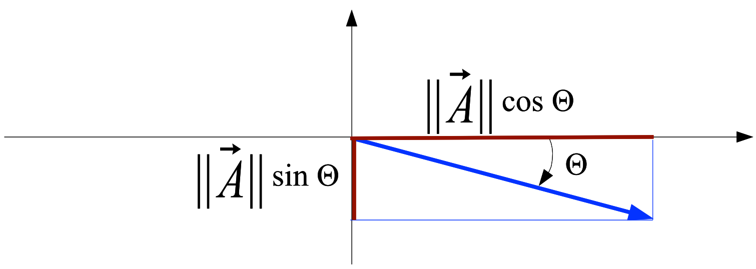


$$\vec{A} = \left(\|\vec{A}\| \cos \Theta' \,,\, \|\vec{A}\| \sin \Theta' \right)$$

$$A_x = \|\vec{A}\| \cos \Theta'$$
$$A_y = \|\vec{A}\| \sin \Theta'$$

Coordonnées des vecteurs

Un vecteur = deux nombres - notion de repère

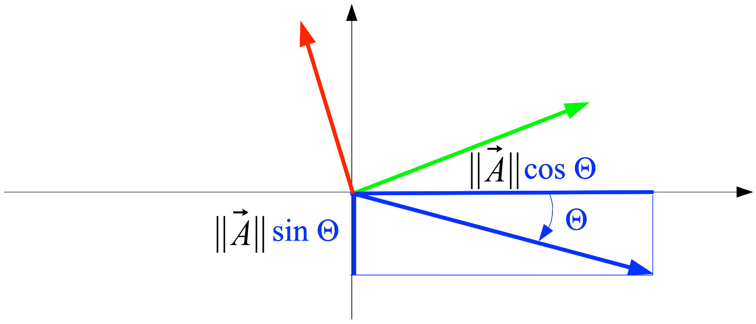


$$\vec{A} = \left(\|\vec{A}\| \cos \Theta \,,\, \|\vec{A}\| \sin \Theta \right)$$

$$A_x = \|\vec{A}\| \cos \Theta$$
$$A_y = \|\vec{A}\| \sin \Theta$$

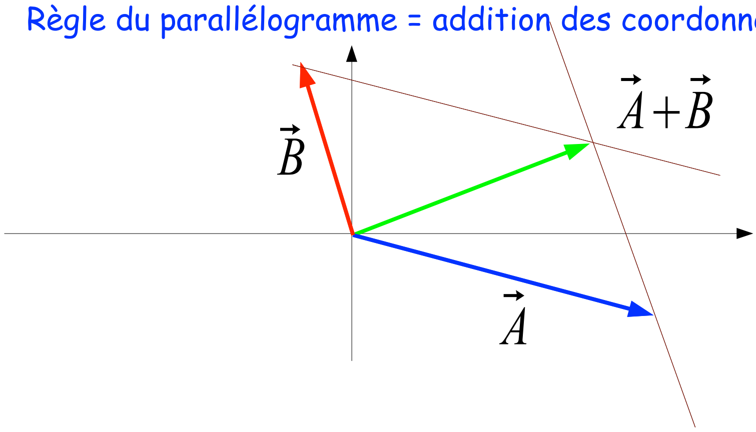
Coordonnées et addition des vecteurs

Règle du parallélogramme = addition des coordonnées



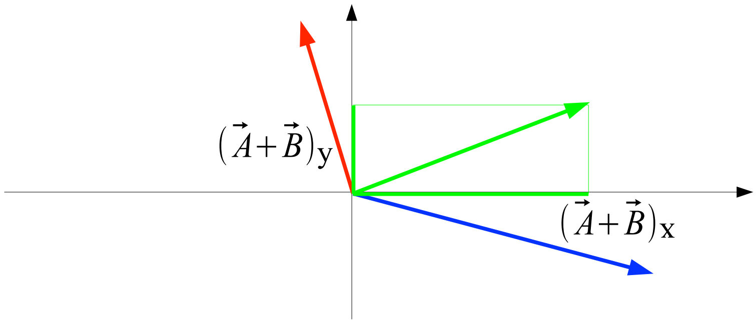
Coordonnées et addition des vecteurs

Règle du parallélogramme = addition des coordonnées



Coordonnées et addition des vecteurs

Règle du parallélogramme = addition des coordonnées

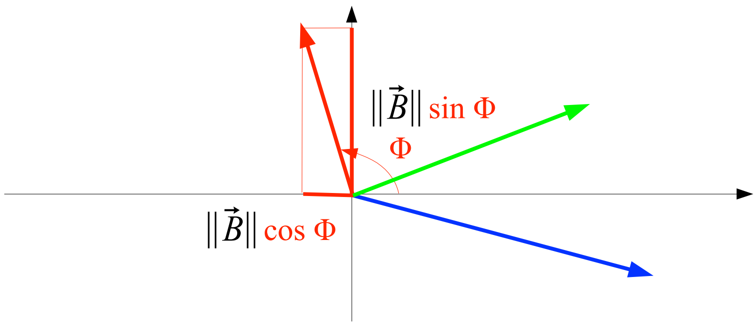


$$(\vec{A}+\vec{B})_x = \|\vec{A}\| \cos \Theta + \|\vec{B}\| \cos \Phi$$

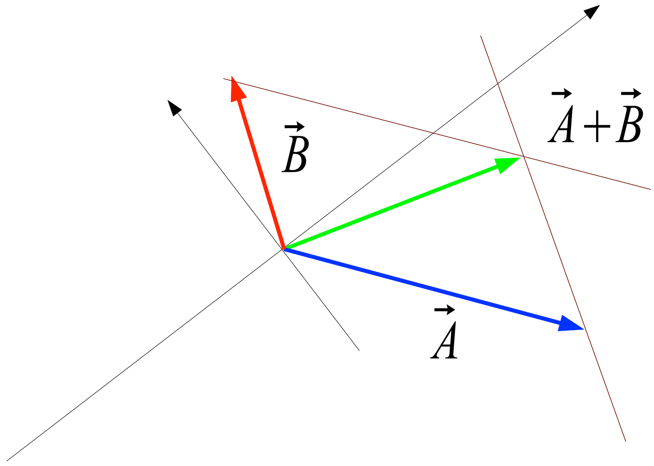
$$(\vec{A}+\vec{B})_y = \|\vec{A}\| \sin \Theta + \|\vec{B}\| \sin \Phi$$

Coordonnées et addition des vecteurs

Règle du parallélogramme = addition des coordonnées



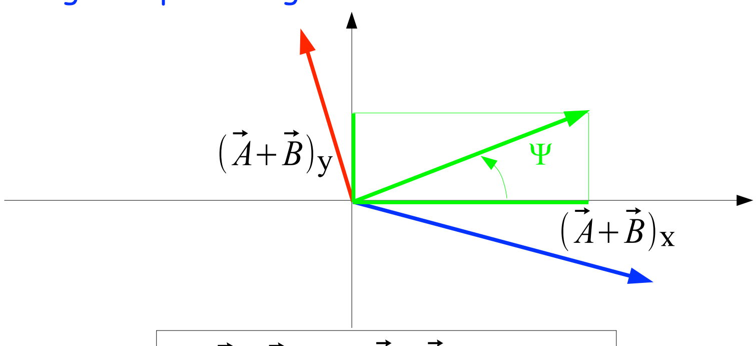
Coordonnées et addition des vecteurs



Le choix du référentiel est indifférent pour l'addition

Coordonnées et addition des vecteurs

Règle du parallélogramme = addition des coordonnées

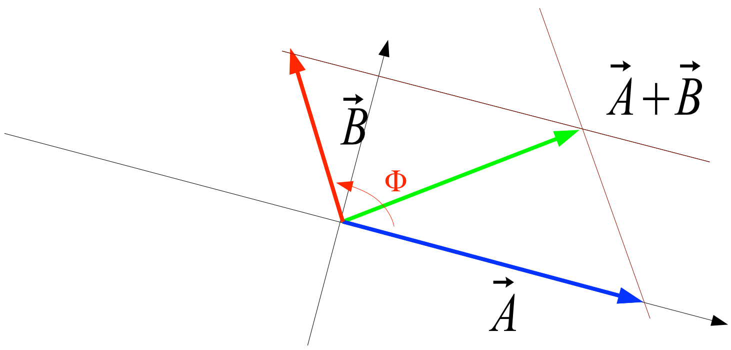


$$(\vec{A}+\vec{B})_x = \|\vec{A}+\vec{B}\| \cos\Psi$$
$$(\vec{A}+\vec{B})_y = \|\vec{A}+\vec{B}\| \sin\Psi$$

On peut obtenir $\Psi = \arctan\left(\dfrac{(\vec{A}+\vec{B})_y}{(\vec{A}+\vec{B})_x}\right)$, puis $\|\vec{A}+\vec{B}\| = (\vec{A}+\vec{B}) \,/\cos\Psi$

Coordonnées et addition des vecteurs

Un exemple de choix judicieux de coordonnées



On fait coïncider un des axes avec la direction d'un des vecteurs

$\Theta = 0$ **Un angle en moins !**
Φ est directement l'angle entre les deux vecteurs !

Table des matières