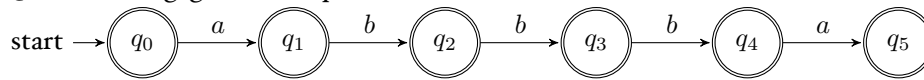


Modèles de calcul
Université de Montpellier
TD 1 bis

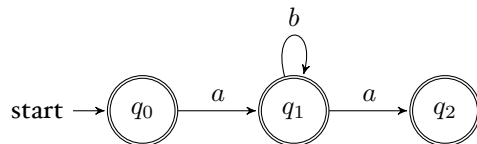
Exercice 1 Préfixes

Soit x un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$. Rappel : on note $|A|$ la cardinalité d'un ensemble A et $|x|$ la longueur du mot x .

1. Que représente l'ensemble $P_x = \{y, y \prec x\}$?
2. Exprimez $|P_x|$ en fonction de $|x|$. Justifiez.
3. Montrez que $P_x \subseteq P_y \Leftrightarrow x \prec y$.
4. Montrez que $P_x \subsetneq P_y \Leftrightarrow x \not\prec y$.
5. Montrez que la fonction $x \mapsto P_x$ est injective.
6. Quel est le langage reconnu par l'automate suivant?



7. Les préfixes du mot $abbba$ sont-ils des mots reconnus par l'automate suivant?



Soit R le langage reconnu par cet automate. A-t-on $R \subseteq P_{abbba}$, $P_{abbba} \subseteq R$, $P_{abbba} = R$?

Exercice 2 Sous-mots

On dit que x est un *sous-mot* de y , ce qu'on note $x \sqsubseteq y$, si $\exists u, v \ y = uxv$. Dans cet exercice l'alphabet est $\{a, b\}$.

1. Combien le mot $aabbaa$ a-t-il de sous-mots de longueur 0, 1, 2, ... 6
2. Trouvez un mot de longueur n qui a un seul sous-mot de chaque longueur.
3. Montrez que si x a exactement 2 sous-mots de longueur 2, alors $(aa \sqsubseteq x \Rightarrow \forall u \ aua \neq x)$.
4. Montrez que si x a exactement 2^{n+1} sous-mots de longueur $n+1$, alors il a exactement 2^n sous-mots de longueur n .
5. On note $M_x = \{y, y \sqsubseteq x\}$. Montrez que $\{x, M_x = P_x\} = \{x, ab \not\sqsubseteq x\} \cap \{x, ba \not\sqsubseteq x\}$.

Exercice 3 Commutativité

On observe que la concaténation n'est pas une opération commutative. En d'autres termes, il peut arriver que $uv \neq vu$ pour certains mots u, v . Par exemple $ab \neq ba$.

1. Trouvez deux mots distincts, u et v , tels que $uv = vu$.
2. Trouvez un mot x tel que, pour tout mot y , $xy = yx$.
3. Pour tout mot y , trouver un mot x tel que $xy = yx$.
4. Trouver un mot x tel que pour tout mot y , $xy = yx$.

5. Montrez que : z et t sont deux mots tels que $zt = tz$ si et seulement si les mots z et t sont puissance d'un même mot.

Exercice 4 Calculons plus

Soit x un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Trouvez des solutions aux jeux de Post suivants pour $x = abab$, $x = aaabbb$ et $x = abbabaab$. Quel calcul est effectué?

Note : x est un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$, mais d'autres lettres sont autorisées dans les tuiles : c et d .

- 1.
- | |
|--------|
| $c\ x$ |
| c |
- | |
|--------|
| $a'a'$ |
| a |
- | |
|--------|
| $b'b'$ |
| b |
- | |
|--------|
| d |
| $a'a'$ |
- | |
|--------|
| d |
| $b'b'$ |
- | |
|------|
| d |
| dd |
- 2.
- | |
|--------|
| $c\ x$ |
| c |
- | |
|--------|
| $a'a'$ |
| a |
- | |
|-----|
| |
| b |
- | |
|------|
| d |
| a' |
- | |
|------|
| d |
| b' |
- | |
|------|
| d |
| dd |

Exercice 5 Encore des jeux de Post

Trouvez des solutions au jeu de Post suivants :

- 1.
- | |
|--------|
| 111110 |
| 1 |
- | |
|--------|
| 1 |
| 011111 |
- 2.
- | |
|-------|
| a |
| baa |
- | |
|------|
| ab |
| aa |
- | |
|-------|
| bba |
| bb |

Pouvez-vous trouver une solution à ces jeux?

- 3.
- | |
|-------|
| baa |
| b |
- | |
|-------|
| a |
| baa |
- | |
|------|
| b |
| aa |
- 4.
- | |
|-----|
| 110 |
| 1 |
- | |
|---|
| 1 |
| 0 |
- | |
|-----|
| 0 |
| 110 |

A faire si vous en avez le temps.

Voici encore d'autres jeux à essayer, sans garantie :

- 5.
- | |
|-----|
| 111 |
| 110 |
- | |
|-----|
| 011 |
| 1 |
- | |
|-----|
| 10 |
| 100 |
- | |
|----|
| 0 |
| 11 |
- 6.
- | |
|------|
| 1101 |
| 1 |
- | |
|------|
| 0110 |
| 11 |
- | |
|-----|
| 1 |
| 110 |