Correction TD3 HLMA101

1 Echauffement

Question 1

(a) Faux. $2 \in A$ n'est pas relié à un élément de B.

(b) Faux. L'application est définie de A dans B. Donc $c \longmapsto 2$ ne convient pas car c appartient à l'espace d'arrivé et non de départ.

(c) Faux. $1 \in A$ est relié à deux éléments de B.

(d) Vrai. Tout élément de A est relié à un unique élément de B.

Question 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$

(b) $\exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$

(c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists\, x \in [50; +\infty[,\ f^{-1}(x) > M$

Question 3

- $[-1; 0[$
  - sup = 0 car l'ensemble des majorants est : $[0; +\infty[$
  - inf = -1 car l'ensemble des minorants est : $]-\infty; -1]$
  - p.g.é = $\times$ car $0 \notin [-1; 0[$
  - p.p.é = -1 car -1 est le plus grand des minorants et $-1 \in [-1; 0[$
- $]-2; +\infty[$
  - sup = $\times$
  - inf = -2

- p.g.é $= \times$
- p.p.é $= \times$

- $\mathbb{N} = [0; +\infty[$
  - sup $= \times$
  - inf $= 0$
  - p.g.é $= \times$
  - p.p.é $= 0$

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ x = \frac{1}{n}\}$
  - sup $= 1$
  - inf $= 0$
  - p.g.é $= 1$ car $1 \in A$ et $\forall\, n \geqslant 1,\ \frac{1}{n} \leqslant 1$
  - p.p.é $= \times$

Montrons que $\inf(A) = 0$.
Soit M un minorant de A. Alors $M \leqslant \frac{1}{n}\ \forall\, n \geqslant 1$. D'où en faisant tendre n vers $+\infty[$, on a : $M \leqslant 0$ L'ensemble des minorants de A est : $]-\infty; 0]$.
Le plus grand des minorants de A est 0 d'où $\inf(A) = 0$.

Montrons qu'il n'existe pas de p.p.é dans A. En raisonnant par l'absurde:
On suppose qu'il existe $\alpha =$ p.p.é de A. Puisque α est le p.p.é de A, $\frac{1}{n} \geqslant \alpha\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Quand $n \longrightarrow \infty$, on a alors : $0 \geqslant \alpha$.
D'autre part, puisque α est le p.p.é de A alors $\alpha \in A$. Donc $\exists\, n_0$ tel que $\alpha = \frac{1}{n_0}$. D'où $\alpha = \frac{1}{n_0} > 0$. Contradiction.
Conclusion : il n'existe pas de p.p.é de A.

Question 4

(a) Faux. La borne sup d'un ensemble A est par définition le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. Donc, si A admet une borne sup X alors X majore A, i.e. A est majoré.

(b) Faux. Contre-exemple : $A = [2; 4[$
A admet une borne sup qui vaut 4 mais A n'admet pas de plus grand élément ($4 \notin A$).

(c) Faux. Contre-exemple : $A =]-\infty; 18]$
A est infini et A admet une borne sup qui vaut 18.

(d) Faux. Contre-exemple : $A = [1; 2]$
A est borné mais A n'est pas fini (i.e. A est infini).

Feuille 3 – Exos de TD 1 à 5.
(corrigé de L. Guieu)

EX1 : Soit $x \in \mathbb{R}$, la quantité $f(x) = x^2 - 3$ est toujours définie. En revanche la quantité $g(x) = \sqrt{x+3}$ n'est définie que pour $x + 3 \geqslant 0$, ie : pour $x \in I$ où I est l'intervalle $[-3, +\infty[$. On peut donc définir :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3 \qquad \text{et} \qquad g : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x+3}.$$

(Mais on pourrait choisir d'autres ensembles de départ et d'arrivée...).

Dans ce cas $g \circ f$ n'est pas définie car l'ensemble d'arrivée de f ne coïncide pas avec l'ensemble de départ de g. Par contre $f \circ g$ est bien définie :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dr, "f"] & \\ I \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

on a alors : $\forall x \in I$,
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= g(x)^2 - 3 \\ &= \left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 3 \\ &= x + 3 - 3 \\ &= x \end{aligned}$$

Mais la question : $f \circ g \overset{?}{=} g \circ f$ n'a pas ici de sens.

Modifions un peu f en remarquant que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3 \geqslant -3$ (car $x^2 \geqslant 0$)

autrement dit : $x^2 - 3 \in I$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose alors :

$\tilde{f} : \mathbb{R} \to I : x \mapsto x^2 - 3$. Attention : $\tilde{f} \neq f$!

Cette fois on peut composer $\tilde{f}$ et g dans les deux sens :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ I \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\tilde{f} \circ g"'] & & I \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[rr, "g \circ \tilde{f}"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$(\tilde{f} \circ g)(x) = \underline{\underline{x}}$

⚠

$(g \circ \tilde{f})(x) = g(\tilde{f}(x)) = g(x^2 - 3) = \sqrt{(x^2-3)+3} = \sqrt{x^2} = \underline{\underline{|x|}}$

$\tilde{f} \circ g \neq g \circ \tilde{f}$ car, par exemple, elles n'ont pas le même ensemble de départ.

On remarque que dans ce cas, elles n'ont pas non plus le même ensemble d'arrivée et elles n'ont pas non plus le "même $f(x)$".

Donc : se méfier du produit de composition : $f \circ g$ n'existe pas toujours, $f \circ g$ peut exister sans que $g \circ f$ n'existe. Encore pire : $f \circ g$ et $g \circ f$ peuvent coexister et ne pas être égales (ce qui arrive en fait très souvent !).

EX2 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - 3x$.

Avant toutes choses, étudions les variations de f. f est dérivable (polynôme) et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On arrive ainsi au tableau de variations suivant : (on remarquera aussi que f est impaire)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

• Sur $[-1,1]$ f est continue strictement décroissante et on a donc :

$$f([-1,1]) = \{f(x) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} = [f(1), f(-1)] = [-2,2]$$

• On remarque ensuite que $\mathbb{R}_+^* =]0,1] \cup [1,+\infty[$, donc :

$$f(\mathbb{R}_+^*) = f(]0,1] \cup [1,+\infty[) = f(]0,1]) \cup f([1,+\infty[) = [-2,0[\cup [-2,+\infty[$$

$$= [-2,+\infty[$$

- Déterminons la préimage $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$: Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$x \in f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \iff f(x) < 0 \iff x^3 - 3x < 0$$

$$\iff x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) < 0$$

Un petit tableau de signe va nous aider :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x \in f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \iff x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$

$$f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]0, \sqrt{3}\right[$$

- Déterminons $f^{-1}(]-2, +\infty[)$. On pourrait essayer une méthode graphique : $f^{-1}(]-2, +\infty[)$ est l'ensemble des réels x tels que $f(x) > -2$. L'idée est de dessiner le graphe de f dans un repère, de dessiner la droite horizontale d'équation $y = -2$ et de ne considérer que la partie du graphe de f située strictement au-dessus de cette droite. On cherche alors les x tels que le point $(x, f(x))$ soit sur cette partie du graphe... (Exo de dessin !).

Autre méthode : $f(x) > -2 \iff \underbrace{x^3 - 3x + 2}_{p(x)} > 0$. On remarque que $p(x)$ admet 1 pour racine évidente. En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, $p(x)$ se réécrit ainsi : $p(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$. Puis avec un calcul de discriminant sur le second facteur, on arrive à :

$$p(x) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2).$$ Il vient alors :

$$x \in f^{-1}(]-2, +\infty[) \iff p(x) > 0 \iff (x-1)^2(x+2) > 0 \iff x \neq 1 \text{ et } x > -2$$

$$\iff x \in]-2, +\infty[\text{ et } x \neq 1$$

$$\iff x \in]-2, 1[\cup]1, +\infty[.$$

- La fonction f n'est pas injective, puisque $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0$.
- La fonction f est en revanche surjective :

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}^*_+ \cup \mathbb{R}^*_- \cup \{0\}) = \underbrace{f(\mathbb{R}^*_+)}_{\substack{= \\ ]-2,+\infty[\\ \text{(déjà calculé)}}} \cup \underbrace{f(\mathbb{R}^*_-)}_{\substack{= \\ ]-\infty,2[\\ \text{(par symétrie)}}} \cup \underbrace{f(\{0\})}_{\substack{= \\ \{0\}}} =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

- La fonction f n'est pas bijective, car non injective.

Ex3 : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, "g"] & \\ E \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & G \end{tikzcd}$$

(i) Supposons $g\circ f$ injective.
Montrons que f l'est aussi. Soient donc x et x' dans F et supposons que $f(x) = f(x')$. Alors on a aussi $g(f(x)) = g(f(x'))$ càd : $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$. Mais $g\circ f$ étant injective, on a alors $x = x'$. cqfd. □

(ii) Supposons $g\circ f$ surjective. Montrons que g l'est également, càd : que tout élément z de G possède un antécédent $y \in F$ par g.
Soit $z \in G$. Comme $g\circ f$ est surjective, on peut trouver x dans E tel que $z = (g\circ f)(x)$.
Donc $z = g(y)$ avec $y = f(x) \in F$. cqfd □

Autre méthode : comme $g\circ f$ est surjective, $(g\circ f)(E) = G$; ce qui s'écrit aussi : $g(f(E)) = G$. De plus $f(E) \subset F$ donne $g(f(E)) \subset g(F)$.
Finalement $G \subset g(F)$. Il est d'autre part clair que $g(F) \subset G$.
On en conclut que $g(F) = G$. □

Ex4 : Ici $f : E \to F$ est une application. A_1 et A_2 sont des parties de E et B_1, B_2 des parties de F.

(a) $\boxed{f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)}$

D'une part : $\begin{cases} A_1 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2) \\ A_2 \subset A_1 \cup A_2 \Rightarrow f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2) \end{cases}$

Donc : $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ ▽

Réciproquement : Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Alors $y = f(a)$ avec $a \in A_1 \cup A_2$.

Donc : $y = f(a_1)$ avec $a_1 \in A_1$ <u>ou</u> $y = f(a_2)$ avec $a_2 \in A_2$.

Ainsi $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. □

(b) $\boxed{f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)}$

$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ et $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ donnent : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ et $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$.

Donc $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

<u>Remarque :</u> <u>Si</u> f est <u>injective</u>, l'inclusion réciproque est vraie.

En effet, si $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, alors $y = f(a_1) = f(a_2)$ avec $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$.

Comme f injective, ceci entraîne $a_1 = a_2 = a$ et $a \in A_1 \cap A_2$.

Donc $y \in f(A_1 \cap A_2)$. □

<u>Contre-exemple à :</u> $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ (dans le cas général)

On veut trouver un f tel que $f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$. D'après notre remarque, ~~un~~ tel f doit être <u>non injectif</u>. Considérons donc la fonction valeur absolue : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ et choisissons

$A_1 = [-1, 0]$ $A_2 = [0, 1]$, on a :

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$$

et

$$f(A_1) \cap f(A_2) = f([-1,0]) \cap f([0,1]) = [0,1] \cap [0,1] = [0,1].$$

On a bien $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ dans ce cas. □

(c) $\boxed{f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)}$

On peut raisonner directement par équivalence : soit $x \in E$

$x \in \overset{-1}{f}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff f(x) \in B_1$ ou $f(x) \in B_2 \iff x \in \overset{-1}{f}(B_1)$ ou $x \in \overset{-1}{f}(B_2)$

$\iff x \in \overset{-1}{f}(B_1) \cup \overset{-1}{f}(B_2)$ □

Pour établir $\boxed{\overset{-1}{f}(B_1 \cap B_2) = \overset{-1}{f}(B_1) \cap \overset{-1}{f}(B_2)}$, le raisonnement est analogue

(en remplaçant $\cup$ par $\cap$ et "ou" par "et"). □

Ex 5 : Hyp : A et B sont des parties non vides de $\mathbb{R}$ et majorées.

Donc : sup(A) et sup(B) existent dans $\mathbb{R}$. De plus $A \cup B$ est non vide

(car A, non vide, est inclus dans $A \cup B$) et $A \cup B$ est majorée :

Soit M_A un majorant de A et M_B un majorant de B, alors $\max(M_A, M_B)$

est un majorant de $A \cup B$: $\left.\begin{array}{l}\forall a \in A,\ a \leq M_A \\ \forall b \in B,\ b \leq M_B\end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in A \cup B,\ x \leq \max(M_A, M_B)$.

Donc $\sup(A \cup B)$ existe aussi.

On utilisera les notations suivantes : $\left\{\begin{array}{ll} s_A = \sup(A) & s_B = \sup(B) \\ \sigma = \sup(A \cup B) & M = \max(s_A, s_B)\end{array}\right.$

On veut montrer : $\sigma = M$.

Etape 1 : s_A majore A et s_B majore B, donc M majore $A \cup B$.
Mais σ est le plus petit des majorants de $A \cup B$. Donc $\sigma \leq M$.

Etape 2 : On va utiliser le résultat suivant que l'on démontrera à la fin :
" Si A et A' sont deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, alors :

$$A \subset A' \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(A') \text{''} \qquad (*)$$

(on peut alléger les hypothèses en supposant seulement : $A \neq \emptyset$ et A' majorée)

Revenons à l'exo :

$A \subset A \cup B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(A \cup B)$
$B \subset A \cup B \Rightarrow \sup(B) \leq \sup(A \cup B)$
donc : $\max(s_A, s_B) \leq \sigma$

càd : $M \leq \sigma$.

Conclusion : $\sigma = M$. cqfd.

Annexe : Démontrons ⊛. $\sup(A')$ majore A', donc en particulier A :

$\forall a \in A$, $a \in A'$ donc $a \leq \sup(A')$. Mais $\sup(A)$ est le + petit des majorants de A, d'où $\sup(A) \leq \sup(A')$. $\square$.

- Etude de $\sup(A \cap B)$: hyp supplémentaire : $A \cap B \neq \emptyset$

$A \cap B \subset A$ et A est majorée. donc $A \cap B$ aussi. Comme $A \cap B$ est majorée, non vide, $\sup(A \cap B)$ existe. Notons le S.

(I) $\boxed{S \leq \min(s_A, s_B)}$

$A \cap B \subset A \Rightarrow \sup(A \cap B) \leq \sup(A)$
$A \cap B \subset B \Rightarrow \sup(A \cap B) \leq \sup(B)$
donc : $S \leq \min(s_A, s_B)$.

(II) $\boxed{\text{On peut trouver un } A \text{ et un } B \text{ tels que } S < \min(s_A, s_B)}$

Prenons : $A = [0,1] \cup [2,3]$ et $B = [0,1] \cup [4,5]$. On a alors :

$s_A = 3$
$s_B = 5$
$\min(s_A, s_B) = 3$ et $A \cap B = [0,1]$, $\sup(A \cap B) = 1$

$$S = 1 < 3 = \min(s_A, s_B).$$

Moralité : En général, il n'y a pas égalité de $\sup(A \cap B)$ et $\min(s_A, s_B)$

Se méfier des généralisations abusives !