Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- **La sémantique de la LP**
  - **Interprétation, Modèle**
  - **Satisfiabilité, Validité**
  - **Table de vérité**
- Équivalence logique et Substitution
- Conséquence logique
- Méthode des séquents
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode de Davis et Putnam
- Initiation à la logique des prédicats

Sémantique formelle

- On différencie sémantique formelle et sémantique intuitive
  - La sémantique formelle consiste à associer des structures particulières prises dans une théorie mathématiques (le plus souvent celle des ensembles) à chaque élément de syntaxe : on parle d'interprétation
  - Le « sens formel » (la valeur) d'une fbf est alors calculé à partir de l'interprétation de ses composants (*les symboles, constantes et connecteurs*)

si	p	s'interprète par	vrai
	¬	s'interprète par	vrai ↦ faux , faux ↦ vrai
alors	¬p	vaut	faux

  - La sémantique intuitive consiste à associer une notion du monde réel à chaque élément de syntaxe : on parle de représentation

p	représente	*« jean est en cours »*
¬	représente	*« la négation »*
¬p	intuitivement signifie	« *jean n'est pas en cours* »

Sémantique formelle de la logique classique

- La logique **classique** est bivalente :
  - Donner un « sens formel » aux fbf c'est donc leur associer une valeur prise dans un ensemble à deux éléments Bool={0,1} (ou {faux,vrai}…) appelés les « valeurs de vérité »
  - Ce sens ne peut être déterminé qu'après avoir **choisi** une interprétation des symboles propositionnels de S : une application de S dans Bool
  - L'interprétation des connecteurs est **fixée** par la logique utilisée. Pour la logique classique des propositions elle se limite aux opérations réalisables sur Bool : le calcul booléen

Interprétation

- Une interprétation I est une application de S dans Bool
  - Soit S = {p,q,r} un exemple I d'interprétation est I(p)=1, I(q)=0, I(r)=1
  - Si S est de taille n, il y a **2^n** interprétations différentes

    I'(p)=0, I'(q)=0, I'(r)=0 … I''(p)=1, I''(q)=1, I''(r)=1

- Lien avec l'intuition
  - Si la sémantique intuitive associée aux symboles de S est :
    - p représente « *Jean est en cours* »
    - q représente « *Il fait beau* »
    - r représente « *on est en septembre* »

  Alors l'interprétation **I** représente un des 8 mondes possibles où *il est vrai que Jean est en cours* et *il est vrai qu'on est en septembre* mais *il est faux qu'il fait beau*.

Sémantique classique des connecteurs

- Il s'agit de fixer les fonctions sur Bool qui vont interpréter les connecteurs et correspondre à nos intuitions

$f : B^n \rightarrow B$ (où n est l'arité du connecteur)

- Des fonctions d'arité 0 pour les constantes parmi les 2 possibles

  $f1_0()=0$ ou $f2_0()=1$

- Une fonction d'arité 1 pour le ¬ parmi les 4 possibles

  $f1_1(0)=0$ ou $f2_1(0)=0$ ou $f3_1(0)=1$ ou $f4_1(0)=1$

  $f1_1(1)=0$ $f2_1(1)=1$ $f3_1(1)=0$ $f4_1(1)=1$

- Des fonctions d'arité 2 pour les connecteurs binaires parmi les 16 possibles

$f1_2(0,0)=0$ ou $f2_2(0,0)=0$ ou $f3_2(0,0)=0$ ou … ou $f16_2(0,0)=1$

$f1_2(0,1)=0$ $f2_2(0,1)=0$ $f3_2(0,1)=0$ … $f16_2(0,1)=1$

$f1_2(1,0)=0$ $f2_2(1,0)=0$ $f3_2(1,0)=1$ … $f16_2(1,0)=1$

$f1_2(1,1)=0$ $f2_2(1,1)=1$ $f3_2(1,1)=0$ … $f16_2(1,1)=1$

Sémantique classique des connecteurs

- Les constantes sont interprétées par les 2 valeurs de Bool :

  $I(\bot) = FAUX_0 : 0$
  $I(\top) = VRAI_0 : 1$

- Les connecteurs sont interprétés par 5 fonctions $Bool^n \rightarrow Bool$
  (où n est l'arité du connecteur)

  $I(\neg) = NON_1 : a \mapsto 1$ ssi $a=0$ $\{0\mapsto 1,\ 1\mapsto 0\}$

  $I(\wedge) = ET_2 : (a,b) \mapsto 1$ ssi $a=b=1$ $\{(0,0)\mapsto 0,\ (0,1)\mapsto 0,\ (1,0)\mapsto 0,\ (1,1)\mapsto 1\}$

  $I(\vee) = OU_2 : (a,b) \mapsto 0$ ssi $a=b=0$ $\{(0,0)\mapsto 0,\ (0,1)\mapsto 1,\ (1,0)\mapsto 1,\ (1,1)\mapsto 1\}$

  $I(\Rightarrow) = SI_2 : (a,b) \mapsto 0$ ssi $a=1$ et $b=0$ $\{(0,0)\mapsto 1,\ (0,1)\mapsto 1,\ (1,0)\mapsto 0,\ (1,1)\mapsto 1\}$

  $I(\Leftrightarrow) = EQU_2 : (a,b) \mapsto 1$ ssi $a=b$ $\{(0,0)\mapsto 1,\ (0,1)\mapsto 0,\ (1,0)\mapsto 0,\ (1,1)\mapsto 1\}$

  – *Exercice : proposez une « interprétation » pour un connecteur binaire « ou exclusif ».*

Valeur de vérité d'une fbf

- Soit I une interprétation des symboles propositionnels d'une fbf P, on définit par induction la valeur de vérité de P dans I

$$\textbf{val} : PROP(S) \times (S \longrightarrow Bool) \longrightarrow Bool$$
$$(P,I) \longmapsto val(P,I)$$

(base)

$P \in S$: $val(P,I) = I(P)$

$P = \perp$: $val(\perp,I) = FAUX_0() = 0$

$P = \top$: $val(\top,I) = VRAI_0() = 1$

(cons)

r_1 : $val(\neg Q,I) = NON_1(val(Q,I))$

r_2 : $val((Q \wedge R),I) = ET_2(val(Q,I),val(R,I))$

r_3 : $val((Q \vee R),I) = OU_2(val(Q,I),val(R,I))$

r_4 : $val((Q \Rightarrow R),I) = SI_2(val(Q,I),val(R,I))$

r_5 : $val((Q \Leftrightarrow R),I) = EQU_2(val(Q,I),val(R,I))$

- *Exercice : soit I(p)=0 et I(q)=1, calculer la valeur de vérité de* $\neg((\neg q \wedge ((p \vee (q \vee p)) \rightarrow q)) \rightarrow \neg p)$

Table de vérité d'une fbf

- Une table de vérité d'une fbf P est un tableau ayant
  - pour ligne les 2^n interprétations possibles des n symboles propositionnels de P
  - pour colonne les sous-fbf de P (la dernière colonne étant P)
  - La valeur de vérité val(Q,I) dans la case de ligne I et de colonne Q
- Exemple : $(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg p$

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg p$
0	0	**1**	**0**	**0**
0	1	**1**	**1**	**1**
1	0	**0**	**1**	**0**
1	1	**0**	**1**	**0**

- La dernière colonne d'une table de vérité d'une fbf contient les valeurs de P pour toutes les interprétations possibles des symboles de P

Table de vérité d'un ensemble de fbf

- Soit E un ensemble de fbf, on construit le tableau
  - Dont les lignes correspondent aux 2^n interprétations des n symboles apparaissant dans **au moins une** fbf de E
  - Dont les colonnes sont les fbf (et sous-fbf) de E
  - Exemple : $\{\neg\bot, (r \vee \neg p), \neg(p \Rightarrow q)\}$

p	q	r	$\bot$	$\neg\bot$	$\neg p$	$r\vee\neg p$	$p\Rightarrow q$	$\neg(p\Rightarrow q)$
0	0	0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	0	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	1	0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	1	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	0	0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	0	1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	1	0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	1	1	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

- Permet la comparaison de fbf : Égalité sémantique et Déduction

Caractérisation sémantique des fbf

(vocabulaire à savoir par cœur)

Modèle et contre-modèle

- Soit F une fbf de PROP(S) et I une interprétation de S
  - I est un modèle de F si val(F,I) = 1 : on dit que I satisfait F
  - I est un contre-modèle de F si val(F,I) = 0

Caractérisation des fbfs

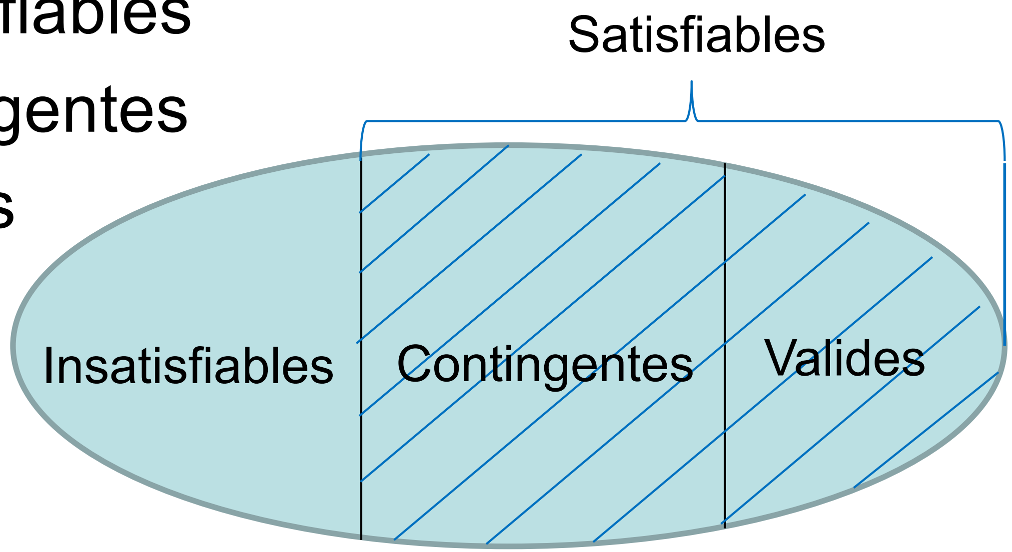
- Une fbf est satisfiable si elle possède au moins un modèle
  et insatisfiable si elle ne possède aucun modèle

- Une fbf est contingente si elle possède au moins un modèle et un contre-modèle

- Une fbf F est valide si toute interprétation est un modèle de F

Propriétés

- PROP(S) est partitionné en :
  - Les propositions insatisfiables
  - Les propositions contingentes
  - Les propositions valides



- Liens entre ces classes par négation :
  - P est insatisfiable **ssi** ¬P est valide
  - P est valide **ssi** ¬P est insatisfiable
  - P est contingente **ssi** ¬P est contingente

Consistance / Contradiction

On étend la satisfiabilité à un ensemble de fbf :

- Un ensemble $\{P_1,P_2,\ldots P_n\}$ est dit consistant s'il existe un modèle commun aux n formules, c'est-à-dire s'il existe une interprétation I telle que :

$$val(P_1,I)=val(P_2,I)=\ldots= val(P_n,I)=1$$

sinon $\{P_1,P_2,\ldots P_n\}$ est dit contradictoire (ou inconsistant)

Propriété:

$\{P_1,P_2,\ldots P_n\}$ est consistant ssi $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ est satisfiable