Devoir 7 Combinatoire

Exercice 5 :

a) Soit $\bar{e} = \{a \in E, aRe\}$

Or, puisque R est réflexive : eRe.

Donc $e \in \bar{e}$.

b) Soit $e, e' \in E$ et eRe', alors, $e \in \bar{e'}$.

Puisque R est symétrique, on a $e'Re \Rightarrow e' \in \bar{e}$.

Ainsi, $e, e' \in \bar{e}$

et $e, e' \in \bar{e'}$

Suposons un quelconque a tel que $a \in \bar{e}$,

alors aRe, or on sait que $eRe' \Rightarrow aRe'$

par transitivité. Donc, $\forall a \in \bar{e}, a \in \bar{e'}$

Même raisonnement pour un quelconque $b \in \bar{e'}$.

Si bRe', comme $e'Re$ alors bRe

$\Rightarrow \forall b \in \bar{e'}, b \in \bar{e}$

Ainsi, $a \in e \Rightarrow a \in e'$ et $a \in e \Leftarrow a \in e'$

Donc $a \in e \Leftrightarrow a \in e'$,

$e = e'$

c) Supposons a, un élément quelconque appartenant à l'ensemble

$\{ d \in E \mid d \in \bar{e} \cap \bar{e'} \}$ non vide.

Alors, $a \in \bar{e}$ et $a \in \bar{e'}$.

$\Leftrightarrow$ aRe et aRe'

$\Leftrightarrow$ (eRa et $aRé$) et ($éRa$ et aRe)

(par réflexivité)

$\Leftrightarrow$ $eRé$ $\Longrightarrow$ $\bar{e} = \bar{e'}$ d'après la question précédente

Donc, $\bar{e} \cap \bar{e'} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{e} = \bar{e'}$.

d) On sait qu'un ensemble de partie de E est une partition si et seulement si :

- $\Rightarrow$ Aucune partie n'est vide ✓
- $\Rightarrow$ Elles sont toutes disjointes ✓
- $\Rightarrow$ Leurs union est égale à E ✓

Posons donc $E/R = \{ \bar{e}, \bar{e'}, \bar{e''} \ldots \}$

On sait que $\forall e \in E$, $e \in \bar{e}$ donc tout les éléments de E appartiennent à une classe d'équivalence

$\Rightarrow$ Leurs union est égale à E ✓

✓

Par définition, une classe d'équivalence n'est jamais vide.

On sait d'après la question b) que si
$a \in \bar{e}$ et $a \in \bar{e}'$ alors $\bar{e} = \bar{e}'$. ✓
$\Rightarrow$ Chaque classe d'équivalence est bien distincte

Ainsi, $\frac{E}{R}$ est bien une partition de E.

Exercice 6 :

Soit R une relation binaire tel que xRy.
Alors, R^{-1} est une relation tel que yRx.
$\Rightarrow$ $(R \cup R^{-1})$ est symétrique car on a à la fois xRy et yRx.

$\Rightarrow$ $(R \cup R^{-1})^*$ est symétrique.

De plus, $I_x \in (R \cup R^{-1})^*$
$\Rightarrow$ $(R \cup R^{-1})^*$ est réflexive

Enfin, supposons xRy et yRz.
Alors, dans R^2 : xR^2z. Donc, $(R \cup R^{-1})^*$ est transitive

Ainsi, $(R \cup R^{-1})^*$ est une relation d'équivalence