Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- La sémantique de la LP
- **Équivalence logique et Substitution**
  - $\boldsymbol{P \equiv Q}$
  - Les formulaires
  - Théorème de Substitution
- Conséquence logique
- Méthode des séquents
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode de Davis et Putnam
- Initiation à la logique des prédicats

Équivalence logique

- **Définition**

  « Deux fbf P et Q sont logiquement équivalentes ssi pour toute interprétation elles ont même valeur de vérité *(val(P,I)=val(Q,I) pour tout I) . On note* $P \equiv Q$ *.»*

- Propriété

  $P \equiv Q$ ssi pour toute interprétation I : *I est un modèle de P ssi I est un modèle de Q*

- **Théorème**

  $P \equiv Q$ ssi $P \Leftrightarrow Q$ est une fbf valide

- Attention à ne pas confondre :
  - Équivalence logique $P \equiv Q$ ~~fbf~~, notion sémantique
  - Égalité syntaxique $P = Q$ ~~fbf~~, notion syntaxique
  - Connecteur équivalent $P \Leftrightarrow Q$ fbf

Propriétés des connecteurs

- L'équivalence logique permet d'exhiber les propriétés algébriques des connecteurs
  - Exemple :
    - *commutativité du* $\wedge$: $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$
    - *loi de De Morgan* : $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$
- Les formulaires sont des équivalences logiques de base qui énoncent ces propriétés
    - On peut les démontrer à l'aide des tables de vérité

Formulaires

Soient P,Q,R $\in$ PROP(S)

- Idempotence de $\wedge$ et $\vee$

$$(P \wedge P) \equiv P \qquad (P \vee P) \equiv P$$

- Associativité de $\wedge$ et $\vee$

$$((P \wedge Q) \wedge R) \equiv (P \wedge (Q \wedge R)) \qquad ((P \vee Q) \vee R) \equiv (P \vee (Q \vee R))$$

- Commutativité de $\wedge$ et $\vee$

$$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P) \qquad (P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$$

- Distributivité du $\wedge$ par rapport à $\vee$ (et vice versa)

$$((P \wedge (Q \vee R) \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

$$((P \vee (Q \wedge R) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

Formulaires (suite)

- Double négation

$$\neg\neg P \equiv P$$

- Lois de De Morgan

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \qquad \neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$$

- Implication et équivalent

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q) \qquad (P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

- Vrai et Absurde (absorption et élément neutre)

$$\neg P \equiv (P \Rightarrow \bot)$$

$$(P \vee \neg P) \equiv \top \qquad (\top \wedge P) \equiv P \qquad (\top \vee P) \equiv \top$$

$$(P \wedge \neg P) \equiv \bot \qquad (\bot \wedge P) \equiv \bot \qquad (\bot \vee P) \equiv P$$

Exemple : démonstration d'équivalence à l'aide des formulaires

$(\neg(a\wedge b)\vee(a\wedge b)) \equiv (c\vee T)$ [com,T,absv,com]

$((a\vee\neg a)\wedge b) \equiv b$ [T,Nv]

Exemple : démonstration d'équivalence à l'aide des formulaires

$(\neg(a \wedge b) \vee (a \wedge b)) \equiv (c \vee T)$ [com,T,absv,com]

$((a \vee \neg a) \wedge b) \equiv b$ [T,$N_\wedge$]

Substitution

- Étant donnée une fbf P, la substitution consiste à remplacer une occurrence (plusieurs ou toutes) d'une sous-fbf Q de P par une autre fbf R pour obtenir une nouvelle fbf **P’**
- Exemple :

$$P=(\overset{Q}{\mathbf{(p\Rightarrow q)}} \vee\neg p) \qquad R=((r\wedge\bot)\vee\neg p)$$

$$\mathbf{P'}=(\mathbf{((r\wedge\bot)\vee\neg p)} \vee\neg p)$$

Théorème de substitution

« *Soit P une fbf, Q une sous-fbf de P et R une fbf équivalente à Q ($R \equiv Q$). Si on note par P' la fbf obtenue à partir de P en substituant R à une occurrence de Q alors $P' \equiv P$* »

- Exemple :

$$P = (\underbrace{\mathbf{(p \Rightarrow q)}}^{Q} \vee \neg p) \qquad R = (\neg p \vee q)$$

$$P' = ((\neg p \vee q) \vee \neg p)$$

Preuve par induction structurelle du théorème de substitution

- *« Soit P une fbf, Q une sous-fbf de P et R≡Q et soit P' la fbf obtenue en substituant R à Q dans P alors P' ≡ P »*

(base)

(cons)