De la combinatoire aux graphes (HLIN201) – L1

Rappels : ensemble, relation binaire, fonction, application

Sèverine Bérard

Université de Montpellier

2^e semestre 2017-18

Objectifs du cours

- Comprendre / Abstraire
- Raisonner
- Prouver
- *Tout en apprenant des concepts fondamentaux d'informatique*

Des notions importantes sur les ensembles

L'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$

- C'est l'ensemble contenant tous les sous-ensembles de E, c'est donc un ensemble d'ensembles
- $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{P}(E)$
- Pour un ensemble fini de petite taille on peut énoncer $\mathcal{P}(E)$ en extension
  Ex : $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\ \{a, b, c\}\}$
- Si E contient n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ en contient 2^n

Des notions importantes sur les ensembles

Le produit cartésien $E \times F$

- $E \times F = \{(x, y) \,|\, x \in E \text{ et } y \in F\}$
- C'est l'ensemble des couples dont le premier élément appartient à E et le second à F, *l'ordre est important !*
- Si E contient n éléments et F en contient m, $E \times F$ en contient $n * m$
- *Ex :* $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2\}$,
  $E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
- Le produit cartésien se généralise à une famille finie d'ensembles :
  $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \,|\, e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_n \in E_n\}$
  $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est appelé un n-uplet.
  Autre notation souvent utilisée : E^m pour $E \times E \times \ldots \times E$ m fois.

Des notions importantes sur les ensembles

Partition d'un ensemble

- Des parties d'un ensemble E : $A_1, \ldots, A_n$ réalisent une *partition* de E :
  1. si chaque partie A_i est non vide
  2. si pour chaque couple de parties $(A_i, A_j), i \neq j$, A_i et A_j sont disjointes
  3. et si la réunion de toutes les parties : $A_1 \cup \ldots \cup A_n = E$.
- *Ex : soient* $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A_1 = \{a, b, c, d\}$, $A_2 = \{e, f, g, h\}$, $A_3 = \{d, e, f, g, h\}$, $A_4 = \{a, c, e\}$, $A_5 = \{b, d\}$, $A_6 = \{f, g, h\}$

  $\{A_1, A_2\}$ et $\{A_4, A_5, A_6\}$ sont des partitions de E

  $\{A_1, A_3\}$ et $\{A_1, A_6\}$ ne sont pas des partitions de E

Les relations binaires

Définition informelle

- Une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F c'est la mise en correspondance d'éléments de E avec des éléments de F
- On parle de couples d'éléments en relation, les premiers éléments des couples venant de E, les seconds de F, *l'ordre est important !*
- Les relations binaires sont des sous-ensembles de produits cartésiens
- *Ex :* $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2\}$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}_1$ de E vers F : $\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2)\}$

  On a bien $\mathcal{R}_1 \subseteq E \times F$

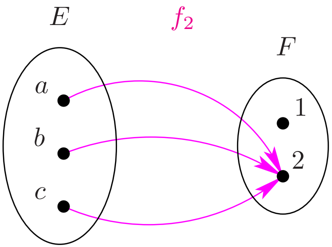
Les fonctions et les applications sont des relations binaires particulières

Relations binaires de X vers Y

Fonctions de X vers Y

Applications de X vers Y

Exemples



Application injective, surjective, bijective

Propriétés selon la nature de l'application $f: X \longrightarrow Y$

<table>
<tr><th>Injective</th><th>Bijective</th><th>Surjective</th></tr>
<tr><td colspan="2">2 éléments de X distincts ont 2 images distinctes</td><td>2 éléments de X distincts peuvent avoir la même image</td></tr>
<tr><td>un élément de Y n'a pas forcément d'antécédent</td><td colspan="2">tout élément de Y à au moins un antécédent</td></tr>
<tr><td>tout élément de Y a au plus un antécédent (c.-à-d. 0 ou 1)</td><td>tout élément de Y a exactement un antécédent</td><td>tout élément de Y a au moins un antécédent</td></tr>
</table>

Attention

Une application peut être ni injective, ni surjective, ni bijective