Développement 1

HLMA 203
Développements limités

Idée : Approximer une fonction qu'on connait mal par un polynôme.

Vocabulaire : (Notation de Landau)

Si f et g sont deux fonctions définies sur un Intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, on dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe $\varepsilon(x) : I \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0 \end{cases}$ et $f(x) = \varepsilon(x) g(x) \ \forall x \in I$.

$\to$ ($f/g \to 0$ lorsque $x \to x_0$)

On note $\boxed{f(x) = o_{x_0}(g)} = \varepsilon(x) g(x)$

Propriétés :

1° $o(g) + o(g) = 2o(g) = o(g)$

Preuve : Soit $f_1 = o_{x_0}(g)$ et $f_2 = o_{x_0}(g)$

Alors, il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : I \to \mathbb{R}$, telle que $\left.\begin{matrix}\varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x)\end{matrix}\right\} \underset{x \to x_0}{\to} 0$

et $\begin{cases} f_1(x) = \varepsilon_1(x) g(x) \\ f_2(x) = \varepsilon_2(x) g(x) \end{cases}$

alors $f_1(x) + f_2(x) = (\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) g(x)$
$= \varepsilon_3(x) g(x)$

avec $\varepsilon_3(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$

Développement 2

2° Stabilité par la loi externe :

$f = O_{x_0}(g)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f = O_{x_0}(g)$

Preuve : $\lambda f(x) = \lambda \varepsilon(x) g(x)$
$= \varepsilon_1(x) g(x)$ avec $\begin{cases} \varepsilon_1(x) \to 0 \\ x \to x_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \{O_{x_0}(g)\}$ forment un s.e.v. de $\mathbb{R}^I$

3° Stabilité par le produit des fonctions

si $f_1 = O_{x_0}(g_1)$ et $f_2 = O_{x_0}(g_2)$, alors $f_1 . f_2 = O_{x_0}(g_1 . g_2)$

Cas Particulier :
si $f = O_0(x^n)$ alors $x f(x) = O_0(x^{n+1})$

I) Développement limité

Définition : si $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 $(DL_n(x_0))$ s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, $d°(P) \leq n$, tel que $f = P + O_{x_0}((x-x_0)^n)$

Exemple : $DL_0(x_0)$ si f admet une limite l en x_0,

$f(x) = l + O_{x_0}(1)$ puisque $f(x) - l \underset{x \to x_0}{\to} 0$
$((x-x_0)^0 = 1)$

Donc on peut prendre $\varepsilon(x) = f(x) - l$, $f(x) = l + x^0 \varepsilon(x)$
$(\downarrow 1)$

> Réciproquement, si f admet un $DL_0(x_0)$,
$\exists P$ de degré 0, donc constante l telle que
$f(x) = l + O_{x_0}(x^0)$ donc par somme des limites :
$\underset{x \to x_0}{\downarrow l}$ $\quad \underbrace{O_{x_0}(x^0)}_{\underset{x \to x_0}{\downarrow 0}}$, $x^0 = 1$

$f(x) \underset{x \to x_0}{\to} l$

Développement 3

Exemple : Supposons f admet un $DL_1(x_0)$, alors $\exists P$ de degré 1 tel que $f(x) = P(x) + o_{x_0}((x-x_0)^1)$

P peut s'écrire $ax+b$ mais il est plus malin de l'écrire $a'(x-x_0)+b'$, quitte à changer a et b en a' et b'.

$$f(x) = b + a(x-x_0) + o_{x_0}(x-x_0)$$
$$= b + a(x-x_0) + \varepsilon(x)(x-x_0)$$

alors $\dfrac{f(x)-b}{x-x_0} = a + \varepsilon(x) \to a$, $\varepsilon(x) \to 0$, $x \to x_0$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$

> Réciproquement : Supposons f dérivable en x_0.

Alors $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$

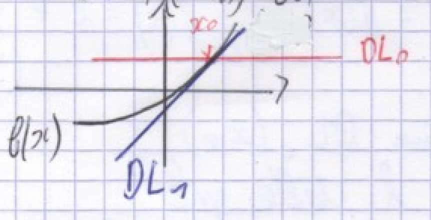
donc $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \underbrace{o_{x_0}(1)}_{\varepsilon(x)}$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x-x_0)f'(x_0) + \underbrace{o_{x_0}(x-x_0)}_{\varepsilon(x)(x-x_0)}$

Donc f admet un $DL_1(x_0)$ donné par $P(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$

⚠ Un $DL_0(x_0)$ est une approche par la valeur x_0

Un $DL_1(x_0)$ est une approche par la tangente en x_0



Développement 4

II) Propriétés des $DL_n(x_0)$

1° Les fonctions admettant un $DL_n(x_0)$ forment un s.e.v. de $\mathbb{R}^I$ et le $DL_n(x_0)$ d'une combinaison linéaire est combinaison linéaire des $DL_n(x_0)$:

$$\begin{cases} f(x) = P_1(x) + O_{x_0}((x-x_0)^n) \\ g(x) = P_2(x) + O_{x_0}((x-x_0)^n) \end{cases} \quad d^\circ P_1, P_2 \leq n$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda f + \mu g)(x) = \underbrace{(\lambda P_1 + \mu P_2)}_{d^\circ \leq n}(x) + O_{x_0}((x-x_0)^n)$

2° Stabilité par le produit des fonctions :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, f et g admettent un $DL_n(x_0)$ alors $f \times g$ admet un $DL_n(x_0)$ et ce $DL_n(x_0)$ de $f \times g$ est obtenu en faisant le produit des $DL_n(x_0)$ de f et g en ne gardant que les termes de $d^\circ \leq n$.

Exemple : $f(x) = x + x^3 + O_0(x^3)$
$g(x) = 1 + x^2 + O_0(x^3)$

$$\begin{aligned} f \cdot g(x) &= (x + x^3 + O_0(x^3))(1 + x^2 + O_0(x^3)) \\ &= \boxed{x + x^3} + \boxed{O_0(x^3)} + \boxed{x^3} + x^5 + \boxed{x^2 O_0(x^3) + x O_0(x^3) + x^3(O_0(x^3)) + O_0(x^3)^2} \\ &= x + 2x^3 + O_0(x^3) \end{aligned}$$

$(d^\circ = 5) > 3$ donc on ne le prends pas

3° Stabilité par le quotient des fonctions

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, f et g admettent un $DL_n(x_0)$, $x_0 \in I$ et g ne s'annule pas sur I. Alors, $f/g : I \to \mathbb{R}$ admet un $DL_n(x_0)$ donné par la division suivant les puissances des $DL_n(x_0)$ de f par le $DL_n(x_0)$ de g.

<u>Exemple :</u> $f(x) = x + x^3 + O_0(x^3)$

$g(x) = 1 + x + x^2 + O_0(x^3)$

$$
\begin{array}{l|l}
x + x^3 & 1 + x + x^2 \\
\hline
-(x + x^2 + x^3) & x - x^2 + x^3 \\
\quad -x^2 & \\
-(-x^2 - x^3 - x^4) & \\
\quad x^3 + x^4 & \\
-(x^3 + x^4 + x^5) & \\
\quad -x^5 &
\end{array}
$$

$\longrightarrow x + x^3 = (1 + x + x^2)(x - x^2 + x^3) - x^5$

$\Rightarrow \dfrac{x + x^3}{1 + x + x^2} = x - x^2 + x^3 - \dfrac{x^5}{1 + x + x^2}$

Négligeable devant x^3 en 0.

DONC $\dfrac{f}{g}(x) = x - x^2 + x^3 + O_0(x^3)$

4° $DL_n(x_0)$ d'une composition.

Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to J$. Alors, $f \circ g : I \to \mathbb{R}$

Supposons g admet un $DL_n(x_0)$ et f admet un $DL_n(g(x_0))$

Alors $f \circ g$ admet un $DL_n(x_0)$ et il s'obtient en remplaçant chaque occurence de x dans le $DL_n(g(x_0))$ de f par $g(x)$.

<u>Exemple :</u>

$g(x) = \underset{(g(x_0))}{0} + 1.(x - x_0) + 1.(x - x_0)^2 + O_0(x - x_0)^2$

$f(x) = 1 + 1.(x - g(x_0)) + 1.(x - g(x_0))^2 + O_0(x - g(x_0))^2$

$= 1 + x + x^2 + O_0(x^2)$

Alors $f \circ g = 1 + (x + x^2 + O(x^2)) + (x + x^2 + O_0(x^2))^2 + O((x + x^2 + O(x^2))^2)$

$= 1 + x + x^2 + O(x^2) + x^2 + O_0(x^2) + O(x^2)$

$= 1 + x + 2x^2 + O(x^2)$

[On met dans $O(x^2)$ tout les termes de d° > 2]

Développement 6

5° Intégration d'un $DL_n(x_0)$

$f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f admet un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq 0$.
f est continue sur I.
$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. Alors F admet un $DL_{\underline{n+1}}(x_0)$
qui s'obtient en intégrant terme à terme le $DL_n(x_0)$ de f.

Exemple : $f(x) = 1 + x + x^3 + o_0(x^3)$
alors $F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o_0(x^4)$.

Preuve : Quitte à remplacer $f(x)$ par $f(x) - a_0 \dots - a_n(x-x_0)^n$
il suffit de montrer que $\int_{x_0}^{x} o_{x_0}((t-x_0)^n)\,dt = o_{x_0}((x-x_0)^{n+1})$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et tel que $f(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$

Soit $F = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Exploitons l'information disponible $f(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n)$
donc il existe $\delta > 0$, $\forall x \in I$, $(|x-x_0| < \delta) \Rightarrow$
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon |x-x_0|^n$

$\Leftrightarrow -\varepsilon|x-x_0|^n < f(x) - f(x_0) < \varepsilon|x-x_0|^n$.

donc $\forall x \in I$, tel que $|x-x_0| < \delta$, on a
$\int_{x_0}^{x} f(x) - f(x_0)\,dx$

$\Leftrightarrow -\varepsilon \int_{x_0}^{x} |t-x_0|^n\,dt < \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt < \left(\varepsilon \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,dt = \frac{\varepsilon}{n+1}(t-x_0)^{n+1}\right)$

$\left(\begin{array}{l} f(x_0) = 0 \text{ car} \\ f(x) = o(x-x_0)^n \end{array} \right)$

Développement 7

Donc $-\varepsilon|x-x_0|^{n+1} < \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt < \varepsilon|x-x_0|^{n+1}$

donc $|F(x)| < \varepsilon|x-x_0|^{n+1}$

donc $\dfrac{F(x)}{|x-x_0|^{n+1}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ donc $F(x) = o_{x_0}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$

6° Dérivation de DL

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $DL_n(x_0)$, f dérivable sur I.

Si f' admet un $DL_{n-1}(x_0)$, alors le $DL_{n-1}(x_0)$ de f' est obtenu en dérivant terme à terme le $DL_n(x_0)$

⚠ il existe des fonctions $DL_n(x_0)$, mais dont la dérivée n'est pas $DL_{n-1}(x_0)$

Exemple : $x^2 \sin \frac{1}{x} = f(x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$

$f(x) = o_0(x)$ donc f est $DL_1(0)$

mais $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$

f' n'est pas continue en 0 donc f' n'admet pas de $DL_0(0)$

Rappel : f admet un DL_1 en x_0 ssi f est dérivable en x_0

Théorème (Taylor - Young) I intervalle de $\mathbb{R}$

$f : I \to \mathbb{R}$, f est n fois dérivable en x_0. $x_0 \in I$.

Alors f admet un $DL_n(x_0)$, et

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o_{x_0}(x-x_0)^n$$

Développement 8

Remarque : généralisation partielle de
(f dérivable en x_0) => f $DL_1(x_0)$ (on généralise juste =>)

Preuve (récurrence sur n)

Initialisation : n = 1 on sait $DL_1(x_0) \Leftrightarrow$ dérivable en x_0
et $f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + o(x-x_0)$

Hérédité : supposons n fois dérivable en $x_0 \Rightarrow DL_n(x_0)$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, (n+1) fois dérivable en x_0.
Appliquons l'hypothèse de récurrence à f'.
f' est n fois dérivable en x_0, donc
$$f'(x) = f'(x_0) + (x-x_0) f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0)$$
$$+ o_{x_0}(x-x_0)$$
On intègre terme à terme le $DL_n(x_0)$ de f'
en utilisant la propriété 5.
$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0) = (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n+1} \times \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \times f^{(n+1)}(x_0) + o_{x_0}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

Développement limité des fonctions usuelles

1) $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$

3) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2})$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o_0(x^n)$

5) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_0(x^n)$

6) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$

7) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$