FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

L2 informatique
HAI306X Arithmétique

Nombres entiers relatifs

Division euclidienne

Exercice 1. Soient a et b deux entiers naturels. On effectue la division euclidienne de a par b et on note q et r le quotient et le reste.

Soit $h \in \mathbb{Z}$. Les divisions euclidiennes envisagées, le sont dans $\mathbb{N}$.

1. Le quotient de la division euclidienne de $a + h$ par b est encore q ?
2. Le quotient de la division euclidienne de a par $b + h$ est encore q ?
3. Le quotient de la division euclidienne de $a + h$ par $b + h$ est encore q ?
4. L'égalité $a = b \times q + r$ est-elle aussi celle de la division euclidienne de a par q ?

Exercice 2.
1. On divise un entier a par 15, le reste est 3. Quel peut être le reste de la division de a par 5 ?
2. On divise un entier a par 5, le reste est 3. Quel peut être le reste de la division de a par 15 ?

Exercice 3.
1. En divisant le nombre a par 122 et 125, on trouve le même quotient et des restes respectifs qui sont 52 et 40. Pouvez-vous calculer a ?
2. En divisant 6732 et 564 par b on trouve des restes respectifs de 24 et 18. Quel peut-être le nombre b ?

Exercice 4. Si on se donne deux entiers naturels a et b, la division euclidienne assure l'existence et l'unicité de q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

1. Si on se donne b et q, peut-on trouver les deux autres, à savoir a et r ? Sont-ils uniques ?

   Même question en se donnant b et r ou q et r.
2. Si on se donne a et r, peut-on trouver b et q ? On étudiera l'exemple $a = 67$ et $r = 7$.

Exercice 5. Soit b un entier strictement positif. Comparer les quotients q_1, q_2, q_3, des divisions de a par b, $2a$ par b et $(2a + b)$ par $2b$.

Numération

Exercice 6. Démontrer qu'un entier écrit avec p chiffres en système décimal nécessite au moins $(3p-2)$ chiffres et au plus $4p$ chiffres en binaire.

Exercice 7. Existe-t-il une base b dans laquelle on puisse écrire une égalité de la forme :

$$\overline{xxx} \times \overline{xxx} = \overline{yyyyyy} \text{ ?}$$

Exercice 8. Les nombres sont écrits dans la base dix. On considère un entier n à trois chiffres : $n = \overline{xyz}$. On suppose qu'il est tel que :

$$n + 36 = \overline{xzy},\ n - 270 = \overline{yxz}.$$

Que peut-on dire de $\overline{zyx}$?

Exercice 9. Nous allons montrer que tout nombre entier n qui n'est divisible ni par 2 ni par 5 a un multiple qui s'écrit exclusivement avec le chiffre 1 en base dix.

1. Montrer que parmi les nombres $1, 11, 111, 1111, \ldots, \underbrace{111\cdots111}_{(n+1 \text{ chiffres})}$ il y en a au moins deux, m et m', qui donnent le même reste après division par n.
2. Faire la différence $m - m'$ et conclure.

Exercice 10. On considère le nombre écrit en base huit : $\overline{4207}^{(8)}$.

1. Écrire ce nombre en binaire en passant par la base dix.
2. Écrire ce nombre en binaire sans passer par la base dix.

Exercice 11. *Algorithme de l'addition.* Soient deux entiers à additionner $x = x_n b^n + \cdots x_1 b + x_0$ et $y = y_m b^m + \cdots + y_1 b + y_0$

Il s'agit dans cette question de justifier l'algorithme de l'école pour l'addition de x et y qui consiste à ajouter les chiffres de même poids (x_k avec y_k) en propageant éventuellement une retenue r_{k+1} sur le rang suivant.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $x = x_n b^n + \cdots x_1 b + x_0$ et $y = y_n b^n + \cdots + y_1 b + y_0$ c'est-à-dire que les premiers chiffres de x ou y peuvent être supposés 0.

On définit deux suites :

- $(r_k)_{0 \le k \le n+1}$, la suite des retenues
- $(c_k)_{0 \le k \le n+1}$, la suite des chiffres

de la somme $x + y$, par les relations de récurrence :

$$r_0 = 0 \text{ et } \forall 0 \le k \le n, r_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{si } x_k + y_k + r_k < b. \\ 1, & \text{si } x_k + y_k + r_k \ge b. \end{cases} \qquad (1)$$

et

$$\forall 0 \le k \le n, c_k = x_k + y_k + r_k - b r_{k+1} \text{ et } c_{n+1} = r_{n+1}$$

1. Montrer que pour tout k compris entre 0 et n, on a $0 \le c_k \le b - 1$;
2. Montrer que $x + y = c_{n+1} b^{n+1} + c_n b^n + \cdots + c_1 b + c_0$.