## Modèles de calcul

## Université de Montpellier TD 1

#### Exercice I Notations

Soient w un mot et a une lettre sur  $\Sigma = \{a, b\}$ . On note  $|w|_a$  le nombre d'occurrences de a dans w. Écrivez la liste des mots appartenant à chacun des langages suivants :

- I.  $\{w \text{ tels que } |w|_a < 3\} \cap \{a, aa, aaa, aaaa, abaa, bbbb, aabbbbb\}$
- 2.  $\{w \text{ tels que } |w| < 3\} \cup \{a, aa, aaa, aaaa, abaa, bbbb, aabbbbbb\}$
- 3.  $\{w \text{ tels que } |w|_a < 3\} \cap \{w \text{ tels que } |w|_b < 2\}$
- 4.  $\{w \text{ tels que } |w|_a = |w|_b\} \cap \{w \text{ tels que } |w| < 5\}$
- 5.  $\{w \text{ tels que } |w|_a > 5\} \cap \{w \text{ tels que } |w| < 3\}$
- 6.  $\{w \text{ tels que } |w| < 1\}$

#### **Exercice 2** Concaténation

1. Laquelle des implications suivantes est-elle vraie pour tous mots x et y? Faire une preuve.

$$x \prec y \Rightarrow x\Sigma^* \subseteq y\Sigma^*$$
$$x \prec y \Rightarrow y\Sigma^* \subseteq x\Sigma^*$$

- 2. Pour l'autre inclusion, déterminer pour quels x et y elle reste vraie.
- 3. Montrez que  $\varepsilon \in v\Sigma^*$  si et seulement si v est le mot vide.

#### Exercice 3 Léon a rasé César à Noël

Un mot est un **palindrome** si l'ordre des lettres reste le même, qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, aa et abaaba sont des palindromes, tandis que ab et ababab n'en sont pas.

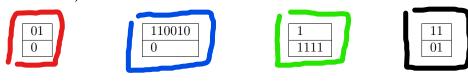
- I. On appelle *miroir* l'opération qui renverse l'ordre des lettres du mot. On note  $\bar{u}$  le miroir de u. On définit cette notion plus formellement par  $\bar{\epsilon} = \epsilon$  et  $\forall a \in \Sigma, \forall u \in \Sigma^*, \ \overline{a.u} = \bar{u}.a.$  Montrez que  $\overline{x.y} = \bar{y}.\bar{x}$ . Montrez que w est un palindrome de longueur paire si et seulement si  $\exists u, w = u.\bar{u}$ .
- 2. Combien y a-t-il de mots de longueur au plus n sur l'alphabet  $\{a,b\}$  qui ne contienne pas 2 fois successivement la même lettre?
- 3. Toujours sur l'alphabet  $\{a,b\}$ , caractérisez les palindromes qui ne contiennent pas 2 fois successivement la même lettre.
- 4. Montrez que sur l'alphabet  $\{a,b,c\}$  tout palindrome non-vide de longueur paire contient deux fois successivement la même lettre.

#### **Exercice 4** Palindromes périodiques

Un mot w est **périodique** s'il est la répétition d'un autre mot u un certain nombre de fois. Le mot u est appelé une **période** de w. Par exemple, ababab est périodique de période ab; tandis que ababa n'est pas périodique.

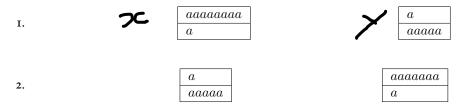
Montrez qu'un palindrome est périodique si et seulement si il admet un palindrome comme période.

# Exercice 5 Exemple simple Trouvez une solution au jeu de Post suivant :



**Exercice 6** Calculons

Trouvez des solutions aux jeux de Post suivants. Quel calcul est effectué?



Exercice 7 Sans carrés

Un mot est un **carré** s'il peut s'écrire u u, où u est un mot. Par exemple, le mot abaaba est un carré car il peut s'écrire aba aba, tandis que bab n'est pas un carré. Un mot est **sans carré** s'il ne contient aucun sous-mot carré non-vide.

- 1. Le mot vide est-il un carré?
- 2. Le mot vide est-il sans carré?
- 3. Soit  $\Sigma = \{a, b\}$  un alphabet à deux lettres. Construisez le plus long mot sur  $\Sigma$  sans carré.
- 4. Soit  $T=\{a,b,c\}$  un alphabet à trois lettres. Tentez de construire le plus long mot sur T sans carré.

# **Exercice 8** Calculons plus

Soit x un mot sur l'alphabet  $\{a, b\}$ .

Trouvez des solutions aux jeux de Post suivants pour x=abab, x=aaabbb et x=abbabaab. Quel calcul est effectué?

Note : x est un mot sur l'alphabet  $\{a,b\}$ , mais d'autres lettres sont autorisées dans les tuiles : c et d.

I.	$\begin{bmatrix} c \ x \\ c \end{bmatrix}$	$egin{array}{c} a'a' \ \hline a \end{array}$	$egin{bmatrix} b'b' \ \hline b \ \end{matrix}$	$\begin{array}{ c c }\hline d \\ \hline a'a' \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c }\hline d\\ b'b'\\ \hline\end{array}$	$egin{array}{c} d \ dd \end{array}$
2.	$egin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	$\begin{bmatrix} a'a' \\ a \end{bmatrix}$	$\boxed{b}$	$\begin{bmatrix} d \\ a' \end{bmatrix}$	$\begin{array}{ c c }\hline d \\ \hline b' \\ \hline \end{array}$	$\begin{bmatrix} d \\ dd \end{bmatrix}$