HLMA101 - Partie A : Généralités

Chapitre 5

Applications

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2019-2020

Sommaire

Définition (intuitive)

Une application f est la donnée de trois informations :

- Un ensemble dit « de départ » ou « source » E
- Un ensemble dit « d'arrivée » ou « but » F
- Une règle qui permet d'attribuer à tout élément x de E un et un seul élément de F (noté $f(x)$).

Notation

Pour une application f de E dans F on note :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemples

a) $\begin{array}{ccc} \{\text{étudiants de l'amphi}\} & \to & [0;20] \\ \text{étudiant·e} & \mapsto & \text{note à l'examen sur 20} \end{array}$

b) $\begin{array}{ccc} \{\text{étudiants de l'amphi}\} & \to & [0;10] \\ \text{étudiant·e} & \mapsto & \text{note à l'examen sur 10} \end{array}$

c) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ $\quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

d) L'**identité** $Id_E: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$

e) $\gamma: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}^3 \\ t \text{ (instant)} & \mapsto & \text{coordonnées d'un point mobile} \end{array}$

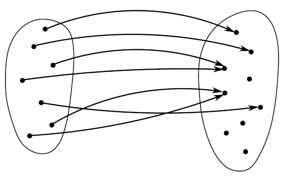
f) $\lambda: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \text{nombre de 1 dans la partie entière de } x \text{ (en base 10)} \end{array}$

Remarques

- Une application n'est pas toujours donnée par une formule
- Quand on définit une application, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont importants :
  s'ils changent, on parle d'une autre application
- Usage des flèches :
  « $\to$ » entre les ensembles de départ et d'arrivée,
  « $\mapsto$ » pour décrire le lien entre un élément de l'ensemble de départ et l'élément de l'ensemble d'arrivée qui lui est associé.

Représentation en diagramme

On représente parfois une application à l'aide de diagrammes ensemblistes et de flèches entre les éléments :



Définition (fonction)

Soit E et F deux ensembles, et D une partie de E.
Une application de D dans F est appelée une fonction de E dans F.
D est appelé le domaine de définition de la fonction, noté $\mathscr{D}_f$.

Commentaires

Cela permet de parler d'"applications" dont certains éléments n'ont pas d'image.

Exemples

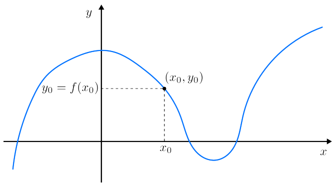
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Définie sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$. Définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans le suite, on ne s'intéresse qu'aux applications, mais tous les résultats s'étendent aux foncions, à condition de considérer le bon domaine de définition.

Graphe

Soit une application $f : E \to F$.
On appelle graphe de f la partie de $E \times F$ des couples de la forme $(x, f(x))$.
Autrement dit, c'est l'ensemble $\{(x,y) \in E \times F \,/\, f(x) = y\}$

Exemple

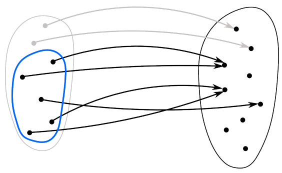


Sommaire

Restriction

On appelle restriction d'une application $f : E \to F$ à $A \subset E$ l'application :

$$f_{|A} : \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$



Remarque

On peut toujours restreindre l'ensemble de départ, mais pas toujours l'ensemble d'arrivée.

Prolongement

Soient $f : A \to B$ une application, et soit $g : E \to F$ telle que $A \subset E$ et $B \subset F$. On dit que g est un prolongement de f si l'application $h : \begin{array}{rcl} A & \to & B \\ x & \mapsto & g_{|A}(x) \end{array}$ est égale à f.

Sommaire

Image

Soit $f : E \to F$ une application.

- On appelle image d'un élément $x \in E$, l'élément $f(x)$.
- On appelle image d'une partie $A \subset E$, le sous ensemble de F formé de toutes les images d'éléments de A par f

$$f(A) = \{y \in F \,/\, \exists x \in A,\ y = f(x)\} = \{f(x) \,/\, x \in A\}$$

- L'image de l'application f est $f(E)$.

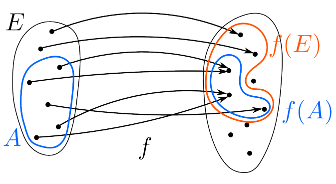


Image réciproque

Soit $f : E \to F$ une application, et soit $B \subset F$.
L'image réciproque de B est la partie de E formé des éléments qui sont envoyés dans B par f.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}$$

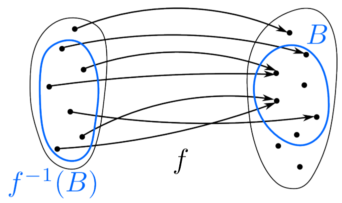
Remarques

L'image réciproque ...

- est une partie de E
- s'applique à une partie de F

Attention à la notation f^{-1} !

Les éléments x tels que $f(x) = y$ sont appelés antécédents de y.



Exemple

Soit l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

- $f([-1,1]) = [0,1]$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$
- $f^{-1}([1,9[) =]-3,-1] \cup [1,3[$
- $f^{-1}(]-4,4[) =]-2,2[$
- $f^{-1}(\{16\}) = \{-4,4\}$
- $f^{-1}(]-\infty,-1]) = \varnothing$

Exercice

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x-1 \end{array}$.

Déterminer $f([0,2])$, $f([-2,2])$ et $f^{-1}([-1,2])$.

Sommaire

Composition

Soit $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.
La composée de g et f est l'application :

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque : Pour évaluer $(g \circ f)(x)$ on applique d'abord f à x, puis g à $f(x)$.

Plus généralement

Si $f: E \to F_1$ et $g: F_2 \to G$, avec F_1 et F_2 distincts, on peut définir $g \circ f(x)$ pour tout x de E tel que $f(x) \in F_2$.
On peut alors définir :

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} \{x \in E / f(x) \in F_2\} & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Domaine de définition

$\mathscr{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathscr{D}_f / f(x) \in \mathscr{D}_g\}$

Exemples

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

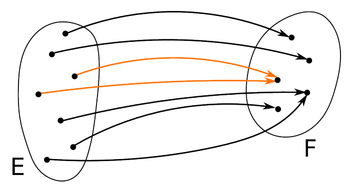
Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Sommaire

Application réciproque

Soit $f: E \to F$ une application.
On dit qu'une application $g: F \to E$ est réciproque de f si $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

Remarque : Ça n'existe pas toujours :



Unicité de la réciproque (si elle existe)

Soit $f : E \to F$. Si $g_1 : F \to E$ et $g_2 : F \to E$ sont des réciproques de f, alors $g_1 = g_2$.

Preuve.
Technique classique de preuve d'unicité : on introduit deux éléments x et x' ayant la propriété et on montre que $x = x'$.

Notation

Lorsqu'une application f admet une réciproque, on la note f^{-1}.

Note : Attention à la notation f^{-1} : On peut toujours écrire l'**ensemble** $f^{-1}(B)$ où B est une partie de l'ensemble d'arrivée (image réciproque), mais l'**application** f^{-1} n'existe pas toujours.
Par contre, si f^{-1} existe, $f^{-1}(B)$ est aussi l'image de B par f^{-1} (cohérent). **Preuve en exercice**

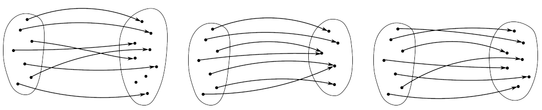
Sommaire

Définitions

Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que f est **injective** si $\forall (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \implies x = x'$.
- On dit que f est **surjective** si $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
- On dit que f est **bijective** si elle est injective et surjective.

Illustration

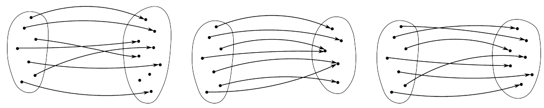


Injective Surjective Bijective

Intuition

- Injective : deux éléments qui ont la même image sont égaux
  Ou : deux éléments distincts ont des images distinctes.
- Surjective : tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent

Illustration



Injective Surjective Bijective

Exercice : Écrire les négations d'être injective, surjective, bijective.

Exemples

- $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ ni surjective, ni injective.
- $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ injective, non surjective.
- $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ surjective, non injective.
- $\gamma : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ bijective.
- $\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ bijective.

Théorème

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Alors :

(1) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
(2) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
(3) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
(4) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
(5) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Preuve

Très bon exercice !

Preuves de (1) et (3).

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application.
On a équivalence entre :

(i) f a une réciproque
(ii) f est bijective

Preuve.

Exercice

Exprimer les réciproques de

$\gamma : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Théorème

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives.
Alors $g \circ f$ est bijective de réciproque $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve.
D'après un théorème précédent, $g \circ f : E \to F$ est bijective si et seulement si elle admet une réciproque. Montrons que $f^{-1} \circ g^{-1}$ convient :

- Montrons que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_G$
  Soit $x \in G$.
  $$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) \\ &= g(g^{-1}(x)) = x \end{aligned}$$
- Montrons que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_E$
  Soit $x \in E$.
  $$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) &= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) \\ &= f^{-1}(f(x)) = x \end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est bien bijective de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. ■