Algèbre linéaire et analyse 1
(HLMA101 – Année universitaire 2020–2021)

Feuille d'exercices N°1

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. Quelle est la négation de l'assertion « tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans » ?

Question 2. Écrire la négation des assertions suivantes. (a) : $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$. (b) : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(y)$.

Question 3. Contraposer les assertions suivantes :
(a) Si c'est lundi, alors c'est raviolis ;
(b) Si les étudiants ne travaillent pas, ils n'apprennent pas de mathématiques ;
(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$;

Question 4 (d'après examen de janvier 2018). On cherche à démontrer *par l'absurde* l'assertion suivante portant sur une partie A de l'ensemble des nombres rationnels : « $\forall r \in A, r^3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow r \geq 0$ ». Choisir la première étape du raisonnement parmi les 4 propositions suivantes :

(a) On suppose que pour tout rationnel r dans A, r^3 est un entier relatif et r est strictement négatif.
(b) On suppose qu'il existe un rationnel r dans A qui est positif et dont le cube n'est pas un entier relatif.
(c) On suppose qu'il existe un rationnel r dans A qui est strictement négatif et dont le cube est un entier relatif.
(d) On suppose qu'il existe un rationnel r strictement négatif et dont le cube est un entier relatif qui n'est pas dans A.

Question 5. Écrire avec des quantificateurs la phrase : « L'équation $e^x - 2x^3 + x = 2$ a au moins deux solutions réelles disctinctes. »

2. Travaux dirigés

Exercice 1. Vrai ou faux ? Démontrer soigneusement.
(a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^3$;
(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$;
(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \notin \mathbb{Q}$;
(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \text{ est pair et } x \geq 0) \text{ ou } (n \text{ est impair et } x \leq 0)) \Rightarrow (-1)^n x^3 \geq 0$.

Exercice 2. Traduire les énoncés a), b) et c) de l'exercice 1 en langage naturel, sans utiliser un seul symbole mathématique.

Exercice 3. On considère les ensembles $A = \{2, 3, 5, 6\}$ et $B = \{1, 2, -3\}$. Démontrer si les assertions qui suivent sont vraies ou fausses.
(a) $\forall x \in A, \exists y \in B, x + y \in A$.
(b) $\forall x \in A, \forall y \in B, x + y \in A$
(c) $\exists x \in A, \forall y \in B, x + y \in A$
(d) $\exists x \in A, \forall y \in B, \exists z \in B, x + y + z \in A$

Exercice 4. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si oui, démontrez-les par récurrence.
(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ 4^n - 1 = 3k$.
(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ 4^n + 1 = 3k$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
(1) Traduire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes.
  (a) f est paire ;
  (b) f est croissante ;
  (c) f est constante.
(2) Démontrer (avec soin, comme toujours !) que si f est paire et croissante, alors elle est constante.

3. Révisions et approfondissement

Exercice 6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer soigneusement.

(1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, |x-a| > 3$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z}, |x-a| > \frac{1}{3}$

(3) Si n est impair, alors n^2 est impair.

(4) Si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 7. On considère sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des femmes, l'assertion $P(x,y) =$ « x est la fille de y ». Formaliser avec des quantificateurs les phrases suivantes :

(a) Toute femme a une fille.

(b) Toute femme a une mère.

(c) Toutes les femmes ont une même mère.

(d) Toute femme est fille de toute femme.

(e) Il y a une femme qui est la fille de toute femme.

(f) On peut trouver deux femmes dont l'une est la fille de l'autre.

Exercice 8. On considère quatre assertions P, Q, R et S. Établir les tables de vérité des assertions « (P ou Q) et (R ou S) » et « (P et R) ou (P et S) ou (Q et R) ou (Q et S) ». En conclure qu'elles sont vraies ou fausses toujours en même temps. Que peut-on en déduire pour le système d'équations portant sur des réels x et y :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) & = & 0 \\ (x-2)(y-3) & = & 0. \end{cases}$$

Exercice 9. [*Examen de seconde session, avril 2017*] Un ami vous déclare : « si je mange des gâteaux, alors je grossis ». Premier cas : vous le rencontrez et vous constatez qu'il a grossi ; vous vous dites alors qu'il a mangé des gâteaux. Second cas : vous le rencontrez et vous constatez qu'il n'a pas grossi ; vous vous dites alors qu'il n'a pas mangé de gâteaux.

(i) Dans le premier cas, avez-vous utilisé la contraposée ou la réciproque de l'implication ? Dans le second cas, avez-vous utilisé la contraposée ou la réciproque de l'implication ?

(ii) Votre raisonnement dans le premier cas est-il correct ? Et dans le second cas ?

Exercice 10. [*Examen de première session, janvier 2017*] Ecrire la contraposée de l'assertion : « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 n'est pas un multiple de 3, alors n n'est pas un multiple de 3. » Démontrer l'assertion initiale.

Défi. Où se trouvent les erreurs dans les raisonnements ci-dessous ?

(a) Considérons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Pour $x \neq 0$ cette équation équivaut à $x(x^2 + x + 1) = 0$, soit encore

$$x^3 + x^2 + x = 0\,.$$

D'après l'équation initiale, $x^2 + x = -1$. En remplaçant $x^2 + x$ par -1 dans l'équation ci-dessus, on trouve $x^3 - 1 = 0$, c'est-à-dire $x^3 = 1$. La seule racine réelle de cette équation est $x = 1$. En remplaçant maintenant x par 1 dans l'équation de départ, on obtient $3 = 0$.

(b) Nous allons démontrer par récurrence sur n que si, dans un groupe de n étudiants, il y a au moins une fille, alors il n'y a que des filles.

Initialisation : Pour $n = 1$ c'est évident. En effet s'il y a au moins une fille dans un groupe de 1 étudiant, alors tous les étudiants du groupe sont des filles.

Hérédité : Supposons la propriété établie au rang $n-1$ et considérons un groupe de n étudiants qui comporte au moins une fille. Choisissons une des filles et appelons-la Alice pour fixer les idées. Choisissons un autre étudiant (garçon ou fille), appelons-le Dominique. Le groupe constitué de tous les étudiants sauf Dominique comporte $n-1$ étudiants dont au moins une fille (Alice), donc d'après l'hypothèse de récurrence il ne comporte que des filles. Pour conclure il reste juste à montrer que Dominique est une fille. Considérons pour cela le groupe constitué de tous les étudiants sauf Alice. Ce groupe comporte $n-1$ étudiants, et il contient au moins une fille (puisque tous les étudiants sauf peut-être Dominique sont des filles). En utilisant une nouvelle fois l'hypothèse de récurrence, on en déduit que tous les étudiants de ce groupe sont des filles. En particulier Dominique est une fille, ce qui achève la démonstration.