Correction de la feuille d'exercices N°4

Question 1 Par définition, F est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u = (1, -2, 4)$ et $v = (1, 2, 1)$ (on identifie ici les points et vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec leurs triplets de coordonnées). Donc

$$\begin{aligned} F = Vect\{u, v\} &= \big\{s(1, -2, 4) + t(1, 2, 1)\ |s, t \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(s + t, -2s + 2t, 4s + t)\ |s, t \in \mathbb{R}\big\}. \end{aligned}$$

Le plan affine $\mathcal{P}$ est l'ensemble des translatés du point $A = (0, -1, 1)$ par les vecteurs de F. Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = A + Vect\{u, v\} &= \big\{(0, -1, 1) + (s + t, -2s + 2t, 4s + t)\ |s, t \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(s + t, -1 - 2s + 2t, 1 + 4s + t)\ |s, t \in \mathbb{R}\big\}. \end{aligned}$$

Question 2 On peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \big\{(3 - t + 2s, 1 + 2t - 3s, t)\ |s, t \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(3, 1, 0) + s(2, -3, 0) + t(-1, 2, 1)\ |s, t \in \mathbb{R}\big\} \\ &= (3, 1, 0) + Vect\{(2, -3, 0), (-1, 2, 1)\}. \end{aligned}$$

Donc le plan vectoriel directeur de $\mathcal{P}$ est $F = Vect\{(2, -3, 0), (-1, 2, 1)\}$, et par exemple le point de coordonnées $(3, 1, 0)$ appartient à $\mathcal{P}$.

Question 3 (a) On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -7 & -10 \\ 1 & -2 & -5 & -8 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

(b) On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 3 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Question 4 La matrice des coefficients du système donné est

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 45 & 0 \end{pmatrix}$$

et sa matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & -1 & 5 & 56 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 45 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Le système associé à la première matrice augmentée, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, est

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4x = 5 \end{cases}$$

Le système associé à la seconde matrice augmentée, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$, est

$$\begin{cases} 0x + 0y = & 0 \\ \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y = & -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Exercice 1 On a

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ -z \\ 0 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ces trois derniers vecteurs engendrent donc E.

Exercice 2 On a

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 2y = 8 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \right\} \\ &= \{ (x, 4-2x) \mid x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 7 \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x + 3y - 7 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, 2x + 3y - 7) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+2z=0\right\} \cap \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=1\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y-2z \text{ et } y=x-z-1\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y-2z \text{ et } y=(-y-2z)-z-1\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y-2z \text{ et } 2y=-3z-1\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-\frac{-3z-1}{2}-2z \text{ et } 2y=-3z-1\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-\frac{z}{2}+\frac{1}{2} \text{ et } 2y=-3z-1\right\}\\
&= \left\{\left(-\frac{z}{2}+\frac{1}{2},-\frac{3}{2}z-\frac{1}{2},z\right) \mid z\in\mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3 Notons A l'énoncé "$(\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R},(x,y)\in D)\Rightarrow b\neq 0$". La négation de A est l'énoncé

$$(\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R},(x,y)\in D) \text{ et } b=0.$$

La contraposée de A est l'énoncé

$$b=0\Rightarrow(\exists x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R},(x,y)\notin D).$$

La réciproque de A est l'énoncé

$$b\neq 0\Rightarrow(\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R},(x,y)\in D).$$

La contraposée de A est vraie, car si $b=0$, alors l'hypothèse $(a,b)\neq(0,0)$ implique $a\neq 0$, et donc l'équation de la droite D peut s'écrire sous la forme $x=c/a$. Maintenant, si on prend $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\neq c/a$ (par exemple on peut prendre $x=\frac{c}{a}+1$), alors pour tout $y\in\mathbb{R}$ on a $(x,y)\notin D$.

Puisque la contraposée de A est vraie, A est vraie et la négation de A est fausse.

La réciproque de A est aussi vraie, puisque si $b\neq 0$ alors l'équation de la droite D peut s'écrire sous la forme $y=(-a/b)x+c/b$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, le nombre $y=(-a/b)x+c/b$ est tel que $(x,y)\in D$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^4$ passant par le point P_0 et dirigé par $Vect\{U,V\}$. On a la représentation paramétrique suivante de $\mathcal{P}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},(s,t)\in\mathbb{R}^2\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}1+s+t\\t\\-1+2s+t\\t\end{pmatrix},(s,t)\in\mathbb{R}^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Soit maintenant $M:(a,b,c,d)$ un point de $\mathcal{P}$. D'après la représentation paramétrique ci-dessus, il existe $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$
\begin{cases}
a &= 1+s+t\\
b &= t\\
c &= -1+2s+t\\
d &= t.
\end{cases}
$$

Donc $b = d = t$, et aussi $s = a - b - 1$ et $2s = c + 1 - b$ (en extrayant le paramètre s de la première et de la troisième ligne du système et en y remplaçant t par b). Ces deux dernières relations donnent $2(a - b - 1) = c + 1 - b$, soit $2a - b - c - 3 = 0$. D'où les deux équations, satisfaites par tout point $M : (a, b, c, d)$ de $\mathcal{P}$:

$$(S) : \left\{ \begin{array}{r} b - d = 0 \\ 2a - b - c - 3 = 0 \end{array} \right.$$

On doit montrer que ces deux équations *caractérisent* les points du plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que tout point vérifiant ces équations est dans $\mathcal{P}$. Soit donc $M : (a, b, c, d)$ un tel point. Alors en posant $t = b = d$ et $s = a-b-1$, on obtient $a = 1+s+t$, et la deuxième équation donne $c = 2(1 + s + t) - t - 3 = 2s + t - 1$. Donc $(a, b, c, d) = (1 + s + t, t, 2s + t - 1, t)$, qui est de la forme des coordonnées des points de $\mathcal{P}$ obtenue plus haut.

Conclusion : le système (S) caractérise $\mathcal{P}$.