

**HLIN612 : Calculabilité et Complexité**  
**Examen 18 Mai 2022**

---

*Seul les documents de cours et travaux dirigés sont autorisés. La note prendra en compte la clarté des explications.*

## 1 Calculabilité

### Exercice 1

Soit  $f$  une fonction calculable, on appelle  $d(f)$  le domaine de définition de  $f$  c'est-à-dire

$$d(f) = \{x \mid f(x) \text{ est défini} \}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et à chaque fois justifier vos réponses.

1.  $\exists f$  tel que  $d(f)$  est décidable.
2.  $\forall f, d(f)$  est décidable.
3.  $\exists f$  tel que  $d(f)$  est récursivement énumérable et non décidable.
4.  $\exists f$  tel que  $d(f)$  n'est pas récursivement énumérable.
5.  $\exists f$  tel que le complémentaire de  $d(f)$  n'est pas récursivement énumérable.
6.  $\exists f$  tel que le complémentaire de  $d(f)$  est récursivement énumérable et non décidable.
7.  $\exists f$  tel que le complémentaire de  $d(f)$  est décidable.

□

### Exercice 2

Soit  $f$  une bijection des suites finies d'entiers dans  $\mathbb{N}$  définie  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$  où la liste est  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  et  $x_i \in \mathbb{N}$ . En déduire une fonction  $g$  bijective des suites croissantes (au sens large i.e.  $x_i \leq x_{i+1}, \forall i$ ) finies d'entiers dans  $\mathbb{N}$ .

□

## 2 Complexité

### Exercice 3

Considérons le problème CLIQUE, ce problème est connu NP-complet.

#### CLIQUE (Clique)

Données :  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté et  $k \in \mathbb{N}$ .

Question : Existe-t-il une clique de taille  $k$  ?

1. Montrer que le problème DEUX CLIQUES DISJOINTES est NP-complet.

#### DEUX CLIQUES DISJOINTES

Données :  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté et  $k \in \mathbb{N}$ .

Question : Existe-t-il deux cliques disjointes de taille  $k$  ?

2. Montrer que le problème CLIQUE reste NP-complet même quand tous les sommets admettent un même degré.

**Aide :** Soit  $\Delta$  le degré maximum du graphe. Construire  $\Delta$  copies du graphe  $G$ , et ajouter des sommets pour obtenir un graphe  $\Delta$ -régulier. Vous montrerez l'équivalence suivante : il existe une clique de taille  $k$  dans  $G$  si et seulement si il existe une clique de  $k$  dans le graphe construit.

□

#### Exercice 4

Soit  $\phi = (a \vee b) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg d) \wedge (b \vee d) \wedge (d \vee a)$

1. Est-ce que  $\phi$  est satisfiable ?
2. Proposer un algorithme glouton qui permet de satisfaire au moins la moitié des clauses pour une formule 2-SAT.

□

#### Exercice 5

##### DOUBLE-SAT

Données : Soit  $\phi$  une formule logique sous forme conjonctive.

Question : Existe-t'il deux affectations possibles pour  $\phi$  ?

1. Montrer que DOUBLE-SAT est NP-complet.

□