De la combinatoire aux graphes (HLIN201) – L1

Graphes I : définitions de bases

Sèverine Bérard

Université de Montpellier

2^{e} semestre 2017-18

Graphes I : définitions de bases

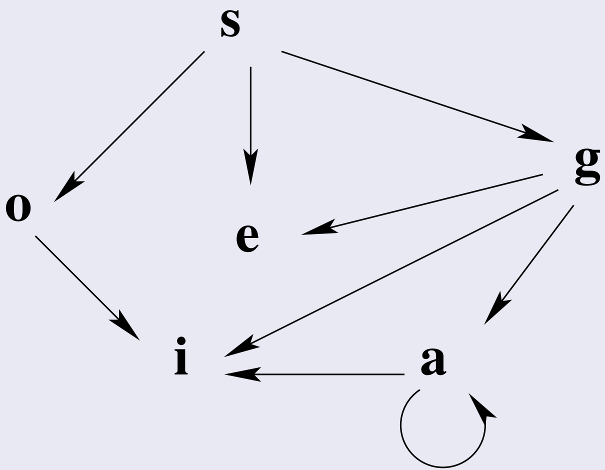
<u>Orienté</u> :

$A \longrightarrow B$

<u>Non Orienté</u>

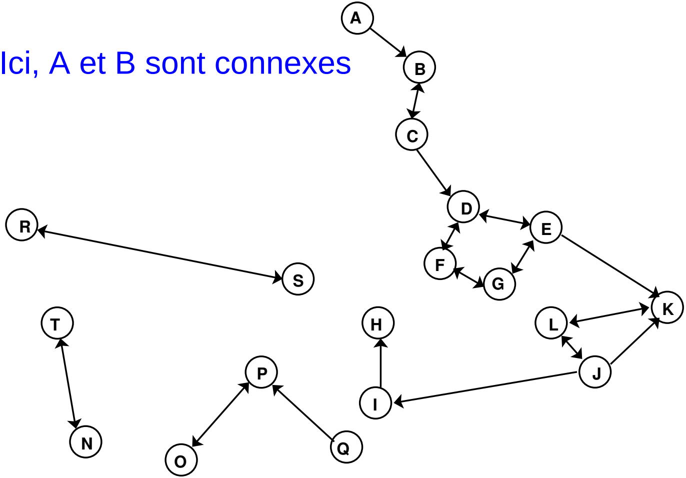
$A - B$

Prédateur proie

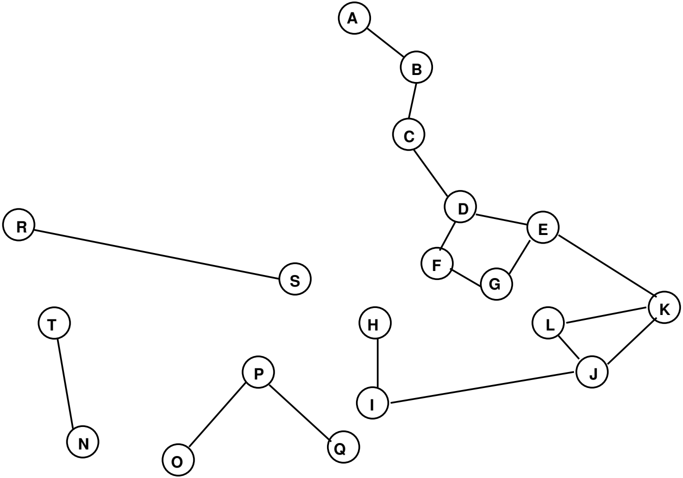


Plan des pistes cyclables

Ici, A et B sont connexes



Graphe non orienté « Plan des pistes cyclables »



11 → 12

Source

Puit

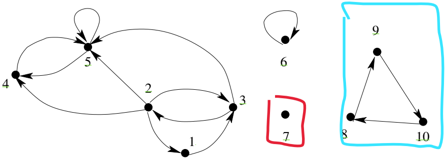


FIGURE – Un graphe $G_1 = (X, U)$ orienté

- X les sommets, U les arcs.
- L'ordre (nb sommets) $n = |X|$,
- Le nb d'arcs $m = |U|$.
- Origine, extrémité d'un arc.
- Boucle.
- Ensemble $Succ(x)$, $Pred(x)$.
- Sommet isolé, source, puits.
- Arcs entrants, sortants. Demi degrés, degré.

$$m = \sum_{x \in X} d^-(x)$$

$$m = \sum_{x \in X} d^+(x)$$

$$2m = \sum_{x \in X} d(x)$$

Définitions alternatives d'un graphe orienté

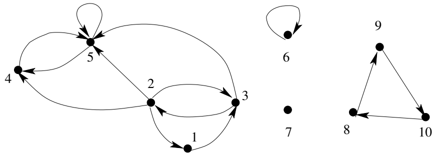


FIGURE – Un graphe $G_1 = (X, U)$ orienté

G_1 est défini alternativement par la donnée de $X = \{1, 2, ..., 10\}$ et celle de **Succ :** $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ telle que :

- $Succ(1) = \{3\}$
- $Succ(2) = \{1, 3, 4, 5\}$
- $Succ(3) = \{2, 5\}$
- ...
- $Succ(5) = \{4, 5\}$
- $Succ(6) = \{6\}$
- $Succ(7) = \emptyset$
- ...

On a la définition analogue avec la fonction *Pred*.

Définition alternative d'un graphe orienté

Ici, 2 est en relation avec
1, 3, 4 et 5

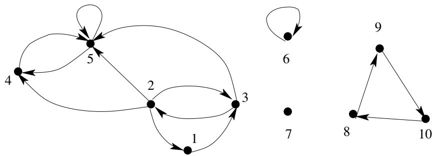


FIGURE – Un graphe $G_1 = (X, U)$ orienté

G_1 est défini alternativement par la donnée de $X = \{1, 2, ..., 10\}$ et celle de la *matrice d'adjacence* A :

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Graphe et relation binaire

Un graphe orienté est exactement le graphe d'une relation binaire.

Il peut donc avoir les caractérisations usuelles :

- *réflexif*
- *symétrique*
- *antisymétrique*
- *transitif*

5, 4, 2 et 3 sont les voisins à distance 1 de 5

5 et 4 sont voisins à distance 2 de 1

8 est son propore voisin en 3

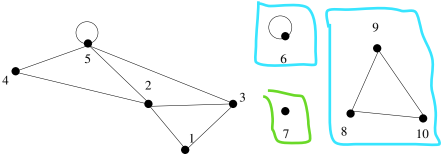


FIGURE – Un graphe $G_2 = (X, E)$ non orienté

- X les sommets, E les arêtes.
- l'ordre n, $m = |E|$.
- Les extrémités d'une arête.
- Boucle.
- Ensemble $Voisins(x)$.
- Sommet isolé.
- Degré d'un sommet. Attention aux boucles.
  $2m = \sum_{x \in X} d(x)$

Définitions alternatives d'un graphe non orienté

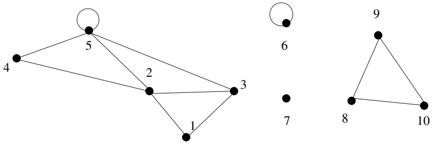


FIGURE – Un graphe $G_2 = (X, E)$ non orienté

G_2 est défini alternativement par la donnée de $X = \{1, 2, ..., 10\}$ et celle de **Voisins :** $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ telle que :

- $Voisins(1) = \{2, 3\}$
- $Voisins(2) = \{1, 3, 4, 5\}$
- $Voisins(3) = \{1, 2, 5\}$
- ...
- $Voisins(5) = \{2, 3, 4, 5\}$
- $Voisins(6) = \{6\}$
- $Voisins(7) = \emptyset$
- ...

Définition alternative d'un graphe non orienté

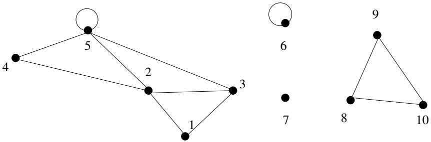


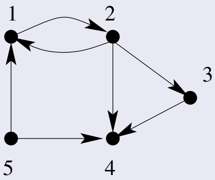
FIGURE – Un graphe $G_2 = (X, E)$ non orienté

G_1 est défini alternativement par la donnée de $X = \{1, 2, ..., 10\}$ et celle de la *matrice d'adjacence* symétrique A :

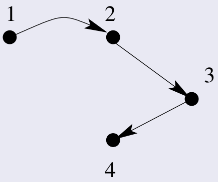
$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Symétrie

Sous–graphe d'un graphe orienté



Un graphe orienté $G = (X, U)$



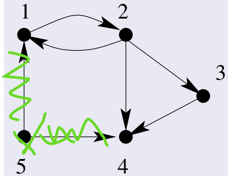
$G_1 = (X_1, U_1)$ est **un** sous-graphe de G s'il vérifie :

$$X_1 \subseteq X \text{ et } U_1 \subseteq U \cap (X_1 \times X_1)$$

U_1 est un sous-ensemble de U tel que l'origine et l'extrémité de chaque arc de U_1 sont dans X_1.

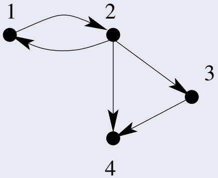
On enlève quelques arrêtes et quelques sommets

Sous–graphe induit par une partie des sommets d'un graphe orienté



Un graphe orienté $G = (X, U)$

On enlève des sommets et leurs arrêtes associés uniquement



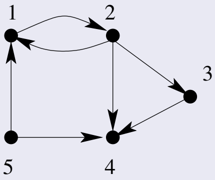
$X_2 \subseteq X$. $G_2 = (X_2, U_2)$ est **le sous-graphe de G induit par X_2** si :

$$U_2 = \{(x, y) \in U \mid x \in X_2 \text{ et } y \in X_2\}$$

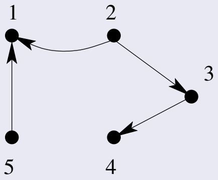
En d'autres termes, $U_2 = U \cap (X_2 \times X_2)$

G_2 est entièrement défini par G et X_2. On le note $G_2 = G(X_2)$.

Sous–graphe couvrant un graphe orienté



Un graphe orienté $G = (X, U)$



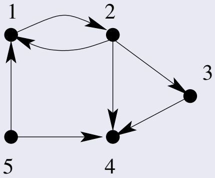
$G_3 = (X, U_3)$ est **un** sous-graphe couvrant G.

On enlève uniquement des arrêtes

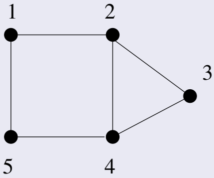
Il a le même ensemble de sommets que G, et c'est un sous-graphe de G.

En conclusion, mêmes sommets, certains arcs.

Graphe non orienté sous-jacent à un graphe orienté

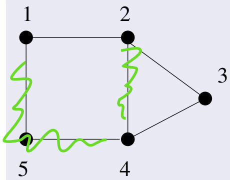


Un graphe orienté $G = (X, U)$

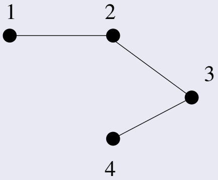


La notion de graphe non orienté sous-jacent à un graphe orienté consiste à supprimer l'orientation des arcs pour définir les arêtes.

Sous–graphe d'un graphe non orienté



Un graphe non orienté $H = (X, E)$

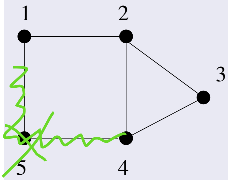


$H_1 = (X_1, E_1)$ est **un** sous-graphe de H s'il vérifie :

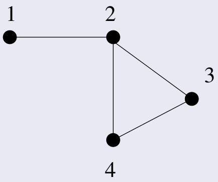
$$X_1 \subseteq X \text{ et } E_1 \subseteq E \cap \mathcal{P}(X_1)$$

E_1 est un sous-ensemble de E tel que les extrêmités de chaque arête de E_1 sont dans X_1.

Sous–graphe induit par une partie des sommets d'un graphe non orienté



Un graphe orienté $H = (X, E)$



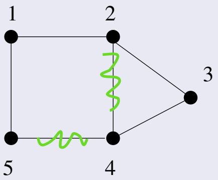
$X_2 \subseteq X$. $H_2 = (X_2, E_2)$ est **le** sous-graphe de H induit par X_2 si :

$$E_2 = \{\{x, y\} \in E \mid x \in X_2 \text{ et } y \in X_2\}$$

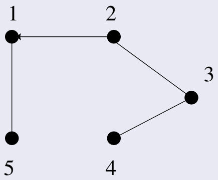
En d'autres termes $E_2 = E \cap \mathcal{P}(X_2)$

H_2 est entièrement défini par H et X_2.
On le note $H_2 = H(X_2)$.

Sous–graphe couvrant un graphe non orienté



Un graphe orienté $H = (X, E)$



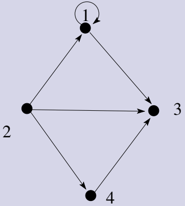
$H_3 = (X, E_3)$ est **un** sous-graphe couvrant de H s'il a le même ensemble de sommets que H, et qu'il est un sous-graphe de H.

En conclusion, mêmes sommets, certaines arêtes.

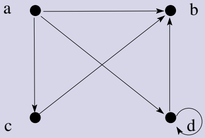
Isomorphismes de graphes orientés

Définition

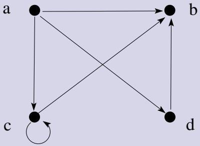
$G = (X, U)$ et $H = (Y, V)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe une *bijection* **f :** $X \longrightarrow Y$ conservant les arcs



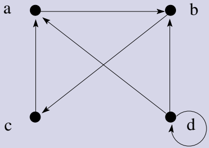
G1



G2



G3

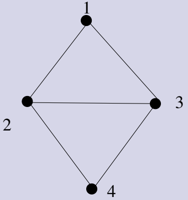


G4

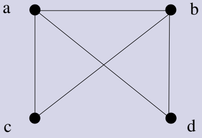
Isomorphismes de graphes non orientés

Définition

$G = (X, E)$ et $H = (Y, F)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe une *bijection* **f :** $X \longrightarrow Y$ conservant les arêtes

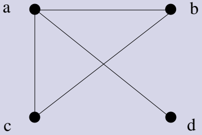


H1

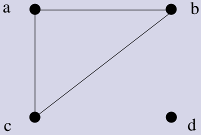


H2

Isomorphe



H3



H4

Non isomorphe,
on le voit directement car ils n'ont même pas le même nombre de liaison