Modèles de calcul

Université de Montpellier

TD 2 : Les jetons de Rosza

Représentation des programmes de définition
des fonctions récursives primitives

Auteurs : G. Lafitte et B. Durand
modifié par V. Prince

Exercice 1 Behold the tokens

Nous allons travailler avec des jetons, qui représentent les "lettres" d'un alphabet utilisé pour construire le langage des fonctions n-aires dans $\mathbb{N}$. Nous les appelons jetons de Rózsa, du nom de la fondatrice de la théorie sur les fonctions récursives, Roszà Péter. Une suite de jetons bien formée représente une fonction n-aire sur les entiers. Nous commençons avec le premier type de jetons, les jetons fonctions : $\boxed{0} = \mapsto 0$, $\boxed{\mathbf{I}} = x \mapsto x$ et $\boxed{\mathbf{S}} = x \mapsto x + 1$.

1. Quelles sont les arités de ces trois jetons ? Pourquoi la suite de jetons $\boxed{\mathbf{S}}\boxed{0}$ n'a-t-elle pas de signification ?

Nous introduisons maintenant un autre type de jetons, les jetons **constructeurs** ($\boxed{\blacktriangleleft}$, $\boxed{\blacktriangleright}$, $\boxed{\circledcirc}$, $\boxed{\mathbf{R}}$), qui construisent de nouvelles fonctions à partir d'autres fonctions, *i.e.*, des jetons fonctions ou des suites de jetons bien formées. Nous commençons par les jetons $\boxed{\blacktriangleleft}$ et $\boxed{\blacktriangleright}$ ($\mathbf{x}$ représente le vecteur fini de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$) :

$$\boxed{\blacktriangleleft}\boxed{\mathbf{f}} = y, \mathbf{x} \mapsto \boxed{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \qquad \boxed{\blacktriangleright}\boxed{\mathbf{f}} = \mathbf{x}, y \mapsto \boxed{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

2. Si $\boxed{\mathbf{f}}$ est d'arité n, quelles sont les arités des fonctions $\boxed{\blacktriangleleft}\boxed{\mathbf{f}}$ et $\boxed{\blacktriangleright}\boxed{\mathbf{f}}$?

Le jeton constructeur[1] $\boxed{\circledcirc}$ permet de composer une fonction $\boxed{\mathbf{f}}$ d'arité p avec p fonctions $\boxed{g_1}$, $\boxed{g_2}$, ..., $\boxed{g_p}$ de même arité n :

$$\boxed{\circledcirc}\boxed{\mathbf{f}}\boxed{g_1}\boxed{g_2}\cdots\boxed{g_p} = \mathbf{x} \mapsto \boxed{\mathbf{f}}(\boxed{g_1}(\mathbf{x}), \boxed{g_2}(\mathbf{x}), \ldots, \boxed{g_p}(\mathbf{x}))$$

3. Les suites de jetons suivantes sont-elles syntaxiquement correctes et si oui que calculent-elles ?
   a) $\boxed{\circledcirc}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{S}}$
   b) $\boxed{\circledcirc}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{0}$
   c) $\boxed{\circledcirc}\boxed{0}\boxed{\mathbf{I}}$
   d) $\boxed{\circledcirc}\boxed{\mathbf{I}}\boxed{0}$
   e) $\boxed{\circledcirc}\boxed{\blacktriangleleft}\boxed{0}\boxed{\mathbf{S}}$
   f) $\boxed{\circledcirc}\boxed{\blacktriangleleft}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{I}}\boxed{\blacktriangleleft}\boxed{0}$

1. Les jetons constructeurs permettent de donner un sens à certaines suites de jetons. Pour qu'une suite de jetons soit bien formée, il faut respecter les arités des fonctions utilisées dans une construction par un jeton constructeur.

Le jeton constructeur $\boxed{\mathbf{R}}$ permet de faire des constructions inductives. Il permet de définir une fonction h à partir d'une fonction f (le cas 0), et d'une fonction g (l'induction : le cas $n+1$ en fonction du cas n) :

$$h = \boxed{\mathbf{R}}\boxed{\mathbf{f}}\boxed{\mathbf{g}} = n, \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} \boxed{\mathbf{f}}\,(\mathbf{x}) & \text{si } n = 0, \\ \boxed{\mathbf{g}}\,(n-1, h(n-1, \mathbf{x}), \mathbf{x}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la formule de récurrence, on préfèrera écrire :
$h(n+1, \mathbf{x}) = \boxed{\mathbf{g}}\,(n, h(n, \mathbf{x}), \mathbf{x})$
pour éviter d'utiliser des soustractions pour l'instant.

4. Est-il possible d'écrire un programme valide de 3 symboles commençant par $\boxed{\mathbf{R}}$ (justifiez votre réponse) ?
5. Trouvez tous (il y en a 4) les programmes de 4 symboles commençant par $\boxed{\mathbf{R}}$, donnez leurs arités et les calculs effectués.

Exercice 2 3 symboles

1. Donnez l'arité et la valeur des fonctions calculées par les programmes suivants :
   a) $\boxed{◎}\boxed{\mathbf{I}}\boxed{\mathbf{o}}$
   b) $\boxed{◎}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{o}}$
   c) $\boxed{◄}\boxed{◄}\boxed{\mathbf{I}}$
2. Est-il possible d'écrire un programme valide de 4 symboles commençant par $\boxed{◄}\boxed{\mathbf{R}}$ (justifiez votre réponse) ?

Exercice 3 Reconnaissance

Aide pour la méthode : dans cet exercice, on s'essaye à reconnaître des programmes. Pour cela, face au constructeur $\boxed{◎}$ n'hésitez pas à repérer la fonction "mère" qui est immédiatement à sa droite puis la ou les fonctions "filles" en fonction de l'arité de la "mère".
Quand vous avez plusieurs jetons $\boxed{◎}$, commencez par celui qui est le plus à droite.
Pour le constructeur $\boxed{\mathbf{R}}$, il faut que l'arité de la fonction de récurrence soit égale à l'arité de la fonction de base +2.
Donnez les fonctions calculées par les programmes suivants :

1. $\boxed{◎}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{◎}\boxed{◎}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{S}}$
2. $\boxed{\mathbf{R}}\boxed{\mathbf{o}}\boxed{◄}\boxed{◎}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{◎}\boxed{◎}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{S}}$
3. $\boxed{\mathbf{R}}\boxed{\mathbf{o}}\boxed{\mathbf{R}}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{►}\boxed{◄}\boxed{\mathbf{S}}$
4. $\boxed{\mathbf{R}}\boxed{\mathbf{o}}\boxed{\mathbf{R}}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{►}\boxed{◄}\boxed{◎}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{\mathbf{S}}$
5. $\boxed{◎}\boxed{\mathbf{R}}\boxed{\mathbf{S}}\boxed{►}\boxed{►}\boxed{\mathbf{I}}\boxed{◄}\boxed{\mathbf{I}}\boxed{►}\boxed{\mathbf{S}}$

Exercice 4 Opérateurs arithmétiques

Trouvez un programme pour calculer les fonctions suivantes. (On peut réutiliser des programmes déjà faits !)

1. $f_2 : (x, y) \mapsto x + y$
2. $f_2 : (x, y) \mapsto x \times y$
3. $f_1 : x \mapsto 2^x$

4. $f_2 : (x, y) \mapsto y^x$
5. $f_2 : (x, y) \mapsto x^y$
   Astuce : pensez à écrire une fonction qui inverse les arguments d'une autre fonction.

6. $f_2 : (x, y) \mapsto x - y$ (Si $y > x$ alors 0)
   Pour cela, commencez par définir la fonction *prédécesseur* $\boxed{\mathbf{P}}$ telle que $x \mapsto x - 1$ si $x > 0$, 0 sinon.
   Définissez ensuite la fonction *Minus* $\boxed{\mathbf{M}}$ $(x, y) \mapsto y - x$. A partir de là vous pourrez définir la fonction *soustraction dans* $\mathbb{N}$