HLMA101 - Partie B : Algèbre linéaire

Chapitre 6
L'espace $\mathbb{R}^n$

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2019-2020

Sommaire

Définition

L'espace réel à n dimensions est $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (produits cartésien, n fois).

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont les n-uplets de réels : $(x_1, \ldots, x_n)$ où $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Exemples

- $\mathbb{R}^2$: couples
- $\mathbb{R}^3$: triplets
- $\mathbb{R}^4$: quadruplets

Attention : l'ordre des éléments importe !

Éléments de $\mathbb{R}^n$

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ peuvent être interprétés de deux façon différentes :

- $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de points.
- $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de vecteurs.

Point de vue : $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de points

$(x_1, \ldots, x_n)$ représente le point dont les coordonnées sont $(x_1, \ldots, x_n)$

Vecteurs (rappels)

- À chaque couple de points (A, B) de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1^A, \ldots, x_n^A)$ et $(x_1^B, \ldots, x_n^B)$, on peut associer un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées
$$(x_1^B - x_1^A, \ldots, x_n^B - x_n^A)$$
- Deux couples de points (A, B) et (C, D) peuvent représenter un même vecteur :
Si les coordonnées de A, B, C et D sont $(x_1^A, \ldots, x_n^A)$, $(x_1^B, \ldots, x_n^B)$, $(x_1^C, \ldots, x_n^C)$ et $(x_1^D, \ldots, x_n^D)$, alors
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i^D - x_i^C = x_i^B - x_i^A$$

Point de vue : $\mathbb{R}^n$ comme ensemble de vecteurs

- Étant donné un vecteur $\overrightarrow{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on peut toujours le représenter avec un couple de points de la forme (O, M) où O est l'origine et M le point de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $(u_1, \ldots, u_n)$.
- Inversement, étant donné un point de $\mathbb{R}^n$, on peut lui associer un vecteur, appelé **vecteur-position** : si M est de coordonnées $(x_1^M, \ldots, x_n^M)$ alors le vecteur-position associé à M est le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Remarque

- Les points et les vecteurs sont des objets différents, on ne fait pas les même choses avec !
- Mais on peut tous les identifier par des n-uplets de $\mathbb{R}^n$.

Sommaire

On peut “combiner” les vecteurs (pas les points).

Définition

Soit $\overrightarrow{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\overrightarrow{v} = (v_1, \dots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
La **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coefficients λ et μ est le vecteur :

$$\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$$

de coordonnées : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $w_i = \lambda u_i + \mu v_i$.

Remarques

- Avec $\lambda = \mu = 1$, on a la somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
- Avec $\lambda = -1$ et $\mu = 0$, on a $-\overrightarrow{u}$ et plus généralement, si $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda \overrightarrow{u}$ ou $\lambda . \overrightarrow{u}$ (multiple de $\overrightarrow{u}$).
- Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u} = \lambda . \overrightarrow{v}$

Base canonique

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille de vecteurs :
$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \dots, 0)$
$\overrightarrow{e_2} = (0, 1, \dots, 0)$
$\vdots$
$\overrightarrow{e_n} = (0, \dots, 0, 1)$

Théorème

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique.

Preuve.

Sommaire

Définition

Une **droite vectorielle** de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble formé par tous les multiples d'un vecteur non-nul

Remarques

- C'est un ensemble de vecteurs, qu'on représente en utilisant les représentants de ces vecteurs ayant pour origine 0.
- Le vecteur nul appartient à toutes les droites vectorielles (elles “passent” toutes par l'origine).

Écriture paramétrique

La droite “engendrée” par les multiples du vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ est :

$$D_{\overrightarrow{u}} = \{t.\overrightarrow{u} \;/\; t \in \mathbb{R}\}$$

ou

$$D_{\overrightarrow{u}} = \{(t.x_1, \dots, t.x_n) / \; t \in \mathbb{R}\} \text{ si } \overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n)$$

Définition

Un **plan vectoriel** de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires.

Écriture paramétrique

Le plan “engendré” par deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ peut s'écrire :

$$P_{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \{s.\overrightarrow{u} + t.\overrightarrow{v} / (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exemple.

Remarques

- Ce sont bien les droites et les plans au sens usuel.
- Pour les représenter, on utilise les représentants des vecteurs ayant pour origine 0 (tous les plans vectoriels "passent" par 0).
- Il faut 2 vecteurs non-colinéaires pour décrire un plan, sinon, on décrit uniquement une droite.
- Pour les droites ou les plans, il n'y a pas unicité du/des vecteur(s) qui engendrent la droite/le plan.
- Vocabulaire : on parle de droite **engendrée** par un vecteur ou de plan **engendré** par deux vecteurs.

Sommaire

Définition

Soit F une partie non-vide de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est une <u>sous-espace vectoriel</u> de $\mathbb{R}^n$ (s.e.v.) si :

$$\forall \vec{u} \in F,\ \forall \vec{v} \in F,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v} \in F$$

De façon équivalente :

- Toute combinaison linéaire (d'un nombre arbitraire) de vecteurs de F reste dans F
- $\forall \vec{u} \in F, \forall \vec{v} \in F, \vec{u} + \vec{v} \in F$ et $\forall \vec{u} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.\vec{u} \in F$

Exemples

- Une droite vectorielle est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
  Preuve.
- Un plan vectoriel est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
  Preuve : laissée en exercice.

Définition

Soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.
Le **sous-espace vectoriel engendré par** $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$.
On le note $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$.

Remarque

Il n'y a pas de contraintes sur les vecteurs $\vec{u}_i$, ils peuvent être nuls, colinéaires, etc.

Propriété

Un sous-espace engendré par une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel.

Théorème (admis)

Tous sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est de cette forme (un s.e.v. engendré).

Remarque

Un s.e.v. contient toujours le vecteur nul.

Sommaire

But :

Trouver une définition qui permette une généralisation des droites et des plans (et des s.e.v.) à des cas qui ne passent par par l'origine.
Ce seront des ensembles de points, pas de vecteurs.

Principe :

Partant d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, on peut translater le point A par le vecteur $\vec{u}$: il suffit de déterminer B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
B est appelé translaté de A par $\vec{u}$.

Définition

Soit $\mathscr{F}_0$ un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ et P_0 un point de $\mathbb{R}^n$.
Le **sous-espace affine** dirigé par $\mathscr{F}_0$ et passant par P_0 est l'ensemble de tous les points obtenus en translatant P_0 par tous les vecteurs de $\mathscr{F}_0$.

Définitions

- Une droite affine de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine dirigé par une droite vectorielle.
- Un plan affine de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine dirigé par un plan vectoriel.

Écriture paramétrique

Si P_0 est le point de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et $\overrightarrow{u} = (y_1, \dots, y_n)$, alors le translaté de P_0 par $\overrightarrow{u}$ est le point de coordonnées

$$(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

(Car $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{u} \iff \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i^P - x_i^{P_0} = y_i$)

Donc, si $\begin{cases} \overrightarrow{u}_1 = & (y_{1,1}, \dots, y_{1,n}) \\ \vdots & \\ \overrightarrow{u}_k = & (y_{k,1}, \dots, y_{k,n}) \end{cases}$ et $P_0 : (x_1, \dots, x_n)$

alors le sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_k)$ et passant par P_0 est :

$$\Big\{(x_1 + t_1.y_{1,1} + \dots + t_k.y_{k,1}\ , \quad \dots \quad , x_n + t_1.y_{1,n} + \dots + t_k.y_{k,n}) \Big/ (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k\Big\}$$

Exemples

- Droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $P_0 : (-3, 0, 1)$ et dirigée par la droite (vectorielle) engendrée par $\overrightarrow{u} = (2, -2, 5)$.
- Plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par P_0, et dirigé par le plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} = (1, -1, -1)$

Sommaire

Liens équation / écriture paramétrique

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ on sait qu'on peut décrire une droite (affine) ou un plan (affine) par des équations mais on a vu qu'on peut aussi les décrire par une écriture paramétrique.
Nous allons étudier les liens entre ces deux écritures.

Explicitation

- Exemple 1 : droite de $\mathbb{R}^2$
- Exemple 2 : plan de $\mathbb{R}^3$

Conclusion : il y a une correspondance entre les deux écritures pour les droites de $\mathbb{R}^2$ et les plans de $\mathbb{R}^3$.
Et pour une droite de $\mathbb{R}^3$ (exemple 3) ?

C'est l'objet du chapitre suivant !

D'autre problèmes menant à des questions similaires...

(1) Posons $\overrightarrow{u} = (2, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (5, 4)$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Peut-on écrire $\overrightarrow{w} = (-1, 2)$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$?

(2) Les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations $2x + 5y + 1 = 0$ et $3x + 4y - 2 = 0$ ont-elles une intersection non-vide ?

(3) Peut-on trouver des équations décrivant le s.e.a. de $\mathbb{R}^7$ passant par $P_0 : (1, 2, -1, -2, 3, 4, 0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}_1 = (0, 1, 2, 3, -4, 5, 0)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$ et $\overrightarrow{u}_3 = (-1, 2, -2, 5, 0, 7, -1)$?

(4) Quelle est la description paramétrique de l'espace des points (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ solutions de
$\begin{cases} x + 7y - z + t = 1 \\ y + z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = -1 \end{cases}$?