Compositions Internes 1

HLMA 203
Lois de Composition Internes

I Définitions

> Un ensemble est une structure contenant plusieurs élément souvent ordonné selon une relation d'ordre permettant de les comparer : $\forall x, y \in E, (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$

> Une loi de composition sur un ensemble E est une application $f : E \times E \to E$

Exemple :

- L'addition est une loi de composition sur $\mathbb{N}$ car $\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}$
- La soustraction n'est pas une loi de composition sur $\mathbb{N}$ car $\mathbb{N} - \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ $(3 - 5 = -2)$

⚠ $f(x, y) \neq f(y, x)$

Définition :

Si f est une loi de composition sur E, on dit que f est commutative ssi $\forall x, y \in E / f(x, y) = f(y, x)$

Exemple :

La multiplication est commutative sur $\mathbb{R}$: $3 \times 2 = 2 \times 3 = 6$

La division n'est pas commutative sur $\mathbb{R}$: $(3/2 = 1,5) \neq (2/3 = 0,6666...)$

Particulièrement :

> La multiplication de matrice n'est pas commutative

> La composition de fonctions n'est pas commutative

Compositions Internes 2

Définition :

> Si f est une loi de composition sur un ensemble E
f est associative ssi
$\forall x, y, z \in E, \ f(x, f(y,z)) = f(f(x,y), z)$

> Si E est un ensemble avec deux lois de composition
f et g $\quad f : E \times E \to E$
$\qquad\qquad g : E \times E \to E$

On dit que f est distributive si
$\forall x, y, z \in E, \quad f(x, g(y,z)) = g(f(x,y), f(x,z))$

Exemple = $f = \times$, $g = +$ $\qquad x \times (y + z) = xy + yz.$

$f(x, g(y+z))$

Est ce que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?
Prenons $g(x) = x + 1$, $h(x) = x$, $f(x) = x + 2$

$f(g + h) = f(x + 1 + x) = 2x + 1 + 2 = 2x + 3$
$\neq$
$f(g) + f(h) = f(x+1) + f(x) = x + 3 + x + 2 = 2x + 5$

Définition Soit E un ensemble avec une loi f.

On dit que $x_0 \in E$ est élément neutre pour la loi f si $\forall x \in E, \ f(x_0, x) = f(x, x_0) = x$

Exemple : 0 est élément neutre de l'addition
1 est élément neutre de la multiplication

Composition Interne 3

<u>Définition</u> : Soit E un ensemble avec une loi de composition f admettant un élément neutre x_0, et si $y \in E$, on dit que y admet un symétrique pour la loi f si $\exists z \in E$, $f(y,z) = f(z,y) = x_0$

<u>Exemples</u> : La loi d'addition sur $\mathbb{R}$: l'opposé de y

// / de multiplication sur $\mathbb{R}$: l'inverse de y $(y \neq 0)$