Correction TD n° 11

Question 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

(a) VRAI. Supposons que la droite d'équation $y = ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) soit asymptote oblique de f en $+\infty$, c'est-à-dire,

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{f(x)}{x} - a = \frac{f(x) - ax}{x}.$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il suit que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a \right) = 0$$

et donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.

(b) FAUX. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$. L'asymptote oblique de f en $+\infty$ existe si et seulement s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$. Par exemple pour la fonction racine carrée $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ vérifie $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ mais n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

(c) FAUX. Pour f la fonction carrée, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

et donc f n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$. La fonction f étant une fonction polynomiale, on sait que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivées successives

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad f'' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 6x \end{array}$$

On étudie le signe de f'' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit que f est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. De plus, $(0, 0)$ est un point d'inflexion à la courbe de f.
Soit $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$. La fonction g étant une fonction fraction rationnelle, on sait que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivées successives

$$g' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{1}{x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad g'' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2}{x^3} \end{array}$$

On étudie le signe de g'' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	||	$+$

On en déduit que g est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$. De plus, la courbe de g n'admet pas de point d'inflexion.

Exercice 1.

(a) Soit $f : x \longmapsto \frac{x}{(\sin(x)+1)^2}$. Le réel $f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\sin(x) + 1)^2 \neq 0 \iff \sin(x) + 1 \neq 0 \iff \sin(x) \neq -1,$$

et on sait que $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = -1\} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. On en déduit que le domaine de définition de f est la partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

On peut écrire f comme étant une composée de fonctions dont on connait la dérivabilité. En effet,

$$f = \frac{f_1}{f_2 \circ f_3},$$

où

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + 1 \end{array}.$$

Les fonctions f_1 et f_2 étant des fonctions polynomiales, on sait que f_1 est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f_3 est la somme de la fonction sinus avec une constante, elle est donc dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Les fonctions dérivées sont alors

$$f_1' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}, \quad f_2' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}, \quad f_3' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}.$$

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On utilise les opérations sur les dérivées :

$$\left.\begin{array}{l} f_3 \text{ dérivable en } x_0 \\ f_2 \text{ dérivable en } f_3(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_2 \circ f_3 \text{ dérivable en } x_0$$

et

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ dérivable en } x_0 \\ f_2\circ f_3 \text{ dérivable en } x_0 \\ f_2\circ f_3(x_0)\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{f_1}{f_2\circ f_3} \text{ dérivable en } x_0.$$

On a ainsi montré que **le domaine de dérivabilité de f est $\mathcal{D}_f$** tout entier. De plus, pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, la dérivée de f en x est

$$f'(x) = \frac{f_1'(x)\times f_2\circ f_3(x) - f_1(x)\times (f_2\circ f_3)'(x)}{(f_2\circ f_3(x))^2},$$

avec

$$(f_2\circ f_3)'(x) = f_2'\circ f_3(x)\times f_3'(x) = 2(\sin(x)+1)\times\cos(x) = 2\cos(x)(\sin(x)+1).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(\sin(x)+1)^2 - x\times(2\cos(x)(\sin(x)+1))}{(\sin(x)+1)^4} \\ &= \frac{1}{(\sin(x)+1)^2} - \frac{2x\cos(x)}{(\sin(x)+1)^3}, \end{aligned}$$

pour tout $x\in\mathcal{D}_f$.

(b) Soit $g : x\longmapsto x|x|$. Le réel $g(x)$ est défini pour tout $x\in\mathbb{R}$. On en déduit que le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g est $\mathbb{R}$ tout entier. On peut écrire g comme le produit des fonctions g_1 et g_2 définies par

$$g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}, \quad g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}.$$

La fonction g_1 est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$g_1' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}.$$

La fonction g_2 est la fonction valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée

$$g_2' : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array}.$$

Soit $x_0\in\mathbb{R}^*$. On utilise les opérations sur les dérivées :

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \text{ dérivable en } x_0 \\ g_2 \text{ dérivable en } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow g_1g_2 \text{ dérivable en } x_0.$$

On obtient ainsi que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée

$$g'(x) = g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) = 1\times|x| + x\times\frac{|x|}{x} = 2|x|,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Il reste maintenant à étudier la dérivabilité de g en $x = 0$. Pour ce faire, nous déterminons si

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

existe et est finie. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|.$$

Il suit que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} |x| = 0$$

et donc g est dérivable en 0, de dérivée $g'(0) = 0$.

En résumé, **le domaine de dérivabilité de g est** $\mathbb{R}$ tout entier et sa dérivée peut s'écrire

$$g' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2|x| \end{array}$$

car elle correspond sur $\mathbb{R}^*$ et en 0.

(c) Soit $h : x \longmapsto x^{\frac{3}{5}}$. Le réel $h(x)$ est définie pour tout $x \geqslant 0$ donc le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de h est $\mathbb{R}_+$. De plus, par définition, on a

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \exp(\frac{3}{5}\ln(x)) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On commence par regarder sur $\mathbb{R}_+^*$, où la fonction h s'écrit comme la composée $h_1 \circ h_2$ des fonctions

$$h_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \quad , \quad h_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{5}\ln(x) \end{array} .$$

La fonction h_1 étant la fonction exponentielle, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $h_1' = h_1$. La fonction h_2 étant un multiple de la fonction logarithme népérien, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$h_2' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{5x} \end{array} .$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On utilise les opérations sur les dérivées :

$$\left.\begin{array}{l} h_2 \text{ dérivable en } x_0 \\ h_1 \text{ dérivable en } h_2(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow h_1 \circ h_2 \text{ dérivable en } x_0.$$

On obtient ainsi que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$h'(x) = h_1' \circ h_2(x) \times h_2'(x) = \exp\left(\frac{3}{5}\ln(x)\right) \times \frac{3}{5x} = \frac{3x^{\frac{3}{5}}}{5x} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Il reste maintenant à étudier la dérivabilité de h en $x = 0$. Pour ce faire, nous déterminons si

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$

existe et est finie. Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = x^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}.$$

Il suit que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = +\infty$$

et donc h n'est pas dérivable en 0.

En résumé, **le domaine de dérivabilité de h est** $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée peut s'écrire

$$h' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} \end{array}.$$

(d) Soit $i : x \longmapsto \sqrt{x^3 + x^2}$. Le réel $i(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^3 + x^2 \geqslant 0 \iff x^2(x+1) \geqslant 0 \iff x + 1 \geqslant 0.$$

On en déduit que le domaine de définition de i est la partie $\mathcal{D}_i = [-1, +\infty[$. La fonction i s'écrit comme la composée $i_1 \circ i_2$ des fonctions

$$i_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}, \quad i_2 : \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + x^2 \end{array}.$$

La fonction i_1 étant la fonction racine carrée, on sait que i_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$i_1' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}.$$

La fonction i_2 étant une fonction polynomiale, on sait que i_2 est dérivable sur $[-1, +\infty[$, de dérivée

$$i_2' : \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 + 2x \end{array}.$$

De plus,

$$i_2(x) = 0 \iff x^2(x+1) = 0 \iff x \in \{-1, 0\}.$$

Soit $x_0 \in \mathcal{D}_i \setminus \{-1, 0\} =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. On utilise les opérations sur les dérivées :

$$\left. \begin{array}{l} i_2 \text{ dérivable en } x_0 \\ i_1 \text{ dérivable en } i_2(x_0) \end{array} \right\} \Longrightarrow i_1 \circ i_2 \text{ dérivable en } x_0.$$

On obtient ainsi que i est dérivable sur $\mathcal{D}_i \setminus \{-1,0\}$, de dérivée

$$i'(x) = i_1' \circ i_2(x) \times i_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+x^2}} \times (3x^2+2x) = \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}},$$

pour tout $x \in \mathcal{D}_i \setminus \{-1,0\}$.
Il reste maintenant à étudier la dérivabilité de i en $x_0 = -1$ et $x_0 = 0$. En $x_0 = -1$, nous déterminons si

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{i(x)-i(-1)}{x-(-1)}$$

existe et est finie. Pour tout $x > -1$, on a

$$\frac{i(x)-i(-1)}{x+1} = \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{(x+1)}}{x+1} = \frac{|x|}{\sqrt{x+1}}.$$

Comme

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} |x| = |-1| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty,$$

Il suit que

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{i(x)-i(-1)}{x+1} = +\infty$$

et donc i n'est pas dérivable en -1.
En $x_0 = 0$, nous déterminons si

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{i(x)-i(0)}{x-0}$$

existe et est finie. Pour tout $x \in \mathcal{D}_i \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{i(x)-i(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x+1}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{x+1}.$$

Comme

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{i(x)-i(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x}\sqrt{x+1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x+1} = 1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{i(x)-i(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|}{x}\sqrt{x+1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\sqrt{x+1} = -1,$$

on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{i(x)-i(0)}{x-0}$$

n'existe pas et donc i n'est pas dérivable en 0.
En résumé, **le domaine de dérivabilité de i est** $]-1,0[\, \cup\,]0,+\infty[$ et sa dérivée peut s'écrire

$$\begin{array}{rccl} i' : &]-1,0[\, \cup\,]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}} \end{array}.$$

Exercice 2.

(a) Considérons l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{4x^2-3+\cos(x)}{x-2} \end{array}.$$

Commençons avec les éventuelles asymptotes en $\pm\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,2\}$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{4x^2-3+\cos(x)}{x(x-2)} = \frac{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}+\frac{\cos(x)}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{4-\frac{3}{x^2}+\frac{\cos(x)}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}.$$

En $+\infty$: on a tout d'abord

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0.$$

De plus, comme $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$-\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{\cos(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Par le théorème d'encadrement, comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x)}{x^2} = 0.$$

Il suit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{4}{1} = 4.$$

Déterminons maintenant si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)$ existe. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, on a

$$\begin{aligned} f(x)-4x &= \frac{4x^2-3+\cos(x)}{x-2} - 4x = \frac{4x^2-3+\cos(x)-4x(x-2)}{x-2} \\ &= \frac{4x^2-3+\cos(x)-4x^2+8x}{x-2} = \frac{8x-3+\cos(x)}{x-2} \\ &= \frac{x\left(8-\frac{3}{x}+\frac{\cos(x)}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{8-\frac{3}{x}+\frac{\cos(x)}{x}}{1-\frac{2}{x}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{3}{x}+\frac{\cos(x)}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{8}{1} = 8.$$

Il suit que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(4x+8)) = 0$$

et donc la droite d'équation $y = 4x + 8$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a

$$f(x) - (4x + 8) = \frac{4x^2 - 3 + \cos(x) - (4x + 8)(x - 2)}{x - 2} = \frac{13 + \cos(x)}{x - 2}.$$

Comme $13 + \cos(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f(x) > 4x + 8$ pour tout $x > 2$ et donc la courbe de f est au dessus de sont asymptote oblique $y = 4x + 8$ en $+\infty$.

De même en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{3}{x^2} + \frac{\cos(x)}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 4$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{8 - \frac{3}{x} + \frac{\cos(x)}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 8.$$

La droite d'équation $y = 4x + 8$ est donc également asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$. De plus $f(x) < 4x + 8$ pour tout $x < 2$ et donc la courbe de f est en dessous de sont asymptote oblique $y = 4x + 8$ en $-\infty$.

Finalement, recherchons l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 2$. Comme

$$\lim_{x \to 2} \left(4x^2 - 3 + \cos(x)\right) = 4 \times 2^2 - 3 + \cos(2) = 13 + \cos(2) > 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} \frac{1}{|x - 2|} = +\infty,$$

on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} |f(x)| = +\infty$$

et donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f. Plus précisément, on a $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$. Il suit que

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty.$$

(b) Considérons l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \exp(x) \end{array}.$$

En $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \exp(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\exp(x)}{x}\right) = +\infty$$

donc la courbe de g n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

En $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\exp(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\exp(x)}{x}\right)=1$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0$$

donc la droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe de g en $-\infty$. Enfin la courbe de g est clairement au dessus de son asymptote car

$$g(x)=x+\exp(x)>x$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 3.

(1) f étant polynomial, f est définie et dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'étudier le signe de sa dérivée seconde pour étudier sa convexité. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=4x^3+3x^2-6x+4$$

$$f''(x)=12x^2+6x-6$$

f'' est un polynôme de degré 2 avec coefficient dominant positif. Pour trouver son signe, il suffit de trouver ses racines. On remarque que -1 est racine évidente et on factorise f'' par $(x+1)$:

$$f''(x)=(x+1)(12x-6)$$

Donc les racine de f'' sont -1 et $\frac{1}{2}$. On a donc :
— f est convexe pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $f''(x)\geqslant 0$, c'est à dire pour tout $x\in\,]-\infty,-1]\cup[\frac{1}{2},+\infty[$.
— f est concave pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $f''(x)\leqslant 0$, c'est à dire pour tout $x\in[-1,\frac{1}{2}]$.
— $f''(x)=0$ pour $x=-1$ et $x=\frac{1}{2}$ et f'' change de signe en ces points donc -1 et $\frac{1}{2}$ sont des points d'inflexions de f.

(2) L'équation de la tangente en a de f est donnée par :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

En $a=-1$, on a $f'(-1)=11$ et $f(-1)=-6$ et l'équation de la tangente en -1 est :

$$y=11(x+1)-6=x+5$$

En $a=\frac{1}{2}$, on a $f'(\frac{1}{2})=4\times\frac{1}{2^3}+3\times\frac{1}{2^2}-6\times\frac{1}{2}+4=\frac{9}{4}$ et $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}-3\frac{1}{2^2}+4\frac{1}{2}+1=\frac{39}{16}$ et l'équation de la tangente en -1 est :

$$y=\frac{9}{4}(x-\frac{1}{2})+\frac{39}{16}=\frac{9}{4}x+\frac{21}{16}$$

Exercice 4.

(a) La fonction est un quotient de fonctions polynomial (qui sont définie et dérivable sur $\mathbb{R}$) et donc f est définie continue et dérivable partout où le dénominateur ne s'annule pas. Le dénominateur s'annule si et seulement si $x+2=0$ c'est à dire $x=-2$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, on a :

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2+1)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

(b) Pour dresser le tableau de variation, on étudie le signe de f'. Le signe de f' est le même que le signe de x^2+4x-1 car $(x+2)^2\geqslant 0$. On cherche donc les racine de x^2+4x-1. Son discriminant est :

$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times 1\times(-1)=20$$

Les racines sont donc $r_1=\frac{-4-\sqrt{20}}{2}=-2-\sqrt{5}$ et $r_2=\frac{-4+\sqrt{20}}{2}=-2+\sqrt{5}$. On en déduit que
— f' est positive sur $]-\infty,r_1]\cup[r_2,+\infty[$
— f' est négative sur $[r_1,r_2]\setminus\{-2\}$.
On calcul les limites :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{2}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x^2})}{1+\frac{2}{x}}=+\infty$$

De même :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

De plus

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x+2}=+\infty\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to-2^+}x^2+1=5$$

donc par quotient

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$$

De même,

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$$

On peut maintenant tracer le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		-2		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	D	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(r_1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(r_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) Pour étudier la convexité de f, on étudie le signe de sa dérivée seconde. En effet, f est bien dérivable 2 fois sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x-1)\times 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2) - (x^2+4x-1)\times 2}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{(2x^2+8x+8) - 2(x^2+4x-1)}{(x+2)^3} = \frac{10}{(x+2)^3}$$

f'' est positive si et seulement si $(x+2)^3 \geqslant 0$ ce qui est équivalent à $x+2 \geqslant 0$, ou encore $x \geqslant -2$. On a donc que

— f est convexe sur $]-2, +\infty[$.

— f est concave sur $]-\infty, -2[$.

(d) Asymtptote en $+\infty$. On cherche une droite d'équation $y = ax+b$ qui soit une asymptote de f en $+\infty$. On cherche d'abord à trouver a en calculant la limite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x(x+2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{2}{x})} = 1$$

On aura donc $a = 1$ et pour trouver b, regarde la limite de $f(x) - ax$.

$$f(x) - ax = \frac{x^2+1}{x+2} - x = \frac{x^2+1}{x+2} - \frac{x(x+2)}{x+2} = \frac{-2x+1}{x+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-2+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-2+\frac{1}{x})}{(1+\frac{2}{x})} = -2$$

Donc la droite d'équation $y = x-2$ en une asymptote à f en $+\infty$.

En $-\infty$. On a comme avant que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x(x+2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x})} = 1$$

Et de même

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(-2+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-2+\frac{1}{x})}{(1+\frac{2}{x})} = -2$$

Donc la droite d'équation $y = x-2$ est également une asymptote à f en $-\infty$.

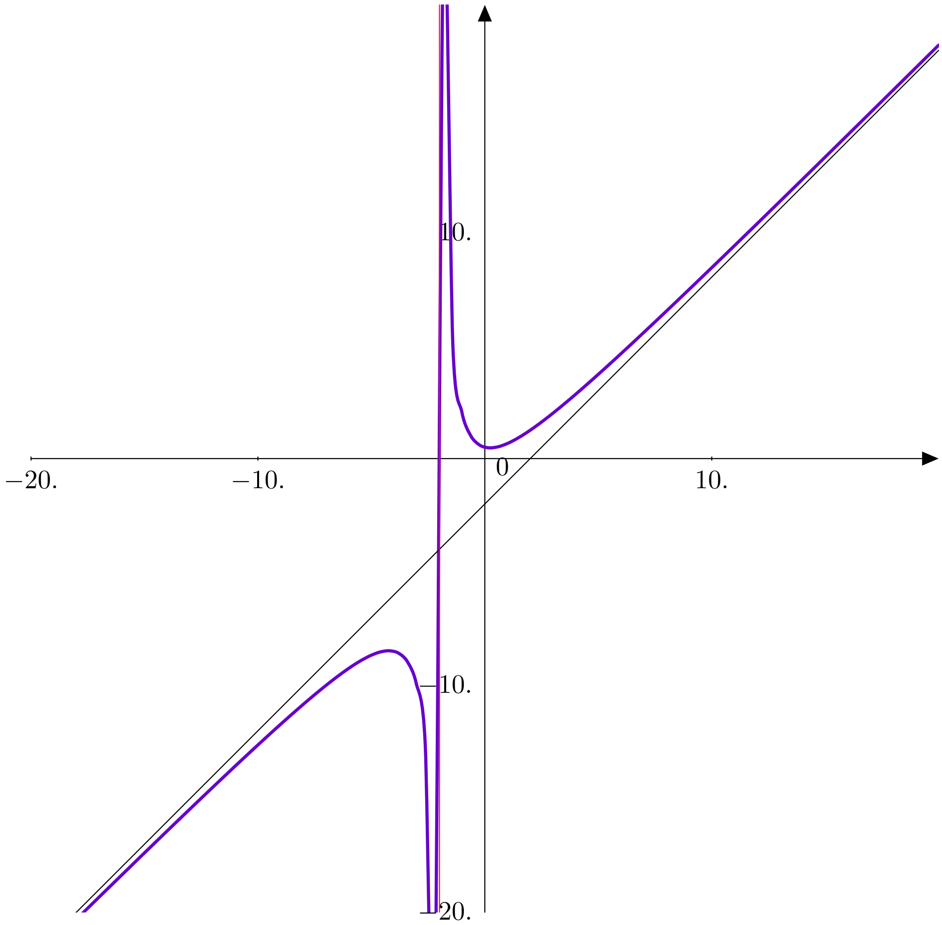
On cherche à trouver la position relative de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = x-2$. On cherche donc à étudier le signe de $f(x) - (x-2) = f(x) - x + 2$.

$$f(x)-x+2 = \frac{x^2+1}{x+2} - (x-2) = \frac{x^2+1}{x+2} - \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \frac{x^2+1-x^2+2^2}{x+2} = \frac{5}{x+2}$$

On en déduit que :

— f est au dessus de l'asymptote en $x \in \mathbb{R}$ si $f(x) - x + 2 \geqslant 0$ c'est à dire $x + 2 \geqslant 0$. Donc f est au dessus de l'asymptote sur $]-2, +\infty[$.
— f est en dessous de l'asymptote en $x \in \mathbb{R}$ si $f(x) - x + 2 \leqslant 0$ c'est à dire $x + 2 \leqslant 0$. Donc f est au dessous de l'asymptote sur $]-\infty, -2[$.

La graphe de la fonction est la courbe en bleu.



Exercice 5. Montrons d'abord que la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. sin est définie et dérivable deux fois sur cet intervalle. Sa dérivée seconde est $-\sin$ et $-\sin(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Comme sin est concave, son graphe est en-dessous de toute ses tangentes. En particulier, la tangente en 0 de sin a pour equation :

$$y = \sin'(0)(x - 0) + \sin(0) = \cos(0)x = x$$

Donc pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, comme sin est en-dessous de sa tangente, on a

$$\sin(x) \leqslant x$$

La définition de la concavité nous donne que

$$\sin(ty + (1-t)y') \geqslant t\sin(y) + (1-t)\sin(y')$$

pour tout $y, y' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $t \in [0,1]$.Si on pose $t = \frac{2}{\pi}x$, $y = \frac{\pi}{2}$ et $y' = 0$, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (dans ce cas on a bien $t \in [0,1]$, alors on obtient :

$$\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi} x \sin(\frac{\pi}{2}) + (1 - \frac{2}{\pi}x)\sin(0) = \frac{2}{\pi}x$$

et on trouve bien que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$$

Autre Méthode : On peut utiliser le fait que la corde du graphe de sin qui relie $\sin(0)$ et $\sin(\frac{\pi}{2})$ est en-dessous du graphe de sin. En effet cette corde part du point $(0, \sin(0)) = (0,0)$ et arrive au point $(\frac{\pi}{2}, \sin(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, 1)$. L'équation de la droite coïncidant avec cette corde est donc $y = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0}x + 0 = \frac{2}{\pi}x$. Comme le graphe de sin est au-dessus de cette corde, ceci est une autre manière, plus géométrique, de montrer le résultat :

$$\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$$

Exercice 6.

(a) Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^2 - 1$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Or $\sqrt{.}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}+$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*+$, et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{aligned}$$

De même on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[,\ f'(x) \quad &= \quad \sqrt{x^2-1} + \frac{(1+x)2x}{2\sqrt{x^2-1}} \\ &= \quad \sqrt{x^2-1} + \frac{x(1+x)}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Étudions la dérivabilité de f en 1. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[,\ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \quad &= \quad \frac{1}{x-1}((1+x)\sqrt{x^2-1} - 0) \\ &= \quad \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$, donc f n'est pas dérivable en 1.
Étudions maintenant la dérivabilité de f en -1. On a

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, -1[,\ \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} \quad &= \quad \frac{1}{x+1}((1+x)\sqrt{x^2-1} - 0) \\ &= \quad \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)} = 0$, donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = 0$.

(b) Étudions le signe de f'. On a $\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $\sqrt{x^2-1} > 0$. De plus $\forall x \in]1,+\infty[$, $x > 0$ et $1 + x > 0$, donc $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x) > 0$. De même, on a $\forall x \in]-\infty,-1[$, $x < 0$ et $1+x < 0$ donc $x(1+x) > 0$, et ainsi $f'(x) > 0$.
On a également $f(-1) = f(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peut maintenant tracer le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction dérivée f' est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, donc pour étudier la convexité de f, on peut étudier f''.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\ f''(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-1} - x(x+1)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} \\
&= \frac{x(x^2-1) + (2x+1)(x^2-1) - x^3 - x^2}{(x^2-1)^{3/2}} \\
f''(x) &= \frac{2x^3 - 3x - 1}{(x^2-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Or -1 est racine évidente de $2x^3 - 3x - 1$, donc on peut factoriser par $(x+1)$ et on obtient

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x^2-x-1/2)}{(x^2-1)^{3/2}}.$$

Le discriminant de $x^2 - x - 1/2$ est $\Delta = 1 + 4 \times 1/2 = 3$, donc les racines sont $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ainsi on a

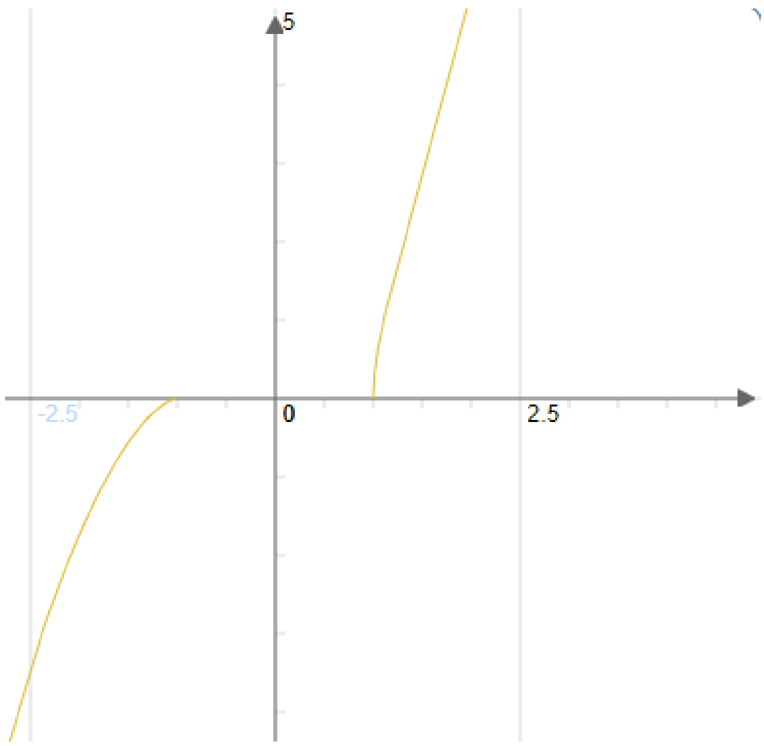
$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2})}{(x^2-1)^{3/2}}.$$

En étudiant le signe des différents termes du produit, on obtient que

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,\frac{1+\sqrt{3}}{2}[,\ f''(x) < 0$$

$$\forall x \in]\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty[,\ f''(x) > 0.$$

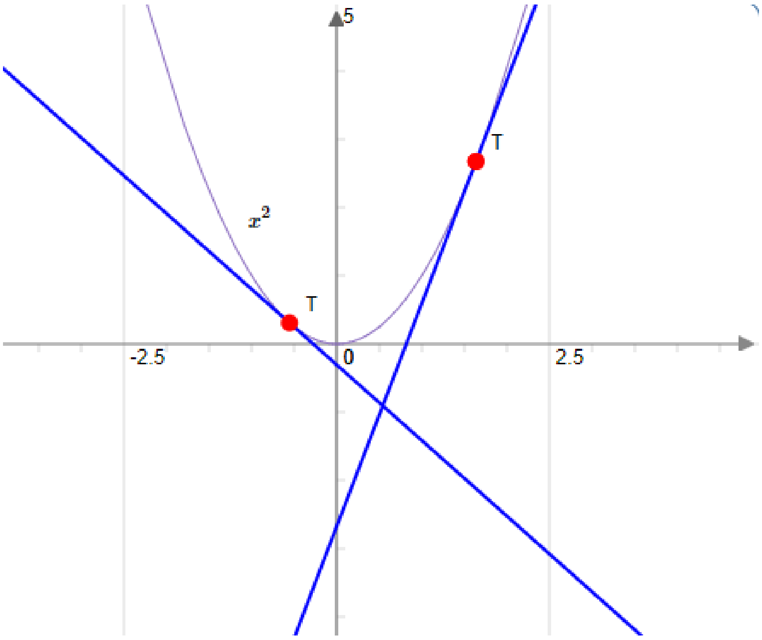
Ainsi f est concave sur $]-\infty,-1[\cup]1,\frac{1+\sqrt{3}}{2}[$ et convexe sur $]\frac{1+\sqrt{3}}{2},+\infty[$. On peut maintenant tracer le graphe de f :



(c) La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$, donc par le théorème de la bijection g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $f([1,+\infty[) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[$.
La fonction g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$, $g'(x) = f'(x) \neq 0$, donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$.
On a $g(1) = 0$ donc $g^{-1}(0) = 1$. De même, $g(2) = (1+2)\sqrt{2^2-1} = 3\sqrt{3}$ donc $g^{-1}(3\sqrt{3}) = 2$. Enfin, on a

$$(g^{-1})'(3\sqrt{3}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(3\sqrt{3}))} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Exercice 7. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la tangente à Γ_f au point d'abscisse a a pour équation $T_f(a) : y = f'(a)(x-a) + f(a) = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$.
Ainsi si $M \in \mathbb{R}^2$ est un point de coordonnées (x, y), alors il existe une tangente à Γ_f passant par M si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y = 2ax - a^2$, c'est à dire $-a^2 + 2ax - y = 0$. Cela revient à chercher les racines réelles du polynôme en a de degré 2 : $-a^2 + 2xa - y$. On calcule le discriminant : $\Delta = (2x)^2 - 4(-1)(-y) = 4x^2 - 4y$. Ainsi ce polynôme admet des racines réelles si et seulement si $\Delta \geqslant 0$, c'est à dire $x^2 \geqslant y$. Ainsi il existe une tangente à Γ_f passant par M si et seulement si $x^2 \geqslant y$.
De plus, le polynôme $-a^2 + 2ax - y = 0$ admet une unique racine réelle si et seulement si $\Delta = 0$, c'est à dire $x^2 = y$, dit autrement si et seulement si $M \in \Gamma_f$. Ainsi l'ensemble des points par lesquels passe une et une seule tangente est Γ_f.
On peut comprendre ce qu'il se passe avec un dessin :



Exercice 8. Attention ! Dans cet exercice, on ne suppose pas f dérivable. On ne peut donc pas faire appel aux résultats qui utilisent les dérivées première et seconde de f.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}+$, on applique la convexité de f entre 0 et x et avec $t = \frac{1}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}+,\ f((1-\frac{1}{2}) \times 0 + \frac{1}{2}x) &\leqslant (1-\frac{1}{2})f(0) + \frac{1}{2}f(x)\\
\forall x \in \mathbb{R}+,\ f(\frac{1}{2}x) &\leqslant \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x).
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 2$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{2}x) = 2$. Ainsi on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{1}{2}x) \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x))$, c'est à dire $2 \leqslant \frac{1}{2}f(0) + 1$, d'où $f(0) \geqslant 2$.

(2) Supposons que $f(0) = 2$. Soit $x \in \mathbb{R}+$. Montrons que $f(x) = 2$. Par le même raisonnement que dans la question précédente, on a $f(x) \geqslant 2$.
Pour tout $y > x$, on applique la convexité de f entre 0 et y avec $t = \frac{x}{y}$ (on a bien $t \in [0, 1]$). On obtient alors

$$\begin{aligned}
\forall y > x,\ f((1-t) \times 0 + ty) &\leqslant (1-t)f(0) + tf(y)\\
f(\frac{x}{y}y) &\leqslant (1-\frac{x}{y}) \times 2 + \frac{x}{y}f(y)\\
f(x) &\leqslant 2(1-\frac{x}{y}) + \frac{x}{y}f(y).
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{x}{y} = 0$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = 2$, donc $\lim\limits_{y\to+\infty} 2(1-\frac{x}{y}) = 2$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{x}{y}f(y) = 0$. Ainsi on a $f(x) \leqslant \lim\limits_{y\to+\infty} (2(1-\frac{x}{y}) + \frac{x}{y}f(y))$, c'est à dire $f(x) \leqslant 2$.
En conclusion, on a $\forall x \in \mathbb{R}+,\ f(x) = 2$, donc f est constante égale à 2 sur $\mathbb{R}+$.

(3) Supposons que $f(0) > 2$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, donc il existe $x_0 > 0$ tel que $f(0) > f(x_0) \geqslant 2$. Pour tout $y < 0$, on applique la convexité de f entre y et x_0 avec $t = \frac{-y}{x_0-y}$ (on a bien $t \in [0,1]$, et $1-t = \frac{x_0}{x_0-y}$). On obtient alors

$$\begin{array}{rcl}
\forall y<0,\ f((1-t)y+tx_0) & \leqslant & (1-t)f(y)+tf(x_0) \\
f(\dfrac{x_0y}{x_0-y}+\dfrac{-yx_0}{x_0-y}) & \leqslant & \dfrac{x_0}{x_0-y}f(y)+\dfrac{-y}{x_0-y}f(x_0) \\
(x_0-y)f(0) & \leqslant & x_0f(y)-yf(x_0) \ \ (\text{car } x_0-y>0) \\
x_0f(y) & \geqslant & x_0f(0)-yf(0)+yf(x_0) \\
f(y) & \geqslant & \dfrac{f(x_o)-f(0)}{x_0}y+f(0) \ \ (\text{car } x_0>0).
\end{array}$$

Or $f(0) > f(x_0)$, donc $\frac{f(x_o)-f(0)}{x_0} < 0$, et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{f(x_o)-f(0)}{x_0}y + f(0)) = +\infty$. Ainsi par encadrement, on a $\lim\limits_{y\to-\infty} f(y) = +\infty$.