De la combinatoire aux graphes (HLIN201) – L1

Cardinalité, dénombrement

Sèverine Bérard

Université de Montpellier

2^e semestre 2017-18

Sommaire

Sommaire

Introduction

Rappels

- Deux ensembles E et F sont équipotents si et seulement s'il existe une application bijective de E dans F
- Notation : $[1..n]_{\mathbb{N}} = \{1, 2, \ldots, n\}$, noté aussi $[1..n]$ si pas d'ambiguïté

Cette partie du cours est « simplifiée »

Les ensembles E que nous considérons sont *discrets* :

- ou bien *finis* comportant n éléments. On dit alors que leur cardinal est n
  On note $card(E) = |E| = n$
  Dans ce cas, E est équipotent à $[1..n]_{\mathbb{N}}$
- ou bien *infinis*, mais dans notre cas équipotents à $\mathbb{N}$
  On dit alors que E est *infini dénombrable*

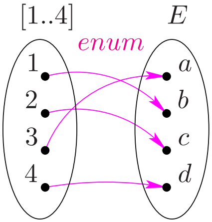
Énumération

Que les ensembles soit finis ou infinis dénombrables, on est capable de compter/énumérer leurs éléments

Si E est fini de cardinal n

Il existe une bijection entre $[1..n]$ et E, appelons la *enum*
Cette application définit une énumération des éléments de E :
le premier $enum(1)$, le deuxième $enum(2)$, …, le n^e $enum(n)$

Exemple : soit $E = \{a, b, c, d\}$ *de cardinal* 4



$enum(1) = b$
$enum(2) = c$
$enum(3) = a$
$enum(4) = d$

Énumération

Si E est infini équipotent à $\mathbb{N}$

Il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E, que l'on peut aussi appeler *enum*
Cette application définit encore une *énumération* des éléments de E

Exemple : soit $Pair = \{x \mid \exists p \in \mathbb{N}, avec\ x = 2 * p\}$

- Pour énumérer $Pair$, il faut définir une application bijective de $\mathbb{N}$ dans $Pair$
- Soit **enum** $: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & Pair \\ n & \longmapsto & 2 * n \end{array}$
- Est-ce bien une application ? OUI
- Est-elle bien bijective ?
  1. Est-elle bien injective ? OUI
  2. Est-elle bien surjective ? OUI

Propositions

Proposition 1

Soient A, B deux ensembles finis : $|A| \leqslant |B|$ si et seulement si il existe une application injective **f :** $A \longrightarrow B$.

Preuve : cf. fiche de cours n° 2 p. 7

Proposition 2

$\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini. Il est stable par addition, multiplication et exponentiation. Il est *bien ordonné* : toute partie non vide admet un plus petit élément

L'argument diagonal : L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable

Preuve : nous ne prouverons que le fait qu'il n'y a pas d'énumération de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
cf. fiche de cours n° 2 p. 8

Sommaire

Introduction

Tâches essentielles en informatique

- connaître/calculer le nombre de cas rencontrés dans l'exécution d'un algorithme
- estimer la taille mémoire de l'implantation d'un type de données
- estimer le temps d'exécution d'un programme

Pour cela il faut compter. On dit aussi dénombrer.

Nous allons effleurer dans cette partie les techniques élémentaires de dénombrement

Propriétés simples

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
  et si A et B sont disjoints : $|A \cup B| = |A| + |B|$
  Se généralise à une partition, soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition de E, alors $|E| = |A_1| + \ldots + |A_n|$

- $|A \times B| = |A|.|B|$

- $|B^A| = |B|^{|A|}$ ($B^A = \{A \to B\}$ ensemble des applications de A vers B)

- $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ (à chaque application de E dans $\{0, 1\}$ on associe la partie de E qu'elle représente, combien d'applications ? $|\{0, 1\}|^{|E|} = 2^{|E|}$)

On suppose dans la suite que $|A| = n$ et $|B| = p$, avec $n \geq p$

Nombre d'applications bijectives de A vers A
Permutations

On peut le voir comme le nombre de manière d'ordonner les éléments de A.

1re position :	n choix
2e position :	$n-1$ choix
$\ldots$	$\ldots$
Dernière position :	1 choix

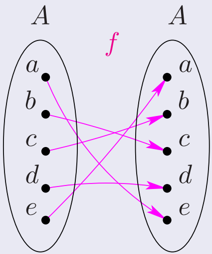
Ce nombre est $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$

Une application bijective de A vers A est aussi appelée une *permutation* de A.

Nombre d'applications bijectives de A vers A
Permutations

Exemple

Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$
et la bijection f de A dans A



Si on considère que les éléments de A sont ordonnés : (a, b, c, d, e)

Alors cette bijection induit un nouvel ordre :
($f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$, $f(e)$), c.-à-d. (e, c, b, d, a)

Nombre d'applications bijectives de A vers A
Permutations

Quand se sert-on des permutations ?

- On doit faire passer 10 étudiants à l'oral, combien d'ordres possibles ? $10! = 3628800$
- De combien de manières différentes huit personnes peuvent-elles se placer autour d'une table ? $8! = 40320$
- On a 6 couleurs à associer à nos 6 matières du semestre, combien de possibilités d'affectation ? $6! = 720$

Nombre d'applications injectives de B vers A
Arrangements

Définition

Chaque injection de B vers A est une manière d'ordonner p objets de A, c.-à-d. d'obtenir une liste ordonnée de p objets choisis dans A.

La question revient donc à combien de listes ordonnées de taille p différentes ?

On choisit chaque élément au fur et à mesure :

Choix pour le 1^{er} élément :	n choix
Choix pour le 2^{e} élément :	$n-1$ choix
$\dots$	$\dots$
Choix pour le p^{e} élément :	$n-p+1$ choix

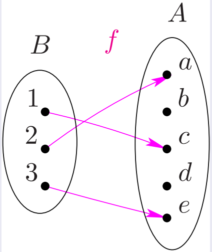
$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} = \mathcal{A}_n^p$$

Nombre d'applications injectives de B vers A
Arrangements

Exemple

Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ et f une injection de B vers A
$n = 5$, $p = 3$, liste ordonnée de taille 3 d'éléments de A :

Choix pour le 1^{er} élément :	5 choix
Choix pour le 2^{e} élément :	4 choix
Choix pour le 3^{e} élément :	3 choix



Résultat : (c, a, e)

$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ listes différentes possibles

Quand se sert-on des arrangements ?

- Combien de tiercés possibles dans une course de 10 chevaux ?
  $\mathcal{A}_{10}^{3} = \frac{10!}{7!} = 720$

- Combien de mots de 4 lettres dans un alphabet de 26 ?
  $26 * 26 * 26 * 26 = 26^4 = 456976$

- Combien de mots de 4 lettres sans lettre répétée dans un alphabet de 26 ?
  $\mathcal{A}_{26}^{4} = \frac{26!}{22!} = 358800$

- 7 amis sont en vacances. Pour désigner respectivement celui qui fait le ménage, la cuisine, les courses et la vaisselle, ils tirent au sort. Une urne contient donc 7 papiers (un par prénom). Combien existe-t-il de répartitions possibles des tâches ? (*tiré de http://www.netprof.fr*)
  $\mathcal{A}_{7}^{4} = \frac{7!}{3!} = 840$

Nombre de parties de A ayant pour cardinal p
Coeff. binomiaux, combinaisons

Définition

On dénombre l'ensemble des parties de A comportant p éléments par une valeur notée $\binom{n}{p}$.

Choix pour le 1^{er} élément :	n choix
Choix pour le 2^{e} élément :	$n-1$ choix
...	...
Choix pour le p^{e} élément :	$n-p+1$ choix

Mais il n'y a pas d'ordre dans une partie (rappel : partie = sous-ensemble)
Il faut donc diviser par le nb d'ordres possibles : $p!$

$$\binom{n}{p} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}$$

Formule du binôme

Définition

Vu en Calculus au 1er semestre :

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

Exemple pour $n = 4$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(x+y)^4 = & \binom{4}{0}x^4y^0 & + & \binom{4}{1}x^3y^1 & + & \binom{4}{2}x^2y^2 & + & \binom{4}{3}x^1y^3 & + & \binom{4}{4}x^0y^4 \\
 & x^4 & + & 4x^3y & + & 6x^2y^2 & + & 4xy^3 & + & y^4
\end{array}
$$

Rmq : on peut aussi calculer ces coefficients à l'aide du triangle de Pascal

Quand se sert-on des combinaisons ?

- Combien de tirages de loto possible (5 boules parmi 49) ?
  $\binom{49}{5} = \frac{49!}{5!44!} = 1906884$

- Combien d'ensemble de 4 lettres dans un alphabet de 26 ?
  $\binom{26}{4} = \frac{26!}{4!22!} = 14950$

- 7 amis sont en vacances. Ils n'ont que 3 billets pour aller au concert, ils décident de tirer au sort (ils ont toujours l'urne avec leur 7 prénoms). Combien de tirages différents possibles ?
  $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$

- *Question subsidiaire : combien chacun a-t-il de chances d'aller au concert ?*
  Autrement dit, combien de tirages de 3 prénoms contiennent un prénom donné ?
  Nb de tels tirages : $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$
  D'où 15 chances sur 35 d'aller au concert, soit environ 43 %

Autre manière de compter

Combien de listes ordonnées de p éléments choisis parmi n

On cherche à re-calculer $\mathcal{A}_n^p$

1. On choisit un lot de p éléments parmi n, il y a $\binom{n}{p}$ lots possibles
2. puis on les ordonne, il y a $p!$ manières d'ordonner chaque lot

d'où $\mathcal{A}_n^p = \binom{n}{p} \times p! = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times p! = \frac{n!}{(n-p)!}$

Principe des tiroirs

Rappel

- $\lceil x \rceil \in \mathbb{N}$ désigne la partie entière supérieure de $x \in \mathbb{Q}$
- *Ex :* $\lceil 1,3 \rceil = 2$; $\lceil 1 \rceil = 1$
- Soit $|A| = n$ et $|B| = p$, si $n > p$ alors il n'existe pas d'injection de A vers B

Chaussettes et tiroirs

- Prenons C un ensemble de n chaussettes et T un ensemble de p tiroirs
- Si on veut ranger n chaussettes dans p tiroirs, et si on veut de plus que chaque chaussette soit dans un tiroir différent, en fait on veut construire une application injective de C vers T
- Quand $n > p$ c'est impossible

Principe des tiroirs

Un cas particulier : $n = p + 1$

- Si p tiroirs sont occupés par $p + 1$ chaussettes, alors au moins un tiroir contient au moins 2 chaussettes

Principe des tiroirs

Cas général

- Si p tiroirs sont occupés par n chaussettes, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins $\lceil n/p \rceil$ chaussettes
- Ex : 10 chaussettes et 4 tiroirs ; au moins un tiroir avec au moins $\lceil 10/4 \rceil = 3$

Principe des tiroirs

Utilisation

- Soit une application **f :** $C \longrightarrow T$, avec $|C| = n, |T| = p$,
- D'après le principe des tiroirs : il existe un élément de l'ensemble d'arrivée qui a au moins $\lceil n/p \rceil$ antécédents
- Autrement dit, il existe $t \in T$ tel que $|f^{-1}(\{t\})| \geqslant \lceil n/p \rceil$.