Planche d'Exercices n°2 : Espaces Vectoriels

Partie I : Révisions et pré-Requis.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ (lois usuelles). Parmi ceux suivants, quels sous-ensembles sont sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x+z=1\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x+z=0\}$ ou $E_3 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x+z+1=0\}$?
2. $F_1 = \{(x,y,z) \in E \,|\, y-2z=0 \text{ ou } x+y=0\}$ ou $F_2 = \{(x,y,z) \in E \,|\, y-2z=0 \text{ et } x+y=0\}$?
3. $G_1 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x^2+|y|+z^4=0\}$, $G_2 = \{(x,y,z) \in E \,|\, |z+1|^2-|z-1|^2=0\}$ ou $G_3 = \{(x,y,z) \in E \,|\, x^2+y^2+z^2=-1\}$?

Exercice 2. Sans résoudre, montrer que les solutions du système suivant est un s.e.v : $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $x-5y+z=0$, $2x+y-7z=0$, $-x+3y-z=0$ et $3x+2y+z=0$.

Exercice 3. 1. Quels sont les sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbb{C}$? De $\mathbb{C}^2$?

2. Donner tous les sous-espaces vectoriels (réels) de $\mathbb{R}^2$. *Idem* pour $\mathbb{R}^3$.
3. Décrire qualitativement toutes les configurations de 3 plans affines réels dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants, où $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & -3y & -z & +t = & 1 \\ x & -2y & +z & +t = & 0 \\ -x & +y & +3z & +2t = & 1 \\ x & -y & -2z & +t = & 4 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rrrrr} 3x & +3y & -3z & -3t = & 6 \\ x & -y & +2z & +t = & -1 \\ x & +3y & -4z & -3t = & 5 \\ x & +5y & -7z & -5t = & 8 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rrrrr} x & +2y & +3z & +4t = & 5 \\ x & +3y & +4z & +5t = & 6 \\ x & +y & & -t = & -2 \\ x & -2y & -z & = & 1 \end{array}\right..$$

Exercice 5. Montrer qu'il existe un unique polynôme réel $P(X)$, de degré 3, tel que : $P(0)=-1$, $P(1)=0$, $P(2)=1$ et $P(3)=8$. Calculer $P(0.5)$, $P(1.5)$ et $P(2.5)$.

Exercice 6. Montrer qu'il existe un unique polynôme réel $P(X)$, de degré 3, tel que : $P(0)$, $P'(0)$, $P(1)$ et $P'(1)$ soient prescrits.

Préciser $P(0.5)$ si $P(0)=0=P(1)$ et $P'(0)=1=-P'(1)$.

Exercice 7. Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (carrée d'ordre 2).
Montrer qu'il existe B (matrice réelle, carrée d'ordre 2), non nulle et telle que $AB = -BA$.

Partie II : Entraînement.

Exercice 8. QCM : cocher avec **V** ou **F** (vrai/faux) la case en regard de chaque énoncé.

1. ☐ $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. ☐ Tout espace vectoriel réel est naturellement espace vectoriel complexe.
3. ☐ Les fonctions dérivables $]0,1] \to \mathbb{R}$ forment naturellement un espace vectoriel.
4. ☐ L'ensemble des solutions d'un système linéaire n'est pas forcément un s.e.v.
5. ☐ La réunion de deux s.e.v n'est pas toujours un s.e.v.
6. ☐ L'ensemble des fonctions réelles monotones est un s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
7. ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, les polynômes réels de degré n forment un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$.
8. ☐ Pour toutes parties X et Y d'un e.v E, $Vect(X \cap Y) = Vect(X) \cap Vect(Y)$.
9. ☐ Pour ses lois naturelles, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas un plan vectoriel complexe.
10. ☐ Tout espace vectoriel non nul possède un sous-espace vectoriel non nul.

Total ☐ **/10** Compter : +1 point si réponse juste, -1 point si fausse (0 si absence).

Exercice 9. Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, montrer que nous avons :
a) $\forall x \in E,\ 0.x = 0_E$; b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.0_E = 0_E$;
c) $\forall x \in E,\ (-1).x = -x$; d) $\forall x \in E,\ 2.x = x + x$.

Exercice 10. Pour tout e.v E et tout vecteur $x \in E$, montrer que $D = \mathbb{K}x$ est un s.e.v.

Exercice 11. Soient $D_1 = \mathbb{K}(1, 0)$ et $D_2 = \mathbb{K}(0, 1)$, des droites vectorielles du plan vectoriel canonique $\mathbb{K}^2$. Vérifier que $D_1 \cup D_2$ n'est pas un s.e.v de E.

Exercice 12. Soient F et G, deux s.e.v d'un espace E.
a) Montrer que $F \cap G$ est un s.e.v de E .
b) Trouver un contre-exemple pour $F \cup G$...
c) Montrer que si $F \cup G$ est un s.e.v, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 13. On considère l'espace des suites réelles $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
a) Rappeler les lois vectorielles de E, ainsi que la définition du vecteur nul 0_E.
b) Montrer que l'ensemble C, des suites réelles convergentes, est naturellement un e.v.
c) Que dire de l'ensemble C_0, des suites convergentes vers 0 ?
d) Et que dire de l'ensemble C_1, formé des suites convergentes vers 1 ?

Exercice 14. Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des s.e.v de $E = \mathbb{R}^2$:
a) $F_1 = \{(x,y) \in E \,|\, xy = 0\}$? b) $F_2 = \{(x,y) \in E \,|\, x^2 + y^2 = 0\}$?
c) $F_3 = \{(x,y) \in E \,|\, x^2 - 2xy + y^2 = 0\}$? d) $F_4 = \{(x,y) \in E \,|\, x - y = 1\}$?

Exercice 15. Pour l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, quels sous-ensembles sont des s.e.v de E :
a) celui des fonctions croissantes ? b) celui des fonctions bornées ?
c) celui des fonctions positives ? d) celui des fonctions continues ?
e) celui des fonctions continues bornées ? f) celui des fonctions nulles en $x = 0$?

Exercice 16. Pour les droites vectorielles $D_1 = \mathbb{K}(1,0)$, $D_2 = \mathbb{K}(0,1)$ et $D_3 = \mathbb{K}(1,1)$ de $\mathbb{K}^2$, comparer les s.e.v $(D_1 \cap D_3) + (D_2 \cap D_3)$ et $(D_1 + D_2) \cap D_3$. Conclusion ?

Exercice 17. Trouver une base de l'hyperplan vectoriel H de $\mathbb{R}^n$: $(x_i)_i \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Exercice 18. Trouver un système (minimal) d'équations, pour décrire la $\mathbb{K}$-droite vectorielle D de $\mathbb{K}^n$, de vecteur directeur $(1, 1, .., 1)$.

Exercice 19. Soit la famille $\mathcal{L} = (x^n)_n$ de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, formée des fonctions monomiales unitaires.
a) Rappeler quel s.e.v F de E est engendré par $\mathcal{L}$.
b) Montrer que $\mathcal{L}$ est une une famille libre.
Indication : récurrence sur le degré d'une fonction polynomiale et dérivation.
c) Généralisation : soit une famille polynomiale $\mathcal{P} = (P_n)_n$, telle que $d^\circ P_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$.
Montrer que $\mathcal{P}$ est une base de F.

Exercice 20. Parmi les polynômes réels suivants, lesquels forment un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$:
a) ceux de degrés pairs ? b) ceux à terme constant nul ?
c) ceux de degré 2020 ? d) ceux à coefficients bornés par 1 ?
e) ceux de degrés supérieurs ou égaux à 2021 ?
f) ceux de degrés inférieurs ou égaux à 2021 ?
g) ceux à coefficients entiers (relatifs) ? h) ceux à coefficients positifs ou nuls ?

Exercice 21. Soit le $\mathbb{K}$-espace $E = \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ (algèbre des matrices carrées d'ordre 2).
a) Trouver la dimension de E, en précisant une $\mathbb{K}$-base de E.
b) Préciser les dimensions des s.e.v de E : $\mathbb{T}_{2+}(\mathbb{K})$, $\mathbb{T}_{2-}(\mathbb{K})$, $\mathbb{T}^*_{2+}(\mathbb{K})$, $\mathbb{T}^*_{2-}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{D}_2(\mathbb{K})$.
c) Vérifier la formule : $E = \mathbb{T}^*_{2-}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{D}_2(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{T}^*_{2+}(\mathbb{K})$.

Exercice 22. Soit l'espace vectoriel des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$.
a) Montrer que le sous-ensemble E_+, des polynômes pairs, est un s.e.v.
Une base pour E_+ ?
b) *Idem* pour E_-, le sous-ensemble des polynômes impairs.
Trouver là-aussi une base pour E_- .
c) Montrer que nous avons une décomposition en somme directe : $E = E_+ \oplus E_-$.

Exercice 23. Soit l'algèbre des matrices carrées $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ (ordre n).
a) Vérifier que $GL_n(\mathbb{K})$ (matrices inversibles) est stable pour le produit matriciel.
b) Le sous-ensemble $GL_n(\mathbb{K}) \subset E$ est-il s.e.v ?

Partie III : Approfondissement.

Exercice 24. Soit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$, muni de l'addition usuelle. Pour tous $z = a+ib \in \mathbb{C}$ et $u = (x, y) \in E$, définissons $z \star u = (ax - by, ay + bx)$.

1. Vérifier que la loi $\star$ distribue l'addition, qu'elle est associative et que, pour tout $u \in E$, nous avons $1 \star u = u$.
2. Quelle structure définissons-nous ainsi sur E ?

Exercice 25. Soient les sous-ensembles C et D de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés, respectivement, des fonctions croissantes et des fonctions décroissantes. Montrer que le sous-ensemble $F = \{f - g | f, g \in C\}$ de E est un s.e.v. Que dire de $G = \{f - g | f, g \in D\}$?

Exercice 26. Soit $\mathcal{F}$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ suivants :

— $\mathcal{P}$, le sous-ensemble des fonctions paires ;
— $\mathcal{I}$, le sous-ensemble des fonctions impaires.

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$ et que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$

Exercice 27. Soit un ensemble X et soit l' ensemble $E = \mathbb{C}^X$ (fonctions $X \to \mathbb{C}$) : E est un espace vectoriel complexe ; soit aussi son sous-ensemble $F = \{f \in E | Im(f) \subset \mathbb{R}\}$.

1. Rappeler la définition de $f + g$ et de zf, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tous $f, g \in E$.
2. F est-il stable pour la loi externe ? Vérifier que E est aussi un espace vectoriel réel.
3. Quelle structure vectorielle a-t-on sur F ?
4. Pour $z \in \mathbb{C}$, vérifier que la partie $\{zf | f \in F\} \subset E$, notée $F(z)$, est un s.e.v réel.
5. Montrer la décomposition en somme directe : $E = F \oplus F(i)$.
6. **Cas particulier.** Soit $X = \mathbb{R}$ et soit la fonction $\varepsilon \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon(x) = \exp(ix)$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de nombre $z \in \mathbb{C}$, tel que $\varepsilon \in F(z)$.
   (b) Donner la décomposition de la fonction ε, correspondant à $E = F \oplus F(i)$.

Exercice 28. Par restriction, la multiplication (interne) de $\mathbb{R}$ fournit une multiplication (externe) de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Avec cette loi-là (et l'addition), $\mathbb{R}$ n'est-il pas un espace vectoriel rationnel ?
2. Que dire alors de l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$?
3. Que dire aussi de la partie $\{p + q\sqrt{2} \,|\, p, q \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathbb{R}$?

Exercice 29. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des "octets", aussi appelés "mots de 8 bits" ; exemples : $00001010 \in \mathcal{O}$, $10100110 \in \mathcal{O}$. Noter que $\mathcal{O}$ est un ensemble fini à $2^8 = 256$ éléments. Bit de parité d'un mot : il vaut **0** si ce mot a un nombre pair de bits égaux à 1, sinon c'est **1**.

1. Rappeler l'addition et la multiplication (tables) du corps à 2 éléments, $\mathbb{K} = \{0, 1\}$.
2. Définir deux lois sur $\mathcal{O}$, qui en fasse un espace vectoriel sur ce corps $\mathbb{K}$.
3. Dénombrer les droites vectorielles de $\mathcal{O}$, ainsi que ses plans vectoriels.
4. Les mots pairs (*resp.* impairs) sont ceux dont le bit de parité égale 0 (*resp.* 1) : on note $\mathcal{O}_0$ (*resp.* $\mathcal{O}_1$) leur sous-ensemble. Quelles géométries a-t-on pour $\mathcal{O}_0$ et $\mathcal{O}_1$?