

HAI602I : Calculabilité et Complexité
Examen 27 Juin 2022

Seul les documents de cours et travaux dirigés sont autorisés. La note prendra en compte la clarté des explications.

1 Calculabilité

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions calculables. Considérons $E = \{x | f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0\}$.

1. Donner un algorithme qui affiche les éléments de E .
2. Que peut-on en déduire sur E ?

□

Exercice 2

Soit P le prédicat suivant : Soit q une procédure, $P(q)$ est VRAI si et seulement si il existe x tel que $q(x)$ est impair.

1. Montrer que P est indécidable.
2. Soit $E = \{q | P(q) \text{ est VRAI}\}$. Montrer que E n'est pas calculable mais qu'il est récursivement énumérable en donnant sa fonction semi-caractéristique.
3. Donner un algorithme qui affiche tous les éléments de E .
4. Soit R le prédicat suivant $R(q)$ est VRAI si et seulement si $\forall x, q(x)$ n'est pas défini ou $q(x)$ est pair.
Soit $F = \{q | R(q) \text{ est VRAI}\}$. Pourquoi F n'est ni calculable, ni récursivement énumérable.

□

2 Complexité

Exercice 3

Nous souhaitons résoudre le problème PARTITION en utilisant la programmation dynamique.

1. Rappeler la définition formelle du problème PARTITION.
2. Rappeler les équations de récurrences.
3. Illustrer le principe avec les données suivantes : $n = 8$, $p(a_1) = 5$, $p(a_2) = 9$, $p(a_3) = 3$, $p(a_4) = 8$, $p(a_5) = 2$, $p(a_6) = 5$, $p(a_7) = 5$, $p(a_8) = 3$.

4. Donner la complexité spatiale de l'algorithme.
5. Comment avec le tableau rempli obtient-on les éléments de la partition ?
6. Maintenant, nous souhaitons simplement connaître l'existence d'une solution. Adapter la programmation dynamique précédente et donner la complexité spatiale de votre algorithme.

□

Exercice 4

Montrer que le problème de colorier un graphe en 3 couleurs reste NP-complet même si tous les sommets sont de degrés pairs.

□

Exercice 5

DOUBLE-SAT

Données : Soit ϕ une formule logique sous forme conjonctive.

Question : Existe-t'il deux affectations possibles pour ϕ ?

Montrer que DOUBLE-SAT est NP-complet.

□