2 Trigonométrie

Nous rappelons ici quelques formules élémentaires et pratiques de la trigonométrie de base. Il est indispensable de connaître les formules de définition du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle donné dans un triangle rectangle ! Sauf mention contraire, tous les angles sont notés en **radians** (Rappel : π radians $=$ 180 degrés).

1 Triangle rectangle et cercle unité

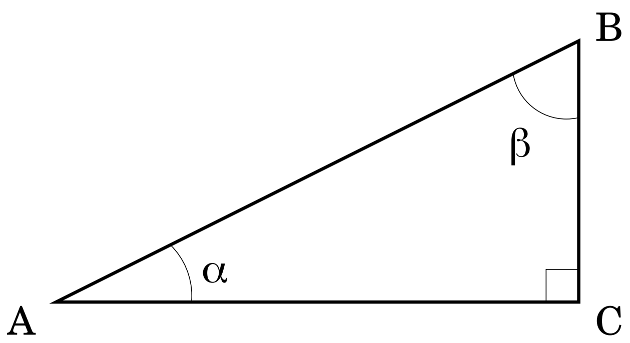


FIGURE 2.1 – *Triangle rectangle en C.*

Dans le triangle rectangle en C ci-dessus, le côté AB, opposé à l'angle droit est appelé *hypoténuse*. C'est le plus grand des côtés du triangle dont la longueur peut être calculée grâce au théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. \tag{2.1}$$

Comme la somme des angles dans n'importe quel triangle est égal à π radians, on obtient $\alpha+\beta = \pi/2$.
Par définition des quantités cosinus, sinus et tangente, on a

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}\ ,\ \sin\alpha = \frac{BC}{AB} \text{ et } \tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{2.2}$$

Il est très commode de représenter ces quantités sur ce que l'on appelle le *cercle unité* (voir figure 2.3). C'est un cercle de rayon 1 dont un point, M, définit un angle θ avec le demi-axe (Ox). L'orientation angulaire positive est l'orientation contraire au sens des aiguilles d'une montre. Alors, la projection du point M sur (Ox) représente le *cosinus* de l'angle θ tandis que sa projection sur (Oy) représente le *sinus* de l'angle θ. La tangente de θ est, quant à elle, donnée par la mesure algébrique $\overline{HT}$. Ainsi,

$$\cos\theta = \overline{OC}\ ,\ \sin\theta = \overline{OS} \text{ et } \tan\theta = \overline{HT} \tag{2.3}$$

On rappelle que la mesure algébrique $\overline{AB}$ est la distance AB *affectée d'un signe*. Par convention ici, les sens positifs sont ceux des directions (Ox) et (Oy).

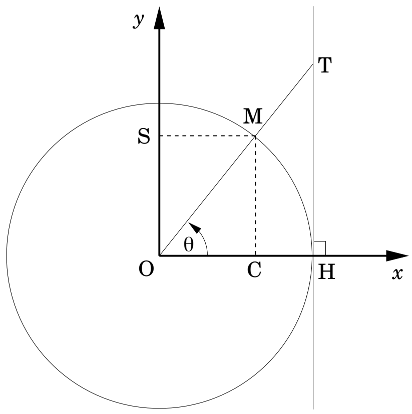


FIGURE 2.2 – *Cercle unité :* $OH = 1$, $\overline{OC} = \cos\theta$, $\overline{OS} = \sin\theta$ *et* $\overline{HT} = \tan\theta$.

2 Propriétés des fonctions trigonométriques

Fondamentalement, les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π et la fonction tangente périodique de période π (seulement !).

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \ , \ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \text{ et } \tan(\theta + k\pi) = \tan\theta, \ k \in \mathbb{Z}. \qquad (2.4)$$

Nous rappelons dans la table 2.1 d'autres propriétés de base des fonctions cosinus, sinus et tangente.

TABLE 2.1 – Propriétés des fonctions trigonométriques

	$-\theta$	$\frac{\pi}{2} \pm \theta$	$\pi \pm \theta$
cos	$\cos\theta$	$\mp\sin\theta$	$-\cos\theta$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\mp\sin\theta$
tan	$-\tan\theta$	$\mp 1/\tan\theta$	$\pm\tan\theta$

Utilisation de la table 2.1 : Supposons que l'on veuille connaître la valeur de $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$. On se réfère à la première ligne (qui correspond au cos) et à la deuxième colonne (qui correspond à $\frac{\pi}{2} \pm \theta$) et on sélectionne le signe le plus bas, $(-)$. Au croisement de cette ligne et de cette colonne on trouve immédiatement $\mp\sin\theta$. Sélectionnant le signe le plus bas de nouveau, on trouve donc $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$. On voit en particulier, grâce à la première colonne $(-\theta)$, que la fonction cosinus est *paire* (c'est-à-dire que pour tout réel x, on a $\cos(-x) = \cos(x)$) alors que les fonctions sinus et tangente sont *impaires* (c'est-à-dire que pour tout réel x, on a $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$). Le cercle unité permet de se souvenir facilement de toutes ces propriétés.

Finalement, la figure 2.3 montre le comportement des fonctions trigonométriques sur quelques périodes.

16 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??

Soit l'expression

$$f(x) = \cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right).$$

Montrez que toutes les solutions de $f(x) = 0$ *sont* $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Indication : simplifiez $f(x)$!

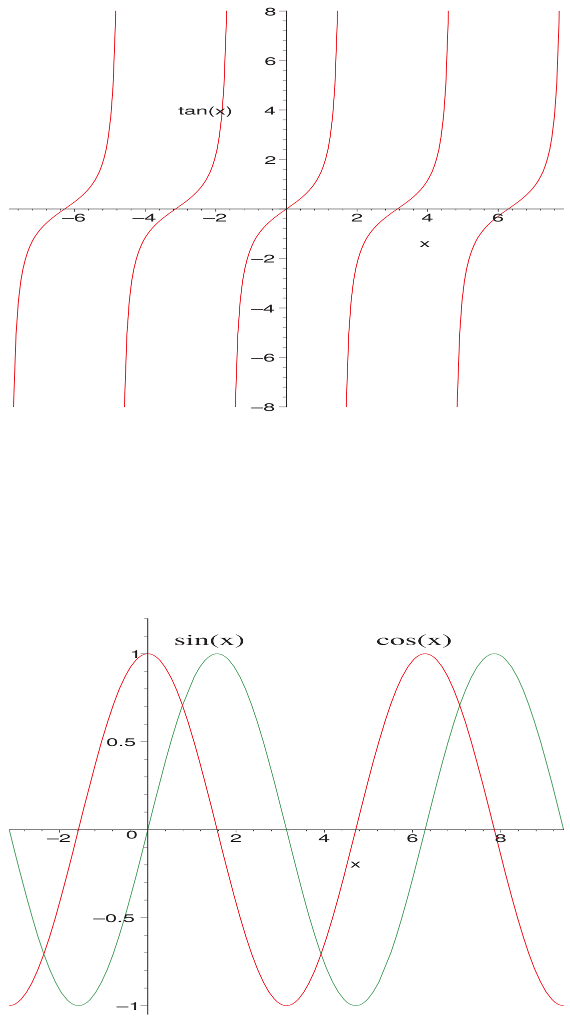


FIGURE 2.3 – *Fonctions cosinus, sinus et tangente.*

3 Quelques valeurs remarquables

TABLE 2.2 – Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Nous rappelons dans la table 2.2 quelques valeurs remarquables des fonctions cosinus, sinus et tangente. Ces valeurs ne sont pas les seules dont on peut calculer la valeur exacte. Les formules

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

d'addition permettent en fait d'en calculer une infinité (voir exercices). Ces expressions exactes présentent toutefois un interêt limité puisque n'importe quelle calculette permet d'obtenir les valeurs avec une précision d'environ 10^{-12}.

4 Formules d'addition

Les trois formules d'addition qui suivent sont essentielles. Elles permettent de simplifier beaucoup d'expressions trigonométriques. Elles sont à la base de toutes les autres. Elles sont en fait valables non seulement pour des variables réelles mais également pour des variables *complexes* ce qui permet de les employer en trigonométrie hyperbolique (c'est à dire la trigonométrie des fonctions cosh, sinh et tanh).

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \tan(z_1+z_2) &= \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1-\tan z_1 \tan z_2}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.
Remarque : Des relations (2.5), on déduit celles de $\cos(z_1-z_2)$, etc... Il suffit d'écrire $\cos(z_1-z_2) = \cos(z_1+(-z_2))$ et d'utiliser le fait que le cosinus est une fonction paire alors que le sinus et la tangente sont impaires. Ainsi $\cos(z_1-z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$, etc...

17 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Déduire la troisième relation de (2.5) *des deux premières.*

5 Formules de factorisation

Des formules (2.5), on peut aussi tirer d'autres formules utiles de factorisation, ainsi que bien d'autres :

$$\begin{aligned} \cos z_1 + \cos z_2 &= 2\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right), \\ \sin z_1 + \sin z_2 &= 2\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\cos\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

6 Formules de l'arc moitié

Les formules qui suivent sont particulièrement importantes pour le calcul d'intégrales où elles permettent d'effectuer des changements de variables ramenant des fractions rationnelles de fonctions trigonométriques à des fractions rationnelles algébriques (*i.e.* des quotients de polynômes). Posant $t = \tan(\theta/2)$, on a

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}. \tag{2.7}$$

Réciproquement, on peut exprimer les relations avec les sinus et cosinus de l'angle double, qui se démontrent à l'aide des formules d'addition :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1, \quad sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta, \quad \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}. \tag{2.8}$$

18 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??

Démontrez les relations faisant intervenir la tangente de l'angle moitié (2.7). Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Sans dériver $f(x)$, quel est son maximum et pour quelle valeur de x ? Vérifiez votre résultat en dérivant $f(x)$.

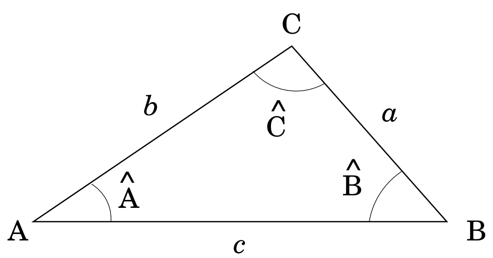
19 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Montrez que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Indication : Utilisez les formules d'addition dans le sens inverse. Par exemple, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$.

20 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??



Dans le triangle quelconque ABC de la figure ci-dessus montrez la "loi des sinus" :

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$

Indication : Tracez la hauteur issue de C et montrez qu'on peut la calculer de deux manières différentes, etc...

7 Exercices facultatifs

21 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Retrouvez les relations de factorisation (2.6) *à partir des relations d'addition* (2.5).

22 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Montrer que $\cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$ *et que* $\sin z_1 - \sin z_2 = 2\cos\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sin\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)$

23 Exercice ⋆ ⋆ ⋆ Corr. p. ??

Montrer que si $ABCD$ est un quadrilatère cyclique (c'est à dire dont les sommets sont sur tous sur un cercle de rayon R, voir Fig. 2.4), la relation de Ptolémée est vérifiée : $AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$.
Indication : Exprimer les distances AB, BC, etc... en fonction du rayon R du cercle et des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, etc...

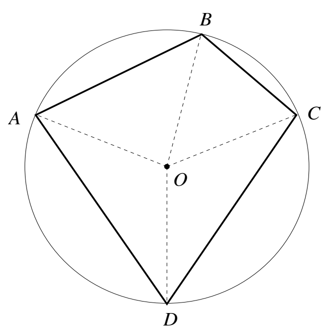


FIGURE 2.4 – Quadrilatère cyclique.