

HAI406 - Feuille de TD nr.4

N.B : Le symbole (●) signale les exercices à travailler en priorité et le symbole (★) les exercices facultatifs.

Exercice 1. (●) On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer A^2 puis A^3 . Comment appelle-t-on une telle matrice ? Montrer, de trois manières différentes, que A n'est pas inversible.

Exercice 2. (●) Dire si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses le cas échéant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ -3 & 2i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -6i \\ 2+i & 2-4i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2 \\ 0 & \alpha+1 \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 3. (●) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

1. Montrer que A est inversible, puis calculer son inverse A^{-1} .
2. Résoudre (rapidement !) chacun des trois systèmes suivants:

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (X \in \mathbb{R}^3).$$

Exercice 4. (●) On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que U est inversible, et calculer U^{-1} .
2. Calculer $D = U^{-1}AU$. Ecrire la matrice D^k . En déduire l'expression explicite de A^k .
3. Vérifier que D et A ont même trace et même déterminant. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible, puis calculer A^{-1} .
2. Calculer la matrice $B = -A^3 - 2A^2 + 6A$.
3. A l'aide du résultat précédent, retrouver A^{-1} par une méthode plus rapide que celle de la double matrice.

Exercice 6. (•)

1. Vérifier sur les matrices carrées d'ordre 2 la validité de la formule : $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
2. Vérifier sur les matrices carrées d'ordre 3 la validité de la formule : $\det({}^t A) = \det(A)$.

Exercice 7. (•) Soit A une matrice carrée d'ordre 2. On note δ son déterminant et τ sa trace.

1. Montrer que $A^2 - \tau A + \delta I = 0$.
2. Retrouver le fait (admis en cours) que si $\det(A) \neq 0$ alors A est inversible.
3. Retrouver à l'aide de (1) la formule vue en cours donnant l'inverse de A .

Exercice 8. (•) Soit P une matrice idempotente¹.

1. Donner des exemples concrets de matrices P .
2. P peut-elle être inversible? Si oui, dans quel(s) cas?
3. Posons $S := 2P - I$. Calculer S^2 . En déduire que S est inversible, puis donner son inverse.

Exercice 9. (★) Soient A une matrice de taille $n \times p$ et B une matrice de taille $p \times n$. Montrer² que si $AB = I_n$ et $BA = I_p$, on a nécessairement $n = p$. Moralité?**Exercice 10. (★)** Montrer³ que si A est une matrice antisymétrique, alors la matrice $I + A$ est inversible.**Exercice 11. (★)** Choisissons dans \mathbb{R}^2 deux vecteurs

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

On rappelle que l'expression $\langle X | X' \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien et $\|X\| = \sqrt{\langle X | X \rangle}$ la norme euclidienne associée. On notera \mathcal{A} l'aire du parallélogramme porté par ces deux vecteurs et θ l'angle qu'ils définissent. On définit enfin la matrice :

$$M = [X | X'] = \begin{bmatrix} x & x' \\ y & y' \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A} = \|X\| \|X'\| \sin(\theta)$.
2. Vérifier que

$${}^t M M = \begin{bmatrix} \|X\|^2 & \langle X | X' \rangle \\ \langle X | X' \rangle & \|X'\|^2 \end{bmatrix}.$$

3. En déduire que $|\det(M)| = \mathcal{A}$.

¹ie : on rappelle qu'une telle matrice P est une matrice carrée vérifiant la propriété $P^2 = P$.

²Indice : penser à utiliser la trace.

³Indice : montrer d'abord que si A est antisymétrique d'ordre n et si $X \in \mathbb{R}^n$, alors $(I + A)X = \mathbf{0} \Rightarrow X = \mathbf{0}$.