FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

L2 informatique
HAI306X Arithmétique

1 Nombres entiers naturels

Exercice 1. Montrer que les axiomes de Peano sont indépendants, c'est-à-dire que l'on ne peut pas déduire l'un d'eux des deux autres. Pour cela, il suffit de trouver un ensemble qui vérifie deux axiomes mais pas le troisième.

Exercice 2. Montrer que deux entiers égaux ont même successeur

Exercice 3. Démontrer l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$$

Exercice 4. Démontrer que tout prédécesseur d'une puissance de dix est un multiple de neuf.

Exercice 5. Démontrer qu'au rugby, tout score supérieur à 24 peut être obtenu en ne marquant que des essais éventuellement transformés.

Qu'est-ce qui est faux dans le raisonnement pour un score plus petit que 24

Exercice 6. Unicité d'une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$. Application à l'unicité de la loi d'addition sur les entiers.

Exercice 7. Premier théorème de l'arithmétique :

$$2 + 2 = 4$$

Vous démontrerez cette égalité sans utiliser la propriété d'associativité ou de commutativité de l'addition.

Exercice 8. Démontrer l'associativité et la commutativité de la loi d'addition

Exercice 9. Montrer que tout entier est régulier.

Exercice 10. Démontrer les propriétés de la multiplication : distributivité (à droite et à gauche), associativité, commutativité, 0 est absorbant, le produit de deux éléments non nuls est non nul, 1 est le seul nombre inversible de $\mathbb{N}$.

Exercice 11. Démontrer les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ (réflexivité, transitivité, antisymétrie, compatibilités avec les opérations, totalité).

Exercice 12. La relation d'ordre sur les entiers vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \Leftrightarrow n > 0$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 > n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n > 0$ et $m > 0 \Rightarrow n + m > 0$

Exercice 13. Démontrer que pour tout entier n, il n'existe aucun entier m tel que $n < m < n + 1$.

Exercice 14. Montrer qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers.

Exercice 15. Comparer les nombres $n!$ et 3^n.

Exercice 16. Calculer les sommes :

1. $1 + 2 \cdots + n$
2. $1 + 3 + 5 \cdots + (2n - 1)$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 \cdots + n^3$
4. $1^2 + 2^2 \cdots + n^2$

Exercice 17. Peut-on paver un échiquier de 64 cases avec des triminos ?

Exercice 18. Que pensez-vous du raisonnement suivant, qui prouve que «si une classe contient au moins une fille, alors tous les étudiants de la classe sont des filles».

Preuve : Nous allons montrer par récurrence la proposition suivante : **Pour toute classe C_n de n étudiants, si elle contient au moins une fille, alors tous les étudiants de C_n sont des filles**.

- Cette proposition est vraie pour les classes à 1 étudiant.
- Supposons qu'on l'ait montré pour toutes les classes à n étudiants. Nous allons alors montrer qu'elle est vraie pour toutes les classes à $n + 1$ étudiants.

  Soit donc n un entier et $C = \{E_1, E_2, \cdots E_n, E_{n+1}\}$ une classe à $n + 1$ étudiants.
  Cette classe contient au moins une fille E_1. On en déduit que les classes $C' = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ et $C'' = \{E_1, E_3, \cdots, E_n, E_{n+1}\}$ sont des classes à n étudiants qui contiennent au moins une fille, donc par hypothèse, elles ne contiennent que des filles. Cela signifie que si E_1 est une fille, alors $E_2, E_3, \cdots E_{n+1}$ sont des filles.
  On a donc bien montré que notre propriété était vraie au rang $n + 1$.

  Ce qui prouve notre proposition par récurrence.