Suites et récurrence

7

1 Suites

1.1 Suite convergente, suite divergente

Une suite numérique est une application d'une partie E de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} u : E & \rightarrow & \mathcal{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

Au lieu de $u(n)$, on écrit u_n, et la suite u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une suite (u_n) *a pour limite* un nombre $l \in \mathbb{R}$ lorsque les nombres u_n se rapprochent indéfiniment de l pour des entiers n de plus en plus grands. On dit alors que la suite (u_n) *converge* vers l, ou encore qu'elle est convergente, de limite l. Ceci se note par le symbole $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. De façon plus formelle, ceci se traduit par le fait que pour toute précision $\varepsilon > 0$ fixée, il existe un rang N tel que, pour tout n, $n \geq N \Rightarrow -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$.

Une suite (u_n) *a pour limite* $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque pour tout nombre réel $A \in \mathbb{R}_+^*$ (respectivement $A \in \mathbb{R}_-^*$), il existe un rang N tel que, pour tout n, $n \geq N \Rightarrow u_n > A$ (respectivement $u_n < A$). On dit que la suite est *divergente* lorsque elle n'a pas de limite ou bien a pour limite $\pm\infty$.

1.2 Opérations sur les suites

Soient u et v deux suites numériques définies pour tout entier $n \geq n_0$ (où n_0 est un entier naturel donné). Alors $|u|, u+v, uv$ sont les suites définies pour $n \geq n_0$ par : $|u|_n = |u_n|, (u+v)_n = u_n + v_n, (uv)_n = u_n v_n$. Si de plus, pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \neq 0$, les suites $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont définies pour tout $n \geq n_0$ par : $\left(\frac{1}{v}\right)_n = \frac{1}{v_n}, \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{u_n}{v_n}$. On suppose que l et l' sont deux nombres réels. Alors on a les résultats suivants :

1.3 Convergence

On dit qu'une suite (u_n) est *croissante* (respectivement *décroissante*) lorsque pour tout n, on a $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} \leq u_n$). Une suite croissante ou décroissante est appelée *suite*

si u a pour limite	et si v a pour limite	alors $u+v$ a pour limite
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure

si $\|u\|$ a pour limite	et si $\|v\|$ a pour limite	alors $\|uv\|$ a pour limite
l	l'	ll'
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	on ne peut pas conclure
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

si $\|u\|$ a pour limite	et si $\|v\|$ a pour limite	alors $\left\|\frac{u}{v}\right\|$ a pour limite
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l \neq 0$	$0+$	$+\infty$
0	0	on ne peut pas conclure
l	$+\infty$	0
$+\infty$	l'	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	on ne peut pas conclure

TABLE 7.1 – Opérations sur les suites.

monotone.

On dit qu'une suite (u_n) est *majorée* (respectivement *minorée*) par $A \in \mathbb{R}$ lorsque pour tout n, on a $u_n \leq A$ (respectivement $u_n \geq A$).

Il y a plusieurs façons de montrer qu'une suite est convergente, en voici quelques unes :

1. Toute suite croissante et majorée est convergente.

2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

3. Si (u_n) est une suite définie pour tout $n \geq n_0$ et f une fonction définie sur un intervalle I. Si on a à la fois :
   — pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \in I$;
   — $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$;
   — f est continue en l,
   alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$.

4. **(Théorème d'encadrement de limites ou "des gendarmes")** Si trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont telles que pour tout n on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$, et si de plus $\lim_{n \to +\infty} u_n = l = \lim_{n \to +\infty} w_n$, alors on a $\lim_{n \to +\infty} v_n = l$.

5. **(Suites adjacentes)** Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* lorsque les trois conditions suivantes sont réunies :
   — (u_n) est croissante,
   — (v_n) est décroissante,
   — pour tout n, on a $u_n \leq v_n$.
   Alors si de plus la différence $u_n - v_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors les deux suites sont convergentes et ont la même limite.

67 Exercice ⋆ Corr. p. ??

En utilisant les définitions des limites, montrer que $\lim_{n \to +\infty} (3n^2 + 5n + 1) = +\infty$.

68 Exercice ⋆ Corr. p. ??

En utilisant les définitions des limites, montrer que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n+3}{n-2} = 1$.

69 Exercice ⋆⋆ Corr. p. ??

Étudier la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $(a > 0, b > 0)$.

70 Exercice ⋆⋆ Corr. p. ??

Étudier la limite des suites :

1. (u_n) définie par $u_n = 2\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
2. (v_n) définie par $v_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$,
3. (w_n) définie par $w_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

2 Suites particulières

2.1 Suites arithmétiques

Une suite de nombres $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* lorsqu'il existe un nombre r tel que pour tout entier n on ait $u_{n+1} = u_n + r$. Ce nombre r est appelé la *raison* de la suite.

1. **(Relations entre les termes)** La suite (u_n) est arithmétique de raison r. Alors on a
   (a) pour tout entier n, $u_n = u_0 + n \times r$.
   (b) pour tous entiers $k \leq n$, $u_n = u_k + (n-k) \times r$.
2. **(Somme des termes successifs)** Avec (u_n) arithmétique de raison r, alors on a
   (a) à partir du premier terme u_0 jusqu'au rang n, $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.
   (b) à partir d'un terme de rang k jusqu'au rang $n \geq k$, $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n = (n-k+1) \times \frac{u_k + u_n}{2}$.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

2.2 Suites géométriques

Une suite de nombres $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* lorsqu'il existe un nombre q tel que pour tout entier n on ait $v_{n+1} = v_n \times q$. Ce nombre q est appelé la raison de la suite.

1. **(Relations entre les termes)** La suite (v_n) est géométrique de raison q. Alors on a
   (a) pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n$.
   (b) pour tous entiers $k \leq n$, $v_n = v_k \times q^{n-k}$.
2. **Somme des termes successifs** Avec (v_n) géométrique de raison $q \neq 1$, alors
   (a) à partir du premier terme v_0 jusqu'au rang n, $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
   (b) à partir d'un terme de rang k jusqu'au rang $n \geq k$, $v_k + v_{k+1} + v_{k+2} + \ldots + v_n = v_k \times \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$.
3. **(Limite)** Lorsque la raison q d'une suite géométrique (v_n) est telle que $-1 < q < 1$ alors les valeurs v_n de la suite se rapprochent indéfiniment de 0 lorsque n devient grand : la suite (v_n) tend vers 0.

2.3 Suites récurrentes

2.3.1 Définitions

Ce sont les suites définies par la donnée de leur premier terme u_0 et par une relation de récurrence, valable pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites définies par relation de récurrence.

Le sens de variation de la fonction f peut donner des renseignements sur celui de la suite.

— Si la fonction f est croissante, alors
  — si $u_0 < u_1$, la suite (u_n) est croissante ;
  — si $u_0 > u_1$, la suite (u_n) est décroissante.
— Par contre, dans le cas où la fonction f est décroissante, on peut seulement dire que la suite des termes (u_{2n}) de rang pair est monotone, celle des termes (u_{2n+1}) de rang impair est monotone elle-aussi, mais leurs sens de variation sont opposés.

Si une suite récurrente telle que $u_n + 1 = f(u_n)$ possède une limite l, alors cette limite l est nécessairement solution de l'équation $f(x) = x$. Ceci fournit un moyen de calcul de limite, à condition de savoir si la suite est convergente.

2.3.2 Suites linéaires d'ordre un

Soit a, b deux nombres réels. Soit $n > 0$ un entier naturel et u_0 un nombre réel. On appelle *suite récurrente linéaire d'ordre un* toute suite (u_n) définie par récurrence sous la forme $u_n = au_{n-1} + b$. On sait résoudre ces suites, c'est-à-dire donner une formule indiquant le $n$ième terme directement en fonction de n, comme pour les suites arithmétiques et géométrique qui en sont d'ailleurs des cas particuliers.

$$u_n = \begin{cases} nb + u_0 & \text{si} \quad a = 1 \\ a^n u_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} & \text{si} \quad a \neq 1 \end{cases} \tag{7.1}$$

2.3.3 Suites linéaires d'ordre deux

Soient a, b, c, d quatre nombres réels. Soit $n > 1$ un entier naturel, et u_0, u_1 deux réels. On appelle *suite récurrente linéaire d'ordre deux* toute suite (u_n) définie par récurrence sous la forme : $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$. La *suite récurrente linéaire homogène associée* à la suite précédente est la suite définie par : $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ (on "oublie" le terme constant dans la relation).

Soient λ et μ les deux solutions (réelles ou complexes, avec éventuellement $\lambda = \mu$) de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$, alors les solutions de l'équation homogène sont les suites de la forme $A\lambda^n + B\mu^n$ si $\lambda \neq \mu$ et de la forme $A\lambda^n + Bn\lambda^n$ si $\lambda = \mu$, avec A, B dans $\mathbb{R}$.

Pour résoudre le cas général, on se base sur le fait que toute solution au cas général est somme d'une solution homogène et d'une solution particulière. Il "suffit" donc de trouver une solution particulière. On en connaît, selon les cas :

- Si $P(1) \neq 0$, alors la suite constante (v_n) définie par : $v_n = \frac{d}{a+b+c}$ est une solution particulière.
- Si $P(1) = 0$, alors on distingue deux sous-cas :
  - Si $P'(1) \neq 0$, alors la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{dn}{2a+b}$ est une solution particulière.
  - Si $P'(1) = 0$, alors la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{dn^2}{2a}$ est une solution particulière.

71 Exercice ⋆ ⋆ ⋆ Corr. p. ??

Soit la suite réelle (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence : $3u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Démontrer qu'il existe une valeur de u_0 pour laquelle la suite (u_n) est constante.
2. On pose dorénavant $u_0 = 2$ et on définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 1$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on calculera le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ?
5. Soit $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Déterminer S_n et S'_n en fonction de n ainsi que leurs limites quand $n \to +\infty$.

72 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??

On considère la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n$.

1. Trouver une suite de la forme (α^n) qui vérifie la relation de récurrence.
2. Montrer que la suite $(n\alpha^n)$ la vérifie également.
3. Déterminer la suite (u_n) qui vérifie la relation, et telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

73 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??

Donner l'expression de u_n en fonction de n, pour les suites récurrentes réelles suivantes :

— (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
— (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
— (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

74 Exercice ⋆ ⋆ ⋆ Corr. p. ??

On appelle polynôme de Tchebychev le polynôme de la variable $\cos x$ *qui donne le développement de* $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ *:* $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

1. *En posant* $u = \cos x$, *montrez que* $T_0(u) = 1$, $T_1(u) = u$, $T_2(u) = 2u^2 - 1$.
2. *Montrez, en utilisant les formules d'addition* (2.5), *que les* $T_n(u)$ *obéissent à la formule de récurrence suivante :*
$$T_{n+2}(u) + T_n(u) = 2uT_{n+1}(u)$$
3. *Déduisez-en* $T_3(u)$, $T_4(u)$ *et montrez que*
$$T_5(u) = 16u^5 - 20u^3 + 5u.$$

75 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??

En utilisant le résultat précédent pour $T_5(\cos x) = \cos(5x)$, *montrez que :*

$$\cos(5x) + 1 = (\cos x + 1)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1)^2$$

En déduire que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

76 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??

En utilisant le résultat précédent, montrez que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

En déduire que la valeur exacte de $x \in [0, 2\pi[$ *telle que*

$$\cos x = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{et} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

est $x = 8\pi/5$.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

3 Séries

3.1 Définitions

On appelle *série numérique* (S_n) sur la suite (u_n), la suite définie comme étant les sommes successives des éléments de (u_n) : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Le terme général de la série s'appelle *somme partielle* de la série. La série est dite *convergente* si la suite des sommes partielles est convergente.

Si la série converge, alors la suite (u_n) tend vers 0. La contraposée de ce résultat est souvent utilisée : une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas converger.

3.2 Séries particulières

1. **Série harmonique** C'est la série dont la somme est : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Bien que le terme général de la suite associée $\frac{1}{n}$ tende vers 0 en $+\infty$, cette série est divergente.
2. **Série de Riemann** C'est la série dont la somme est : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Elle est divergente pour $\alpha \leq 1$ et convergente pour $\alpha > 1$.
3. **Série de Bertrand** Soit α et β deux réels fixés, la série de Bertrand est la série dont la somme est : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. Cette série est convergente si et seulement si :
   - $\alpha > 1$ ou
   - $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

3.3 Séries à termes positifs

Une série à termes positifs est une série dont le terme général u_n est positif. Dans ce cas, la suite des sommes partielles S_n est une suite croissante donc on peut utiliser les théorèmes relatifs aux suites croissantes et majorées. On dispose également d'autres propriétés :

1. **Théorème de comparaison de séries** Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. Si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, à partir d'un certain rang n_0, on ait : $0 \leq u_n \leq \lambda v_n$ alors :
   - si la série de terme général u_n est divergente alors il en est de même de la série de terme général v_n ;
   - si la série de terme général v_n est convergente alors il en est de même de la série de terme général u_n.

   Remarque, un cas particulier arrive quand les deux termes sont équivalents en $+\infty$ (*i.e.* quand $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$). Alors les deux séries sont de même nature.
2. **Théorème de comparaison série - intégrale** Soit f une fonction de variable numérique x définie, décroissante et continue et positive sur un intervalle $I = [n_0; +\infty[$, ou n_0 est un

entier naturel. Alors la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si la primitive F de f qui s'annule en n_0 admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

3. **Règle de D'Alembert** Soit une série à termes positifs et on suppose que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}$. Alors :
   — si $l < 1$, la série converge ;
   — si $l > 1$, la série diverge ;
   — si $l = 1$, la série diverge ou converge.
4. **Comparaison avec la série de Riemann** Soit une série à termes positifs u_n, alors si il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série est convergente.

77 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5^n}{n!}$. Montrer que la série $(\sum u_n)$ converge.

78 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$. Montrer que la série $(\sum u_n)$ converge.

79 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$. Montrer que la série $(\sum u_n)$ converge.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE