De la combinatoire aux graphes (HLIN201) – L1

Rappels : raisonnement, récurrence

Sèverine Bérard

Université de Montpellier

2^{e} semestre 2017-18

Introduction

Pourquoi raisonner ?

- Raisonner :
  1. Se servir de sa raison pour connaître, pour juger
  2. Passer d'un jugement à un autre pour aboutir à une conclusion
- Prouver :
  1. Établir par des raisonnements, des témoignages incontestables la vérité
  2. Faire apparaître la réalité de qqch

[Petit Larousse, 2011]

C'est fondamental !

Dans la vie de tous les jours et dans les matières scientifiques. Cela permet d'acquérir et de créer de nouvelles connaissances

Objectifs de ces rappels

- Révision *informelle* et *non exhaustive* des grands principes de raisonnements

  1. Le vrai, le faux
  2. Qu'est qu'une proposition, une propriété ?
  3. L'implication
  4. Rappels de différentes techniques de démonstration
  5. Raisonnement par récurrence/induction sur $\mathbb{N}$

- Pour aller plus loin : Logique, Théorie de la preuve, ...

Le vrai et le faux

Il y a des choses que l'on considère comme vraies

- Ce que l'on observe, ce que l'on mesure, les faits
- Les définitions, axiomes, théorèmes, propositions et propriétés vues en cours
- Ce qui se trouve dans l'énoncé du problème

Cela constitue le point de départ, la base, de tout raisonnement.

Il y a des choses que l'on doit prouver

- Tout ce qui est vrai mais pas dans le bloc précédent

La frontière est mobile : une fois une chose prouvée, elle passe dans les choses considérées vraies

Les booléens

- On appelle *Booléen* l'ensemble qui contient les deux valeurs de vérité : $\{Vrai, Faux\}$ (autre notation $\{0, 1\}$ ou $\{\top, \bot\}$)

Vocabulaire

Proposition

- Une proposition est un énoncé (phrase simple) qui est soit vrai, soit faux
- *Ex : A = "Ma voiture est jaune", B = "f_1 est une application injective"*
- On peut nommer une proposition

Propriété

- Équivalent à proposition, s'applique plutôt quand on généralise la proposition à un ensemble d'objets.
- *Ex : $P_1(x)$ = "x est jaune", $P_2(f)$= "f est une application injective"*
- On peut alors se poser des questions comme
  1. est-ce que $P_2(f_1)$ est vraie ? (rmq $P_2(f_1) = B$)
  2. ou est-ce que $P_2(f)$ est vraie pour toute application f de $\{X \to Y\}$

Un monde manichéen

Négation d'une proposition

- Une proposition qui n'est pas vraie est fausse
- Une proposition qui n'est pas fausse est vraie
- La négation peut être vue comme une application, notée *non*, qui inverse la valeur de vérité : si A est vraie, $non(A)$ est fausse et inversement
- A = *"Ma voiture est jaune" ;* $non(A)$ vraie ; alors ma voiture n'est pas jaune

Négation d'une propriété

- Idem qu'une proposition : $P_1(v)$ faux alors $non(P_1(v))$ vrai
- Cas particulier : on s'intéresse à une propriété $P(x)$ pour des x dans X
  - "$P(x)$ est vraie pour tout x de X" (se note aussi "$P(x)\ \forall x \in X$")
  - Si la phrase du dessus n'est pas vraie,
    c'est qu'il existe au moins un élément $y \in X$ tel que $P(y)$ est fausse
- $P_2(f)$= "f est injective" ; $C =$"$P_2(f)$ vraie $\forall f \in \mathbb{N}^{\{0,1\}}$" ; $non(C)$?

Les quantificateurs

Quantification universelle

- En langue naturelle : Quel que soit . . . / Pour tout . . . / Tous . . .
- Symbole mathématique : $\forall$
- *Ex : " Tous les hommes sont mortels" ; "$\forall x \in X,\ x$ est un entier impair"*

Quantification existentielle

- En langue naturelle : Il existe un(e) . . . / Au moins un(e) . . .
- Symbole mathématique : $\exists$
- *Ex : "Il existe une voiture jaune" ; " $\exists x \in X$, tel que x est un entier impair"*

Se réfère toujours à un ensemble

- Particularité si l'ensemble X est vide :
  - " $\exists x \in X$, *tel que* x *est un entier impair* " est faux
  - " $\forall x \in X,\ x$ *est un entier impair* " est vrai

Les quantificateurs en pratique

Portée des quantificateurs, variables libres et liées

- Soit la phrase mathématique :

$$\exists z \in Z[(\forall x \in E \, \forall y \in F \; P(x, y) \text{ et } P(x, z)) \text{ ou } (\exists x \; Q(x, z) \text{ et } P((x, y))]$$

- Substitution de z par a , de x par b, quel x ?, du premier x par b, du second x par c, du troisième x par d, ...

$$\exists \mathbf{a} \in Z[(\forall x \in E \, \forall y \in F \; P(x, y) \text{ et } P(x, \mathbf{a})) \text{ ou } (\exists x \; Q(x, \mathbf{a}) \text{ et } P(x, y))]$$

$$\exists a \in Z[(\forall \mathbf{b} \in E \, \forall y \in F \; P(\mathbf{b}, y) \text{ et } P(x, a)) \text{ ou } (\exists x \; Q(x, a) \text{ et } P(x, y))]$$

$$\exists a \in Z[(\forall b \in E \, \forall y \in F \; P(b, y) \text{ et } P(\mathbf{c}, a)) \text{ ou } (\exists x \; Q(x, a) \text{ et } P(\mathbf{c}, y))]$$

Les quantificateurs en pratique

Double quantification

- Que pensez-vous de $\forall x \in E\, \forall y \in F\; P(x, y)$ et $\forall y \in F\, \forall x \in E\; P(x, y)$?
- Que pensez-vous de $\exists x \in E\, \exists y \in F\; P(x, y)$ et $\exists y \in F\, \exists x \in E\; P(x, y)$?
- Et de $\exists x \in E\, \forall y \in F\; P(x, y)$ et $\forall y \in F\, \exists x \in E\; P(x, y)$?

Négation et quantificateurs

- $non(\exists x \in E\; P(x)) = \forall x \in E\; non(P(x))$
- $non(\forall x \in E\; P(x)) = \exists x \in E\; non(P(x))$

L'implication

Définition

- Relie deux propositions et en forme une nouvelle
  - En langue naturelle : Si P alors Q
  - Symbole mathématique : $P \Rightarrow Q$
- *Ex : "Si j'habite à Montpellier alors j'habite en France" ; "S'il fait beau alors ma voiture est jaune" ;* "$x \in X \Rightarrow x^2 \in Y$"

Table de vérité $P \Rightarrow Q$

- Cette nouvelle proposition a une valeur de vérité qui dépend des valeurs de vérité de P et de Q

$P \Rightarrow Q$	Q Vraie	Q Fausse
P Vraie	*Vrai*	*Faux*
P Fausse	*Vrai*	*Vrai*

- "$P \Rightarrow Q$" vraie si on n'a pas (P vraie et Q fausse)

Implication dans les définitions, théorèmes, ...

- Rappels : les définitions et les théorèmes sont considérés comme vrais
- Dans ces propositions ou propriétés se cachent des implications

Exemple d'une définition

D : "Un quadrilatère est un losange ssi ses 4 côtés sont égaux"

- Soient $P(x)$="x est un losange", $Q(x)$="x a ses 4 côtés égaux"
  et $\mathcal{G}$ l'ensemble des quadrilatères
- $D =$ "$P(x) \Leftrightarrow Q(x)\ \forall x \in \mathcal{G}$" (équivalence des propriétés P et Q)
- Donc "$P(x) \Rightarrow Q(x)\ \forall x \in \mathcal{G}$" et "$Q(x) \Rightarrow P(x)\ \forall x \in \mathcal{G}$" toujours vraies

Utilisation

- Dans un énoncé, vous trouvez "$ABCD$ est quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux", vous reconnaissez $Q(ABCD)$ vraie, vous pouvez donc déduire que $P(ABCD)$ est vraie, c.-à-d. que $ABCD$ est un losange

Démonstration : quoi, quand, comment ?

Une *démonstration* permet d'établir une proposition à partir de propositions initiales, ou précédemment démontrées, en s'appuyant sur un ensemble de règles de déduction. *[Wikipédia:démonstration, 2015]*

Quand ?

- Lorsqu'il est demandé de “montrer que”, “prouver que”, “justifier”, ...
- Quand vous voulez montrer que P, $P(x_1)$ ou “$P(x)\ \forall x \in E$” est vraie

Comment ?

- Une démonstration peut se découper en étapes
- Chaque étape vise à montrer la véracité d'une proposition utile pour la suite de la démonstration
- La dernière étape montre donc la propriété à démontrer
- Chaque étape peut utiliser une technique de preuve différente

Avant de se lancer

Se faire une idée

- Est-ce que ce que vous cherchez à prouver est réellement vrai ?
  - Essayer sur des exemples
  - Faire des dessins/schémas
  - Chercher un contre-exemple
- Il est plus facile de montrer qu'une propriété est fausse : un contre-exemple suffit
- Montrer qu'une propriété est vraie nécessite une démonstration

Rassembler ce qui vous sera utile

- Les définitions en lien avec le sujet
- Les propriétés et théorèmes vus en cours
- Les résultats des exercices précédents
- Des preuves similaires sur d'autres données
- ...

Techniques de démonstration

Vous voulez montrer que Q est vraie

Simple

- Vous avez "$P \Rightarrow Q$" vraie et P vraie ; c'est direct

Composée

- Vous avez "$P_1 \Rightarrow P_2$", "$P_2 \Rightarrow P_3$", "$P_3 \Rightarrow Q$" vraies et P_1 vraie
- Vous utilisez la transitivité de l'implication pour déduire que "$P_1 \Rightarrow Q$" vraie
- Vous avez donc "$P_1 \Rightarrow Q$" et P_1 vraie, donc Q vraie

Exemple

D : "Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux"
Proposition : "Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires"

- Problème : *ABCD* est quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux, montrez que ses diagonales sont perpendiculaires
- *ABCD* est quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux $\Rightarrow$ *ABCD* est un losange $\Rightarrow$ ses diagonales sont perpendiculaires

Vous voulez montrer que Q est vraie

Contraposée : “$A \Rightarrow B$” est équivalent à “$non(B) \Rightarrow non(A)$”

- Vous avez “$non(Q) \Rightarrow non(P)$” et P vraies
- Vous utilisez la contraposée de l’implication pour déduire que “$non(nonP) \Rightarrow non(nonQ)$” est vraie
- Vous utilisez le fait que la double négation s’annule : $P \Rightarrow Q$
- Retour au cas simple

Exemple

D : “Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux”

- Problème : $ABCD$ un quadrilatère tel que AB=CD=2*BC, montrer que $ABCD$ n’est pas un losange
- Contraposée de “x est un losange $\Rightarrow$ x a 4 côtés égaux” : “x n’a pas 4 côtés égaux $\Rightarrow$ x n’est pas un losange”
- $ABCD$ n’a pas 4 côtés égaux donc $ABCD$ n’est pas un losange

Vous voulez montrer que Q est vraie

Par l'absurde

- Il faut montrer que si Q est fausse alors on peut déduire quelque d'absurde, d'impossible
- Plus formellement, il faut montrer que "$non(Q) \Rightarrow Faux$"

Exemple

D : "Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux"

- Problème : $ABCD$ un quadrilatère tel que AB=CD=2*BC, montrer que $ABCD$ n'est pas un losange
- Supposons que $ABCD$ est un losange, on a AB=2*BC, donc un losange peut avoir 2 côtés de longueur différente, c'est impossible !
- Donc $ABCD$ n'est pas un losange

Vous voulez montrer que “$P(n)$ est vraie quel que soit n dans $\mathbb{N}$”

Cette propriété est un prédicat défini sur $\mathbb{N}$, c.-à-d. une application de $\mathbb{N}$ dans *Booléen*

Preuve par récurrence

Soit un prédicat $P : \mathbb{N} \to$ Booléen. Si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Base : $P(0)$ est vraie.
2. Récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Preuve par induction

Si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Base : $P(0)$ est vraie.
2. Induction : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $(\forall k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n,\ P(k)$ est vraie), alors $P(n+1)$ est vraie.

alors $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$ est vraie.

Autres techniques de démonstration

Montrer une implication

- Vous voulez montrer que "$P \Rightarrow Q$" où P et Q sont 2 propositions
- Vous pouvez montrez que (P vraie et Q faux) est impossible

Montrer l'équivalence de 2 propositions

- Vous voulez montrer que "$P \Leftrightarrow Q$" où P et Q sont 2 propositions
- Vous pouvez montrez que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

Montrer l'égalité de 2 ensembles

- Vous voulez montrer que $E = F$ où E et F sont 2 ensembles
- Vous pouvez montrez que $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$

Preuve par induction structurelle

- Vous voulez montrer que "$P(e)$ est vraie quel que soit e dans E" où E est une ensemble défini par induction *on verra plus tard*