HLMA101 - Correction de la feuille 9

Question 1

Le théorème des valeurs intermédiaires correspond à la deuxième proposition :

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors $\underline{[f(a), f(b)] \subset f([a,b])}$.

En effet, cette <u>inclusion</u> dit que :

$$\text{"} \forall y \in \mathbb{R}, \quad y \in [f(a), f(b)] \implies y \in f([a,b]) \text{"}$$

c'est-à-dire, en se souvenant de la définition de l'image directe $f([a,b])$:

$$\text{"} \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(a) \leq y \leq f(b) \implies (\exists x \in [a,b], \ y = f(x)) . \text{"}$$

C'est bien le théorème des valeurs intermédiaires vu en cours.

<u>Remarque 1</u> : La proposition est vraie même si $f(a) > f(b)$, mais dans ce cas-là elle n'est pas très intéressante car l'intervalle $[f(a), f(b)]$ est vide...

Dans ce cas-là on écrirait plutôt : $[f(b), f(a)] \subset f([a,b])$.

Pour éviter de faire une disjonction de cas on écrit parfois :

$$[f(a), f(b)] \subset f([a,b]).$$

Remarque 2 : L'inclusion réciproque $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$ peut se réécrire sous la forme :

" $\forall y \in \mathbb{R}, \quad y \in f([a,b]) \implies y \in [f(a), f(b)]$ "

ou encore :

" $\forall x \in [a,b], \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ ".

Elle est notamment vérifiée si f est croissante (mais n'a pas de rapport avec la continuité de f ou le théorème des valeurs intermédiaires).

Question 2

(a) "Une fonction continue est dérivable"

C'est FAUX. Par exemple, la fonction "valeur absolue" ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$) est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

(b) "Une fonction dérivable est continue"

C'est VRAI d'après le cours.

(c) "Si f n'est pas dérivable en a, alors f n'est pas continue en a."

C'est FAUX car c'est la contraposée de l'assertion (a), qui est fausse. La fonction "valeur absolue" (en $a=0$) fournit donc un contre-exemple.

Exercice 1

Commençons par écrire l'équation sous la forme $f(x)=0$ avec $f(x)=e^x+x^3-5$. [On pourrait très bien résoudre $g(x)=5$ en posant $g(x)=e^x+x^3$. Mais c'est un bon réflexe (et reposant psychologiquement) de plutôt se ramener à une équation du type $(\dots)=0$.]

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et on étudie d'abord ses variations.

. Méthode 1 : avec la dérivée

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme des fonctions usuelles $x\mapsto e^x$, $x\mapsto x^3$ et $x\mapsto -5$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$) et on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=e^x+3x^2$.

Comme pour tout réel x on a $e^x>0$ et $3x^2\geqslant 0$, on en déduit que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)>0$.

D'après le cours, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Méthode 2 : sans la dérivée

On revient à la définition de "f est strictement croissante" et on montre que : "$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$".

Soient donc $a, b \in \mathbb{R}$ et supposons que $a < b$.

Comme la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc $e^a < e^b$.

Comme la fonction "cube" $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a aussi $a^3 < b^3$

En ajoutant terme à terme ces inégalités et en retranchant 5, on obtient : $e^a + a^3 - 5 < e^b + b^3 - 5$, donc $f(a) < f(b)$.

Remarque : Cette deuxième méthode montre plus généralement que la somme de deux fonctions (strictement) croissantes est (strictement) croissante.

Avec l'une ou l'autre des méthodes on a montré que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(On pourrait aussi calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, qui valent $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; mais ça ne nous sera pas utile pour l'exercice.)

Revenons à la question initiale, qui était de montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. Il y a deux choses à montrer : existence et unicité.

Existence : (en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires)

On calcule $f(0) = -4 < 0$

et $f(2) = e^2 + 2^3 - 5 > 2^3 - 5 = 3 > 0$.

Il faut aussi justifier que f est continue sur $[0,2]$. Comme on a déjà expliqué que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est notamment continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0,2]$.

On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, qui nous dit qu'il existe un $c \in]0,2[$ tel que $f(c) = 0$.

Unicité : (en utilisant la stricte monotonie de f)

On a vu que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- si $x < c$ alors $f(x) < f(c) = 0$
- si $x > c$ alors $f(x) > f(c) = 0$

Résultat : si $x \neq c$ alors $f(x) \neq 0$, et donc c est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

<u>Calcul approché de c :</u> (par dichotomie)

On sait déjà que $0 < c < 2$. On calcule $f(1) = e + 1 - 5 \approx -1,28$ donc $f(1) < 0$ et donc $c > 1$ et on obtient. $1 < c < 2$.

On calcule $f(1,5) \approx 2,86 > 0$, donc $c < 1,5$: $1 < c < 1,5$.

On calcule $f(1,25) \approx 0,44 > 0$, donc $c < 1,25$: $1 < c < 1,25$.

On n'est pas obligé de couper à chaque fois l'intervalle en deux...

par exemple en calculant $f(1,15) \approx -0,32$ et $f(1,2) \approx 0,04$ on trouve : $1,15 < c < 1,2$. En calculant $f(1,19) \approx -0,03$ on trouve alors : $\underline{1,19 < c < 1,2}$.

Une valeur approchée de c est donc : $c \approx 1,195$ à $0,005$ près.

[On a une précision un peu meilleure que ce que demandait l'énoncé...]

[Un logiciel de calcul formel donne : $c \approx 1,193674575$.]

Exercice 2

Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

[Il est bon de remarquer que l'expression $\dfrac{x}{1+x}$ est aussi bien définie pour $x \in]-\infty, -1[$; mais dans cet exercice on ne nous demande pas d'étudier l'application sur cet intervalle, seulement sur $]-1, +\infty[$ ...]

- On montre que f est strictement croissante (sans utiliser la dérivée), c'est-à-dire : " $\forall a, b \in]-1, +\infty[$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ".

Soient $a, b \in]-1, +\infty[$ et supposons que $a < b$. On veut montrer que $f(a) < f(b)$, c'est-à-dire que $f(b) - f(a) > 0$. [C'est souvent plus simple de prouver qu'une quantité est positive et donc c'est un bon réflexe de s'y ramener ...] On calcule donc

$$f(b) - f(a) = \frac{b}{1+b} - \frac{a}{1+a} = \frac{b(1+a) - a(1+b)}{(1+a)(1+b)} = \frac{b + ab - a - ab}{(1+a)(1+b)}$$

et finalement : $f(b) - f(a) = \dfrac{b-a}{(1+a)(1+b)}$. Par hypothèse on a $b - a > 0$ (car $a < b$), $1 + a > 0$ (car $a > -1$) et $1 + b > 0$ (car $b > -1$), et donc $f(b) - f(a) > 0$, d'où $f(a) < f(b)$.

On a bien montré que f est strictement croissante.

Remarque : On pourrait évidemment montrer ça avec la dérivée : f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme quotient des fonctions usuelles $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1+x$, et on peut calculer :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

, donc f est strictement croissante.

- On montre que pour tout $y \in]-1,1[$ il existe un unique $x \in]-1,+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Il se trouve (mais c'est en fait très rare...) qu'on peut résoudre cette équation <u>explicitement</u>. En effet, pour $y \in]-1,1[$ on a :

$$f(x) = y \iff \frac{x}{1+x} = y \iff x = (1+x)y \iff x = y + xy$$

$$\iff x(1-y) = y \iff x = \frac{y}{1-y}.$$

Il reste à vérifier que $\frac{y}{1-y} \in]-1,+\infty[$, c'est-à-dire que $\frac{y}{1-y} > -1$, c'est-à-dire que $\frac{y}{1-y} + 1 > 0$. On calcule :

$$\frac{y}{1-y} + 1 = \frac{y+1-y}{1-y} = \frac{1}{1-y}.$$

Comme $y < 1$ on a $1-y > 0$ et

donc $\frac{1}{1-y} > 0$, d'où $\frac{y}{1-y} > -1$.

On a donc montré que pour tout $y \in]-1,1[$ il existe un unique $x \in]-1,+\infty[$ (donné explicitement par la formule $x = \frac{y}{1-y}$) tel que $f(x) = y$.

Remarque 1: On n'a pas utilisé le fait que $y > -1$, et la même assertion est donc vraie pour tout $y \in]-\infty, 1[$.

Remarque 2: On aurait aussi pu traiter cette deuxième question comme dans l'exercice précédent, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaire (pour montrer l'existence de x) et la stricte croissance de f (pour montrer l'unicité).

Exercice 3

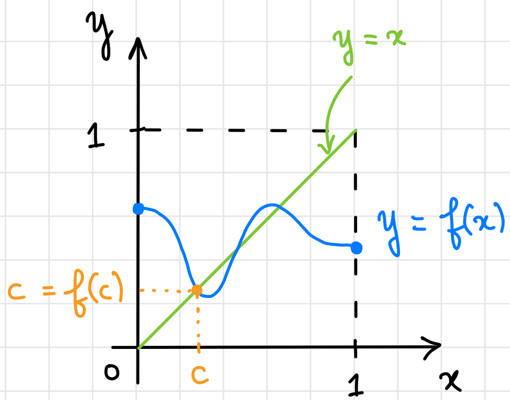
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On veut montrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$ Faisons fonctionner notre réflexe (se ramener à une équation $(\dots) = 0$) et écrivons donc cette équation sous la forme $f(x) - x = 0$. On est donc amenés à poser $g(x) = f(x) - x$. On obtient une application $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, qui est continue (comme somme de f, continue par hypothèse, et de la fonction continue $x \mapsto -x$).

On a $g(0) = f(0) \geq 0$ (car $f(0) \in [0,1]$)

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car $f(1) \in [0,1]$)

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, et donc tel que $f(c) = c$.

Une illustration : le graphe de f ne peut pas sortir du carré $[0,1] \times [0,1]$ et doit être tracé "sans lever le crayon" (continuité), il doit donc nécessairement rencontrer la droite d'équation $y = x$.



Exercice 4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\forall x \in I$, $f(x)^2 = 1$. Cette hypothèse nous donne donc :

$\forall x \in I$, $\big(f(x) = 1$ ou $f(x) = -1 \big)$. $(*)$

Dit autrement, f ne prend que les valeurs 1 ou -1. Ce n'est pas encore assez pour conclure que f est constante puisqu'il se pourrait que $f(x)$ vaille 1 pour certains x, et -1 pour d'autres. On veut montrer que ce n'est pas possible, et on procède par l'absurde.

Supposons donc qu'il existe $x, x' \in I$, avec $x \neq x'$, tels que $f(x) = 1$ et $f(x') = -1$. Quitte à échanger x et x', on peut supposer que $x < x'$. Comme f est continue par hypothèse, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f sur l'intervalle $[x, x']$. (Cet intervalle est bien inclus dans I car I est un intervalle par hypothèse) Le théorème nous donne l'existence d'un $c \in]x, x'[$ tel que $f(c) = 0$. C'est en contradiction avec l'hypothèse $(*)$. Ceci conclut le raisonnement par l'absurde.

On a donc montré qu'on a :

$$(\forall x \in I,\ f(x) = 1) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in I,\ f(x) = -1)$$

(Noter la différence avec (*))

c'est-à-dire que f est constante égale à 1 ou -1.

Remarque 1 : L'exercice serait faux sans l'hypothèse de continuité.
Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

n'est pas constante mais elle vérifie $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (f n'est pas continue en 0 !)

Remarque 2 : L'exercice serait faux sans l'hypothèse que I est un intervalle. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

n'est pas constante, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, et vérifie $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !)

(La question de la continuité en 0 ne se pose pas car f n'est même pas définie en 0...)

Exercice 5

Posons $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. (Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $1+|x| \neq 0$. En effet, $1+|x| \geq 1 > 0$.)

[La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 ; on ne peut donc pas conclure directement grâce aux théorèmes sur somme & quotient de fonctions dérivables. Mais cela ne nous dit pas que f n'est pas dérivable en 0. Pour répondre à la question on doit revenir à la définition de la dérivabilité via le taux d'accroissement.]

Pour $x \neq 0$ on calcule le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{x} = \frac{1}{1+|x|}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} (1+|x|) = 1$, on a par limite d'un quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$.

On en conclut que f est dérivable en 0 (et que $f'(0) = 1$).

Exercice 6

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Pour étudier la dérivabilité de f en 0 on revient à la définition via le taux d'accroissement. On calcule donc, pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette quantité n'a pas de limite quand x tend vers 0 (ni même de limite à droite / à gauche). (En effet, dans tout intervalle $]-\delta,\delta[$ avec $\delta>0$ on peut trouver un x tel que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1$ et un x' tel que $\sin\left(\frac{1}{x'}\right)=-1$)

On en conclut que f n'est <u>pas</u> dérivable en 0.

<u>Remarque :</u> On peut montrer (voir ci-dessous) que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$, ce qui implique que f est <u>continue</u> en 0.

- Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

On calcule, pour $x\neq 0$:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour tout $x\neq 0$ on a $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\leq 1$, et donc :

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\times\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ on en conclut (théorème de comparaison) que

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$.

Donc <u>g est dérivable en 0</u> (et $g'(0) = 0$).

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

- Première étape : on écrit des équations pour les tangentes aux courbes de f et g <u>en n'importe quel point</u>.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$. Pour un réel a fixé, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est donc (par le cours) :

$T_f(a)$: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ c'est-à-dire :

$T_f(a)$: $y = a^2 + 2a(x - a)$ ou encore en simplifiant :

$T_f(a)$: $y = 2ax - a^2$ (coeff. directeur : $2a$; ordonnée à l'origine : $-a^2$)

- g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Pour un réel non nul b, l'équation de la tangente à la courbe de

g au point d'abscisse b est donc :

$T_g(b) : y = g(b) + g'(b)(x-b)$ c'est-à-dire :

$T_g(b) : y = \frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}(x-b)$ ou encore en simplifiant :

$T_g(b) : y = -\frac{1}{b^2} x + \frac{2}{b}$ (coeff. directeur : $-\frac{1}{b^2}$; ordonnée à l'origine : $\frac{2}{b}$)

- Deuxième étape : on répond à la question. Rappelons que deux droites sont égales si et seulement si elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, les tangentes $T_f(a)$ et $T_g(b)$ sont la même droite exactement quand a et b vérifient les deux équations :

$$2a = -\frac{1}{b^2} \quad \text{et} \quad -a^2 = \frac{2}{b} \qquad (*)$$

On est donc amené à résoudre le système formé par ces deux équations. (Ce n'est pas un système linéaire, donc la méthode du pivot ne nous est d'aucun secours ici...)

On procède "bêtement" par substitution. La première équation donne $a = -\frac{1}{2b^2}$, et on peut donc remplacer dans la deuxième équation, ce qui donne : $$-\left(-\frac{1}{2b^2}\right)^2 = \frac{2}{b}$$

$$\iff -\frac{1}{4b^4} = \frac{2}{b}$$

inversion

$$\iff -4b^4 = \frac{b}{2}$$

$$\iff b^3 = -\frac{1}{8} \quad (\text{ok car } b \neq 0)$$

$$\iff b = -\frac{1}{2}$$

En remplaçant on trouve alors $a = -\dfrac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -2$.

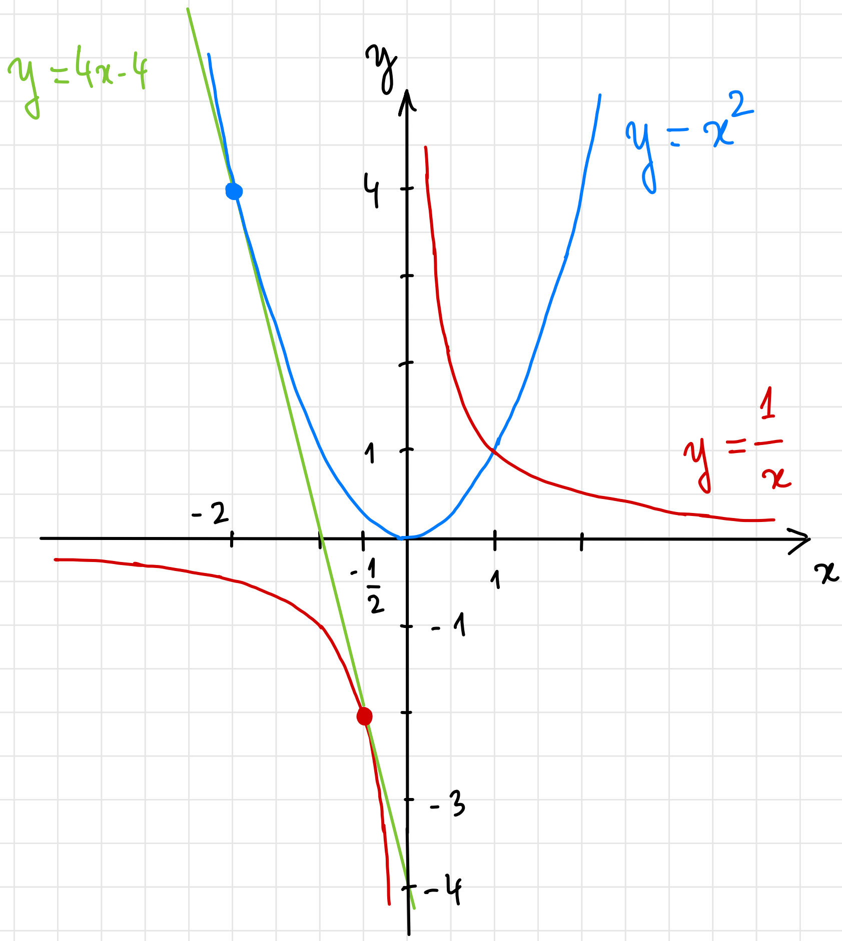
Conclusion : l'unique solution à $(*)$ est $\left(a=-2,\ b=-\frac{1}{2}\right)$

Il y a donc bien une unique droite qui est à la fois tangente à la courbe de f et tangente à la courbe de g. Son équation est (en remplaçant dans l'équation de $T_f(a)$ ou de $T_g(b)$) :

$$\underline{y = -4x - 4}$$

Elle est tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2 et à la courbe de g au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

On peut essayer de faire un dessin :


$y = 4x - 4$
y
$y = x^2$
4
1
$y = \frac{1}{x}$
-2
$-\frac{1}{2}$
1
x
-1
-3
-4