L2 informatique
HAI306X Arithmétique

Numération et congruences

Numération et critère de divisibilité

Exercice 1. Critère de divisibilité par 2 en base dix : Soit $a \in \mathbb{N}$, dont l'écriture en base dix est :

$$a = a_n \cdots a_2 a_1 a_0.$$

Alors a est divisible par 2 si et seulement si a_0 est divisible par 2.

Exercice 2. Critère de divisibilité par 9 en base dix : Soit $a \in \mathbb{N}$, dont l'écriture en base dix est :

$$a = a_n \cdots a_2 a_1 a_0.$$

Alors a est divisible par 9 si et seulement si :

$$S = a_n + \cdots + a_2 + a_1 + a_0$$

est aussi divisible par 9.

Exercice 3. Critère de divisibilité par 11 en base dix : Soit $a \in \mathbb{N}$, dont l'écriture en base dix est :

$$a = a_n \cdots a_2 a_1 a_0.$$

Alors a est divisible par 11 si et seulement si :

$$S = (-1)^n a_n + \cdots - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

est aussi divisible par 11.

Exercice 4. Énoncer et démontrer un critère de divisibilité par cinq en base six.

Congruences

Exercice 5. Déterminer les entiers congrus à 1 modulo 27 et à 13 modulo 17.

Exercice 6.
- Quel peut être le reste de la division par 5 du carré d'un nombre entier ?
- Quel peut être le reste de la division par 8 du carré d'un nombre impair ?

Exercice 7. Quel est le reste de la division par 11 de 705432^5 ?

Exercice 8. Soit n un entier naturel.

- Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6
- Montrer que $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6

Exercice 9. Soient a, b, c trois entiers naturels vérifiant $a^2 = b^2 + c^2$.
Montrer que :

1. L'un au moins des nombres b et c est divisible par 3
2. L'un au moins des trois nombres est divisible par 5
3. L'un au moins des nombres b et c est divisible par 2
4. L'un au moins des nombres b et c est divisible par 4

Exercice 10. Soit n un entier naturel et on considère l'équation en nombres entiers x et y : $x^2 - y^2 = n$.

1. On suppose n impair. Montrer que l'équation a des solutions dans $\mathbb{N}$ et proposer un algorithme pour les trouver toutes.
2. On suppose que n est pair. Montrer qu'il y a une condition de congruence modulo 4 sur n pour que cette équation ait des solutions. Proposer un algorithme pour les trouver toutes.

Exercice 11. Soit m, a et n trois entiers naturels. On cherche à calculer $a^n \mod n$.

- Montrer qu'on peut le réaliser en faisant n multiplication $\mod m$.
- Montrer qu'on peut faire beaucoup moins d'opérations en représentant n en binaire. Proposer un algorithme qui le réalise et calculer le nombre d'opérations.
- Application : $m = 123,\ a = 5,\ n = 29$.

Exercice 12. Soit n un entier naturel. Montrer :

1. $4^{3n} - 4^n$ est un multiple de 5
2. $2^{4n+2} + 2^{4n+1} - 1$ est un multiple de 5
3. $3^{2n} - 3^n$ est un multiple de 7
4. $4^n + 15n - 1$ est un multiple de 9

Exercice 13. Pour quelles valeurs de n :

1. le nombre $4^n + 2^n + 1$ est divisible par 7 ?
2. le nombre $9^n + 3^n + 1$ est divisible par 13 ?
3. le nombre $25^n + 5^n + 1$ est divisible par 31 ?