Une tâche essentielle en informatique est de connaître/calculer le nombre de cas rencontrés dans l'exécution d'un algorithme, d'estimer la taille mémoire de l'implantation d'un type de données, d'estimer le temps d'exécution d'un programme. Pour cela il faut ... compter. On dit aussi *dénombrer*. En fait nous allons effleurer les techniques élémentaires de dénombrement.

— $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, et si A et B sont disjoints : $|A \cup B| = |A| + |B|$. Se généralise à une partition, soit $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une partition de E, alors $|E| = |A_1| + \ldots + |A_n|$
— $|A \times B| = |A|.|B|$,
— Rappel : $\{A \to B\} = B^A$ ensemble des applications de A vers B. $|B^A| = |B|^{|A|}$,
— $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ (à chaque application de E dans $\{0,1\}$ on associe la partie de E qu'elle représente, combien d'applications ? $|\{0,1\}|^{|E|} = 2^{|E|}$)

On suppose dans la suite que $|A| = n$ et $|B| = p$, avec $n \geq p$ pour les 4 sous-sections suivantes :

Nombre d'applications bijectives de A vers A (Permutation)

On peut le voir comme le nombre de manière d'ordonner les éléments de A.

$$\begin{array}{cc}
1^{\text{re}} \text{ position :} & n \text{ choix} \\
2^{\text{e}} \text{ position :} & n-1 \text{ choix} \\
\ldots & \ldots \\
\text{Dernière position :} & 1 \text{ choix}
\end{array}$$

Ce nombre est $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$. Une application bijective de A vers A est aussi appelée une *permutation* de A.

Nombre de parties de A ayant pour cardinal p (Coeff. binomiaux, combinaisons)

On dénombre l'ensemble des parties de A comportant p éléments par une valeur notée $\binom{n}{p}$.

$$\begin{array}{cc}
\text{Choix pour le } 1^{\text{er}} \text{ élément :} & n \text{ choix} \\
\text{Choix pour le } 2^{\text{e}} \text{ élément :} & n-1 \text{ choix} \\
\ldots & \ldots \\
\text{Choix pour le } p^{\text{e}} \text{ élément :} & n-p+1 \text{ choix}
\end{array}$$

Mais il n'y a pas d'ordre dans une partie $\Rightarrow$ il faut diviser par le nb d'ordre possible $p!$. Puis on arrange pour avoir une "jolie fraction".

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \mathcal{C}_n^p$$

Parfois appelé *combinaison* de p éléments d'un ensemble à n éléments et noté $\mathcal{C}_n^p$.

Formule du binôme

$$(x+y)^n = x^n + n * x^{n-1}y + \ldots + y^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(x+y)^4 = & \binom{4}{0}x^4y^0 & + & \binom{4}{1}x^3y^1 & + & \binom{4}{2}x^2y^2 & + & \binom{4}{3}x^1y^3 & + & \binom{4}{4}x^0y^4 \\
& x^4 & + & 4x^3y & + & 6x^2y^2 & + & 4xy^3 & + & y^4
\end{array}$$

On rappelle que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. Mais on peut partitionner $\mathcal{P}(A)$ en les parties comportant 0 éléments, les parties à 1 élément, ..., les parties à n éléments. D'où la formule :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Nombre d'applications injectives de B vers A (Arrangement)

On dénombre l'ensemble des applications injectives de B vers A par un principe multiplicatif simple. Chaque injection de B vers A est une manière d'ordonner p objets de A, c.-à-d. d'obtenir une liste ordonnée de p objets choisis dans A. La question revient donc à combien de listes ordonnées différentes ?

1. On choisit chaque élément au fur et à mesure :

$$\begin{array}{cc} \text{Choix pour le } 1^{\text{er}} \text{ élément :} & n \text{ choix} \\ \text{Choix pour le } 2^{\text{e}} \text{ élément :} & n-1 \text{ choix} \\ \dots & \dots \\ \text{Choix pour le } p^{\text{e}} \text{ élément :} & n-p+1 \text{ choix} \end{array}$$

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} = \mathcal{A}_n^p$$

2. On choisit un lot de p élément dans A, il y a $\binom{n}{p}$ lots possibles, puis on les ordonne, il y a $p!$ manières d'ordonner chaque lot :

$$\binom{n}{p} \times p! = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times p! = \frac{n!}{(n-p)!} = \mathcal{A}_n^p$$

Parfois appelé *arrangement* de p éléments d'un ensemble à n éléments et noté $\mathcal{A}_n^p$.

Principe des tiroirs/cages à pigeons/ ...

$\lceil x \rceil \in \mathbb{N}$ désigne la partie entière supérieure de $x \in \mathbb{Q}$.

1. Si $n > p$ alors il n'existe pas d'injection de A vers B. On a déjà vu ce résultat sous une forme positive.

   En d'autre termes : prenons A un ensemble de chaussettes et B on ensemble de tiroirs, alors « si on veut ranger n chaussettes dans p tiroirs », et si on veut de plus que chaque « chaussette » soit dans un tiroir différent, en fait on veut construire une application injective de A vers B. Quand $n > p$ c'est impossible.

2. $n = p + 1$ « Si p tiroirs sont occupés par $p + 1$ chaussettes, alors au moins un tiroir contient au moins 2 chaussettes »

   Plus formellement, soit $f \; : C \longrightarrow T$, avec $|T| = p, |C| = n = p + 1$, alors il existe $t \in T$ tel que $|f^{-1}(\{t\})| \geqslant 2$.

3. Plus généralement, $n = p.q + r, 0 \leqslant r < p$. Si p tiroirs sont occupés par n objets, alors il existe au moins un tiroir qui contient $\lceil n/p \rceil$ objets. (Attention quand $r \neq 0$, $\lceil n/p \rceil = q + 1$).