# TD2 - Sémantique

Logique Propositionnelle - HAI304I

**Exercice 1** Soit les formules bien formées $A = p \wedge (\neg q \Rightarrow q \Rightarrow p)$ et $B = p \vee q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

1. Soit $I$ une interprétation. Déterminez (si c'est possible) $val(A, I)$ et $val(B, I)$ dans chacun des 4 cas suivants :
   (a) on sait que $I(p) = 0$ et $I(q) = 1$ ;
   (b) on sait que $I(p) = 1$ et $I(q) = 0$ ;
   (c) on sait que $I(p) = 0$ ;
   (d) on sait que $I(q) = 1$ ;
   (e) on ne sait rien sur $I(p)$ et $I(q)$.
2. Les fbf $A$ et $B$ sont-elles satisfiables ? Valides ?
3. L'ensemble $\{A, B\}$ est-il consistant ?

**Exercice 2** La sémantique d'une formule est déterminée par celle des symboles propositionnels qui la composent. Combien d'interprétations différentes peut-on donner aux symboles propositionnels de chaque formule suivante. Pour chacune d'elles, donnez la valeur de vérité de la formule et dites à quelle classe de formules elle appartient (valide, contingente, insatisfiable). Il est conseillé de construire la table de vérité de chaque formule.

$p \vee \neg p$
$p \wedge p$
$p \wedge \neg p$
$(p \Rightarrow \neg\neg p) \wedge (\neg\neg p \Rightarrow p)$

$p \vee q \vee \neg q$
$\neg p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$
$\neg(p \vee q) \vee (r \Rightarrow p \Rightarrow q)$

**Exercice 3** Dites si les formules suivantes sont valides, insatisfiables ou contingentes :

$p \Rightarrow q \Rightarrow p$
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
$p \wedge q \Leftrightarrow p \Rightarrow \neg q$

$\neg p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge \neg r \vee \neg q \wedge \neg r$
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$

**Exercice 4** Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Si vous pensez qu'elles sont justes prouvez-les, sinon exhibez un contre-exemple.

1. si une formule est contingente, sa négation l'est également ;
2. si $G$ et $H$ sont 2 formules contingentes, alors $G \vee H$ et $G \wedge H$ sont 2 formules contingentes ;
3. si $G \vee H$ est insatisfiable alors $G$ et $H$ sont 2 formules insatisfiables ;
4. si $G \vee H$ est valide alors $G$ et $H$ sont 2 formules valides.

**Exercice 5** Le connecteur $\vee$ correspond au « ou inclusif ». Nous n'avons pas introduit de connecteur pour exprimer le "ou exclusif".

1. Proposez une fonction de $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ définissant la sémantique d'un tel connecteur.
2. Quelles formules de la logique des propositions correspondent à ce connecteur c'est-à-dire ont la même sémantique que "p ou exclusif q" ?
3. Mêmes questions avec le connecteur ternaire "si p alors q sinon r" dont la sémantique est celle de l'expression conditionnelle correspondante des langages de programmation.

**Exercice 6** Pour chaque couple de formules suivantes, dites si elles sont « sémantiquement équivalentes » (c'est-à-dire si leurs valeurs de vérité sont égales quel que soit l'interprétation des symboles propositionnels) :

| | |
|---|---|
| $p$ **et** $\neg\neg p$ | $(q \Rightarrow p) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)$ **et** $p \Leftrightarrow q$ |
| $p \vee \neg\bot$ **et** $\top$ | $p \wedge \neg(q \wedge r)$ **et** $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$ |
| $p \Rightarrow q$ **et** $\neg p \vee q$ | $p \wedge \neg p$ **et** $q \wedge \bot$ |
| $\neg q \Rightarrow p$ **et** $\neg(p \vee q)$ | $p \Rightarrow \bot$ **et** $\neg p \wedge \top$ |
| $p \Rightarrow \neg q$ **et** $\neg(p \wedge q)$ | $p \wedge (q \vee \neg q)$ **et** $\neg p$ |
| $(q \Rightarrow p) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)$ **et** $p \Leftrightarrow q$ | $p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q \vee p \wedge s \wedge \neg p$ |
| $\neg(p \vee q)$ **et** $\neg p \vee \neg q$ | **et** $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s \vee r) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)$ |

**Exercice 7** En vous aidant des formulaires d'équivalence donnés en cours, associez chaque formule de gauche à sa formule sémantiquement équivalente de droite :

| | |
|---|---|
| $(a \wedge b) \Rightarrow c$ | $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$ |
| $(a \vee b) \Rightarrow c$ | $(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$ |
| $a \Rightarrow (b \wedge c)$ | $(a \Rightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$ |
| $a \Rightarrow (b \vee c)$ | $(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c)$ |

**Exercice 8** Donnez des fbf dont la sémantique correspond aux tables de vérité suivantes. Pour chacune de ces tables combien y a t-il de fbf possibles ?

| **p** | **q** | $F_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| **p** | **q** | **r** | $F_2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| **p** | **q** | **r** | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**Exercice 9** Dans cette exercice, on souhaite montrer que deux connecteurs sont suffisants pour écrire n'importe quelle fonction booléenne.

1. Pour chacune des formules suivantes, proposez une formule sémantiquement équivalente, n'utilisant que des symboles propositionnels et les connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$ :
$$p \vee q\ ,\ \ p \wedge q\ ,\ \ \bot\ ,\ \ \top\ ,\ \ p \vee q \Leftrightarrow r \wedge \neg s$$
2. Démontrez par induction structurelle que pour toute formule bien formée $F$, il existe une formule bien formée $F'$ sémantiquement équivalente à $F$ et n'utilisant dans sa syntaxe que des symboles propositionnels et les connecteurs logiques $\neg$ et $\Rightarrow$.

Vous pouvez également faire cet exercice avec les connecteurs $\neg$ et $\wedge$. Avec $\neg$ et $\vee$. Ou avec $\Rightarrow$ et $\bot$.

**Exercice 10** Et même avec un seul connecteur...
Soit le connecteur `nand` défini par $(a \texttt{ nand } b) \equiv \neg(a \wedge b)$.

1. Quelle formule n'utilisant que ce connecteur `nand` permettant d'avoir la même sémantique que la formule $p \Rightarrow q$ ?
2. Démontrez que toute formule bien formée est équivalente à une formule n'utilisant que `nand` et des symboles propositionnels.

Vous pouvez également faire cet exercice avec le connecteur `nor` défini par $(a \texttt{ nor } b) \equiv \neg(a \vee b)$.

**Exercice 11** A l'aide des tables de vérité, dites si les conséquences logiques qui suivent sont avérées ou non :

$p \Rightarrow q \models q$

$p \Rightarrow q, \neg q \models p$

$p \Rightarrow q, \neg q \models \neg p$

$q \vee p \wedge r \models r \Rightarrow q$

$r \vee p \Rightarrow q \models \neg p \vee q$

**Exercice 12** Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F} = \{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r,\ p \vee \neg r\}$.

1. Dites si $\mathcal{F}$ a pour conséquence logique $r$.
2. Dites si $\mathcal{F}$ a pour conséquence logique $\neg r$.

**Exercice 13** Soit l'ensemble de formules $\mathcal{F} = \{p \Rightarrow q,\ \neg(p \Rightarrow r),\ \neg r \Rightarrow \neg q\}$. Pour chacune des formules suivantes, dites si $\mathcal{F}$ a pour conséquence logique cette formule : $p$, $\neg p$, $s$, $\perp$.

**Exercice 14** Dites si chacune des conséquences logiques suivantes sont avérées ou non :

$\top \models \top$

$\top \models p$

$\top \models \perp$

$\perp \models \perp$

$\perp \models \top$

$\perp \models p$

**Exercice 15** Dites si les conséquences logiques suivantes sont justes ou fausses :

$p \Rightarrow q \vee r,\ q \Rightarrow r \Rightarrow s,\ \neg s \models \neg p$

$\neg(q \wedge \neg r) \wedge (p \Rightarrow q \vee r \wedge \neg p) \models \neg(r \Rightarrow s) \vee \neg p \vee r \wedge s$

$p \Rightarrow q,\ r \wedge s \Rightarrow p,\ t \Rightarrow r,\ s \wedge t \models q$

$p \Rightarrow q,\ r \vee s, t \Leftrightarrow r, \neg s \wedge p \models \neg(q \Rightarrow t)$

**Exercice 16** Démontrez que si $F_1, F_2, \ldots F_n \models C$ alors $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots F_n \wedge \neg C$ est une fbf insatisfiable.

**Exercice 17** Démontrez que si $P \models Q$ et $Q \models P$ alors $P \Leftrightarrow Q$ est une fbf valide.