De la combinatoire aux graphes (HLIN201) – L1

Définitions inductives et preuve par inductions structurelles

Sèverine Bérard

Université de Montpellier

2^{e} semestre 2017-18

Sommaire

Sommaire

Introduction

- Il est très fréquent en informatique de définir inductivement des ensembles
- En particulier, bon nombre de structures de données peuvent-être définies de la sorte.
- Intuitivement, la définition inductive d'une partie E d'un ensemble $\mathcal{U}$ consiste
  1. en la donnée explicite de certains éléments de l'ensemble E : *la base*
  2. et de moyens de construire de nouveaux éléments de E à partir d'éléments de E déjà connus : *les règles*
- Les règles sont des fonctions

Les définitions qui suivent peuvent paraître compliquées mais le principe est très simple, très intuitif !

Définition

Un ensemble $E \subseteq \mathcal{U}$ est défini inductivement

1. par la donnée de sa base : un ensemble $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$
2. et par un ensemble $\Omega = \Omega_i \cup \Omega_e$ de règles

Les règles

L'ensemble de règles peut être divisé en deux sous-ensembles (l'un des deux pouvant être vide)

1. Ω_i contenant les règles de construction internes
2. Ω_e contenant les règles de construction externes
   Pour ces dernières, on utilise des éléments d'autres ensembles définis par ailleurs

Plus formellement

Soient $K_1, \ldots, K_p \subseteq \mathcal{U}$ des ensembles parfaitement définis

Définition inductive d'un ensemble E

1. *(Base)* $\mathcal{B} \subseteq E$
2. *(Règles de construction internes)* Pour chaque règle $f_i \in \Omega_i$ d'arité n et pour chaque n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$:
   $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in E$
3. *(Règles de construction externes)* Pour chaque règle $f_e \in \Omega_e$ d'arité n définie de $K_1 \times \ldots \times K_p \times E \times \ldots \times E$ dans E ($p < n$) et pour chaque n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in K_1, \ldots, x_p \in K_p, x_{p+1} \in E, \ldots, x_n \in E$:
   $f_e(x_1, \ldots, x_n) \in E$

E est le plus petit ensemble vérifiant ces trois propriétés

Exemple

L'ensemble $Pair \subseteq \mathbb{N}$

1. *(Base)* $\{0\}$
2. *(Règle)* si $p \in Pair$ alors $p + 2 \in Pair$

Remarques

- La base ne contient qu'un seul élément
- Il y a une seule règle, c'est une règle de construction interne
- que l'on pourrait définir plus formellement comme
$$\mathbf{r} : \begin{array}{ccc} Pair & \longrightarrow & Pair \\ p & \longmapsto & p+2 \end{array}$$
- $\mathbb{N} \setminus \{1\}, \mathbb{N} \setminus \{1,3\}, \mathbb{N} \setminus \{1,3,5\}, \ldots$ vérifient aussi les 3 propriétés de la définition, mais *Pair* est le plus petit d'entre eux :
$Pair \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $Pair \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1,3\}$, $Pair \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1,3,5\}, \ldots$

D'autres ensembles définis par induction

- Soit A un ensemble de lettres appelé alphabet
- On définit A^* le monoïde libre sur A, l'ensemble des mots de A
- On note $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ le mot $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Sa longueur est $|u| = n$
  Le mot de longueur 0 est noté ϵ
- L'opération du monoïde est la concaténation notée $.$ telle que $(a_1, \ldots, a_n).(b_1, \ldots, b_p) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p)$.

Définition inductive du monoïde A^*

- *(Base)* $\{\epsilon\} \cup A$
- *(Règle)* $\forall u, v \in A^* : u.v \in A^*$

Exemple avec $A = \{c, o, u\}$

- La base de $\{c, o, u\}^*$ est $\{\epsilon, c, o, u\}$
- Des exemples de mots dans $\{c, o, u\}^*$: ϵ, *c*, *o*, *u*, *co*, *cou*, *coucou*
  mais aussi *ccccccc*, *coco*, *cuocuoooccuocucocuco* et bien d'autres

D'autres ensembles définis par induction

- Soit *Listes* l'ensemble des listes d'entiers, vu au semestre 1
- Une liste l est soit vide soit un n-uplet d'entiers
  c.-à-d. $l = \mathtt{Vide}$ ou $l \in \mathbb{N}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$
- $\mathtt{consL}$ est l'opérateur de construction des listes :
  $$\mathtt{consL} : \mathbb{N} \times \textit{Listes} \longrightarrow \textit{Listes}$$
  $\mathtt{consL}(\mathtt{p}, \mathtt{L})$ ajoute l'entier p en tête de la liste L
  Ex : $\mathtt{consL}(3, [1, 2]) = [3, 1, 2]$

Définition inductive de *Listes*

- *(Base)* $\{\mathtt{Vide}\}$
- *(Règle)* $\forall L \in \textit{Listes}, \forall p \in \mathbb{N} : \mathtt{consL}(\mathtt{p}, \mathtt{L}) \in \textit{Listes}$

Remarques

- Une seule règle de construction, externe
- *Listes* contient *toutes* les listes d'entiers

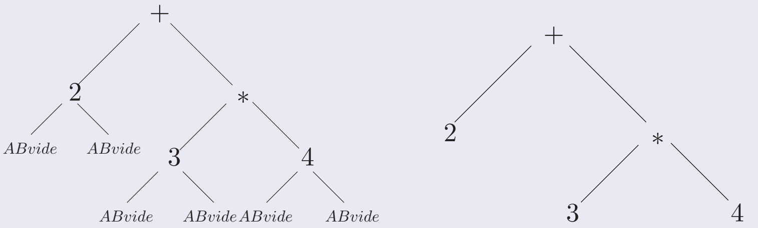
D'autres ensembles définis par induction

L'ensemble ArbreBin des arbres binaires étiquetés sur un alphabet $\mathcal{A}$ est défini inductivement par :

- *(Base)* $\{ABvide\}$
- *(Règle)* $\forall e \in \mathcal{A}, \forall g, d \in \text{ArbreBin} : (e, g, d) \in \text{ArbreBin}$

Exemple avec $\mathcal{A} = \{+, -, *, /\} \cup \mathbb{N}$

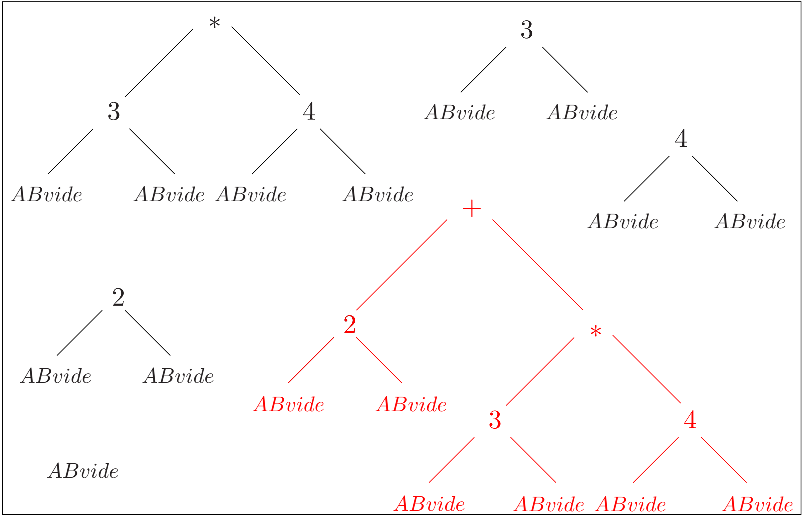
Soit $A = (+, (2, ABvide, ABvide), (*, (3, ABvide, ABvide), (4, ABvide, ABvide)))$ un arbre binaire qu'on représente graphiquement comme suit



Séquence de construction de l'exemple précédent

$\mathcal{A}$ $\{+, *, -, /, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$ArbreBin$



Sommaire

Fonctions définies inductivement

Définition

Soit $E \subseteq \mathcal{U}$ un ensemble défini *[de façon non ambiguë]** par induction à partir de $(\mathcal{B}, \Omega)$

On définit une fonction $\phi : E \longrightarrow F$ par induction avec :

- la valeur de $\phi(x) \in F$ pour chaque $x \in \mathcal{B}$
- pour chaque règle f d'arité n de Ω, $\phi(f(x_1, \ldots, x_n))$ est une valeur qu'on exprime en fonction de $x_1, \ldots, x_n, \phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)$

* Intuitivement cela signifie qu'il n'existe qu'une seule façon de construire un élément $e \in E$

Exemples : 3 fonctions définies par induction

La longueur d'un mot de A^*

- $|\epsilon| = 0$; $a \in A : |a| = 1$
- $\forall m_1, m_2 \in A^* : |m_1.m_2| = |m_1| + |m_2|$

La hauteur d'un arbre binaire étiqueté sur $\mathcal{A}$

- $h(ABvide) = 0$
- $e \in \mathcal{A}, g, d \in \text{ArbreBin} : h((e, g, d)) = 1 + max(h(g), h(d))$

Son nombre de sous-arbres non vides d'un arbre

- $nbssab(ABvide) = 0$
- $e \in \mathcal{A}, g, d \in \text{ArbreBin} : nbssab((e, g, d)) = 1 + nbssab(g) + nbssab(d)$

Rmq : un arbre est sous-arbre de lui-même

Sommaire

Introduction

Les preuves par induction structurelle généralisent le principe de preuve par récurrence sur les entiers

$\mathbb{N}$ est d'ailleurs un ensemble défini par induction :

- *(Base)* $\{0\}$
- *(Règle)* si $n \in \mathbb{N}$ alors $n + 1 \in \mathbb{N}$

Les preuves par induction structurelle se calquent sur la définition par induction de l'ensemble, d'où "preuve par induction structurelle"

Preuve par induction structurelle

Soit E un ensemble défini par induction à partir de $(\mathcal{B}, \Omega)$
Soit $P : E \longrightarrow$ Booléen la propriété que l'on veut démontrer

Pour montrer que $P(x)$ est vraie pour chaque élément de E, il suffit de prouver

1. $\forall x \in \mathcal{B} : P(x)$ est vraie
2. Pour chaque règle interne $f_i \in \Omega$ d'arité n définie de E^n dans E et pour chaque $x_1, \ldots, x_n \in E$:
   si $P(x_1), \ldots, P(x_n)$ sont vraies alors $P(f_i(x_1, \ldots, x_n))$ est vraie.
3. Pour chaque règle externe $f_e \in \Omega$ d'arité n définie de $K_1 \times \ldots \times K_p \times E \times \ldots \times E$ dans E ($p < n$), pour chaque $(x_1, \ldots, x_p)$ dans $K_1 \times \ldots \times K_p$ et pour chaque $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ dans E^{n-p} :
   si $P(x_{p+1}), \ldots, P(x_n)$ sont vraies, alors $P(f_e(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n))$ est vraie.

Autrement dit, si P est vraie pour chaque élément de la base et si P est conservée par l'application des règles, alors P est vraie pour tous les éléments de l'ensemble

Exemple

Problème

Soit $AB \in \text{ArbreBin}$

Soient

- $h = hauteur(AB)$, la lg d'un plus long chemin de la racine à une feuille
- $n = nbssab(AB)$, le nombre de sous–arbres non vides de AB

Prouver que $h \leqslant n$

Rappel

L'ensemble ArbreBin des arbres binaires étiquetés sur un alphabet $\mathcal{A}$ est défini inductivement par :

- *(Base)* $\{ABvide\}$
- *(Règle)* $\forall e \in \mathcal{A}, \forall g, d \in \text{ArbreBin} : (e, g, d) \in \text{ArbreBin}$

Démonstration

Soit $P(a) =$ "$hauteur(a) \leqslant nbssab(a)$"

1. **Base** Montrons que le propriété est vraie pour l'élément de la base : $hauteur(ABvide) = 0$ et $nbssab(ABvide) = 0$, on a bien $hauteur(ABvide) \leqslant nbssab(ABvide)$. $P(ABvide)$ est donc vraie

2. **Règle** Soient les arbres g et $d \in ArbreBin$ de hauteurs h_1, h_2 avec un nombre de sous–arbres n_1, n_2.
   Supposons que $P(g) = P(d) =$ vrai, montrons que $P(A)$ vraie quelque soit $A = (e, g, d)$:
   - pour tout arbre $A = (e, g, d)$, sa hauteur est $h = max(h_1, h_2) + 1$, et son nombre de sous-arbres non vides est $n = n_1 + n_2 + 1$
   - et comme $n_1 \geqslant h_1$ et $n_2 \geqslant h_2$
   - on a bien $n \geqslant h_1 + h_2 + 1 \geqslant max(h_1, h_2) + 1 = h$ c.-à-d. $P(A)$ vraie

Par le principe d'induction structurelle, on a $P(A)$ vraie, $\forall A \in ArbreBin$