Algèbre linéaire et calcul matriciel

(HAI406 – Année universitaire 2021–2022)

Feuille d'exercices N°2

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées ? Échelonnées réduites ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 14 \\ 7 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 6 & 1 & 7/8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{7} & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -567 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 2. On considère le système dont la matrice augmentée est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) Le système n'a pas de solution.
(b) Le système a exactement une solution.
(c) Le système a une infinité de solutions.
(d) Le système a exactement deux solutions.

Question 3. Dans cette question, le symbole « $*$ » désigne un réel quelconque et le symbole « $\blacksquare$ » désigne un réel *non nul* quelconque. On suppose que chacune des matrices suivantes représente la matrice augmentée d'un système linéaire. Déterminez, dans chaque cas, si le système est compatible, et si oui, s'il admet une unique solution.

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}$$

Question 4. Vrai ou faux ?

(a) Un système compatible ayant des variables libres a une infinité de solutions.
(b) Si la dernière colonne de la matrice augmentée d'un système, supposée échelonnée réduite, est non nulle, alors le système n'a pas de solutions.
(c) Si la matrice des coefficients d'un système, supposée échelonnée, a des coefficients dominants dans toutes ses colonnes sauf exactement une, alors l'ensemble des solutions est une droite affine.
(d) Si la matrice des coefficients d'un système est carrée, alors le système soit n'a pas de solutions, soit a une et une seule solution.
(e) Si une matrice augmentée comprend la ligne $(0\ 0\ 0\ 0\ 5\ 0)$, alors le système associé est incompatible.

2. Travaux dirigés

Exercice 1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$

Exercice 2. Déterminer pour quels $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ le système suivant a des solutions, et dans ce cas, le résoudre :

$$\begin{cases} x - 2z + 3t = a \\ -x - y + z - 2t = b \\ 2x + 7y + 3z - t = c \\ x + 2y + t = d \end{cases}.$$

Exercice 3. Le sous-espace vectoriel engendré par $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ contient-il le vecteur $W = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Exercice 4. Donner une description paramétrique du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Donner un système d'équations qui caractérise ce sous-espace.

3. Révisions et approfondissement

Exercice 5 (Contrôle continu, octobre 2014). Pour quels $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, resp. $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, les systèmes suivants ont-il des solutions ? Dans ces cas, les résoudre.

$$\begin{cases} x+y-2z+t=a \\ 2x+y-z+3t=b \\ x-2y+7z+4t=c \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} 3x+y-5z-t=a \\ 4x+3y+2z+9t=b \\ 2x+y-3z=c \\ -x+2z+t=d \end{cases} \quad .$$

Exercice 6. On considère un système de n équations en p variables, avec $p > n$. Montrer que le système soit n'a aucune solution, soit en a une infinité.

Exercice 7. Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x+3y+z &= 2 \\ -4x+7y-z &= 3 \\ 8x-y+3z &= 1 \end{cases}$.

Exercice 8. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Démontrer l'assertion :

$$\forall X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (X \in F) \Leftrightarrow a+b-3c=0\,.$$

Exercice 9. Vrai ou faux ?

(a) Un système compatible ayant des variables libres a une infinité de solutions.

(b) Si un système a une seule variable libre, alors l'ensemble des solutions est une droite affine.

Défi. Un carré magique de dimension n est un tableau carré de taille $n \times n$ dont les entrées sont les nombres entiers compris entre 1 et n^2 et tel que la somme des entrées de chaque colonne, ligne, ou diagonale est la même.
1) Montrer que dans un carré magique de côté n, la somme S_n de chaque ligne, colonne et diagonale est $n(n^2+1)/2$.
2) Existe-t-il des carrés magiques de dimension 2 ? et des carrés magiques de dimension 3 ? de dimension 4 ? de dimension n ? (il pourra être utile d'écrire un système d'équations).