Equa diff 1

HLMA203
Équations différentielles

Définition: Une équation différentielle, c'est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir les dérivées successives de la fonction

Exemple: $y' = y \quad (E)$

Quand (E) ne fait intervenir que la dérivé n-ième (ici, première) on dit que (E) est d'ordre n.

Newton: "Les lois de la nature s'expriment par des équations différentiels"

Exemple: Force = masse × accélération (position)''

Définition: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b : I \to \mathbb{R}$ continue, (des fonctions)

l'équation linéaire de coefficients $a_n, \dots, a_0$ et de second membre b.

$(E)\ \forall x \in I,\ a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x)$

Cas particulier: Si le second membre b est nul, on parle d'équation homogène.

On peut toujours associé une équation homogène E_0 à E.

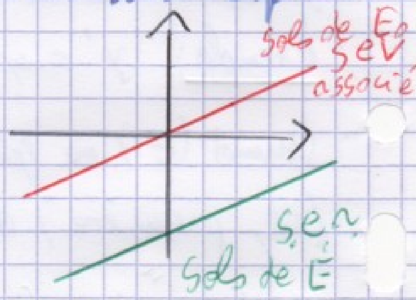
$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \dots + a_0(x)\, y(x) = 0. \quad (E_0)$

Equa diff 2

Théorème (Cas particulier de Cauchy-Lipschitz)

L'ensemble S_0 des solutions de (E_0) est un s.e.v. de $\mathbb{R}^I$ (fonctions de I dans $\mathbb{R}$) de dim. n.
(en particulier si il est non-vide)

L'ensemble S des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^I$, dirigé par le s.e.v. S_0



Conséquence pratique de la dimension

Supposons $x_0 \in I$. Alors $\forall (a_0, \dots a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$
Il existe une unique solution de y de E_0 telles que

$$\begin{aligned} y(x_0) &= a_0 \\ y'(x_0) &= a_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= a_{n-1} \end{aligned}$$

Cas particulier : Si E_0 est d'ordre 1, toute solution est déterminé par sa position initiale.

Si E_0 est d'ordre 2, toute solution est déterminé par sa position et sa vitesse initiales.

Conséquence du fait que S est un s.e.a. dirigé par le s.e.v. S_0

Si on sait résoudre E_0 (si je connais toutes les solutions S_0), et qu'on connait une solution y_E de E, alors on connait toutes les solutions de E : ce sont les fonctions de la forme $y + y_E$ avec $y \in S_0$.

Exemple : $y'(x) = b(x)$ (E). Les solutions de E sont les primitives de b. Supposons qu'on connaisse une primitive B de b. Alors, les solutions de (E), les primives de b, sont les fonctions de la forme $\underbrace{B}_{y_E} + \underbrace{cte}_{\text{sols de } E_0 : y' = 0}$.

Equa diff 3

I) Equation différentiel linéaire d'ordre 1

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma : I \to \mathbb{R}$ continues.
et α ne s'annule pas sur I, $\alpha(x) \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l}(E)\ \alpha(x)\,y'(x) + \beta(x)\,y(x) = \gamma(x) \\ (E_0)\ \alpha(x)\,y'(x) + \beta(x)\,y(x) = 0\end{array}\right\}\ \forall x \in I.$$

Cas particulier homogène à coef constants

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\qquad ay' + by = 0\ (E_0)$,

($P(x) = aX + b$ polynôme caractéristique)

$y' = -\frac{b}{a}y \qquad y(x) = C e^{-\frac{b}{a}x}$ sont les solutions.

$$\left(\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow (\ln|y|)' = \frac{-b}{a} \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{-b}{a}x + \lambda \Leftrightarrow |y| = e^{\lambda}.e^{-\frac{b}{a}x} = C.e^{-\frac{b}{a}x}\right)$$

Les solutions forment une droite vectorielle engendré par la fonction $x \mapsto e^{-\frac{b}{a}x}$.

Théorème

L'ensemble des solutions de E_0 est

$$\left\{x \mapsto C \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{-\beta(x)}{\alpha(x)}dt\right) \Big/ C \in \mathbb{R}\right\} \qquad \left(\text{dérivé en } x_0 \text{ de } \frac{-\beta(x)}{\alpha(x)}\right)$$

$*$

$\alpha(x)\,y'(x) + \beta(x)y(x) = 0 \longrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$

$\to (\ln|y(x)|)' = \frac{-\beta(x)}{\alpha(x)}$ donc si on connait une primitive B de $-\frac{\beta}{\alpha}$, alors $y(x) = C\exp(B(x))$.

Equa diff - 4

Méthode de Lagrange

Pour résoudre l'équation non-homogène (E) :
On cherche des solutions de la forme $C(x) \exp\Big(\underbrace{-\int_{x_0}^{x} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt}_{B(x)}\Big)$

→ On fait varier la constante C.

Prenons $y(x) = C(x) \exp(B(x))$

$\alpha y'(x) + \beta y(x) = \,?$

$$y'(x) = C'(x) \exp(B(x)) + C(x) B'(x) \exp(B(x))$$
$$= \exp(B(x)) . \left(C'(x) - C(x) \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)$$

$$\alpha y' + \beta y = \exp(B(x)) . (\alpha C'(x) - \cancel{\beta C(x)} + \cancel{\beta C(x)})$$
$$= \alpha(x) \exp(B(x)) C'(x)$$

donc $(E) \Leftrightarrow \alpha(x) \exp(B(x)) C'(x) = \gamma(x)$
$$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{\gamma(x)}{\alpha(x) \exp(B(x))}$$

donc les solutions de E sont les fonctions de la forme $C(x) \exp(B(x))$, où B est une primitive $\frac{-\beta}{\alpha}$ et C une primitive de $\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} \exp(-B(x))$

Exemples : $y' + y = 1 \quad (E)$

1°/ On résout l'équation homogène (E_0) associée :
$y' + y = 0 \quad , \quad y(x) = C e^{-x}$

2°/ On fait varier C : on cherche des solutions de la forme $y(x) = C(x) e^{-x}$.
alors $y'(x) = C'(x) e^{-x} - C(x) e^{-x}$
donc $y'(x) + y(x) = C'(x) e^{-x} - \cancel{C(x)} e^{-x} + \cancel{C(x)} e^{-x}$

donc y est solution ssi $C'(x) e^{-x} = 1 \Leftrightarrow C'(x) = e^{x}$
$$\Leftrightarrow C(x) = e^{x} + \lambda \Leftrightarrow y(x) = (e^{x} + \lambda) e^{-x} = \underbrace{1}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-x}}_{\text{généralisation de la solution}}$$

Equa diff 5

Remarque : La solution particulière ressemble au second membre. Il est parfois mieux de chercher directement une solution particulière "qui ressemble au second membre" que de faire varier la constante.

Exemple : $y' + y = x^2 + x$

On cherche une solution particulière qui soit un polynôme de degré 2.

$y(x) = ax^2 + bx + c \qquad y'(x) = 2ax + b$

$y + y' = ax^2 + bx + c + 2ax + b$

$\quad = ax^2 + (2a+b)x + b + c = x^2 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2 polynômes sont égaux $\Leftrightarrow$ leurs coefficients sont égaux

donc $a = 1$, $2a + b = 1$, $b + c = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ 2a+b = 1 \\ b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc on sait que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x^2 - x + 1 + Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

II) Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

1°/ Cas homogène

Soient $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$

Soit $E = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (E_0)$

Définition :

On appelle polynôme caractéristique de cette équation :

$P(x) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0. \qquad (k \leq n)$

Supposons que les racines complexes de P sont : $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; $\alpha_j = a_j + ib_j$ pour $j = 1 \dots n$ et soit m_j la multiplicité de α_j $\left(\sum_{j=1}^{k} m_j = n \right)$.

Equa diff 6.

Théorème :

Les solutions de (E_0) sont les combinaisons linéaires des fonctions $\begin{cases} \exp(a_j.x) \cos(b_j.x) P_j(x) \\ \exp(a_j.x) \sin(b_j.x) Q_j(x) \end{cases}$

Où les polynômes Q_j et P_j sont de degré inférieur à $m_j - 1$.

En particulier, lorsque P n'a pas de racines multiples, les solutions sont les combinaisons linéaires de $\exp(a_j.x).\cos(b_j.x)$ et $\exp(a_j.x).\sin(b_j.x)$ pour $j = 1, \dots, m$.

Quand les racines sont réelles, il n'y a pas de sin et cos !

Explications : $\exp(a_j + ib_j) = \exp(a_j x) \exp(ib_j x$

$= \exp(a_j x)(\cos(b_j x) + i \sin(b_j x))$

Cas particulier : Ordre 2.

Soit $y'' + ay' + by = 0 \longrightarrow P(x) = x^2 + ax + b = 0$

$\hookrightarrow \Delta = a^2 - 4b$

1er cas : $\Delta > 0$, 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2

$\rightarrow \mathcal{S} : \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \end{cases}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2nd cas : $\Delta < 0$, 2 racines complexes conjuguées, $a+ib$ et $a-ib$.

$\rightarrow \mathcal{S} : \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \sin(bx), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

3ème cas : $\Delta = 0$, une racine double $(m_j = 2)$, $r_0 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \mathcal{S} : \begin{cases} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{r_0 x}(C_1 x + C_2), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Equa diff 7

2°/ Cas non-homogène

$y'' + ay' + by = c$ (E) avec $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

Il s'agit de trouver une solution particulière, ensuite il n'y a qu'à rajouter les solutions de l'équation homogène.

On peut appliquer la variation de la constante mais c'est très lourd...

Plus pratique : Méthode de bricolage, on cherche une solution particulière de la même forme que le second membre

Exemples :

> Si second membre constant : on cherche une solution constante.

$y'' + ay' + by = c$, on cherche $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $bC_1 = c$

(si $b \neq 0$) $\Leftrightarrow C_1 = \frac{c}{b}$

Si $b = 0$: (E) $y'' + ay' = c$

On prend comme nouvelle inconnue $z = y'$.

(E) devient (E_z) : $z' + az = c$, on cherche $C_1 a = c$

$\Leftrightarrow C_1 = \frac{c}{a}$

Si $a = 0$: (E) $y'' = c$: les solutions sont les polynômes de degré 2 de la forme

$\frac{c}{2}x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Méthode direct :

(E) $y'' + ay' + by = c$. On cherche une solution de la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$\to y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$\to y'(x) = 2\alpha x + \beta$
$\to y''(x) = 2\alpha$

$\to y'' + ay' + b = c \Leftrightarrow 2\alpha + a(2\alpha x + \beta) + b(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$

$\Leftrightarrow b\alpha x^2 + (2\alpha a + \beta b)x + 2\alpha + a\beta + b\gamma$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b\alpha = 0 \\ 2\alpha a + \beta b = 0 \\ 2\alpha + a\beta + b\gamma = c \end{cases}$ système en α, β, γ

Equa diff 8

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & 0 & 0 & 0 \\ 2a & b & 0 & 0 \\ 2 & a & b & c \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & b & c \\ 2a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & b & c \\ 0 & b-a^2 & -ab & -ac \\ 0 & \frac{-ab}{2} & \frac{-b^2}{2} & \frac{-bc}{2} \end{array}\right) \text{ ect...}$$

> <u>Si le second membre est un polynôme</u> : On cherche une solution particulière qui soit un polynôme de même degré

<u>Ex</u> : $y''(x) + ay'(x) + by(x) = x + 1$

$\Rightarrow y = \alpha x + \beta$ donc $(E) \Leftrightarrow a\alpha + b\alpha x + b\beta = x + 1$

$\Rightarrow y' = \alpha$

$\Rightarrow y'' = 0$ donc $\begin{cases} b\alpha = 1 \\ a\alpha + b\beta = 1 \end{cases}$ si $b = 0$, Impossible ; si $b \neq 0$, $\alpha = 1/b$

donc $\beta = \frac{1}{b}(1 - a\alpha) = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{a}{b}\right)$

si $b = 0$, on cherche un degré 2

$y(x) = Ax^2 + Bx + C$ $\qquad y'' + ay' + by = 2A + a(2Ax + B)$

$y'(x) = 2Ax + B$ $\qquad = 2aAx + 2A + aB = c \ (b=0)$

$y''(x) = 2A$

$\begin{cases} 2aA = 0 \\ 2A + aB = c \end{cases}$ si $a \neq 0$ $\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{c}{a} \end{cases}$

si $a = 0$, on résout simplement $y'' = c$.

> <u>Si le second membre est une fonction trigonométrique</u>

(E) $y'' - 3y' + 2y = \cos(x)$ on cherche une solution particulière de la forme $A\cos(x) + B\sin(x)$

$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$

$y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$

$y''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$

$\Leftrightarrow -\cancel{A\cos(x)} - \cancel{B\sin(x)} + 3A\sin x - 3B\cos(x) + \cancel{2}A\cos(x) + \cancel{2}B\sin(x) = \cos(x)$

$\Leftrightarrow (A - 3B)\cos(x) + (3A + B)\sin(x) = \cos(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A - 3B = 1 \\ 3A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10A = 1 \\ B = -3A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/10 \\ B = -3/10 \end{cases}$ Solution particulière $= \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$.

Sol général $= C_1 e^{x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$.

Equa diffs d'ordre 2 à coeffs constants

(E) $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x)$ $a, b \in \mathbb{R}$

(E_0) $y'' + ay' + by = 0$ équation homogène associée

avec $x^2 + ax + b = 0$ équation caractéristique (car)

$\Delta = a^2 - 4b$

1er cas : $\Delta > 0$ r_1, r_2 solutions de (car)

$\rightarrow$ Solutions de $E_0 = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, $A, B \in \mathbb{R}$

2ème cas : $\Delta < 0$, $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$

$\rightarrow$ Sols de $E_0 = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$

3ème cas : $\Delta = 0$ r_0 solution de (car)

$\rightarrow$ Sols de $E_0 = e^{r_0 x}(Ax + B)$

Pour résoudre l'équation non-homogène (E) :
On cherche une solution particulière " qui ressemble " au second membre $c(x)$.

Exemple : $c(x) = e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1er cas : α n'est pas solution de (car)
on cherche une solution particulière de la forme $\lambda e^{\alpha x}$

(E) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

supposons $y(x) = \lambda e^{-x}$, $y'(x) = -\lambda e^{-x}$ et $y''(x) = \lambda e^{-x}$

$y'' - 3y' + 2y = \lambda e^{-x}(1+3+2) = 6\lambda e^{-x}$

donc y est solution de (E)

2ème cas : α est solution de (car)
on cherche une solution de la forme $e^{\alpha x}(Ax + B)$

$y'' - 3y' + 2y = e^{x}$. Supposons $y(x) = e^{x}(Ax + B)$, $y'(x) = e^{x}(Ax + B + A)$

$y''(x) = e^{x}(Ax + B + A + A)$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(\cancel{Ax} + \cancel{B} + \cancel{2A} - \cancel{3Ax} - \cancel{3B} - \cancel{3A} + \cancel{2Ax} + \cancel{2B})$$
$$= e^x(-A) \text{ donc } y \text{ est solution si } -A = 1$$
donc $-xe^x$ est solution de E

donc, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{x \mapsto Ae^x + Be^{2x} - xe^x \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

Cas particulier où le second membre est une somme (principe de superposition).

$y'' + ay' + by = c_1(x) + c_2(x)$.

on cherche une solution particulière y_1 de $y'' + ay' + by = c_1(x)$

et une solution particulière y_2 de $y'' + ay' + by = c_2(x)$

Alors, $y_1 + y_2$ est solution de $y'' + ay' + by = c_1(x + c_2(x))$

car $(y_1+y_2)'' + a(y_1+y_2)' + b(y_1+y_2)$

$= (y_1'' + ay_1' + by_1) + (y_2'' + ay_2' + by_2)$

<u>Ex</u> : $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$

on cherche une solution de $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

de la forme $\lambda x e^{2x} = y_2(x)$ et $y_2'(x) = e^{2x}(2\lambda x + \lambda)$

$y_2''(x) = \lambda e^{2x}(4x + 2 + 2) = 4\lambda e^{2x}(x+1)$

$$y_2''(x) - 3y_2'(x) + 2y_2(x) = \lambda e^{2x}(4(x+1) - 3(2x+1) + 2x)$$
$$= \lambda e^{2x}$$

donc y_2 est solution si $\lambda = 1$.

Donc, par le principe de superposition, $y(x) = -xe^x + xe^{2x}$ est solution de E donc $\text{Sol } E = \left\{\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^x + Be^{2x} + x(e^{2x} - e^x)\end{array}\right.$