HLMA101 - Partie A : Généralités

Chapitre 2
Démonstration et types de raisonnement

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2019-2020

Sommaire

Comment démontrer une assertion de la forme $\exists y \in E, Q(y)$?
Exemples : (a) $\exists s \in \mathbb{R}, 1 < s^2 < 2$ (b) $\exists \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta) = \frac{7}{8}$

Principe

On montre qu'au moins un élément de E vérifie la propriété Q :

- Soit en exhibant un tel élément (explicitement)
- Soit en utilisant d'autres théorèmes affirmant l'existence d'un élément qui vérifie la propriété Q, ou permettant de construire un élément de E vérifiant la propriété Q.

Exemples

(a) Posons $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. On a $y^2 = \frac{3}{2}$, donc $1 < y^2 < 2$. ∎

(b) La fonction sinus est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires (et comme $0 < \frac{7}{8} < 1$), il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\theta) = \frac{7}{8}$. ∎

Cas particulier : existence et unicité

On doit parfois démontrer l'existence d'un unique élément x vérifiant une certaine propriété P (noté parfois « $\exists! x \in E, P(x)$ »).

Il faut alors prouver d'une part l'existence (comme précédemment),
et d'autre part l'unicité : souvent, on prend deux éléments vérifiant la propriété et on montre qu'ils sont égaux.

Remarque

Autrement dit, on montre :
(1) $\exists x \in E, P(x)$ et
(2) $\forall x \in E, \forall y \in E, \quad (P(x) \wedge P(y)) \implies x = y$.

Vouloir démontrer tout à la fois entraîne souvent des erreurs !

Comment démontrer une assertion de la forme $\forall x \in E, P(x)$?
Exemple : $\forall r \in \mathbb{R}, (r^2+2)^2 \geqslant 4$

Principe

On prend un élément générique de E et on montre qu'il vérifie P.
On introduit cet élément par « Soit $x \in E$ » (ou une autre lettre).
On considère que cet élément générique ne vérifie que les propriétés communes à tous les éléments de E.
Ainsi, si on montre la propriété pour cet élément générique, elle est vraie pour tous les éléments.

Exemple

Soit $r \in \mathbb{R}$.
Montrons que $(r^2+2)^2 \geqslant 4$
On sait que $r^2 \geqslant 0$. *(Le carré d'un réel est toujours positif)*
Donc $r^2+2 \geqslant 2$.
Donc $(r^2+2)^2 \geqslant 4$
Donc $\forall r \in \mathbb{R}, (r^2+2)^2 \geqslant 4$ ∎

Comment démontrer une assertion de la forme $\forall x \in E, P(x)$?
Exemple : $\forall r \in \mathbb{R}, (r^2+2)^2 \geqslant 4$

Principe

On prend un élément générique de E et on montre qu'il vérifie P.
On introduit cet élément par « Soit $x \in E$ » (ou une autre lettre).
On considère que cet élément générique ne vérifie que les propriétés communes à tous les éléments de E.
Ainsi, si on montre la propriété pour cet élément générique, elle est vraie pour tous les éléments.

Exemple

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Montrons que $(t^2+2)^2 \geqslant 4$
On sait que $t^2 \geqslant 0$. *(Le carré d'un réel est toujours positif)*
Donc $t^2+2 \geqslant 2$.
Donc $(t^2+2)^2 \geqslant 4$
Donc $\forall r \in \mathbb{R}, (r^2+2)^2 \geqslant 4$ ∎

Utiliser une implication – raisonnement déductif

Au cours d'une démonstration, on veut montrer $Q(t)$ pour un $t \in E$ générique.
Si on sait que $\forall x \in E$, $P(x) \implies Q(x)$ (connu ou déjà prouvé), on peut démontrer $P(t)$ puis en déduire $Q(t)$.

Remarque

Modus Ponens : Si on a (A et $A \implies B$) alors B.

Exemple

Passage de $r^2+2 \geqslant 2$ à $(r^2+2)^2 \geqslant 4$ dans l'exemple précédent.
(On utilise, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $x \leqslant y \implies x^2 \leqslant y^2$).

Attention : Le fait que A soit vrai et le fait que $A \implies B$ soit vrai sont indépendants.

Démontrer une implication (universellement quantifiée)

Pour prouver $\forall x \in E,\ P(x) \implies Q(x)$, on prend un élément générique de E dont on suppose qu'il vérifie P (la prémisse) et on démontre qu'il vérifie Q (le conséquent).

Exemple

$\forall t \in \mathbb{R},\ t > 1 \implies t^3 > 1.$

Remarque

Attention, ceci est très différent du raisonnement déductif !
Démontrer une implication ≠ Utiliser une implication :
ex : $\forall t \in \mathbb{R},\ (t^2 = -1) \implies (t^2 + 3 \geqslant 0)$

$P(x) \implies Q(x)$

Pourquoi est-il est suffisant de se placer dans le cas : $P(x)$ vrai ?
Pourquoi on ne traite pas le cas où $P(x)$ est fausse ?

Table de vérité de l'implication

A	B	$A \implies B$
F	**F**	**V**
F	**V**	**V**
V	F	F
V	V	V

Vocabulaire

Dans la pratique des mathématiques, $A \implies B$ se dit aussi...
« Si A alors B », ou « A entraîne B » (attention sens courant)
A est une condition suffisante de B (il suffit d'avoir A pour avoir B)
B est une condition nécessaire de A (il est nécessaire d'avoir B pour avoir A, ie., sans B, impossible d'avoir A).

Quantification universelle bornée

On écrit parfois :« Pour tout entier naturel n tel que n impair, $P(n)$ » :
- on peut l'interpréter $\forall n \in \mathrm{I},\ P(n)$, en ayant posé I l'ensemble des entiers naturels impairs, ou
- $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ impair} \implies P(n))$.

On trouve aussi parfois dans les énoncés de théorèmes :
« Soit n un entier. Si n est impair alors $P(n)$. »

Quantification existentielle bornée

On écrit parfois :« Il existe un entier naturel n, impair, tel que $P(n)$ » :
- on peut l'interpréter $\exists n \in \mathrm{I},\ P(n)$, en ayant posé I l'ensemble des entiers naturels impairs, ou
- $\exists n \in \mathbb{N},\ (n \text{ impair} \wedge P(n))$.

Quantifications multiples

Exemple typique : $\forall \ldots \exists \ldots$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2 - 1$
Démonstration :
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. *Recherche au brouillon*
$x + 1$ est positif.
Posons $y = \sqrt{x+1}$.
y est bien dans $\mathbb{R}^+$, et $y^2 = x + 1$, donc $x = y^2 - 1$ ■

Conseils

- Qualité et précision de la rédaction
- On explique au lecteur ce que l'on fait, où l'on va
- On donne tous les détails pertinents
- On n'ajoute rien d'inutile (ou de redondant)

Au cours d'une démonstration...

... pour prouver $A(x) \wedge B(x)$

On démontre d'une part que x vérifie $A(x)$
et d'autre part qu'il vérifie $B(x)$.

Exemple

$\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 1,\quad \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$

... pour prouver $A(x) \vee B(x)$

On démontre que soit x vérifie $A(x)$, soit x vérifie $B(x)$.
On peut aussi démontrer que si x ne vérifie pas $A(x)$, il vérifie $B(x)$ $\quad$ (...ou l'inverse ...).

Exemple

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 > 0 \implies (x < -1 \text{ ou } x > 1)$

Au cours d'une démonstration...

... pour prouver $\neg(P(x))$

On peut prouver que $P(x)$ est fausse
ou formuler la négation de $P(x)$ et la prouver.

Rappel

La négation de $\forall x \in E,\ P(x)$ est $\exists x \in E,\ \neg(P(x))$

La négation de $\exists x \in E,\ P(x)$ est $\forall x \in E,\ \neg(P(x))$.

Au cours d'une démonstration...

... pour prouver $P(x) \iff Q(x)$

En général on prouve $P(x) \implies Q(x)$ et $Q(x) \implies P(x)$ séparément.
Cela doit apparaître clairement dans la rédaction.

Cas de plusieurs équivalences

Pour démontrer $P(x) \iff Q(x) \iff R(x)$, on peut démontrer circulairement :
$P(x) \implies Q(x)$ et
$Q(x) \implies R(x)$ et
$R(x) \implies P(x)$.

Conseils pour la rédaction

- Chercher au brouillon
- Bien choisir les noms des variables
- Bien dire qui est quoi avant d'en parler :
  ex : $\forall x \in E, P(x)$ ne veut pas dire qu'on peut parler de l'élément x !
- Annoncer où on en est, ce qu'on va faire, le type de raisonnement utilisé
- Faire des phrases en français, être propre
- Indenter, structurer en paragraphes
- Conclure (■), conclusions intermédiaires...
- Lire des preuves, travailler les preuves des cours et des livres.

Sommaire

Contraposition

On a vu que $A \implies B$ a la même table de vérité que $\neg(B) \implies \neg(A)$ (ou $\mathrm{non}(B) \implies \mathrm{non}(A)$).
Il est donc équivalent de prouver l'un où l'autre.
Par extension, pour démontrer $\forall x,\ P(x) \implies Q(x)$, il est équivalent de démontrer $\forall x \in E,\ \neg(Q(x)) \implies \neg(P(x))$.

Intuition
$\forall x \in E,\ P(x) \implies Q(x)$ signifie que pour tout x de E, si $P(x)$ est vrai, alors $Q(x)$ est nécessairement vraie.
Autrement dit, si $Q(x)$ est faux, on ne peut pas avoir $P(x)$ vrai, donc $\forall x \in E,\ \neg(Q(x)) \implies \neg(P(x))$.

Erreur fréquente
Confusion entre contraposée et réciproque.

Exemple :
$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (ab \neq 0) \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$
Démonstration :
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Soit $b \in \mathbb{R}$.
On raisonne par contraposition :
Supposons $a = 0$ **ou** $b = 0$.
Alors $ab = 0$.
Donc $\forall a \in R,\ \forall b \in R,\ (ab \neq 0) \implies (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$ ■

Remarque : Contraposée et équivalence
Pour démontrer $A \iff B$ on peut démontrer
$A \implies B$ et $\neg(A) \implies \neg(B)$.

Pour démontrer $\forall x \in E,\ P(x) \iff Q(x)$ on peut démontrer
$\forall x \in E,\ P(x) \implies Q(x)$ et $\forall x \in E,\ \neg P(x) \implies \neg Q(x)$.

Raisonnement par l'absurde

On veut prouver une assertion A.
On prouve que si A est faux, alors on aboutit à une contradiction. On en conclut que A est nécessairement vraie.
Autrement dit : Si $\neg(A)$ implique une contradiction, alors A.

En fait, on montre que $\neg(A) \implies F$, c'est-à-dire que A ne peut pas être fausse.

Pour se convaincre

$\neg(A)$	B	$\neg(A) \implies B$
F	**F**	**V**
F	V	V
V	**F**	**F**
V	V	V

Important : cas courant d'une implication

Pour démontrer $A \implies B$ par l'absurde :
On suppose que $A \implies B$ est faux, ie. on suppose A et $\mathrm{non}(B)$.
On montre que cela entraîne une assertion C alors qu'on sait déjà que C est fausse, ou que cela entraîne à la fois C et $\neg(C)$ (Contradiction).

Par extension...
Pour prouver $\forall x \in E,\ P(x)$ par l'absurde,
on peut supposer $\exists x \in E,\ \neg P(x)$

Pour prouver $\forall x \in E,\ P(x) \implies Q(x)$ par l'absurde,
on peut supposer $\exists x \in E,\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Exemple : $\forall x \in \mathbb{N},\ x+1 \neq x+2$

Soit $x \in \mathbb{N}$.
Montrons par l'absurde que $x+1 \neq x+2$.
Supposons donc que $x+1 = x+2$
Alors, $1 = 2$ (en soustrayant x dans chaque membre).
Cela est impossible ■

Disjonction de cas. Exemple : $\forall r \in \mathbb{N},\ r^3 + r^2$ est pair.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}$
Si r est impair :
Alors $r+1$ est pair.
Et donc l'entier $r^3 + r^2 = r^2(r+1)$ est pair.
Si r est pair :
Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r = 2k$.
Et alors $r^2 = 4k^2$ est pair. Et donc, $r^3 + r^2 = r^2(r+1)$ est pair.
Dans **tous** les cas, $r^3 + r^2$ est pair. ■

Disjonction de cas

Pour montrer une assertion A, on peut montrer qu'elle est vraie dans différents cas, à condition de traiter **TOUS** les cas, c'est-à-dire que ces cas couvrent tous les possibles.

Analyse-Synthèse

Pour montrer $A \iff B$ (en particulier quand on cherche à déterminer B) :
On raisonne par déduction en partant de l'hypothèse A jusqu'à atteindre une condition nécessaire B ($A \implies B$).
Pour avoir $A \iff B$, il reste à prouver que B est une condition suffisante ($B \implies A$).

Cas courant : résolution d'une équation $\mathscr{E}$
« Analyse » : Si x est solution de $\mathscr{E}$ alors $x \in S$
« Synthèse » : On vérifie que les éléments de S sont tous des solutions de $\mathscr{E}$
Si certains ne sont pas solution, on les "élimine".

Exemple : Résoudre les équations
$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{x-4}$; $\sqrt{x(x-4)} = \sqrt{3-2x}$.

Autres exemples pour s'exercer

Ex.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x+\sqrt{x+1}=11$

Ex.2. Déterminer les fonctions f telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}\quad f(x+y)=x+f(y)$$

Ex.3. Déterminer les fonctions f telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}\quad f(x-f(y))=1-x-y$$

Raisonnement par récurrence

Permet de prouver des propriétés sur les entiers de la forme

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)$$

On démontre deux choses :

Initialisation $P(0)$

Hérédité $\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)\implies P(n+1)$

De ces deux assertions, on déduit que la propriété P est vraie pour tous les entiers.

Remarque

- L'hérédité est une implication universellement quantifiée

Analogie avec le raisonnement déductif

- On peut faire un rapprochement avec le raisonnement déductif : si (A et $A\implies B$), alors B

  Ici, si $P(0)$, comme $P(0)\implies P(1)$, alors
  $P(1)$, et comme $P(1)\implies P(2)$, alors
  $P(2)$, et comme $P(2)\implies P(3)$, alors
  $P(3)$, ...
- mais on démontre que $P(n)$ est vrai pour tous les n "d'un seul coup".
- On comprend la nécessité d'établir $P(n)\implies P(n+1)$ pour toutes les valeurs de n
- Sans initialisation, ie. sans un n_0 pour lequel P est vraie, on pourrait avoir toutes les implications $P(n)\implies P(n+1)$ vraies sans qu'aucun $P(n)$ ne soit vrai !

Récurrence forte

Pour prouver une propriété sur les entiers de la forme

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(n)$$

On démontre deux choses :

Initialisation $P(0)$

Hérédité $\forall n\in\mathbb{N},\quad (\forall m\leqslant n, P(m))\implies P(n+1)$

De ces deux assertions, on déduit que la propriété P est vraie pour tous les entiers.

Exercice

Écrire la variante de la récurrence forte dans la situation où l'on veut démontrer $\forall n\geqslant n_0,\ P(n)$.

Solution de l'exemple 2

Déterminer les fonctions f telle que :
$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=x+f(y)$

Analyse : Soit une fonction f telle que
$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=x+f(y)$
Alors, en particulier, pour $y=0$: $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x+f(0)$
Autrement dit, f est forcément de la forme $f(x)=x+a$ avec $a\in\mathbb{R}$.

Synthèse : Est-ce que toute fonction de cette forme est solution ?
Soit f une fonction de la forme $f(x)=x+a$ avec $a\in\mathbb{R}$.
Alors $f(x+y)=x+y+a$.
Et $x+f(y)=x+y+a$.
Donc f vérifie bien la propriété
$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=x+f(y)$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est bien l'ensemble :

$$\{f \text{ fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\ /\ f(x)=x+a,\ \text{avec } a\in\mathbb{R}\}$$

Variante, à partir d'un rang n_0

Pour prouver une propriété sur les entiers de la forme

$$\forall n\geqslant n_0,\ P(n)$$

On démontre deux choses :

Initialisation $P(n_0)$

Hérédité $\forall n\geqslant n_0,\quad P(n)\implies P(n+1)$

De ces deux assertions, on déduit que la propriété P est vraie pour tous les entiers à partir de n_0.

Exemple : $\forall n\in\mathbb{N},\quad 10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ est divisible par 111

Indication : $1000=9\times111+1$

Remarques

- Importance de distinguer les deux parties.
- Annoncer la récurrence (et son type).
- Attention aux variables et à leurs noms !
- Étudier la propriété $P(n+1)$ au brouillon pour trouver son lien avec $P(n)$ est souvent une bonne piste.

- Parfois, il faut identifier où interviennent les entiers (exemple : degré d'un polynôme)