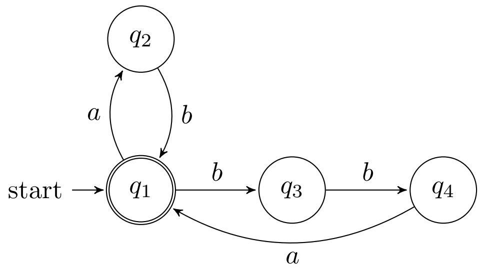
Modèles de calcul (HAI402I)

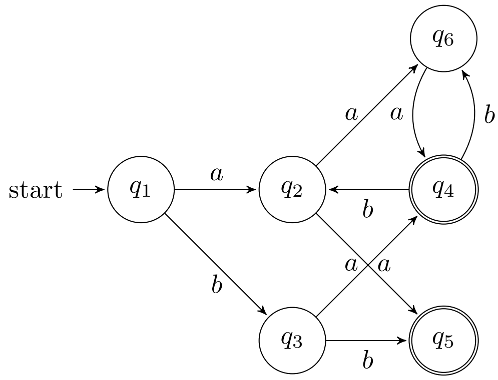
Université de Montpellier

TD 4

Exercice 1 Reconnaissance

Quel est le langage reconnu par chacun des automates suivants ?





Exercice 2 Langages Rationnels

Étant donné l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Pour chacun des langages $\mathcal{L}$ suivant donner, si possible, une expression rationnelle E telle que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(E)$, un AFD A tel que $\mathcal{L} = \mathcal{R}(A)$, et un AFND A' (plus petit) tel que $\mathcal{L} = \mathcal{R}(A')$.

1. $\mathcal{L}$ est le langage des mots se décomposant en blocs de a de longueur paire et en blocs de b de longueur au moins 3.
2. $\mathcal{L}$ est le langage des mots ayant aab en facteur.
3. $\mathcal{L}$ est le langage des mots n'ayant pas aab en facteur.
4. $\mathcal{L}$ est le langage des mots ayant un facteur v tel que $|v|_a = |v|_b = 2$.
5. $\mathcal{L}$ est le langage des mots équilibrés, c'est à dire les mots v tels que $|v|_a = |v|_b$.

Exercice 3 Produits cartésiens

Soient deux automates sur le même alphabet Σ, notés A et B, d'ensembles d'états Q_A et Q_B, d'état initiaux q_A^0 et q_B^0, d'état finaux F_A et F_B, de fonctions de transitions δ_A et δ_B.

Construisons l'automate C sur le même alphabet dont l'ensemble des états est $Q_A \times Q_B$, l'état inital (q_A^0, q_B^0), vérifiant $\delta_C((x, x'), \alpha) = (y, y')$ pour $\alpha \in \Sigma$ si et seulement si $\delta_A(x, \alpha) = y$ et $\delta_B(x', \alpha) = y'$. De plus, $(x, y) \in F_C$ si et seulement si $x \in F_A$ et $y \in F_B$.

Que vaut $\mathcal{R}(C)$ en fonction de $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(B)$? Prouvez soigneusement votre réponse.

Exercice 4 Ensembles Rationnels vs Récursifs Primitifs

Étant donné l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, les mots de Σ^* n'ont pas de bijection complètement triviale vers $\mathbb{N}$. On ne peut pas mettre à la fois les mots 010 et 10 en bijection avec l'entier 2. Pour représenter un mot w de Σ^* on utilisera donc deux entiers, sa longueur $|w|$ et l'entier qu'il represente en binaire $\mathit{entier}(w)$. Inversement, on notera $\mathit{bin}(x, b)$ le mot binaire à b bits tel que $x = \mathit{entier}(\mathit{bin}(x, b))$. Notons que le nombre de bits doit vérifier $b \geq \lceil \log_2(x + 1) \rceil$.

1. Quels sont les entiers $entier(110)$, $entier(001)$ et $entier(100)$? Et quels sont les mots $bin(5,3)$, $bin(5,6)$ et $bin(0,2)$?

   On peut maintenant définir les langages récursifs primitifs. Un langage $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ est *récursif primitif* si il existe un programme de Rosza $\boxed{\mathcal{L}}$ tel que $\boxed{\mathcal{L}}(x,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } bin(x,b) \in \mathcal{L} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Le but de cet exercice est de démontrer que **tout langage rationnel est également récursif primitif**. Pour ce faire on va montrer que pour toute expression rationnelle E on peut fournir un programme, noté $\boxed{E}$, calculant le prédicat suivant $\boxed{E}(x,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } bin(x,b) \in \mathcal{L}(E) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. Pour toute constante $c \in \mathbb{N}$, on note $\boxed{=c}$ le jeton de Rosza tel que $\boxed{=c}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Étant donné une expression rationnelle E qui est un ensemble fini de mots $E \subsetneq \{0,1\}^*$, décrire le programme $\boxed{E}$, c'est à dire le prédicat tel que $\boxed{E}(x,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } bin(x,b) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Étant donnée une expression rationnelle de la forme $E = E_1 + E_2$, écrire le programme $\boxed{E}$ en se basant sur $\boxed{E_1}$ et $\boxed{E_2}$.

4. Écrire un programme, noté $\boxed{\mathbf{Su}}$, qui pour un triplet b', x, b calcul l'entier codé sur les b' derniers bits de $bin(x,b)$.

5. Écrire un programme, noté $\boxed{\mathbf{Pr}}$, qui pour un triplet b', x, b calcul l'entier codé sur les $b-b'$ premiers bits de $bin(x,b)$.

6. Étant donnée une expression rationnelle de la forme $E = E_1.E_2$, écrire le programme $\boxed{E}$ en se basant sur $\boxed{E_1}$ et $\boxed{E_2}$.

7. Étant donnée une expression rationnelle de la forme $E = E_1^*$, écrire le programme $\boxed{E}$ en se basant sur $\boxed{E_1^*}$.

8. Que peut-on en déduire ?

9. Montrer que le langage des mots équilibrés est récursif primitif. Qu'en déduit-on ?