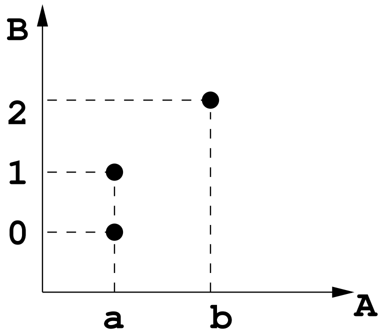
1 Relations binaires

Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ d'un ensemble X vers un ensemble Y est définie par un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$, appelé le *graphe* de la relation.
Pour $(x, y) \in \mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$ et on dit que x et y sont en *relation.* (On dit aussi y est associé à x par $\mathcal{R}$, ou encore que y est image de x par $\mathcal{R}$)
Exemples :

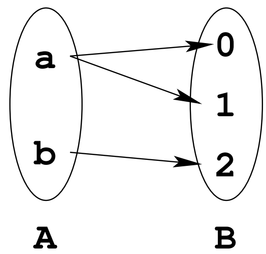
— $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. $\mathcal{R} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 2)\}$ est une relation binaire de A vers B. $a\mathcal{R}0$, $a\mathcal{R}1$, ...
— $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{2, 3\}$. « est un multiple de » définit une relation $\mathcal{S}$ de A vers B. $2\mathcal{S}2$, $3\mathcal{S}3$, $4\mathcal{S}2$, ... $\mathcal{S}$ est $\{(2, 2), (3, 3), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\} \subseteq A \times B$

On *représente* une relation binaire de A vers B, par différentes sortes de diagrammes :

— diagramme cartésien (comme on a fait les années précédentes en Analyse. La différence est le caractère discret des ensembles.)
— diagramme sagittal (comme on fait dans les diagrammes de Venn : patatoïdes et flèches).



Le diagramme cartésien de $\mathcal{R}$



Le diagramme sagittal de $\mathcal{R}$

Relation réciproque La relation *réciproque* d'une relation $\mathcal{R}$ de A vers B est notée $\mathcal{R}^{-1}$. $\mathcal{R}^{-1}$ est une relation de B vers A, c.-à-d. que $\mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$. $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$ ssi $(a, b) \in \mathcal{R}$, autrement dit $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}^{-1}a$.
Exemple : $\mathcal{R}^{-1} = \{(0, a), (1, a), (2, b)\}$

2 Fonctions

Une relation binaire de X vers Y est *fonctionnelle* si pour tout $x \in X$, il existe *au plus un* élément $y \in Y$ en relation avec x.
En notation fonctionnelle pour une fonction f de X vers Y, on note $\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y. \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

f est incluse dans $X \times Y$: $f \subseteq X \times Y$.

2.1 Définitions basiques

— X est l'ensemble de *départ* et Y l'ensemble *d'arrivée.*
— L'ensemble $Dom(f) = \{x \in X \,|\, \exists y \in Y \text{ avec } y = f(x)\}$ est le *domaine* ou *ensemble de définition* de f, $Dom(f) \subseteq X$.
— L'ensemble $Im(f) = \{y \in Y \,|\, \exists x \in X \text{ avec } y = f(x)\}$ est l'*image* de f, $Im(f) \subseteq Y$.
— **L**'*image* de $x \in X$ par f est l'élément y de Y tel que $y = f(x)$.
— **Un** *antécédent* par f d'un élément y de Y est un élément x tel que $y = f(x)$.

2.2 Image directe et réciproque

On se donne une fonction $f : X \longrightarrow Y$. Soit A une partie de X et B une partie de Y. On définit :

— *l'image directe* de A par f : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \,|\, \exists x \in A \text{ avec } y = f(x)\}$ ($f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A),
— *l'image réciproque* de B par f : $f^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$ ($f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B).

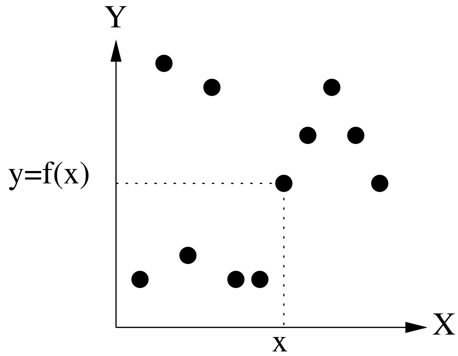
Avec ces notations, on a $f(X) = Im(f)$ et $f^{-1}(Y) = Dom(f)$.

2.3 Restriction, co-restriction, prolongement

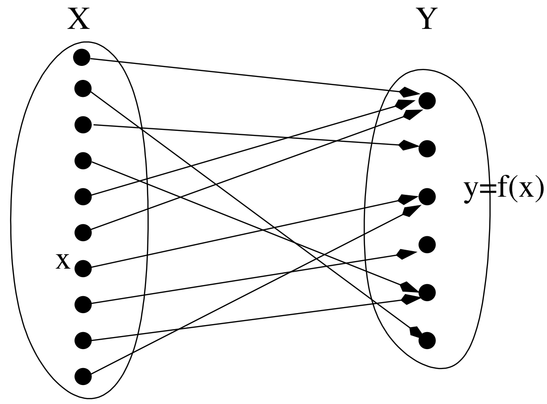
- Si $A \subseteq X$, on peut *restreindre* l'ensemble de départ de f au sous-ensemble A, on note $\begin{array}{rrcl} \mathbf{f|_A}: & A & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$
  $f|_A$ *coïncide* avec f sur A. *Exemple* : l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à x associe $2x$ restreinte aux entiers pairs, une fonction qu'on restreint à son domaine de définition $Dom(f)$ devient une application.
- La *co-restriction* est l'opération analogue sur un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée (ici Y). Permet par exemple de restreindre l'ensemble d'arrivée à $Im(f)$, c.-à-d. rendre f surjective.
- Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \cup Z \longrightarrow Y$, g est un *prolongement* de f si g coïncide avec f sur $Dom(f)$. Noter que la restriction du prolongement g au domaine de définition de la fonction prolongée f est f elle-même : $g|_{Dom(f)} = f$.
  Utile pour prolonger en un point, prenons $\begin{array}{rrcl} \mathbf{r}: & \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$,
  s définie de la manière suivante est un prolongement de r au point 0, $\begin{array}{rrcl} \mathbf{s}: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \text{r(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 12 & x = 0 \end{cases} \end{array}$
  En général on définit un prolongement pour remplacer la fonction prolongée.

3 Applications

Une fonction f de X vers Y est une *application* si son domaine est l'ensemble X tout entier : $Dom(f) = X$.
L'ensemble des applications de X vers Y est noté Y^X ou $\{X \longrightarrow Y\}$.
L'ensemble $\{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ est appelé le *graphe* de l'application f. Il définit l'application f en donnant tous les couples $(x, f(x))$.



Le graphe d'une application f de X vers Y représentée par son diagramme cartésien.



Le diagramme sagittal d'une application $f : X \rightarrow Y$.

Attention : une application est une fonction mais une fonction n'est pas toujours une application.

3.1 Injection, surjection, bijection, réciproque

L'application est *injective* si chaque élément $y \in Y$ a au plus un antécédent. Elle est *surjective* si chaque élément $y \in Y$ a au moins un antécédent. Elle est *bijective* si c'est une application injective et surjective, c.-à-d. chaque élément $y \in Y$ a exactement un antécédent. On dit alors que les ensembles de départ et d'arrivée sont *équipotents*. On a donc :

- f est injective ssi $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$[1], qui peut aussi s'énoncer par sa contraposée : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, autrement dit, chaque paire d'éléments distincts ont des images distinctes
- f est surjective ssi $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $y = f(x)$
- f est bijective ssi $\forall y \in Y$, $\exists! x \in X$ tel que $y = f(x)$, c.-à-d. f est injective et surjective (le symbole $\exists!$ signifie "il existe un et un seul", on n'est pas obligé de les embrouiller avec ça)

1. Par abus de notation nous utiliserons $x_1, x_2, \ldots, x_i \in X$ au lieu de $x_1 \in X, x_2 \in X, \ldots, x_i \in X$.

Dans le cas où $f : X \longrightarrow Y$ est une application bijective, on peut définir l'application réciproque de f :

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{f^{-1}} : Y & \longrightarrow & X \\ \quad y & \longmapsto & \text{L'unique } x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}$$

, qui est aussi bijective. $(f^{-1})^{-1} = f$.

3.2 Fonction caractéristique *(en fait c'est une application)*

Un cas particulier classique : une partie A d'un ensemble E donne lieu à la *fonction caractéristique*, qui est définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \chi_A : \; E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ e & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } e \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On remarque que, χ_A restreinte à A est la fonction constante 1, et χ_A restreinte au complémentaire de A, $\overline{A}^E$, est la fonction constante 0.

Nous avons vu ce cas particulier sous des formes algorithmiques apparentées :

— **Appartient** : $\begin{array}{rcl} Objet \times Tableau & \longrightarrow & Boolen \\ (x,T) & \longmapsto & \begin{cases} \texttt{vrai} & \text{si x est élément de T} \\ \texttt{faux} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

— **AppListe** : $\begin{array}{rcl} \mathbb{N} \times Liste & \longrightarrow & Boolen \\ (x,L) & \longmapsto & \begin{cases} \texttt{vrai} & \text{si x est élément de L} \\ \texttt{faux} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$