Algèbre linéaire et analyse 1

(HLMA101 – Année universitaire 2020–2021)

Feuille d'exercices N°10

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. Soit f une fonction dérivable. Vrai ou faux ?

(a) Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.

(b) Si f est strictement croissante, alors $f' > 0$.

Question 2. Les assertions suivantes sont-elles vraies pour toute fonction f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$, et vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$?

(a) $\forall x \in]0, 1[, |f'(x)| \leq 1$;

(b) $\exists x \in]0, 1[, |f'(x)| \leq 1$;

(c) $\exists x \in]0, 1[, f'(x) = 1$.

2. Travaux dirigés

Exercice 1. Trouver des réels a et b de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ si $x > 1$ soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 (d'après Examen 2ème session, 2014-2015, remanié). On pose $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}}$ pour tout $x \neq 0$.

(a) Déduire de la dérivabilité du sinus que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, puis que f a une limite nulle en 0.

(b) Démontrer que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée.

(c) On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ obtenue en prolongeant f par $h(0) = 0$. Montrer que h n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $e^x - 2x - 1 = 0$.

Exercice 4 (d'après Examen 1ère session 2017-2018, simplifié). Soit une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs strictement positives. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)\, e^{h(x)} = e$, et l'objectif de cet exercice est de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ existe et vaut 1.

(a) Soit $k : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $k(x) = x\, e^x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Montrer que k est une bijection continue et de réciproque continue de $[0, +\infty[$ dans lui-même.

(b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ existe et vaut 1.

Exercice 5. On pose $f(x) = x \ln(x) - x$ pour tout $x > 0$ et $f(0) = 0$.

(a) Étudier sa continuité, sa dérivabilité et dresser son tableau de variations.

(b) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$.

(c) Si g est la réciproque de cette bijection, calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 6. En utilisant les accroissements finis, montrer que $\sqrt{1 + x} < 1 + x/2$ pour tout $x > 0$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que f' a une limite ℓ en 0. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \ell$.

Exercice 8. Soient f, g, h trois fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$: quelle est la dérivée de fgh ? De $f \circ g \circ h$?

Exercice 9 (d'après Examen 1ère session 2017-2018). Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$ si $x \geq -1$ et $g(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) - \pi$ si $x < -1$.

(a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer les limites en $\pm\infty$ de g.

(c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et calculer sa dérivée.

(d) La fonction g est-elle dérivable en -1 ?

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$; montrer que f définit une bijection de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ dans $[1, +\infty[$ et exprimer f^{-1} à l'aide de la fonction arcsin.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f_a la fonction définie par $f_a(x) = a + \frac{x}{2(x^2+1)}$.

(a) Étudier les variations de f_a et montrer qu'il existe un unique réel x tel que $f_a(x) = x$ (point fixe de f_a).

(b) On suppose à partir de maintenant que $a > 0$ et on note $\varphi(a)$ le point fixe de f_a ; montrer que $\varphi(a) > a$.

(c) Montrer que $0 < f_a(x) - a < \frac{1}{2x}$ pour tout $x > 0$ et en déduire que $a < \varphi(a) < a + \frac{1}{2a}$ pour tout $a > 0$.

Défi. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et bornée. Montrer que f'' s'annule au moins une fois.