CH 2 : Mesures et incertitudes

Physique générale - HLPH101

Plan du chapitre:

I - Notations et définitions
- 1 - Incertitude absolue
- 2 – Incertitude relative
- 3 – Chiffres significatifs et présentation des résultats

II - Evaluation des incertitudes de mesure: → **mesure directe** d'une grandeur G
- 1 – Evaluation de type A de l'incertitude (simplifiée)
- 2 – Evaluation de type B de l'incertitude
  - A) Incertitude liée à l'instrument
  - B) Incertitude liée à l'opérateur et à l'environnement
  - C) Présentation du résultat

III - Evaluation de l'incertitude sur une grandeur calculée à partir d'autres grandeurs
→ **mesure indirecte**

I Notations et définitions

1 - Incertitude absolue

grandeur physique à mesurer

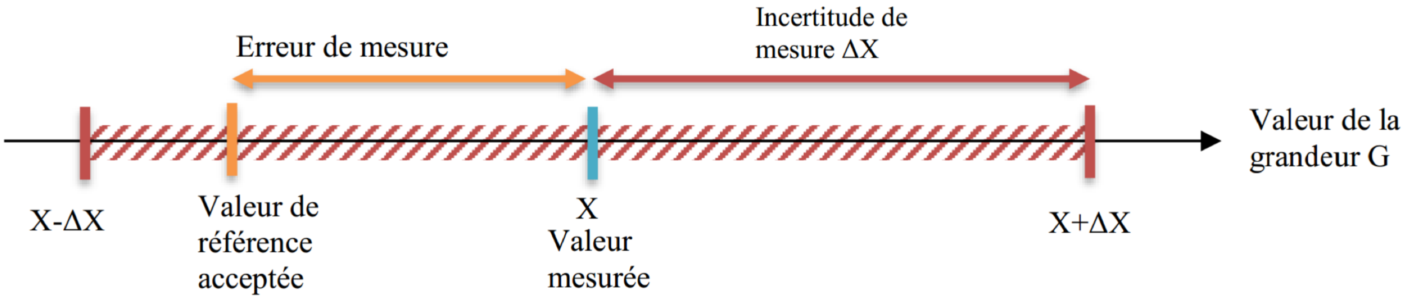
meilleure estimation de la valeur de *G*

incertitude absolue : incertitude expérimentale de mesure (toujours positive)

$$G = X \pm \Delta X \ (U)$$

unité de la mesure de *G*

Signification : on est « raisonnablement certain » que la valeur réelle de la grandeur physique *G* est comprise entre $X - \Delta X$ et $X + \Delta X$.



2 - Incertitude relative (ou précision) : $\dfrac{\Delta X}{X}$

… sur la valeur *X* de *G* : c'est un nombre sans dimension à exprimer en pourcentage.

Ordres de grandeur par rapport au TP de Physique générale (HLPH201) :

- > 10% : mesure grossière
- 1-2% : mesure enviable pour la plupart des expériences menées en TP
- < 1% : mesure plutôt rare à obtenir en TP

Exemples :

1) on pèse une voiture, la balance affiche 2 t, l'incertitude absolue est égale à 1 kg.

$$\frac{\Delta X}{X} = 1\ \mathrm{kg}/(2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}) = 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}05\,\%$$

2) on pèse un sac, la balance affiche 4 kg, l'incertitude absolue est égale à 100 g.

$$\frac{\Delta X}{X} = 1 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{kg}/(4\ \mathrm{kg}) = 2{,}5 \cdot 10^{-2} = 2{,}5\,\%$$

3 – Chiffres significatifs et présentation des résultats

Exemples :

- 3451 → 4 chiffres significatifs
- 2,7 → 2 chiffres significatifs

Le chiffre 0 n'est significatif que *après* des chiffres significatifs :

- 20 et 1,0 → 2 chiffres significatifs
- 0,980 et 0,00761 → 3 chiffres significatifs

Présentation des incertitudes :

- il est d'usage de présenter les incertitudes expérimentales avec un seul chiffre significatif

$$\cancel{g = 9{,}82 \pm 0{,}02385 \ \mathrm{m\,.\,s}^{-2}}$$

$$g = 9{,}82 \pm 0{,}02 \ \mathrm{m\,.\,s}^{-2}$$

- Exception : si le chiffre dominant de l'incertitude est un 1, il est préférable de conserver deux chiffres significatifs

Présentation du résultat :

- dernier chiffre significatif doit être du même ordre de grandeur que l'incertitude

$$92{,}81 \rightarrow \begin{cases} 92{,}8 \pm 0{,}3 & \text{si} \quad \Delta X = 0{,}3 \\ 93 \pm 3 & \text{si} \quad \Delta X = 3 \\ 90 \pm 30 & \text{si} \quad \Delta X = 30 \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta X = 32 \xrightarrow{\text{arrondie}} \Delta X = 30}$$

Règle d’arrondi :

- le chiffre après le dernier chiffre significatif gardé est compris
  - entre 0 et 4 → on ne garde que ce chiffre : 0,446 → 0,4
  - entre 5 et 9 → on incrément de 1 ce chiffre : 0,451 → 0,5

Exception :

- les calculs intermédiaires sont dispensés des règles précédentes : tout nombre susceptible d’un calcul ultérieur conserve au moins un chiffre significatif supplémentaire.

II - Evaluation des incertitudes de mesure:

→ mesure directe d'une grandeur G

1 – Evaluation de type A de l'incertitude (simplifiée)

Nous distinguons deux méthodes pour estimer l'incertitude :

évaluation du type A de l'incertitude
… en utilisant des méthodes statistiques :

- Répéter un grand nombre de fois la mesure.
- Faire un étude statistique des résultats
- meilleure estimation → moyenne statistique
- incertitude → écart-type (corrigé)

évaluation du type B de l'incertitude
… si l'incertitude est évaluée autrement que de manière statistique

- C'est ce qui se passe principalement dans le TP.
- Estimation d'après des échelles de mesure.
- Estimation des incertitudes lors de l'utilisation d'un appareil numérique.

Évaluation du type A de l’incertitude (simplifiée !)

On répète N fois la mesure, on obtient N résultats différents : X_1, X_2, … , X_k, … X_N.

Postulat de base : pour une mesure correctement effectuée (sans biais), les résultats de mesure suivent une loi de distribution normale

- centrée sur la valeur de la grandeur que l’on cherche à mesure
- dont l’écart-type caractérise l’importance de l’erreur commise

La ***moyenne*** statistique

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k$$

L’***écart-type (corrigé)*** de cette moyenne

$$s_{corr} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (X_k - \bar{X})^2}$$

L'incertitude liée à l’opérateur et à l'environnement :

$$\Delta X_{\text{autre}} = \begin{cases} 2 \cdot s_{\text{corr}} & \text{si } N \leq 5 \\ s_{\text{corr}} & \text{si } N > 5 \end{cases}$$

2 – Evaluation de type B de l’incertitude (simplifiée)

Nous distinguons deux méthodes pour estimer l’incertitude :

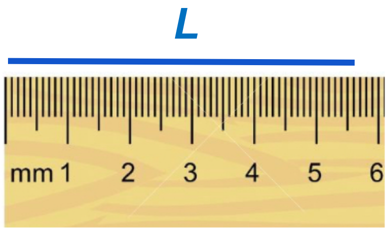
évaluation du type A de l’incertitude
… en utilisant des méthodes statistiques :

- Répéter un grand nombre de fois la mesure.
- Faire un étude statistique des résultats
- meilleure estimation → moyenne statistique
- incertitude → écart-type (corrigé)

évaluation du type B de l’incertitude
… si l’incertitude est évaluée autrement que de manière statistique

- C'est ce qui se passe principalement dans le TP.
- Estimation d’après des échelles de mesure.
- Estimation des incertitudes lors de l’utilisation d’un appareil numérique.

Évaluation du type B de l'incertitude (1)



A) Incertitude liée à l'instrument ΔX_{instr}

- **Instrument gradué :** L'incertitude est égale à la moitié de la graduation minimale.
  Ex. : règle graduée au millimètre L = 5,60 ± 0,05 cm

- **Appareil numérique :** La notice des appareils numériques récents indique que l'incertitude est telle que : $\Delta X_{\text{instr}} = x\%\,(\text{VL}) + y\,(\text{UR})$

  VL : la valeur lue sur l'instrument.

  UR : unité de résolution de l'appareil sur la gamme utilisée.

Ex. : Sur la gamme 5 V utilisée pour la mesure de la tension, la résolution du multimètre numérique est de 1 mV et la précision de la mesure est de (2% + 3).

$$\left.\begin{array}{l} U = 1{,}898 \text{ V} \\ \Delta U_{\text{instr}} = 2/100 \cdot U + 3 \cdot 0{,}001 \text{ V} = 0{,}038 + 0{,}003 = 0{,}041 \text{ V} \end{array}\right\} \Rightarrow \; U = 1{,}90 \pm 0{,}04 \text{ V}$$

- **Appareil numérique sans notice :** L'incertitude est égale à la moitié du dernier digit.

Évaluation du type B de l'incertitude (2)

B) Incertitude liée à l'opérateur et à l'environnement ΔX_{autre}

- Cas général : on répète *N* fois la mesure (en repartant de zéro).
    - Meilleur estimation : valeur moyenne de *N* mesures

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k}$$

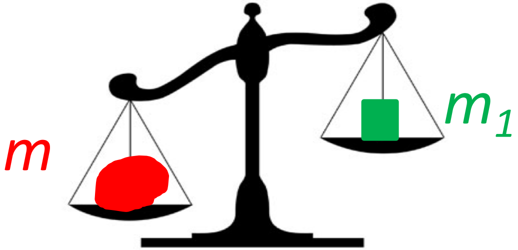
    - Incertitude absolue : l'écart entre les valeurs extrêmes X_{max} et X_{min} :

$$\boxed{\Delta X_{autre} = \frac{X_{max} - X_{min}}{2}}$$

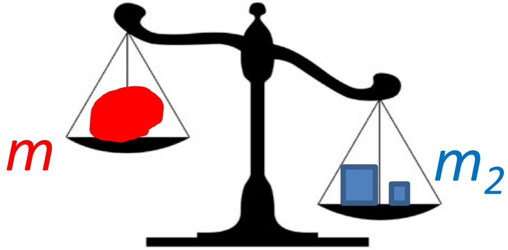
Évaluation du type B de l’incertitude (3)

Incertitude liée à l'opérateur et à l’environnement ΔX_{autre}

- Cas particulier simple : on a directement accès à un encadrement de *G*



$$\boxed{m_1 < m < m_2}$$



$$\boxed{m = \frac{m_1 + m_2}{2} \pm \frac{m_2 - m_1}{2} \, (U)}$$

Attention : m_1 et m_2 doivent être proche de m.

Évaluation du type B de l'incertitude (4)

C) Présentation du résultat (évaluation du type B)

- Incertitude totale = incertitude liée à l'instrument + incertitude à l'opérateur et à l'environnement :

$$\boxed{\Delta X = \Delta X_{instr} + \Delta X_{autre}}$$

- Résultat : $\boxed{G = X \pm \Delta X (U)}$

Exemple : période d'un pendule (évaluation type B)

Mesures affichées par le chronomètre (en secondes)

k	1	2	3	4	5
T_k / s	2,12	2,42	2,37	2,28	2,32

- Moyenne : T = (2,12+2,42+2,37+2,28+2,32)/5 = 2,302 s
- Incertitude liée à l'opérateur/environnement : Valeurs minimales et maximales :

$T_{min} = T_1 = 2,12$ s ; $T_{max} = T_2 = 2,42$ s → $\Delta T_{autre} = (T_2 - T_1) / 2 = 0,15$ s

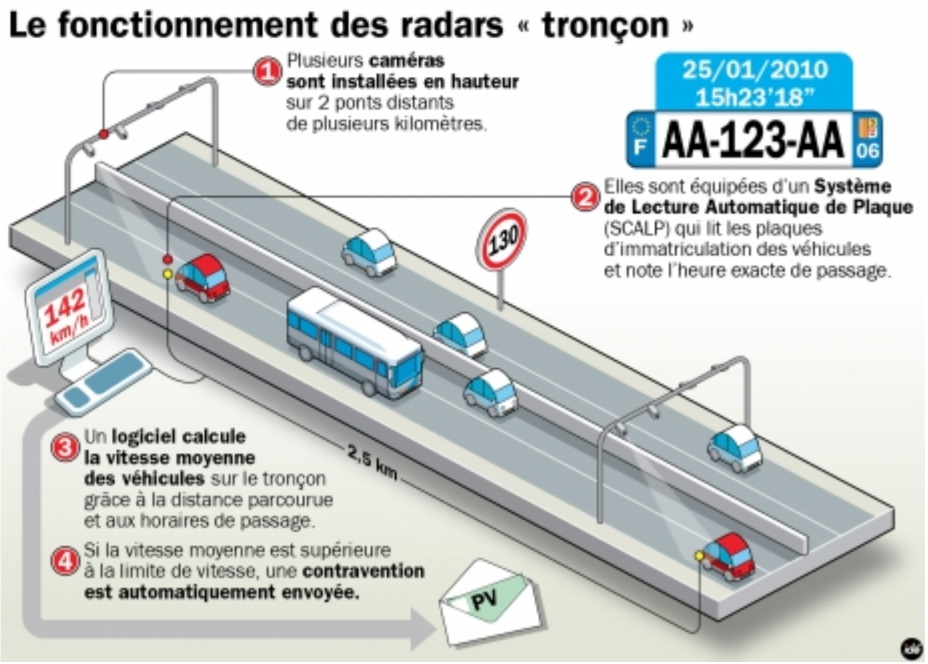
- Incertitude liée à l'instrument : affichage à 0,01 s près → $\Delta T_{instr} = ½ \times 0,01$ s $= 0,005$ s

$\Delta T = 0,15 + 0,005 = 0,155$ s ~ 0,16 s

Résultat de mesure : T = 2,30 ± 0,16 s

III - Incertitude sur une grandeur *G* calculée à partir d'autres grandeurs : <u>mesure indirecte</u>

Ex. : mesure d'une vitesse



d = 13000 ± 100 m

t = 360 ± 1 s

⇒ vitesse moyenne : v_m = 130 ± ? km/h

- Comment déterminer l'incertitude Δv_m sur la mesure indirecte de $v_m(d,t)$?

Règle de propagation des incertitudes (1)

Soit *G* une grandeur physique (unité U) qui est fonction d'autres grandeurs physiques *G'*, *G''*, … : *G = f(G', G'', ...)*.

Les grandeurs *G'*, *G''*, … ont préalablement été mesurées ou calculées :

les incertitudes sur *G'*, *G''*, … doivent être indépendantes et aléatoires.

G' = X' ± ΔX' (U) ; G'' = X'' ± ΔX'' (U) ; …

- La valeur calculée de la grandeur *G* est donnée par : X = f (X', X'', …)
- L'incertitude absolue sur la valeur de *G* est donnée par :

$$\Delta X = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial G'}(X', X'', \dots) \right)_{G'', \dots} \right| \Delta X' + \left| \left(\frac{\partial f}{\partial G''}(X', X'', \dots) \right)_{G', G''', \dots} \right| \Delta X'' + \cdots$$

dérivée partielle de la fonction *f* par rapport à la variable *G''* évaluée en *X'*, *X''* etc., les variables *G'*, *G'''* etc. étant maintenues constantes.

- Le résultat du calcul s'exprime alors sous la forme :

G = X ± ΔX (U)

Règle de propagation des incertitudes (2)

Une « astuce » pour un cas particulier :

- Dans le cas où la grandeur à calculer est le produit de puissances d'autres grandeurs physiques,

$$G = k(G')^{\alpha}\,(G'')^{\beta}\,(G''')^{\gamma}\ \ldots$$

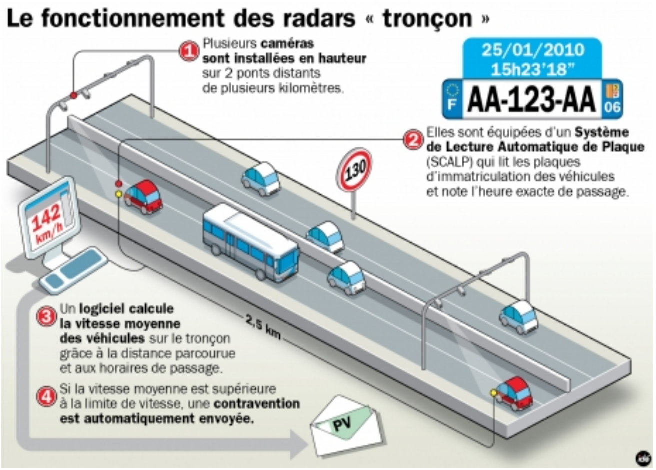
- l'<u>incertitude relative</u> (ou précision) sur *X* s'écrira :

$$\frac{\Delta X}{X} = \left|\alpha\,\frac{\Delta X'}{X'}\right| + \left|\beta\,\frac{\Delta X''}{X''}\right| + \left|\gamma\,\frac{\Delta X'''}{X'''}\right| + \ldots$$

- Une fois que l'incertitude relative a été calculée, l'<u>incertitude absolue</u> peut être obtenue en multipliant ce résultat par la valeur de *G* :

$$\Delta X = \left(\frac{\Delta X}{X}\right).X$$

Retour sur l'exemple



d = 13000 ± 100 m
t = 360 ± 1 s

La vitesse moyenne v_m est fonction des 2 variables $G' = d$ et $G'' = t$ telle que :

$$v_m = f(d,t) = d/t = d^1.t^{-1} = 13000\text{m} / 360\text{ s} = 36{,}111\text{ m.s}^{-1}$$

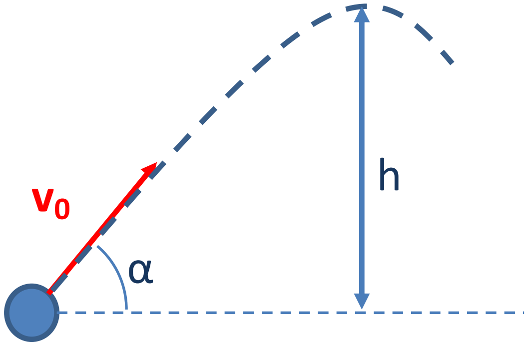
Précision : $$\frac{\Delta v_m}{v_m} = \left|1.\frac{\Delta d}{d}\right| + \left|(-1).\frac{\Delta t}{t}\right| = \frac{100}{13000} + \frac{1}{360} = 0{,}01047 = 1{,}047\%$$

Incertitude absolue : $$\Delta v_m = \left(\frac{\Delta v_m}{v_m}\right).v_m = 0{,}01047 \,.\, 36{,}111\; m.s^{-1} = 0{,}3781\; m.s^{-1}$$

Résultat : $v_m = 36{,}1 \pm 0{,}4\text{ m.s}^{-1}$

Un deuxième exemple : trajectoire parabolique

… d'une boule de pétanque (en l'absence de frottements)



v_0 = 3,0 ± 0,1 m.s^{-1}
α = 1,00 ± 0,05 rad
g = 9,81 ± 0,01 m.s^{-2}

$$\mathrm{h} = \frac{{v_0}^2 \sin(\alpha)^2}{2g} = 0{,}3248 \text{ m}$$

Nous ne pouvons pas utiliser « l'astuce » car ici nous avons une fonction trigonométrique

$$\Delta h = \left|\frac{\partial h(v_0,\alpha,g)}{\partial v_0}.\Delta v_0\right| + \left|\frac{\partial h(v_0,\alpha,g)}{\partial \alpha}.\Delta \alpha\right| + \left|\frac{\partial h(v_0,\alpha,g)}{\partial g}.\Delta g\right| = 0{,}04284 \text{ m} \sim 0{,}04 \text{ m}$$

où $\dfrac{\partial h(v_0,\alpha,g)}{\partial v_0} = \dfrac{v_0 \sin^2(\alpha)}{g}$; $\dfrac{\partial h(v_0,\alpha,g)}{\partial \alpha} = \dfrac{{v_0}^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$; $\dfrac{\partial h(v_0,\alpha,g)}{\partial g} = \dfrac{-{v_0}^2 \sin^2(\alpha)}{2g^2}$

Résultat : h = 0,32 ± 0,04 m