

# TD 5 - Formes clausales

Logique Propositionnelle - HAI304I

**Exercice 1** - Soit la fbf  $F = (r \Rightarrow p) \Rightarrow \neg(q \vee r) \Rightarrow p$ , dessinez l'arborescence syntaxique de  $F$  puis mettez  $F$  sous forme conjonctive. Finalement donnez sa forme clausale.

**Exercice 2** - Mettez sous forme clausale les fbf suivantes, puis simplifiez les en éliminant les clauses tautologiques et les clauses ayant une clause incluse :

$$p \Leftrightarrow q \vee \neg(r \wedge p) \quad \neg((b \Rightarrow a) \Rightarrow \neg c \wedge \neg(d \Rightarrow e \wedge f)) \quad (\neg(b \vee c) \Rightarrow a \vee c) \Rightarrow c \Rightarrow a \wedge \neg b$$

**Exercice 3** - Calculez la forme clausale de chacune des formules suivantes (et simplifiez) :

$\perp$	$\top \wedge (a \vee \neg b)$
$\top$	$\top \wedge (\perp \vee a \vee \neg a)$
$a \vee \neg a$	$\perp \wedge \top$
$a \wedge \neg a$	$(a \vee c \Rightarrow \neg a \wedge b) \wedge a$
$\perp \wedge (a \vee \neg b)$	$(a \Rightarrow b) \wedge \neg c \vee a \wedge b$

**Exercice 4** - Soit deux clauses  $C_1$  et  $C_2$ . Montrez que si  $C_1 \subseteq C_2$  alors  $C_1 \models C_2$ .

**Exercice 5** - Simplifiez (clauses tautologiques et incluses) la forme clausale suivante :

$$\{\{p, q, \neg r\}, \{\neg p, q, s\}, \{p, \neg q, \neg s\}, \{r, s\}, \{p, t, \neg p\}, \{\neg p, s\}, \{\neg t\}, \{t, \neg s\}\}$$

1. Donnez une formule sous forme conjonctive correspondant à cette forme clausale simplifiée.
2. Proposez deux interprétations partielles garantissant que toute extension à une interprétation complète soit un contre-modèle de la formule.
3. Proposez un modèle de la formule en commençant par la valeur de vérité de  $t$  et en raisonnant "par propagation".

**Exercice 6** - Soit  $F$  une forme clausale et  $l$  un littéral, on note  $F[l]$  la forme clausale obtenue à partir de  $F$  en supprimant les clauses contenant le littéral  $l$  et en supprimant le littéral opposé à  $l$ , noté  $\bar{l}$ , des autres clauses. Montrez que  $F$  est insatisfiable si et seulement si  $F[l]$  et  $F[\bar{l}]$  sont insatisfiables.

**Exercice 7** - Un littéral pur d'une forme clausale  $F$  est un littéral qui n'apparaît que sous une seule forme dans  $F$ , i.e.  $F$  contient des occurrences de  $l$  mais aucune occurrence de  $\bar{l}$ . Soit  $F$  une forme clausale et  $l$  un littéral pur de  $F$ , montrez que  $F[l]$  est insatisfiable si et seulement si  $F$  est insatisfiable.

**Exercice 8** - Une clause unitaire est une clause ne contenant qu'un seul littéral. Montrez que si  $\{l\}$  est une clause unitaire d'une forme clausale  $F$  alors  $F$  est insatisfiable ssi  $F[l]$  est insatisfiable.