Algèbre linéaire et analyse 1

(HLMA101 - Année universitaire 2020-2021)

Feuille d'exercises 2 - CORRECTION

Échauffement

Question 1 (a) $1 \in \mathbb{N}$ (b) $\{2,3\} \subset \mathbb{N}$ (c) $\{1\} \subset \mathbb{N}$ (d) $1 \in \{1\}$ (e) $A \subset B \iff \forall y \in A, y \in B$ (f) $A = B \iff \forall y \in A, y \in B$ et $\forall y \in B, y \in A$.

Question 2 $A \cup B = \{1,2,3,4\}$, $A \cup C = [-2,4]$, $B \cup C = [-2,4]$, $A \cap B = \{1,4\}$, $A \cap C = \{1,2\}$, $B \cap C = \{1,3\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $C \setminus A = [-2,4[\setminus\{1,2\} = [-2,1[\cup]1,2[\cup]2,4[$, $C \cap \mathbb{Z} = \{-2,-1,0,1,2,3\}$, $C \cap \mathbb{N} = \{0,1,2,3\}$.

Question 3 $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\#\}, \{\diamond\}, \{\heartsuit\}, \{\#, \diamond\}, \{\#, \heartsuit\}, \{\diamond, \heartsuit\}, \{\#, \diamond, \heartsuit\}\}$.

Question 4 (a) $A \in \mathbb{N}$ Faux (A n'est pas un élément de $\mathbb{N}$) (b) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Vrai (A est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) (c) $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Faux (les éléments de A ne sont pas des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) (d) $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Faux (B n'est pas un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) (e) $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ Vrai (les éléments de B sont des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Question 5 (a) Faux. Par exemple, si nous prenons $a = 10$ et $b = -5$ alors $|a - b| = |10 - (-5)| = |10 + 5| = |15| = 15$ et $|a| - |b| = |10| - |-5| = 10 - 5 = 5$.

(b) Faux. Par exemple, si nous prenons $x = 1,9$ alors $E(2 \text{ x } 1,9) = E(3,8) = 3$ et $2E(1,9) = 2 \text{ x } 1 = 2$.

Travaux Dirigés

Exercice 1 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrons que $I \cap J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour cela il faut montrer que $\forall \alpha \in I \cap J, \forall \beta \in I \cap J, [\alpha, \beta] \subset I \cap J$. Soient alors α et β dans $I \cap J$.

Puisque α et β sont dans $I \cap J$, en particulier ils sont dans I, qui est un intervalle ; d'après la définition d'un intervalle (donnée dans l'énoncé), $[\alpha, \beta] \subset I$. Le même argument en remplaçant I par J montre que $[\alpha, \beta] \subset J$. Par conséquent $[\alpha, \beta] \subset I \cap J$, ce qui montre que $I \cap J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. $\square$

Exercice 2

1. Faux : $[0,1] \cup [2,3]$ n'est pas un intervalle car $1 \in [0,1] \cup [2,3]$, $2 \in [0,1] \cup [2,3]$, $3/2$ est entre 1 et 2, mais $3/2 \notin [0,1] \cup [2,3]$.
2. Faux : $]-\infty, 1]$ est majoré, $[0, +\infty[$ est minoré, mais la réunion des deux (qui est $\mathbb{R}$ tout entier) n'est pas bornée.
3. Vrai : soit $A \subset \mathbb{R}$ majoré, et soit $B \subset \mathbb{R}$ minoré. Soit M un majorant de A, et soit m un minorant de B. Alors tout élément de A, en particulier

tout élément de $A \cap B$, est $\leq M$. De même tout élément de B, en particulier tout élément de $A \cap B$, est $\geq m$. Par conséquent, pour tout élément x de $A \cap B$ (s'il en existe), on a $m \leq x \leq M$. Donc $A \cap B$ est borné.

Exercice 3

1. $\{f(x)/x \in [0,1]\}$
2. $\{y \in \mathbb{R}/f(y) = 1\}$
3. $\{x \in \mathbb{R}/\exists k \in \mathbb{N}, x = 2k \text{ et } f(x) \leq 5\}$

Exercice 4

1. L'ensemble des réels qui ont au moins deux antécédents distincts par f.
2. L'ensemble des réels dont l'ensemble des antécédents par f n'est pas majoré.
3. L'ensemble des entiers dont l'image par f est rationnelle et strictement comprise entre zéro et cinq.

Exercice 5 On procède par l'absurde. Supposons que la négation de l'assertion est vraie, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $a_i < \frac{C}{N}$. Alors,

$$a_1 + \cdots + a_N < \underbrace{\frac{C}{N} + \cdots + \frac{C}{N}}_{N\text{-fois}} = N\frac{C}{N} = C$$

d'où $a_1 + \cdots + a_N < C$ ce qui est faux car, d'après l'hypothèse, nous avons $a_1 + \cdots + a_N \geq C$. On conclut que la négation est fausse et donc l'assertion originale est vraie.

Exercice 6 Soient x et y des réels. Si $x \leq y$ alors $|x - y| = y - x$. Nous avons

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\}$$

et

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (y - x)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x, y\}.$$

Le cas $x > y$ se traite de façon analogue.