Feuille 8

$\boxed{Q1}$ V ou F ?

(a) $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue.

f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ avec $g : x \longmapsto x$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \neq 0$. D'après le cours, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{g} = f$ est continue sur x. Donc, f est continue $\Rightarrow$ (a) est <u>vrai</u>.

(b) f et g continues sur x_0 $\Rightarrow$ $f+g$ est continue en x_0. <u>Vrai</u> (vu en cours).

(c) $\underbrace{f \text{ continue en } x_0 \text{ et } g \text{ discontinue en } x_0}_{A} \Rightarrow \underbrace{f+g \text{ est discontinue en } x_0}_{B}$

Contraposée de (c) : $\overbrace{f+g \text{ continue en } x_0}^{\neg B} \Rightarrow \overbrace{f \text{ discontinue en } x_0 \text{ ou } g \text{ continue en } x_0}^{\neg A}$

Supposons $f+g$ continue en x_0. Il y a 2 possibilités pour f :

1) f est discontinue en x_0 $\Rightarrow$ $\neg A$ est vrai

2) f est continue en x_0 $\Rightarrow$ $-f$ est continue en x_0 $\Rightarrow \big((f+g) - f\big)$ est continue en x_0

$\Leftrightarrow$ g est continue en x_0

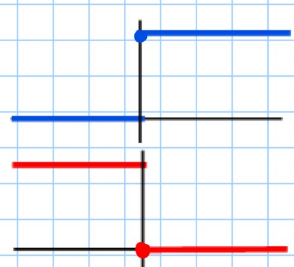
donc $\neg A$ est vrai.

La contraposée de (c) est vrai donc (c) est <u>vrai</u>.

(d) f et g discontinues en x_0 $\Rightarrow$ $f+g$ est discontinue en x_0. <u>Faux</u>. Montrons un contreexemple :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



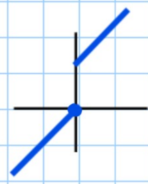
f est discontinue en 0

g est discontinue en 0

Bien que $f+g$ est la fonction constante $f+g : x \longmapsto 1$ qui est continue.

(e) f croissante $\Rightarrow$ f est continue. Faux. Contraexemple:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



f est croissante mais elle n'est pas continue en 0.

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante $\Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existent

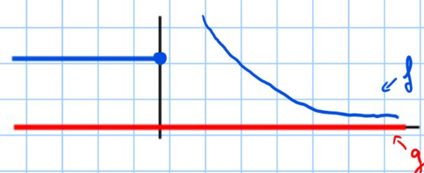
Vrai (théorème du cours)

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x) \Rightarrow l \leq l'$

Vrai (théorème du cours)

(h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l'$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x) \Rightarrow l < l'$

Faux: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$



$g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante.

Comme f est croissante, $(\forall x \geq 0,\ f(0) \leq f(x)) \Leftrightarrow (\forall x \geq 0,\ f(0) + x \leq f(x) + x)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(0) + x = +\infty$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + x = +\infty$

De même, $(\forall x \leq 0,\ f(x) \leq f(0)) \Leftrightarrow (\forall x \leq 0,\ f(x) + x \leq f(0) + x)$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} f(0) + x = -\infty$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = -\infty$

Exercice 2 $\quad f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$

$\forall x > 0, \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \iff \forall x > 0, \quad \frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. D'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = 0.$

Exercice 3 $\quad x \longmapsto \frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1}$

Limite epointée à droite en 1 :

Pour $x > 1$, $\frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1} = \frac{x^2 + x - 1 - 1}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + x - 1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + 1 = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + 1 = x+1+1 = x+2$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x+2 = 3$

Limite épointée à gauche :

Pour $x < 1$, $\frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1} = \frac{x^2 - (x-1) - 1}{x-1} = \frac{x^2 - x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x = 1$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1}$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{x-1}$ n'existe pas.

Exercice 4

$$h(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$ car h est une fonction polynomiale.

Puis $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2x-1 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 = 1$ et $h(1) = 1$

donc $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = h(1) \iff$ h est continue en 1.

En suite, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} x^2 = 16$, $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} 8\sqrt{x} = 16$ et $h(4) = 16$

donc $\lim\limits_{x \to 4} h(4) = h(4) \iff$ h est continue en 4.

<u>Conclusion:</u> h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

$f : x \longmapsto \sqrt[4]{x^3 + x^2}$, $g : x \longmapsto \sqrt[5]{x^3 + x^2}$, $h : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(\cos(x+\pi))}$

$x \in D_f \iff x^3 + x^2 \geq 0 \iff \underbrace{x^2}_{\geq 0}(x+1) \geq 0 \iff x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$ donc $D_f = [-1, +\infty[$.

Comme f est la composée de fonctions continues, f est aussi continue sur son domaine donc f est continue sur $[-1, +\infty[$.

$D_g = \mathbb{R}$ car l'exposant de la racine est impair.

Comme g est la composée des fonctions continues, g est aussi continue sur son domaine donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

$$x \in D_h \Leftrightarrow \ln(\cos(x+\pi)) \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos(x+\pi) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\cos(x)) \neq 0 \quad \text{et} \quad -\cos(x) > 0 \qquad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+\pi) = -\cos(x))$$

$$\Leftrightarrow -\cos(x) \neq 1 \quad \text{et} \quad \cos(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) \neq -1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ x \neq (2n+1)\pi \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right[$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left]\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, (2k+1)\pi\right[\cup \left](2k+1)\pi, \left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right[\right)$$

Donc $D_h = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left]\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, (2k+1)\pi\right[\cup \left](2k+1)\pi, \left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right[\right)$.

Comme h est la composée des fonctions continues, h est aussi continue sur son domaine D_h.

Exercice 6 $\quad a, b \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{1-x} - \dfrac{6}{1-x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ a & \text{si } x = -1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Si $x > 1$, $|f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3}{1-x} - \frac{6}{1-x^2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3(1+x) - 6}{1-x^2} \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-3+3x}{1-x^2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-3(1-x)}{1-x^2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-3}{1+x} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1+x} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < 1+x \Leftrightarrow x > \frac{3}{\varepsilon} - 1 \Leftarrow x > \frac{3}{\varepsilon} =: A > 0$$

On peut définir alors $A = \frac{3}{\varepsilon} > 0$. D'après ce qui précède, $\forall \varepsilon > 0, \exists \underset{\overset{\shortparallel}{3/\varepsilon}}{A} > 0, \forall x \in D_f, (x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

Cela montre que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} \frac{3}{1-x} - \frac{6}{1-x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} \frac{-3}{1+x} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{-3}{1+x} = -\infty$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x)$ donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas $\Leftrightarrow$ f n'est pas continue en -1 quelque soit la valeur de a.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} \frac{3}{1-x} - \frac{6}{1-x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x\neq 1}} \frac{-3}{1+x} = -\frac{3}{2}$

Si $b = -\frac{3}{2}$ alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ $\Leftrightarrow$ f est contime en 1 si $b = -\frac{3}{2}$