Application linéaire 1

HLMA 203
Application Linéaire
Chapitre 6

I) Définition :

Soit un $\mathbb{K}$ ev avec $f : E \to F$

on dit que f est linéaire si

- $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$\to$ On vérifiera tout grâce à :
$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$

Exemple : $E = F = \mathbb{R}$

Les seules applications linéaires sont les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x.1 \Rightarrow f(x) = f(x.1) = x \underbrace{f(1)}_{\lambda}$

Premier réflexes : Pour vérifier f linéaire, on vérifie si $f(0_E) = 0_F$.

Exemple 2 : $E = F = \mathbb{R}^2$

$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc par linéarité de f, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

si $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ alors $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$, en terme de matrices : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Réciproquement, si a, b, c et d de $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + cy \end{pmatrix}$ est linéaire, soient $\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x + \lambda x' \\ y + \lambda y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x + \lambda x') + b(y + \lambda y') \\ c(x + \lambda x') + d(y + \lambda y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax + by + \lambda(ax' + by') \\ cx + dy + \lambda(cx' + dy') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} ax' + by' \\ cx' + dy' \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Exemple 3 $\quad E = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \}$

$E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f \to f'$ $\quad$ La dérivée est linéaire.

I) Sous espaces Vectorielles

Théorème : E, F des $\mathbb{K}$ e.v., $f : E \to F$ linéaire

1°/ $\forall G$ s.e.v. de E, $f(G)$ est un s.e.v. de F.

2°/ $\forall G$ s.e.v. de F, $f^{-1}(G)$ est un s.e.v. de E.

Preuve :

1°/ Soit $u, v \in f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On veut montrer que $u + \lambda v = f(G)$

Puisque $\begin{cases} u \in F(G), \exists u' \in G, f(u') = u \\ v \in F(G), \exists v' \in G, f(v') = v \end{cases}$ $\quad f(u' + \lambda v') = u + \lambda v \in G$ car G est un s.e.v.

2°/ Soient $u, v \in f^{-1}(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on veut que $u + \lambda v \in f^{-1}(G)$.

puisque $\begin{cases} u \in f^{-1}(G), \text{ on a } f(u) \in G \\ v \in f^{-1}(G), \text{ on a } f(v) \in G \end{cases}$ $\quad f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v) \in G$ car G est un sev.

Application linéaire 3

Définition : E, F $\mathbb{K}$ e.v. $\quad f : E \to F$ linéaire

1°/ On appelle image de f le s.e.v $f(E) \subset F$.
On le note $\mathrm{Im}(f)$.

2°/ On appelle noyau de f le s.e.v. $f^{-1}(\{0_F\}) \subset E$.
On le note $\mathrm{Ker}(f)$.

Proposition : Critère d'injectivité des applications linéaires

$$f \text{ est injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$

Preuve :

> Supposons f injective, soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$, on veut montrer que $u = 0_E$.
$f(u) = 0_F = f(0_E)$ donc $u = 0_E$ par injectivité.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

> Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, montrons que f est injective. Soient $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$.
Alors par linéarité, $0_E = f(u) - f(v) = f(u-v)$
donc $(u-v) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $u - v = 0_E$, donc $u = v$,
donc f est injective.

Proposition : Critère de surjectivité des applications linéaires

$$f \text{ est surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F$$

Preuve : $\mathrm{Im}(f) = F \iff \forall u \in F, \exists v \in E, f(v) = u \iff$ surjectif

III Comportements des applications linéaires par rapport aux familles libres et génératrices.

Proposition : $f : E \to F$ linéaire

1°/ si f est surjective, l'image par f d'une partie génératrice de E est une partie génératrice de F.

2°/ Si f est injective, l'image par f d'une partie libre de E est une partie libre de F.

$\Rightarrow$ Si f est bijective, l'image par f d'une base de E est une base de F.

Conséquences : Une application linéaire est entièrement déterminé par l'image d'une base.

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, et $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$.

Alors $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f\left(x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$

Définition :

1°/ Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire $E \to E$

2°/ Un isomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est une application de $f : E \to F$ linéaire et bijective

3°/ Un automorphisme est un endomorphisme isomorphe.

Définition : si $E \to F$ linéaire et si $\dim(\mathrm{Im}(f))$ est finie, on l'appelle Rang de f et on le note $\mathrm{rg}(f)$

Application linéaire 5

Théorème du Rang

Soit $\begin{cases} E, F \ \mathbb{K} \text{ e.v., } E \text{ de dimension finie} \\ f : E \to F \end{cases}$

Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

E est un $\mathbb{K}$.e.v de dimens° finie muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$
$\dim E = n$.
F ——————————————— $(f_1, \dots, f_p)$
$\dim F = p$

$$f : E \to F \text{ linéaire.}$$

$\forall i = 1, \dots, n$, $f(e_i) \in F$. Donc $f(e_i)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$. Donc $\exists \lambda_{ji}, j = 1, \dots, p \in \mathbb{K}$ tq
$f(e_i) = \lambda_{1i} \cdot f_1 + \dots + \lambda_{pi} \cdot f_p$.

Prenons maintenant un vect[r] qcq de E $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ($x_1, \dots, x_n$ s[t] les coordonnées du vect[r] u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$).

Par linéarité de f, $f(u) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$ $x_1 f(e_1)$

$$= x_1(\lambda_{11} \cdot f_1 + \dots + \lambda_{p1} \cdot f_p) + \quad x_2 f(e_2)$$
$$x_2(\lambda_{12} \cdot f_1 + \dots + \lambda_{p2} \cdot f_p) +$$
$$\vdots$$
$$x_n(\lambda_{1n} \cdot f_1 + \dots + \lambda_{pn} \cdot f_p)$$

$$f(u) = (\lambda_{11} x_1 + \dots + \lambda_{1n} x_n) f_1 +$$
$$(\lambda_{21} x_1 + \dots + \lambda_{2n} x_n) f_2 +$$
$$\underbrace{(\lambda_{p1} x_1 + \dots + \lambda_{pn} x_n)}_{\text{coordonnées du vect}^r f(u) \text{ dans la base } f_1, \dots, f_p} f_p$$

les colonnes de la colonne s[t] les coordonnées des images de $(e_1 \dots e_n)$ dans la base $(f_1 \dots f_p)$

Donc le vect^r des coordonnées de $f(u)$ dans la base $f_1, \dots, f_p$ (c'est un vect^r de $\mathbb{K}^p$) est égal à la matrice

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{p1} & \cdots & \lambda_{pn} \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}_{B',B}(f)} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

base à l'arrivée (B'), base au départ (B)

<u>Application</u> : Pour trouver $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, on résout des systèmes linéaires.

- L'ensemble des coordonnées dans la base B des vect^r de $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des solut° du système linéaire homogène dont la matrice est $\mathrm{Mat}_{B',B}(f)$.
- $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des vect^r de F dont les coordonnées rendent compatibles le système de matrice augmentée $\left(\mathrm{Mat}_{B',B}(f) \middle| \begin{smallmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{smallmatrix}\right)$.

<u>Exemple</u> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{B'B}(f)$ $(\dim E = \dim F = 3)$

On cherche $\mathrm{Im}(f)$ = on résout

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 2 & c \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+a \end{array}\right)$$

<u>Condit° de compatibilité</u> = $c - b + a = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{af_1 + bf_2 + cf_3 \mid c - b + a = 0\} \\ &= \{af_1 + bf_2 + (b-a)f_3 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(f_1 - f_3) + b(f_2 + f_3) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{\underbrace{(f_1 - f_3), (f_2 + f_3)}_{}\} \end{aligned}$$

famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ (base en fait)

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \text{sol du système } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \text{sol de } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \right\} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} = \left\{ \text{sol de } \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \right\}$$

$$= \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1, -2, 1) = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$$

IV - Matrice et applications

On a maintenant 3 $\mathbb{K}$-e.v E, F, G.

bases B, B', B''

$(e_1, \dots, e_n)\ (f_1, \dots, f_p)\ (g_1, \dots, g_k)$

Applicat° linéaires $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, $g \circ f$

Soient $A = \mathrm{Mat}_{B', B}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{B'', B'}(g)$.

Théorème

$$\mathrm{Mat}_{B'', B}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{B'', B'}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{B', B}(f)$$

Preuve (avec l'associativité du produit matriciel)

Soit $u \in E$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base B.

$f(u) \in F$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ ——— la base B'.

$g(f(u)) \in G$ $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}$ ——— la base B''.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{B', B}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g) \cdot \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \right)}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g(f))} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to x+y$ $\qquad \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \to \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}(g \circ f) = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathrm{Mat}(f \circ g) = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$f(g(x)) = f\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x + (-x) = 0$

Cas particuliers : endomorphismes

$f : E \to E$ linéaire $\quad f \circ f$ est bien définie, pareil pour $f \circ f \circ f \ldots$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f \circ f) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))^2$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))^n$

Définition

Si $P \in \mathbb{K}[x]$, $\begin{cases} P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ \text{le polynome d'endomorphisme} \end{cases}$

$P(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(n)}$ où $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ $\qquad f^{(0)} = \text{identité}$

Exemple: $P(x) = x^2 - 1$

$P(f) = f \circ f - id$

Application : Supposons $P(f)=0$ (endomorphisme nul de E)

Donc $f\circ f = id$. Si on veut calculer $f^{(2000)}$, il suffit d'observer que $f^{(2000)} = (f^{(2)})^{(1000)} = (id)^{(1000)} = id$.

$P(x)=1 \quad P(f)=id \quad P(x)=2 \quad P(f)=2id$.

Autre application : équations différentielles

$E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (fonct° infinim^t dérivables)

La dérivat° est un endomorphisme de E. On regarde l'équat°

$f''-2f'+f=0$. $\quad D : E \to E$, $f \mapsto f'$

$\Leftrightarrow D\circ D(f) - 2D(f) + f = 0$.

$\Leftrightarrow P(D)(f) = 0$ (où $P(X) = X^2-2X+1$)

Exemples : • $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ On cherche la matrice, l'image et le noyau.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y-z \\ x-y+z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, $\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=3} + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=0} = 3$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est dans $\mathrm{Im}(f)$ si et seulem^t si

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \text{ est compatible. } \xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \to L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -2 & 2 & b-a \\ 0 & 2 & 0 & c+a \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -2 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & b+c \end{array}\right)$$

Pivot à chaque ligne (pas de ligne de 0) $\Rightarrow$ pas de condit° de compatibilité

Donc $\forall$ vect^r $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est dans $\mathrm{Im}(f)$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ surjectif

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) =$ espace d'arrivée

Application linéaire 10

Soit E un $\mathbb{K}$e-v muni de deux bases $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$.
$B_2 = (e'_1, \dots, e'_n)$.

endomorphisme de E

$f \in \mathcal{L}(E)$, on peut calculer $Mat_{B_1}(f)$ ou $Mat_{B_2}(f)$

Rappel : $f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$.

$Mat_{B_1}(f) = (a_{ij})_{i=1 \dots n}$

On cherche à exprimer $Mat_{B_2}(f)$ en fonct° de $Mat_{B_1}(f)$.

Idée : $Mat_{B_2}(f)$ transforme les coordonnées de $f(u)$ de la base B_2.

1) On commence par transformer les coordonnées de u dans la base B_2 en coordonnées dans la base B_1.

2) Je transforme les coordonnées de B_1 de u en coordonnées de B_1 de $f(u)$ par $Mat_{B_1}(f)$.

3) On retransforme les coordonnées de B_1 de $f(u)$ en coordonnées de B_2.

Application

1) Écrivons en colonnes les coordonnées de B_1 de $e'_1, \dots, e'_n$.

$e'_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix}, \dots, e'_n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$ | $e'_1 = p_{11} e_1 + \dots + p_{n1} e_n$

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$ Matrice de passage de B_1 à B_2, elle transforme les coordonnées de B_2 en coordonnées de B_1.

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $B_1 = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ et $B_2 = \left\{ \underset{e'_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{e'_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrice de passage de B_1 à B_2

Pourquoi est-ce que P transforme les coordonnées de B_2 en coordonnées de B_1 ?

Application linéaire 11

Dans la base B_2, $e'_1 = 1.e'_1 + 0\, e'_2 \longrightarrow$ coordonnées de B_2 de e'_1 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$e'_2 = 0.e'_1 + 1.e'_2 \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ coordonnées de B_2 de e'_1 $\qquad$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \leftarrow$ coordonnées de B_2 en e'_2

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \leftarrow$ coordonnées de B_1 de e'_1 $\qquad$ $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \leftarrow$ coordonnées de B_1 en e'_2

Soit $u \in \mathbb{R}^2$, $u = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2$ coordonnées de B_2 de u $\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix}$

coordonnées de B_2 de u $\rightarrow \begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix} = x'_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x'_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'_1 + x'_2\\x'_1 - x'_2\end{pmatrix} \leftarrow$ Coordonnées de B_1 de u

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1 + x'_2\\x'_1 - x'_2\end{pmatrix} \leftarrow$ coordonnées de B_1 de u

coordonnées de B_2 de $f(u)$ $= \underbrace{P_{B_2,B_1} . Mat_{B_1}(f) . P_{B_1,B_2}}_{Mat_{B_2}(f)} . \begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$ coordonnées de B_2 de u

$Mat_{B_2}(f) = P_{B_2,B_1} . Mat_{B_1}(f) . P_{B_1,B_2}$. En fait, P_{B_2,B_1} est l'inverse de P_{B_1,B_2}.

En effet, si on a un vect^r u, de coordonnées de B_2 $\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$.

$P_{B_1,B_2} . \begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$ = vect^r des coordonnées de B_1 de u.

Donc $(P_{B_2,B_1} . P_{B_1,B_2}) . \begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$ = coordonnées de B_2 de $u = \begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix}$.

Ainsi, $P_{B_2,B_1} . P_{B_1,B_2} = Id$.

Du coup, on peut réécrire la formule : $P = P_{B_1,B_2}$

$Mat_{B_2}(f) = P^{-1} . Mat_{B_1}(f) . P$

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}$ $\qquad Mat_{B_1}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

$P_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

Application linéaire 12

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{L_2\to L_2-L_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&-2&-1&1\end{array}\right) L_2\to -\frac{L_2}{2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&1/2&-1/2\end{array}\right) \xrightarrow{L_1\to L_1-L_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&1/2\\0&1&1/2&-1/2\end{array}\right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{pmatrix} = 1/2\, P$.

$$Mat_{B_2}(f) = P^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}P = \frac{1}{2}P.\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.P = \frac{1}{2}\overbrace{P}^{\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2&0\\2&0\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

$f'(e_2') = 0_{\mathbb{R}^2}$

$f(e_1') = 2e_1'$ $\quad f(e_1') = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\quad f'(e_2') = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$

À quoi ça sert ? Imaginons qu'on veuille calculer f^{2019}.

$M = Mat_{B_1}(f) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $M' = Mat_{B_2}(f) = \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, $P = P_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

$M' = P^{-1}.M.P \iff P.M'.P^{-1} = M$

$M^2 = (PM'P^{-1})(PM'P^{-1}) = PM'\overbrace{PP^{-1}}^{Id}M'P^{-1} = P(M')^2P^{-1}$. Par récurrence, $M^n = P(M')^nP^{-1}$.

Mais M' est une matrice diagonale donc ses puissances s^t faciles à calculer : $M' = \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$, $(M')^2 = \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$ ... $(M')^n = \begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$

$(M')^{2019} = \begin{pmatrix}2^{2019}&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Donc $M^{2019} = P\begin{pmatrix}2^{2019}&0\\0&0\end{pmatrix}.P^{-1} = \frac{1}{2}\underbrace{P}_{\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2^{2019}&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$

$$= \frac{1}{2}P\underbrace{\begin{pmatrix}2^{2019}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2^{2019}&2^{2019}\\0&0\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{2019}&2^{2019}\\0&0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^{2019}&2^{2019}\\2^{2019}&2^{2019}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^{2018}&2^{2018}\\2^{2018}&2^{2018}\end{pmatrix}$$

Application linéaire 13

Pourquoi voudrait-on calculer des grandes puissances de matrices ?

<u>Exemple</u> : Une populat° se répartit en malades et pas malades.

m_n = nbre de malades le n-ième jour.

s_n = ——— pas malades ———.

Chaque jour, une proport° α de pas malades tombe malade.

——— β ——— malades guérit.

Le jour $n+1$, $m_{n+1} = m_n - \beta m_n + \alpha s_n = (1-\beta)m_n + \alpha s_n$.

$s_{n+1} = \beta m_n + s_n - \alpha s_n = \beta m_n + (1-\alpha)s_n$.

Donc $\begin{pmatrix} m_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-\beta & \alpha \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix} m_n \\ s_n \end{pmatrix}$

Mais $\begin{pmatrix} m_n \\ s_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} m_{n-1} \\ s_{n-1} \end{pmatrix}$ Par récurrence

$\begin{pmatrix} m_n \\ s_n \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} m_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ ← début de l'épidémie

↑ populat° totale

Il est intéressant de trouver une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle M devient diagonale.

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$, $P = P_{B_1,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ -1 & \beta & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \to L_2 + L_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & 1 & 1 \end{array}\right) L_2 \to \frac{L_2}{\alpha+\beta} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\beta} \end{array}\right)$

$L_1 \to L_1 - \alpha L_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{-\alpha}{\alpha+\beta} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+\beta} & 1/\alpha+\beta \end{array}\right)$ Donc $P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$

$P^{-1}\begin{pmatrix} 1-\beta & \alpha \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix} P = P^{-1}\begin{pmatrix} 1-\beta & \alpha \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\beta-\alpha & \alpha \\ \beta+\alpha-1 & \beta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1-\alpha-\beta & \alpha \\ \beta+\alpha-1 & \beta \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta-\alpha\beta-\beta^2-\alpha\beta-\alpha^2+\alpha & \alpha\beta-\alpha\beta \\ 1-\alpha-\beta+\beta-1+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha+\beta-(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta) & 0 \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1-\alpha-\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $M^n = P . \begin{pmatrix} (1-\alpha-\beta)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . P^{-1}$

<u>Autre exemple</u> :

$\text{Mat } f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Il faut écrire $\text{Mat}_{B_2} f$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2} \underset{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{P}$

$\text{Mat}_{B_2} f = \frac{1}{2} P . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P = \frac{1}{2} P . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} P . \underset{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$