Calcul Intégral 1

HLMA203

Calcul Intégral

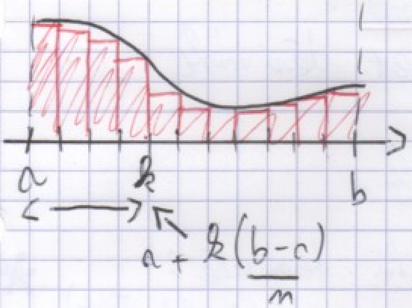
I) Sommes de Riemann

Théorème de Riemann :

Si f est continue, la limite existe.

On l'appelle intégrale de f entre a et b noté $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$

Exemple :



Aire d'un rectangle rouge : $\left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$

⚠ L'aire de la courbe en dessous de 0 est comptée négativement :

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = \square - \square}$$

Propriétés :

OPPOSÉ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

POSITIVITÉ Si $f(x) \geq 0$ pour tt x, et $b \geq a$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

LINÉARITÉ Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$

Calcul Intégral 2

RELATION DE CHASLES Soit $c \in [a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Alors : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\Rightarrow$ Permet d'intégrer des fonctions discontinue.

Définition : Soit $f = [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$\forall t \in [a,b]$, f est continue sur $[a,b]$ donc

$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ existe.

Théorème fondamental de l'analyse :

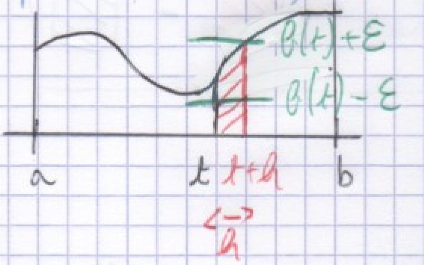
La fonction $F(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivée est f.

$\Rightarrow F(t)$ est une primitive de f.

Preuve = Rappel de la définition de la dérivée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall h \in \mathbb{R}, |h| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) \right| \leq \varepsilon \quad *$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall h \in \mathbb{R}$, $|h| < \alpha \Rightarrow |f(t+h) - f(t)| < \varepsilon$.



▨ $= F(t+h) - F(t)$

L'aire rouge est inférieure à l'aire de $(h \cdot (f(t)+\varepsilon))$ et supérieure à l'aire de $(h \cdot (f(t)-\varepsilon))$.

$$\Rightarrow h(f(t) - \varepsilon) \leq F(t+h) - F(t) \leq h \cdot (f(t) + \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow f(t) - \varepsilon \leq \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \leq f(t) + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon \leq \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow *$$

$\Rightarrow F$ est dérivable et sa dérivée est f.

Calcul Intégral 3

<u>Définition :</u> $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, on appelle primitive de f une fonction $F = [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $F' = f$.

Le Théorème fondamental nous dit qu'il existe une infinité de primitive parce que l'on peut choisir n'importe quel $c \in [a, b]$.

<u>Remarque :</u> Deux primitives de f diffèrent d'une constante.

<u>exemple :</u> $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{constante qui dépend du c choisi}} + \underbrace{\int_c^t f(x)\,dx}_{G(t)}$

<u>Cas Général :</u> Supposons F et G deux primitives de f sur $[a, b]$. $F' = f = G'$ donc par linéarité $F - G = 0$ donc $F - G$ est constante sur $[a, b]$

$\Rightarrow$ F et G sont égaux à une constante près.

II) Calcul de Primitives et d'Intégrales

<u>1° Méthode : Primitive</u>

⚠ Bien connaître les dérivées usuelles et les dérivées composées pour reconnaître et construire les primitives.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $c, d \in [a, b]$.

Alors : $\boxed{\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c)}$

<u>2e Méthode : Intégration par partie</u>

Application de la formule de la dérivée d'un produit $(uv)' = uv' + u'v$.

Supposons qu'on veuille intégrer $f(x) = u(x)\,v(x)$

Calcul Intégral 4

On sait dériver u et intégrer v. Soit V, une primitive donc

$f(x) = u(x)V'(x)$

$$F(x) = u(x)V(x) - \underbrace{\int}_{\text{Primitive}} u'(x)V_x \, dx$$

<u>exemple</u> : • $f(x) = x e^x$ sur $\mathbb{R}$ $\quad u(x) = x \quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$

$F(x) = \int u(x) v'(x) \, dx$

$= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$

$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + cte$

$= e^x(x-1) + cte$

• $g(x) = \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_*^+$

on écrit $f(x) = u'(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$

$v(x) = \ln(x)$

donc $F(x) = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$

$= x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x.\ln(x) - \int 1.dx$

$= x\ln(x) - x + cte$

$= x(\ln(x) - 1) + cte$

• On cherche à calculer $\int_1^2 (\ln(x))^2 dx$

On commence par chercher une primitive de $h(x) = (\ln x)^2$

On écrit $h(x) = \underbrace{\ln x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v}$ avec $u(x) = x\ln(x) - x$

$v(x) = \ln(x)$

$\int_1^2 h(x)\,dx = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 (x\ln(x) - x)\frac{1}{x} dx$

$= [\ln x(x\ln x - x)]_1^2 - \int_1^2 (\ln x - 1)\,dx$

$= [\ln x(x\ln x - x)]_1^2 - \int_1^2 \ln x\,dx + \int_1^2 1.dx$

Calcul Intégral 5

$$\int_1^2 h(x)\,dx = \left[\ln x\,(x\ln(x)-x)\right]_1^2 - \left[x\ln(x)-x\right]_1^2 + \left[x\right]_1^2$$

$\ln 1 = 0$

$$= \underline{\ln 2(2\ln 2-2)} - (\underline{2\ln 2-2}) + (\underline{1.\ln 1-1}) + 2 - 1$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + 2 - 1 + 1 - 1$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 1$$

- $i(x) = x\cos(x)$. On cherche $\int_0^1 x\cos(x)\,dx$

$$\int x\cos x\,dx = uv - \int u'v$$

on prend $u(x) = x \,/\, u'(x) = 1$
$v(x) = \sin x \,/\, v'(x) = \cos x$

$$= x\sin(x) - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin(x) + \cos x + cte$$

$$\to \int_0^1 x\cos(x)\,dx = \left[x\sin x + \cos x\right]_0^1 = \sin 1 + \cos 1 - \cos 0$$

$$= \sin 1 + \cos 1 - 1$$

III Changement de variable

On sait que $(f\circ g)' = f'\circ g \cdot g'$

<u>Théorème</u> : Soit I, J, des intervalles de $\mathbb{R}$. $f : J \to \mathbb{R}$ continue et $\phi : I \to \mathbb{R}$ dérivable et ϕ' continue

$$\forall a, b \in I \int_a^b f(\phi(t)).\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)\,ds$$

<u>Preuve</u> : Soit $F : J \to \mathbb{R}$
$y \to \int_{\phi(a)}^{y} f(s)\,ds$
$\begin{cases} F' = f \\ F(a) = 0 \end{cases}$

$G : I \to \mathbb{R}$
$x \to \int_a^x f(\phi(t)).\phi'(t)\,dt$
$\begin{cases} G' = f\circ\phi.\phi' \\ G(a) = 0 \end{cases}$

Calcul Intégral 6

On a $G = F \circ \phi$: > $G' = f \circ \phi . \phi'$ et $(F \circ \phi)' = F' \circ \phi . \phi'$
$= f \circ \phi . \phi'$

Même dérivée donc leur différence est constante.

> D'autre part $G(a) = 0$ et $F \circ \phi(a) = F(\phi(a)) = 0$

Pratique:

On veut calculer $\int_a^b f(t)\,dt$

On vous donne la nouvelle variable $\begin{cases} x = \varphi_1(t) & \text{(direct)} \\ t = \varphi(x) & \text{(inverse)} \end{cases}$

1° changer le dx : $t = \varphi(x)$ $\quad \frac{dt}{dx} = \varphi'(x) \Leftrightarrow dt = \varphi'(x)\,dx$

$x = \varphi(t)$ $\quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \Leftrightarrow dx = \varphi'(t)\,dt$

2° changer les bornes de l'intégrale = se poser la question " Pour tout $t = a$, ou b, x vaut combien ? "

Exemple: $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$du = -\sin x \, dx$

$u : [0, \frac{\pi}{4}] \to [1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{-du}{u} = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u} =$

$-[\ln u]_1^{\sqrt{2}/2} = [\ln u]_{\sqrt{2}/2}^1$

$= \ln 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\left(\left(\frac{2}{4}\right)^{1/2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$

Calcul Intégral 7

Exemple 2 : $I = \int_a^b \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt$ avec la nouvelle variable $x = \sqrt{t}$.

$a, b \geq 0$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \iff dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ et $dt = 2x\,dx$

$$I = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{2x\,dx}{1+x} = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{x}{1+x}\,dx = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1+x-1}{1+x}\,dx$$

$$= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \left(\frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$2\left[x - \ln(1+x)\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} = 2\left(\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b}) - \sqrt{a} + \ln(1+\sqrt{a})\right)$$

Exemple 3 : $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (trouver toutes les primitives de $\frac{e^x}{1+e^x}$)

$u = 1 + e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x \qquad du = e^x\,dx \iff dx = e^{-x}\,du = \frac{1}{u-1}\,du$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{u-1}{u}\,\frac{1}{u-1}\,du = \int \frac{du}{u} = \ln u + \text{cte} = \ln(1+e^x) + \text{cte}$$

IV Fraction rationnelle (quotients de polynome)

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ on se place sur un intervalle I où Q ne s'annule pas.

1° Faire la division euclidienne : $P = SQ + R$ avec $d°(R) < d°(Q)$

$P/Q = S + \frac{R}{Q}$ trouver une primitive de S

Calcul Intégral 8

1° cas : $d°(Q) = 1$ $\quad \frac{P}{Q} = \frac{\lambda}{x-a}$ où $\lambda, a \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{P}{Q} = \lambda \ln(x-a) + cte$$

2° cas : $d°(Q) = 2$

2.1 Q se factorise dans $\mathbb{R}$, $Q(x) = \lambda(x-a)(x-b)$

On cherche des nombres α et β tels que

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$

alors $\frac{P}{Q} = \alpha \ln|x-a| + \beta \ln|x-b| + cte$

(sur les intervalles où $x \neq a, b$)

Exemples : $\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$ $\quad x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$

on cherche α et β tel que

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x+1} \iff \frac{\alpha(x+1) + \beta(x+2)}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$$

$\iff$ (pour $x \neq -2, -1$) $\alpha(x+1) + \beta(x+2) = 2x+1$

$\iff (\alpha+\beta)x + \alpha + 2\beta = 2x+1$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+1}$ pour $x \neq -2, -1$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \int \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+1} = 3\ln(x+2) - \ln(x+1) + cte$$

sur $]-\infty, -2[$, $]-2, -1[$ et $]-1, +\infty[$

Calcul Intégral 9

Cas 2.2 : Q est irréductible dans $\mathbb{R}$

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } b^2 - 4ac < 0.$$

On se ramène à Q unitaire en mettant a en facteur

Supposons donc $Q(x) = x^2 + \alpha X + \beta$ avec $\alpha^2 - 4\beta < 0$

$$= \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}$$

On fait le changement de variable $u = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right) / \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}$

$$du = dx / \sqrt{\beta - \alpha^2/4}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{\gamma x + \delta}{\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\gamma x + \delta}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta - \frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]} = \frac{\gamma' u + \delta'}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)(u^2+1)}$$

On s'est ramené à intégrer

$$\int \frac{ax+b}{x^2+1}\,dx = a \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + b \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= a \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + b \arctan(x) + cte$$

Exemple : $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$ $\qquad x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)^2 + 1\right]$$

$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ | $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u$

$du = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx$ | $x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2} \iff x + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}(u^2+1)} \sqrt{3}\,du$$

* La moitié de la dérivé de $\ln(u^2+1)$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}}{u^2+1} = \int \frac{u}{u+1}\,du + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan u + cte$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + cte$$