Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2021-2022
Licence 2ère année - Semestre 2
Informatique - Algèbre linéaire et calcul matriciel

HAI406 - Feuille de TD nr.5

N.B : Le symbole ($\bullet$) signale les exercices à travailler en priorité et le symbole ($\star$) les exercices facultatifs.

Exercice 1. ($\bullet$) Vrai ou faux ?

1. Une base de $\mathbb{R}^6$ est toujours composée de six vecteurs.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, il n'existe qu'une seule base : la base canonique.
3. Si deux vecteurs ont la même colonne de coordonnées dans une base $\mathcal{B}$, alors ils sont égaux.
4. $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si seulement si aucun des vecteurs U_j n'est nul.
5. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$, la matrice passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est carrée, d'ordre 3 et non-inversible.
6. Soit P la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ dans $\mathbb{R}^4$. Si $V \in \mathbb{R}^4$, la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$ s'obtient en faisant le produit de P^{-1} par la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
7. Si P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ dans $\mathbb{R}^5$, la 3ème colonne de P est la colonne des coordonnées du 3ème vecteur de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2. ($\bullet$) Dans chacun des cas suivants, dire si la famille $\mathcal{B}$ est une base de l'espace considéré et, le cas échéant, calculer la colonne $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(V)$ des coordonnées du vecteur V dans $\mathcal{B}$.

1. Espace: $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{B} = (U_1, U_2)$ avec $U_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. Espace: $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{B} = (U_1, U_2)$ avec $U_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
3. Espace: $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ avec $U_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.
4. Espace: $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ avec $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $U_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
5. Espace: $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = (U_1, U_2)$ avec $U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 3. ($\bullet$) On considère dans $\mathbb{R}^2$ les deux familles de vecteurs suivantes: $\mathcal{B} = (U_1, U_2)$ et $\mathcal{B}' = (U'_1, U'_2)$ définies par :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. En déduire les formules exprimant les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}$. Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

3. Soit le vecteur $V = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Calculer la colonne $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(V)$. En utilisant, la formule de changement de coordonnées, calculer $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}'}(V)$. En déduire l'expression du vecteur V d'abord en fonction de U_1 et U_2, puis en fonction de U_1' et U_2'.

4. Faites un schéma illustrant la situation dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé (on y fera notamment figurer le vecteur V et les différentes bases mises en jeu).

Exercice 4. ($\bullet$) On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, E_3)$. On considère de plus la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$ définie par :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer la matrice de passage U de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Puis celle de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$.

3. Si $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, écrire la colonne $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}_0}(V)$ puis calculer la colonne $\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(V)$.

Exercice 5. ($\bullet$) On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$, et la famille $\mathcal{B} = (U_1, U_2)$ constituée des deux vecteurs $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $U_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice de passage U de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

2. Donner la matrice $A = M_{\mathcal{B}_0}(\phi)$ de ϕ dans la base canonique, et sa matrice $A' = M_{\mathcal{B}}(\phi)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}$.

3. Soit $V \in \mathbb{R}^2$. Notons $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(V)$ et $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(\phi(V))$. Exprimer y_1' et y_2' en fonction de x_1' et x_2'.

Exercice 6. ($\bullet$) Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que les nombres $\mathrm{Tr}(M_{\mathcal{B}}(\phi))$ et $\det(M_{\mathcal{B}}(\phi))$ ne dépendent pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7. ($\star$) Soit $\mathcal{B} = (U_1, \ldots, U_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrez que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. Tout vecteur V de $\mathbb{R}^n$ peut se décomposer suivant une combinaison linéaire des U_j.

2. Pour toute famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de n réels, si $\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_n U_n = 0$ alors tous les λ_j sont nuls.

3. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.