Algèbre linéaire et analyse 1
(HLMA101 – Année universitaire 2020–2021)

Feuille d'exercices N°8

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. Vrai ou faux ?

(a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue.

(b) La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.

(c) La somme d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en un point est discontinue en ce point.

(d) La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.

(e) Toute fonction croissante est continue.

(f) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, elle admet en tout point de $\mathbb{R}$ des limites épointées à droite et à gauche.

(g) Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent des limites ℓ et ℓ' en $+\infty$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$. Alors $\ell \leq \ell'$.

(h) Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent des limites ℓ et ℓ' en $+\infty$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$. Alors $\ell < \ell'$.

2. Travaux dirigés

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Déterminer les limites de la fonction $x \mapsto f(x) + x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 3. La fonction $x \mapsto \frac{x^2+|x-1|-1}{x-1}$ admet-elle une limite épointée à droite ou à gauche quand x tend vers 1 ? Existe-t-il $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x^2+|x-1|-1}{x-1}$?

Exercice 4. Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x - 1$ si $x < 1$, $h(x) = x^2$ si $1 \leq x \leq 4$ et $h(x) = 8\sqrt{x}$ si $x > 4$. Étudier sa continuité.

Exercice 5. Expliciter le domaine de définition et le domaine de continuité des fonctions :

$$f : x \mapsto \sqrt[4]{x^3 + x^2}, \qquad g : x \mapsto \sqrt[5]{x^3 + x^2}, \qquad h : x \mapsto \frac{1}{\ln(\cos(x+\pi))}.$$

Exercice 6 (Examen de session 2, juin 2018). Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{6}{1-x^2} \quad \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(-1) = a \quad \text{et} \quad f(1) = b.$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un réel A tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x > A$. Que démontre-t-on ainsi ?

(b) En réglant les valeurs de a et b, peut-on rendre f continue en -1 ? Et en 1 ?

3. Révisions et approfondissement

Exercice 7. Les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ peuvent-elles être prolongées en des fonctions continues dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$?

(a) La fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{|x|}$ pour tout $x \neq 0$.

(b) La fonction v définie par $v(x) = x\left|1 + x^{-1}\right|$ pour tout $x \neq 0$.

(c) La fonction w définie par $w(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$.

(d) La fonction z définie par $z(x) = e^{-1/x^2}$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 8. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue nulle part, telle que $|f|$ soit continue.

Exercice 9 (critère de convergence de Cauchy). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la propriété :

$$(C) : \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, \forall y \geq A, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

1) Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$, alors f vérifie la propriété (C).

2) On suppose que f vérifie la propriété (C).

(a) Montrer qu'il existe un réel A_0 tel que f soit bornée sur $[A_0, +\infty[$.

(b) On définit une fonction $s : [A_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule
$$s(x) = \sup f([x, +\infty[).$$
Expliquer pourquoi s est bien définie sur $[A_0, +\infty[$.

(c) Montrer que la fonction s est décroissante et minorée. En déduire qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$.

(d) Montrer que f tend vers ℓ en $+\infty$ et conclure.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2-périodique qui tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 11. Étudier la continuité de la fonction $x \mapsto E(\sin x)$ (où E désigne la partie entière).

Exercice 12 (d'après Contrôle continu, Novembre 2014). Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x}$.

(a) Montrer qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Quelles sont ses limites, si elles existent, en $\pm\infty$?

(c) Est-il possible de prolonger f par continuité en 0 (c'est-à-dire de trouver un réel a tel qu'en posant $f(0) = a$ on obtienne une fonction continue en 0) ?

Exercice 13. Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si x est rationnel et $f(x) = x$ si x est irrationnel. Étudier la continuité de f (on rappelle que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$).

Défi. On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante. Si $x \in \mathbb{R}$ est irrationnel on pose $f(x) = 0$. Si x est un rationnel on pose $f(x) = 1/q$ où q est le plus petit entier strictement positif tel que $qx \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.