Programme

- Introduction
- La syntaxe de la LP
- La sémantique de la LP
- Equivalence logique et Substitution
- Conséquence logique
- Modélisation
- Théorie de la preuve
- Méthode des séquents
- **Formes normales et clausale**
- Méthode de résolution
- Méthode de Davis et Putnam

Littéral

- Un ***littéral*** est une fbf réduite à un symbole propositionnel ou à la négation d'un symbole propositionnel
  - On parle de *littéral positif* (ex. p)
    ou de *littéral négatif* (ex. $\neg$p)
- On parle du *littéral opposé* d'un littéral donné (ex. $\neg$p et p sont opposés)

Formes conjonctive et disjonctive

- Une fbf est dite sous *forme conjonctive* lorsqu'elle est composée d'une conjonction de disjonctions de littéraux
  - Exemple : $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

- Une fbf est dite sous *forme disjonctive* lorsqu'elle est composée d'une disjonction de conjonctions de littéraux
  - Exemple : $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q)$

Formes normales

- Une fbf P est dite sous forme ***normale*** conjonctive (resp. disjonctive) lorsqu'elle est sous une forme conjonctive (resp. disjonctive) telle que **tous les symboles propositionnels** (ceux de P ou ceux de l'ensemble S considéré) apparaissent exactement 1 fois dans chaque disjonction (resp. conjonction)
  - Ex. de FNC : $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$
  - Ex. de FND: $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

- Remarque : un littéral seul est à la fois FNC et FND

- Propriété : A une permutation des littéraux, conjonctions et disjonctions près, les FNC et FND sont **uniques** pour un ensemble de symboles S donné.
  - On peut donc tester l'équivalence de deux fbf en comparant syntaxiquement leur FNC (ou FND)

Formes normales

- Les FND et FNC correspondent à la table de vérité de la formule :
  - FND : on fait la disjonction des conjonctions des littéraux associés aux interprétations donnant la valeur 1 à la fbf
  - FNC : on fait la conjonction des disjonctions des opposés des littéraux associés aux interprétations donnant la valeur 0 à la fbf
- Exemple :

p	q	**P**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

FND(P) $= (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

FNC(P) $= (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Par ailleurs, $P \equiv \neg p$

Clause

- Une ***clause*** est une représentation ensembliste de disjonctions de littéraux
  - Exemple : $\{\neg p, q, \neg r, s\}$
  - La sémantique d'une clause est complètement définie par l'ensemble des littéraux qui la composent
  - Une **infinité de disjonctions de littéraux** peut être associée à une clause mais elles sont **toutes sémantiquement équivalentes**
    - idempotence, associativité et commutativité de la disjonction
- On associe la proposition $\perp$ à la clause vide (notée $\emptyset$)
  - toute disjonction associée à une clause $C=\{L_1,L_2,\ldots,L_k\}$ est logiquement équivalente à $((L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_k) \vee \perp)$
  - La sémantique de $\emptyset$ est donc 0

Forme clausale

- Une ***forme clausale*** est une représentation ensembliste d'une forme conjonctive
  - Exemple : $\{\{p,q,\neg r\}, \{p,\neg s\}, \{\neg r,\neg s\}, \{q\}\}$
  - La sémantique d'une forme clausale est complètement définie par l'ensemble des clauses qui la composent
  - Une **infinité de formes conjonctives** peut être associée à une forme clausale mais elles sont **toutes sémantiquement équivalentes**
    - idempotence, associativité et commutativité de la conjonction
- On associe la proposition T à l'ensemble vide de clause (noté {})
  - toute forme disjonctive associée à une forme clausale $F=\{C_1,C_2,\ldots, C_k\}$ est logiquement équivalente à $((C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k) \wedge T)$
  - La sémantique de l'ensemble vide de clause est donc 1

Mise sous forme clausale

- **Théorème**

  « On peut associer à toute fbf P une forme clausale F logiquement équivalente à P »

  – Il n'y a pas d'unicité !

- Algorithme de mise sous forme clausale (par formulaires)

1. Éliminer les $\Leftrightarrow$

   $(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

2. Éliminer les $\Rightarrow$

   $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$

3. Ramener la négation devant les symboles propositionnels et supprimer les négations multiples

   $\neg\neg P \equiv P$ $\quad$ $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$ $\quad$ $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$

4. Inverser les disjonctions de conjonction

   $((P \vee (Q \wedge R) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

5. *Passer de la **forme conjonctive** obtenue à sa **forme clausale***

Mise sous forme clausale (exemple)

$(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Leftrightarrow p)$	on élimine les $\Leftrightarrow$
$\equiv (p \Rightarrow q) \vee \neg(\ (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)\ )$	on élimine les $\Rightarrow$
$\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(\ (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)\ )$	on « descend » les $\neg$
$\equiv (\neg p \vee q) \vee (\ (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q)\ )$	on distribue,
$\equiv (\neg p \vee q) \vee (\ (q \vee p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)\ )$	distribue,

$$\equiv (\neg p \vee q \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee q \vee q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg p \vee \neg q)$$

Depuis cette forme conjonctive on extrait la forme clausale :

$\{ \{p, \neg p, q\} , \{\neg p, q, \neg q\} \}$

les 1e les 1e et 3e disjonctions correspondent à la clause 1

les 2e et 4e disjonctions correspondent à la clause 2

Propriétés des clauses

! Dans la suite, on emploie indifféremment le terme de clause pour parler de l'**ensemble de littéraux** ou d'une des **fbf disjonctives** que l'on peut lui associer

- Propriétés
  - Une clause est valide ssi elle contient un littéral et son opposé
  - Seule la clause vide est insatisfiable (i.e. une clause est insatisfaible ssi elle est vide)
  - Une clause est contingente ssi elle n'est pas vide et ne contient pas de littéraux opposés

- Propriétés
  - Si $C \subseteq C'$ alors $C \models C'$
  - Si C' non valide et $C \models C'$ alors $C \subseteq C'$

Propriétés des formes clausales possédant une clause tautologique

- Propriété : Soit F une forme clausale et soit C une clause valide de F, on a **F ≡ F \ {C}**
  - On peut donc éliminer les clauses tautologiques des formes clausales en conservant leur sémantique
  - Preuve :
    - Notons F’ la formule obtenue de F en supprimant la clause C : on a donc F = F’ ∧ C et aussi pour tout I, val(F,I) = ET(val(F’,I),val(C,I))
    - C valide donc pour tout I val(C,I)=1
    - Ainsi pour tout I val(F,I) = ET(val(F’,I),1) = val(F’,I)
    - On a donc bien F ≡ F’ (= F \ {C})

Propriétés des formes clausales possédant une clause incluse

- Propriété : soit F une forme clausale et soit C, C' deux clauses de F telles que $C \subset C'$, on a $\mathbf{F \equiv F \setminus \{C'\}}$
  - On peut donc éliminer les clauses possédant une clause incluse des formes clausales en conservant leur sémantique
  - Preuve :
    - Notons F’ la formule obtenue de F en supprimant la clause C’ : on a donc $F = F' \wedge C'$; de plus F et F’ contiennent toutes les 2 la clause C.
    - $C \subseteq C'$ donc $C \vDash C'$ (cf. prop. clauses), c’est-à-dire si val(C,I)=1 alors val(C’,I)=1 (i)
    - Raisonnons par cas selon la valeur de vérité de C :
      - Si val(F’,I) = 0, on a par sémantique du $\wedge$ val(F,I) = ET(0,val(C’,I)) = 0
      - Si val(F’,I) = 1 :
        - » comme C appartient à F’, on a par sémantique du $\wedge$, val(C,I) = 1
        - » Par (i) on a alors val(C’,I)=1
        - » Et, par sémantique du $\wedge$, val(F,I) = ET(val(F’,I),val(C’,I)) = ET(1,1) = 1
    - On a donc bien $F \equiv F'$ (= F \ {C})

Clause de Horn

- Une ***clause de Horn*** est une clause ayant au plus un littéral positif
  - Exemple : $\{\neg p, q, \neg r, \neg s\}$ ou $\{\neg r, \neg s\}$
- On appelle *règle de Horn*, une fbf composée d'une implication entre deux conjonctions de littéraux positifs
  - Exemple : $p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n \Rightarrow c_1 \wedge c_2 \ldots \wedge c_n$
- Propriété :

« La forme clausale d'un ensemble de règles de Horn ne contient que des clauses de Horn »