Algèbre linéaire et calcul matriciel

(HAI406 – Année universitaire 2021–2022)

Feuille d'exercices N°3

1. Échauffement (avant les TD)

Question 1. Si $A \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, alors le produit AB est dans : $\mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

Question 2. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^7$ de matrice associée A. Quelle est la taille de A ? Soit B une matrice de taille $(4, 2)$ et g l'application linéaire associée. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de g ?

Question 3. Écrire la matrice associée à l'application linéaire définie par : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 5y - z + 2t - u \\ 3x + 2y + t + u \\ -7x + z - 3t \\ -x - y - z - t - u \end{pmatrix}$.

Question 4. Déterminer l'application linéaire associée à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 5. Parmi les opérations matricielles suivantes, préciser celles qui sont bien définies, le format de la matrice obtenue et faire le calcul le cas échéant : $-2A$, $A + B$, $x + \xi$, AB, BA, Ax, xA, $B\xi$, ξB, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \xi = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 6. On définit les applications linéaires : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$, et $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2x + 5y - 2z \\ 3x + 4y + 8z \end{pmatrix}$. Déterminer $f + g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ lorsque c'est possible.

2. Travaux dirigés

Exercice 1. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Chacun des énoncés (1) à (5) ci-dessous est équivalent à un et un seul des énoncés (A) à (E). Reconstituez les paires d'énoncés équivalents.

(1) f et g sont injectives.
(2) $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = \{0\}$
(3) $f = g$
(4) Le noyau de f est inclus dans celui de g.
(5) Si f est nulle, alors g est nulle aussi.

(A) $\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) = g(u)$
(B) $\forall u \in \mathbb{R}^n, (f(u) = 0 \Rightarrow u = 0)$ et $(g(u) = 0 \Rightarrow u = 0)$
(C) $(\forall u \in \mathbb{R}^n, f(u) = 0) \Rightarrow (\forall u \in \mathbb{R}^n, g(u) = 0)$
(D) $\forall u \in \mathbb{R}^n, (f(u) = g(u) = 0 \Rightarrow u = 0)$
(E) $\forall u \in \mathbb{R}^n, (f(u) = 0 \Rightarrow g(u) = 0)$

Exercice 2. Existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ qui envoie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? Si oui, quelle est sa matrice ?

Exercice 3. Existe-t-il une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Exercice 4. Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $x + 2y - z = 0$ et $\mathcal{D}$ une droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.
(b) Déterminer des générateurs de l'image de $\mathcal{P}$ par l'application linéaire f de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
(c) Déterminer une équation de l'image de $\mathcal{P}$.
(d) Déterminer l'image réciproque de $\mathcal{D}$ par f.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6. (*Examen, janvier 2016*). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Expliciter l'application linéaire ϕ associée à A, en précisant bien les espaces de départ et d'arrivée.
(b) Déterminer Ker ϕ. L'application ϕ est elle injective ?
(c) Décrire Im ϕ comme un plan vectoriel engendré par deux vecteurs à préciser, puis en en donnant une équation. L'application ϕ est elle surjective ? Bijective ?
(d) On définit une deuxième application linéaire ψ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par l'expression : $\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ 0 \\ 2x+z \end{pmatrix}$.
  a. L'application $\phi \circ \psi$ est elle définie ? Si oui, donner la matrice associée.
  b. L'application $\psi \circ \phi$ est elle définie ? Si oui, donner la matrice associée.

3. Révisions et approfondissement

Exercice 7. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, e_1 et e_2 les vecteurs de la base canonique, $u = e_1 + 2e_2$ et $v = -e_1 + e_2$. On suppose que $f(u) = e_1$ et $f(v) = 2e_1 + e_2$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique et calculer l'image de $3e_1 + 3e_2$.

Exercice 8. Déterminer image et noyau de l'application linéaire associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Les applications linéaires de matrices ci-dessous sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'image et le noyau dans chaque cas.

Exercice 10. (*Contrôle continu, novembre 2015*). Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z+t \\ 2x+3y+z+6t \\ y+t \\ x+2y+z+3t \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
(b) Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
(c) Rappeler les définitions du noyau et de l'image de f. Donner une représentation paramétrique du noyau de f et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
(d) Donner une représentation en compréhension de l'image de f. En déduire que l'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par trois vecteurs que l'on écrira explicitement.
(e) L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
(f) *Sans calculs*, donner une description paramétrique de l'ensemble des antécédents de $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z + 3 = 0 \text{ et } y + az - 1 = 0\}$. Donner une description paramétrique de $\mathcal{D}_a$, puis discuter en fonction de a si $\mathcal{D}_a$ intersecte le plan d'équation $x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 12. (*Examen session 2, juin 2018*). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \alpha \\ -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour quels α la matrice B_α est-elle inversible ?

Exercice 13. Si A_1 et A_2 sont inversibles, B_1 est l'inverse de $3A_1$ et B_2 l'inverse de $\frac{1}{2}A_2$, quel est l'inverse de A_1A_2 ?
(a) $6B_1B_2$? (b) $\frac{1}{6}B_1B_2$? (c) $\frac{2}{3}B_1B_2$? (d) $\frac{3}{2}B_1B_2$? (e) $6B_2B_1$? (f) $\frac{1}{6}B_2B_1$? (g) $\frac{2}{3}B_2B_1$? (h) $\frac{3}{2}B_2B_1$?

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 puis A^{17} et A^{2018}.

Exercice 15. On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 8A - 16I$, puis que $A^n = n4^{n-1}A - (n-1)4^nI$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On note $f^2 = f \circ f$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
(b) Montrer l'équivalence entre « $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ » et « $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ ».