HLMA 203
Espaces Vectoriels

Théorème :
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
et $F \subset E$ est telle que :

- $F \neq \emptyset$
- F est stable par addition : $\forall u, v \in F,\ u+v \in F$
- F est stable par la loi externe : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in F$.

Alors, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exemple :
L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel puisque la somme de deux polynômes et le produit de polynôme par un nombre est un polynôme.

I) Produit cartésien

Soit $(E, +, \times)$ et $(E', +', \times')$

loi interne — loi externe

Alors $E \times E'$ (produit cartésien des ensembles muni des lois interne $u \in E$, $u' \in E'$, $v \in E$, $v' \in E'$

$$(u, u') + (v, v') = (u+v, u'+v')$$

$$\lambda \in \mathbb{K}, (u,u') \in E \times E', \lambda (u, u') = (\lambda u, \lambda u')$$

Espace vectoriel 2

Conséquences :

> $E \times E'$ muni de ces lois est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.
> $\mathbb{K}^n$, muni de l'addition coordonnée par coordonnée et de la multiplication coordonnée par coordonné par $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Intersection

Si $(E, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et si F et G sont de sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est aussi un sous espace vectoriel de E.

Preuve :

Il suffit de montrer que $F \cap G$ est stable par $+$ et $\times$
soient $u, v \in F \cap G$; $u, v \in F \cap G$ donc $u, v \in F$.
F est un sous espace vectoriel donc il est stable par somme donc $u + v \in F$. même raisonnement avec G.
$\Rightarrow u + v \in F \cap G \Rightarrow u + v$ est stable.

⚠ De façon générale l'addition de deux sous-espaces n'est pas un sous-espace vectoriel.

II) Sous-espaces engendrés par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $u, v \in E$.
$\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On appelle combinaison linéaire de u et v, avec coefficients λ et μ, le vecteur $\lambda . u + \mu v$.

De même, si $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, combinaison linéaire de $(u_1, \dots u_n)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est égale au vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$.

Espace Vectoriel 3

Par exemple dans $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec coefs a, b, c tel que :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Etant donnés des vecteurs $u_1, \dots, u_n$, l'ensemble des combinaisons linéaire de $u_1, \dots, u_n$, avec tous les coefficients possibles, est un sous-espace vectoriel de E, appelé s.e.v. engendré par $u_1, \dots u_n$; $\mathrm{Vect}(u_1, \dots u_n)$

Preuve :

Stabilité par + :
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$

$(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) + (\mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n)$

$= (\lambda_1 + \mu_1) u_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) u_n$

Si $P \subset E$, on appelle s.e.v engendré par P, noté $\mathrm{Vect}(P)$, l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs dans P.

⚠ P n'est pas forcément finie, par contre une combinaison linéaire est toujours finie

Espace Vectoriel 4

III Somme de deux sous-espaces vectoriels

Propriété :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, F, G s.e.v de E, alors $F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}$ est un s.e.v.

Preuve :

Montrons que $F + G$ est stable par $+$:

Soit $f+g$, $f'+g'$ deux vecteurs de $F+G$ −

$$(f+g)+(f'+g') = \underbrace{(f+f')}_{\in F} + \underbrace{(g+g')}_{\in G} \in F+G.$$

Propriété :

$$F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$$

Preuve :

> $F+G \subseteq \mathrm{Vect}(F \cup G)$
puisque la somme de f et g est une combinaison linéaire

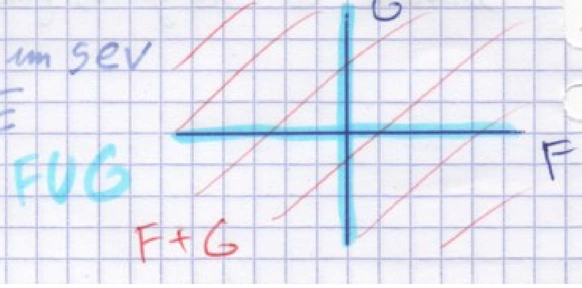
> $\mathrm{Vect}(F \cup G) \subseteq F+G$ car un élément de $F \cup G$ s'écrit $\underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n}_{\in F} + \underbrace{\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_n g_n}_{\in G}$

Exemple :

$E = \mathbb{R}^2$ — $F \cup G$ n'est pas un sev

$F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ — par contre $F+G = E$

$G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$



IV Somme Direct

Supposons qu'on ait 2 s.e.v. F et G d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

$\forall v \in F+G, \exists f \in F, g \in G, v = f+g$

Question

Cette écriture (décomposition en somme) est-elle unique ?

Supposons une autre décomposition en somme

$v = f'+g' \Rightarrow f+g = f'+g' \Rightarrow \underbrace{f-f'}_{\in F} = \underbrace{g-g'}_{\in G}$

donc si $(f,g) \neq (f',g')$ on a trouvé un vecteur non nul dans $F \cap G$.

Définition Soit F, G des s.e.v de E, on dit que

- E est somme directe de F et G
- F est supplémentaire de G dans E
- G est supplémentaire de F dans E
- F et G sont supplémentaire dans E si on a
  > $F+G = E$
  > et $F \cap G = \{0_E\}$

$\Rightarrow$ Dans $\mathbb{R}^2$, deux droites vectorielles distinctes sont toujours supplémentaire.

Deux espaces sont dits supplémentaires si en les ajoutant on engendre tout l'espace.

Espace Vectoriel 6

Dire de $E \oplus F$ (E est somme direct de F et G)
revient à dire que tout vecteur de E s'écrit de façon unique

On dit que "F et G sont en somme direct"
si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$
avec 0_E, l'élément neutre (le vecteur nul)

Axiomes des espaces vectoriels (Rappel)

1- Associativité : $(u+v)+w = u+(v+w)$
2 - Il existe un élément neutre noté 0 tel que
$v + 0 = v$
3 - Tout élément v admet un symétrique v' tel que
$v + v' = 0$ (cet élément est noté $-v$)
4 - Commutativité : $u + v = v + u$
5 - $\forall k, \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in E : (\lambda \mu)v = \lambda(\mu v)$
6 - $v = 1.v$
7 - $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$ (Distributivité des scalaires)
8 - $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ (Distributivité des vecteurs)