HLMA101 - Partie C : Analyse (fonctions réelles)

Chapitre 11
Fonctions usuelles

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2020-2021

Définition

Soient $(a_0, a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, avec $a_d \neq 0$.
On appelle fonction polynôme (ou fonction polynomiale) une fonction du type :

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_d.x^d = \sum_{i=0}^{d} a_i.x^i \end{array}$$

$d \geqslant 0$ est appelé le degré de la fonction polynôme.

Propriétés

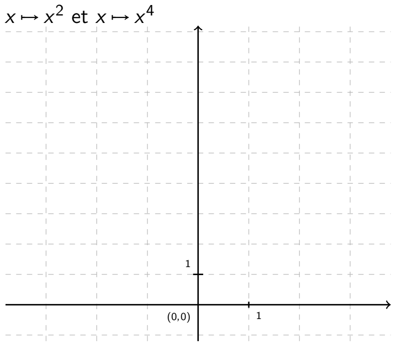
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Soit P une fonction polynôme de degré $d > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_d > 0 \\ -\infty & \text{si } a_d < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_d > 0 \text{ et } d \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } a_d > 0 \text{ et } d \text{ impair} \\ -\infty & \text{si } a_d < 0 \text{ et } d \text{ pair} \\ +\infty & \text{si } a_d < 0 \text{ et } d \text{ impair} \end{cases}$$

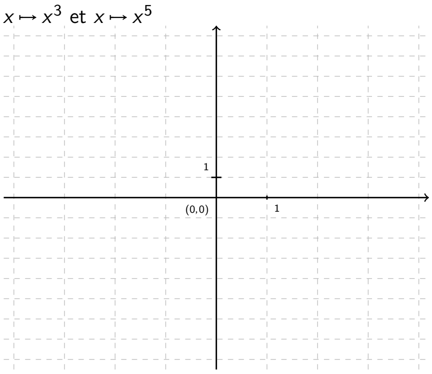
Représentation graphique - exemple

$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^4$



Représentation graphique - exemple

$x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^5$



Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n comme ceci :

- Si n impair : $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$
- Si n pair (>0) : $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$

Remarque : $\forall n\ \mathbb{N}^*,\ f_n(1) = 1$

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bijective, strictement croissante et continue.

On peut appliquer le théorème de la bijection réciproque, et on définit...

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la réciproque de f_n :

- $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n impair
- $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ si n pair

Propriétés

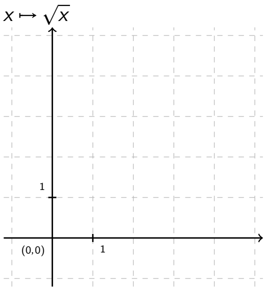
Ces fonctions sont continues, bijectives, strictement croissantes, et

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ (pour n impair)

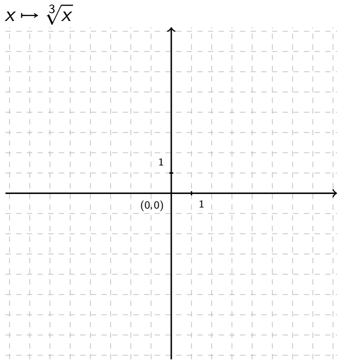
Représentation graphique - exemple

$x \mapsto \sqrt{x}$



Représentation graphique - exemple

$x \mapsto \sqrt[3]{x}$



Définition

On appelle fractions rationnelles les fonctions de la forme :

$F : x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux fonctions polynômes.

Le domaine de définition de F est $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0\}$.

Propriétés

Les fonctions fractions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition.

Limites

- On calcule les limites des fractions rationnelles en $\pm\infty$ en mettant en facteur les termes de plus haut degré :

  Si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i.x^i$ $(a_n \neq 0)$

  et $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i.x^i$ $(b_m \neq 0)$.

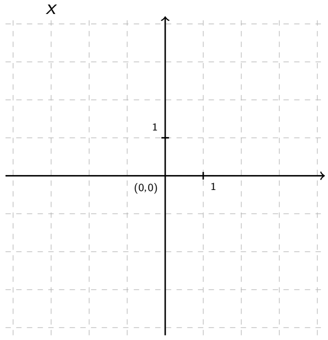
  alors $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n.x^n}{b_m.x^m} \times \underbrace{\dfrac{1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}}{1 + \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \cdots + \frac{d_n}{x^n}}}_{\text{tend vers 1 en } \pm\infty}$

- Aux points de $\{a \in \mathbb{R} / Q(a) = 0\}$, cela dépend de la valeur de P

  (si P s'annule aussi en a, on peut factoriser $P(x)$ et $Q(x)$ par $(x-a)$).

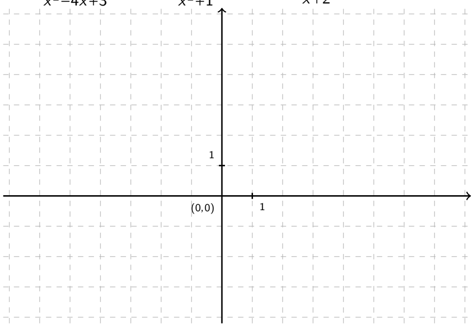
Représentation graphique - cas particulier

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



Représentation graphique - exemples

$x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ $x \mapsto \frac{4x}{x^2+1}$ $x \mapsto \frac{x^3+3x-4}{x+2}$



Définition de la fonction ln

Plusieurs définitions sont possibles :

- Définir d'abord exp (par une équation différentielle ($f' = f\dots$), un développement en série entière ($\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$) ou une équation fonctionnelle $f(a+b) = f(a)f(b)\dots$) puis ln comme sa réciproque.
- ou ln par une équation fonctionnelle ($f(ab) = f(a) + f(b)\dots$)
- ou ln comme primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$
- ...

Définition (admise)

$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t$

Reformulation :
ln est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

Propriétés

- la fonction ln est strictement croissante
- $\ln(1) = 0$
- ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

Propriété

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

On en déduit, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$

Autres logarithmes

Logarithme de base b

Soit $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
On pose $\log_b : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)} \end{array}$

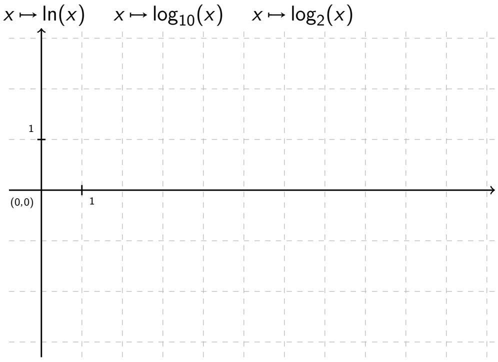
Quelles propriétés de $\log_b$ se déduisent de celles de ln ?
En exercice

Logarithmes courants

On rencontre souvent $\log_{10}$ et $\log_2$, et en particulier, pour $k \in \mathbb{Z}$: $\log_{10}(10^k) = k$ et $\log_2(2^k) = k$

Représentations graphiques

$x \mapsto \ln(x)$ $x \mapsto \log_{10}(x)$ $x \mapsto \log_2(x)$



Réciproque de ln

On vient de voir que la fonction

$$\ln : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

est strictement croissante et continue, et $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

Exponentielle

Par le théorème de la bijection réciproque, on définit la réciproque de ln :
$\exp : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$

Propriétés

- $\exp$ est bijective, continue, strictement croissante
- $\exp(0) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Preuve : découle des propriétés de ln (exercice).

Propriété

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$

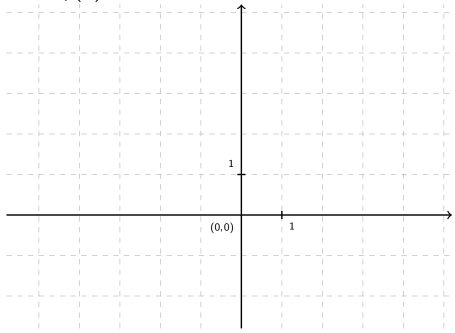
On en déduit, pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ et $\exp(n.a) = (\exp(a))^n$

Notation e

On note e le nombre $\exp(1)$ (autrement dit, $\ln(\mathrm{e}) = 1$)

Représentation graphique

$x \mapsto \exp(x)$



Croissances comparées

Théorème (admis)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.\exp(x) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = 0$

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\ln x)^n = 0$

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$.
On appelle fonction puissance a la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(a.\ln x) := x^a \end{array}$$

Note : C'est une généralisation
des monônes $x \mapsto x^n$ ($x^n = \exp(n.\ln x)$ pour $x > 0$)
et des racines n-ièmes ($x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}.\ln x)$, pour $x > 0$).

À retenir

$x \mapsto x^a$ est définie pour tout $a \in \mathbb{R}$

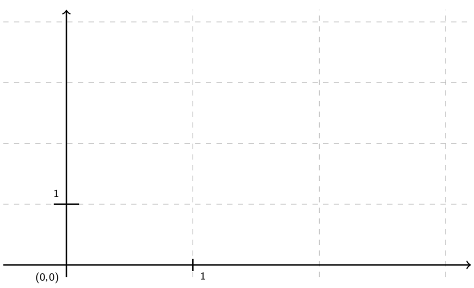
- si $a \in \mathbb{N}$, le domaine de définition est $\mathbb{R}$,
- si $a = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, le domaine de définition est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$,
- sinon, le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$

Propriétés

Ces fonctions sont continues, bijectives, strictement monotones (si $a \neq 0$) et on connaît leurs limites aux bornes du domaine de définition.

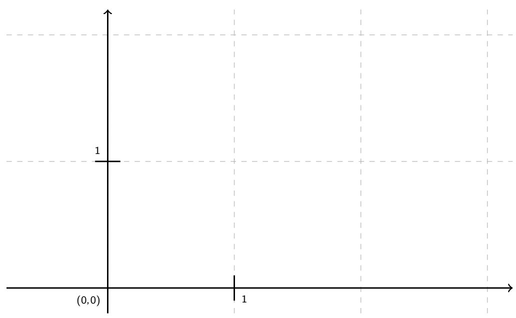
Représentation graphique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]n, n+1[$. $\quad x \mapsto x^n \quad x \mapsto x^{n+1} \quad x \mapsto x^a$



Représentation graphique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]n, n+1[$. $\quad x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \quad x \mapsto x^{\frac{1}{n+1}} \quad x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$



Définition

Soit $a > 0$.
On appelle exponentielle de base a la fonction :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x.\ln a) := a^x \end{array}$$

Propriétés

Ces fonctions sont continues, bijectives, strictement monotones (si $a \neq 1$) et on sait déterminer leurs limites aux bornes du domaine de définition.

Propriétés

Pour tout $a > 0$ et tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

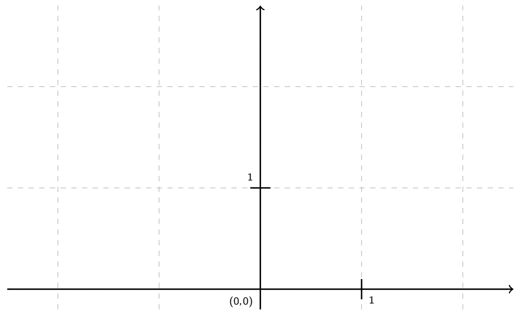
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^{x+y} = a^x.a^y$

Exponentielle de base e

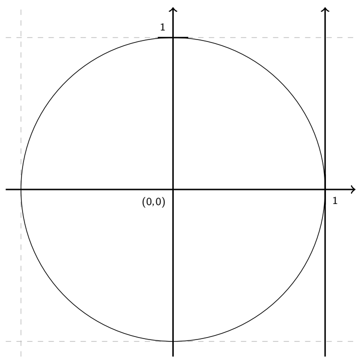
On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x$
D'où la double notation.

Représentation graphique

$x \mapsto \mathrm{e}^x$ $\quad x \mapsto a^x \ (a < 1)$ $\quad x \mapsto a^x \ (a = 1)$
$x \mapsto a^x \ (1 < a < \mathrm{e})$ $\quad x \mapsto a^x \ (\mathrm{e} < a)$



Rappel : Cercle trigonométrique, sinus, cosinus, tangente



Propriété

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Propriétés

Pour tous $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$,

- $\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$
- $\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$
- $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$
- $\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$

En particulier :

- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Sinus et cosinus

Propriétés

La fonction $\cos : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$
est paire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\sin : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$
est impaire, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Fonction tangente

Définition

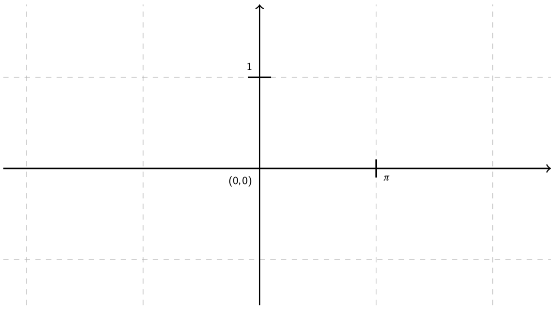
On définit la fonction tangente par :
$$\tan : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} - \pi\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$
et la fonction cotangente par :
$$\mathrm{cotan} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \end{array}$$

Propriétés

Les fonctions tan et cotan sont impaires, π-périodiques, et continues sur leurs ensembles de définition.

Représentation graphique

$x \mapsto \sin x$ $\quad$ $x \mapsto \cos x$ $\quad$ $x \mapsto \tan x$



Rappel

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Sinus et cosinus hyperboliques

Sur le même principe, on peut construire :

$$\mathrm{ch} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Remarque : On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Propriétés

- Les fonctions ch et sh sont continues.
- ch est paire et strictement positive
- sh est impaire, strictement croissante, et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$

Représentation graphique

$x \mapsto e^x \quad x \mapsto e^{-x} \quad x \mapsto \mathrm{ch}(x) \quad x \mapsto \mathrm{sh}(x)$