Correction de la feuille de TD 5 – HLMA 101

Question 1 :

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 0 & 14 \\ 7 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 6 & 1 & 7/8 \end{pmatrix}$$ non-échelonnée.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \sqrt{7} & 0 & -2/3 \\ 0 & \boxed{1} & -567 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -9 \end{pmatrix}$$ échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ non-échelonnée.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$ échelonnée réduite

Algèbre et analyse 1 - 2020-2021 - Correction feuille d'exercice n°5

Echauffements

Question 2 :

La matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$ correspond au système :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = -1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

[note : pivots en $\boxed{\ }$, coefficients associés à une variable libre en ◯]

La matrice est échelonnée, ce qui permet de répondre :

(a) "Le système n'a pas de solution" : FAUX

En effet, $(0,0,-1,2)$ est solution. (ou : il n'y a pas de pivot en dernière colonne)

(b) "Le système a exactement une solution" : FAUX

Le système est compatible et admet une variable libre (y, deuxième colonne. Il a donc une infinité de solutions)

(c) "Le système a une infinité de solutions" : VRAI

(se déduit des questions précédentes)

(d) "Le système a exactement deux solutions" : FAUX

(se déduit de la question précédente. Par ailleurs, un système linéaire n'a jamais exactement 2 solutions, notamment car l'ensemble des solutions est un sea de $\mathbb{R}^n$ (ici $\mathbb{R}^4$))

Question 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & * & * & * \\ 0 & \square & * & * \\ 0 & 0 & \square & * \end{array}\right)$$

échelonnée
colonne non-pivot
pas de variable libre

donc il y a exactement 1 solution.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \square & * & * & * \\ 0 & 0 & \square & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right)$$

colonne pivot

donc il n'y a pas de solution.

ou encore : cette ligne donne une équation sans solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} \square & * & * \\ 0 & \square & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La dernière colonne n'est pas colonne-pivot dans cette matrice échelonnée.
et toutes les colonnes de la partie non-augmentée sont pivot

donc il y a exactement une solution.

exemple : $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = 4/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8/3 = 1 \\ y = 4/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 8/3 = -\frac{5}{3} \\ y = 4/3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \square & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \square & * \end{array}\right)$$

Il y a une infinité de solutions.

Algèbre et analyse 1 - 2019-2020 - Corrigé de la feuille 5 (TD)

Échauffements :

Question 4 :

(a) VRAI (cf cours)

(b) FAUX (la première matrice de Q3 donne un contre-exemple : si la dernière colonne est non-nulle, le système peut être compatible)

(c) FAUX : on peut avoir la situation suivante (matrice augmentée) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{le système associé n'a pas de solutions}$$

colonne sans coef dominant

(quelle hypothèse ajouter pour être sûr que l'ensemble solution est une droite affine ?)

(d) FAUX : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est carrée. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ correspond au système $\begin{cases} x = a \\ \end{cases}$ qui a une infinité de solutions (y variable libre).

(e) FAUX : la ligne correspondant dans le système d'équations est $5s = 0$ ce qui nous dit seulement que $s = 0$, il n'y a pas de raison, a priori, que le système ne puisse pas avoir de solutions.

HLMA 101 - Algèbre et analyse 1 - Correction TD n°5 - 2020-21

Travaux Dirigés :

Exercice 1 :

$$\begin{cases} x+y+z=2 & (1) \\ 2x+y+z=3 & (2) \\ x+2y+2z=3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & x+y+z=2 \\ (2)-2\times(1) & -y-z=-1 \\ (3)-(1) & y+z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) & x+y+z=2 \\ (2) & -y-z=-1 \\ (3)+(2) & 0=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)+(2) & x=2 \\ & -y-z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1-z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{(2,1-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$

note : on peut appliquer les mêmes opérations en travaillant sur la matrice augmentée du système.

Exercice 2 :

$$\begin{cases} x \quad -2z+3t = a \\ -x-y+z-2t = b \\ 2x+7y+3z-t = c \\ x+2y \quad +t = d \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_4}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} -y-z+t = a+b \\ -x-y+z-2t = b \\ 3y+3z-3t = c-2d \\ x+2y \quad +t = d \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\overset{L_3\leftarrow L_3+3L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} -x-y+z-2t = b \\ -y-z+t = a+b \\ 0 = c-2d+3(a+b) \\ x+2y+t = d \end{cases}$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4+L_1}{\overset{L_1\leftarrow -L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x+y-z+2t = -b \\ -y-z+t = a+b \\ 0 = c-2d+3(a+b) \\ y+z-t = d+b \end{cases} \overset{L_4\leftarrow L_4+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y-z+2t = -b \\ -y-z+t = a+b \\ 0 = c-2d+3(a+b) \\ 0 = a+2b+d \end{cases} (*)$$

le système est échelonné.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -b \\ 0 & -1 & -1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-2d+3(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+2b+d \end{array}\right)$$

Le système a des solutions (est compatible) ssi $\begin{cases} c-2d+3(a+b) = 0 \\ a+2b+d = 0 \end{cases}$

$$(*) \underset{L_2\leftarrow L_2}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x \quad -2z+3t = a \\ y+z-t = -a-b \\ 0 = c-2d+3(a+b) \\ 0 = a+2b+d \end{cases}$$

variables principales — variables libres

le système est échelonné réduit.

Pour (a,b,c,d) fixés tels que le système est compatible (ie tq $\begin{cases} 3a+3b+c-2d = 0 \\ a+2b+d = 0 \end{cases}$) l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ (a+2z-3t, -a-b-z+t, z, t) \ / \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

HLMA 101 - Algèbre et analyse 1 - Correction TD n° 5 - 2020-21

Travaux Dirigés :

Exercice 3 :

La question peut se reformuler : Est-ce que $W \in \mathrm{Vect}(X,Y,Z)$?

Posons $\mathcal{V} = \mathrm{vect}(X,Y,Z) = \{aX + bY + cZ,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

$W \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $W = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$

$$\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{cases} -4 = \alpha + 4\beta + 5\gamma \\ 10 = -2\alpha - 7\beta - 8\gamma \\ -7 = 4\alpha + 9\beta + 6\gamma \\ 5 = 3\alpha + 7\beta + 5\gamma \end{cases}$$

Résolvons le système (s'il est compatible, alors $W \in \mathcal{V}$)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ -2 & -7 & -8 & 10 \\ 4 & 9 & 6 & -7 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 9 \\ 0 & -5 & -10 & 17 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & -5 & -10 & 17 \end{array}\right)$$

on peut s'arrêter : cette ligne nous dit que le système n'admet pas de solution.

Ainsi, W n'appartient pas au sous espace vectoriel engendré par X, Y et Z.

Correction TD 5 - HLMA 101

Exercice 4 :

Description paramétrique du sev engendré par $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\7\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$:

$$F = \left\{ s.\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} + u.\begin{pmatrix}-2\\-1\\7\end{pmatrix} + v.\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} \;\middle|\; (s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \left\{ (s+t-2u+v,\ 2s+t-u+3v,\ s-2t+7u+4v) \;\middle|\; (s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \in F \iff \exists (s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4, (S) \begin{cases} x = s+t-2u+v \\ y = 2s+t-u+3v \\ z = s-2t+7u+4v \end{cases}$$

$\iff$ le système (S) d'équations en (s,t,u,v) est compatible.

On étudie le système (S) avec sa matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & x \\ 2 & 1 & -1 & 3 & y \\ 1 & -2 & 7 & 4 & z \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & -1 & 3 & 1 & y-2x \\ 0 & -3 & 9 & 3 & z-x \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{z-x-3(y-2x)}_{=5x-3y+z} \end{array}\right)$$

le système est maintenant échelonné.

On déduit que le système (S) est compatible si et seulement si

$5x - 3y + z = 0$

Autrement dit, $(x,y,z) \in F \iff 5x-3y+z=0$

ou encore $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x-3y+z=0\}$

Remarque : c'est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(d'ailleurs on pouvait remarquer que :

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

)