Correction de la partie calculabilité :

Exercice 1.
f est une fonction calculable, on appelle d(f)={x|f(x) est défini}

1. VRAI

Prenons f(x)=0, d(f)=ℕ.

f est calculable : return 0 ;
et d(f) est calculable sa fonction caractéristique est return 1 ;

2. FAUX
Sinon on pourrait résoudre le problème de l'arrêt :
h(p,x)=1 si et seulement si xϵ d(f) où p est la procédure qui calcule f.

3. VRAI
d(f) est toujours récursivement énumérable (en utilisant le temps on peut toujours écrire sa fonction semi-caractéristique int fsc(int x) {for (int t=0;;t++) (if h(t, p,x) return 1;} où p est une procédure qui calcule f.
Donc d'après 2, il y a au moins une fonction f non décidable.

4. FAUX
Impossible : d(f) est toujours récursivement énumérable (en utilisant le temps on peut toujours écrire sa fonction semi-caractéristique int fsc(int x) {for (int t=0;;t++) (if h(t, p,x) return 1;} où p est une procédure qui calcule f.

5. VRAI
Prenons une fonction f telle que d(f) ne soit pas décidable (elle existe d 'après 3). Le complémentaire ne peut ps être récursivement énumérable.
En effet sinon on en déduirait que d(f) est décidable d'après le théorème du cours (si un ensemble E et son complémentaire dont récursivement énumérable alors E est dédidable).

6. FAUX
On en déduirait que   f, d(f) est décidable à l'aide du théorème précédent. Ce qui contredit 3.

7. VRAI.
Prenons la fonction de 1. Le complémentaire de d(f) est l'ensemble vide. Sa fonction caractéristique est return 0 ; (elle est donc calculable).

Exercice 2.

Il suffit de poser
$g(x_1, x_2, x_3, \dots x_k)= f(x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, \dots,x_k-x_{k-1})$

En fait à une suite croissante, on peut associer la suite des écarts entre deux entiers consécutifs : par exemple la suite (7,10, 10, 15, 17) est associée à la suite (7, 3, 0, 5, 2). On a donc une bijection entre les suites croissantes et les suites. Il suffit de composer cette bijection avec f pour obtenir une bijection entre les suites d'entiers croissantes et ℕ.