Modèles de calcul

Université de Montpellier
TD 1

Exercice 1 Notations

Soient w un mot et a une lettre sur $\Sigma = \{a, b\}$. On note $|w|_a$ le nombre d'occurrences de a dans w. Écrivez la liste des mots appartenant à chacun des langages suivants :

1. $\{w$ tels que $|w|_a < 3\} \cap \{a, aa, aaa, aaaa, abaa, bbbb, aabbbbb\}$
2. $\{w$ tels que $|w| < 3\} \cup \{a, aa, aaa, aaaa, abaa, bbbb, aabbbbb\}$
3. $\{w$ tels que $|w|_a < 3\} \cap \{w$ tels que $|w|_b < 2\}$
4. $\{w$ tels que $|w|_a = |w|_b\} \cap \{w$ tels que $|w| < 5\}$
5. $\{w$ tels que $|w|_a > 5\} \cap \{w$ tels que $|w| < 3\}$
6. $\{w$ tels que $|w| < 1\}$

Exercice 2 Concaténation

1. Laquelle des implications suivantes est-elle vraie pour tous mots x et y ? Faire une preuve.

$$x \prec y \;\Rightarrow\; x\Sigma^* \subseteq y\Sigma^*$$
$$x \prec y \;\Rightarrow\; y\Sigma^* \subseteq x\Sigma^*$$

2. Pour l'autre inclusion, déterminer pour quels x et y elle reste vraie.

3. Montrez que $\varepsilon \in v\Sigma^*$ **si et seulement si** v est le mot vide.

Exercice 3 Léon a rasé César à Noël

Un mot est un **palindrome** si l'ordre des lettres reste le même, qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, aa et $abaaba$ sont des palindromes, tandis que ab et $ababab$ n'en sont pas.

1. On appelle ***miroir*** l'opération qui renverse l'ordre des lettres du mot. On note $\bar{u}$ le miroir de u. On définit cette notion plus formellement par $\bar{\epsilon} = \epsilon$ et $\forall a \in \Sigma, \forall u \in \Sigma^*$, $\overline{a.u} = \bar{u}.a$. Montrez que $\overline{x.y} = \bar{y}.\bar{x}$. Montrez que w est un palindrome de longueur paire si et seulement si $\exists u, w = u.\bar{u}$.

2. Combien y a-t-il de mots de longueur au plus n sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui ne contienne pas 2 fois successivement la même lettre ?

3. Toujours sur l'alphabet $\{a, b\}$, caractérisez les palindromes qui ne contiennent pas 2 fois successivement la même lettre.

4. Montrez que sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ tout palindrome non-vide de longueur paire contient deux fois successivement la même lettre.

Exercice 4 Palindromes périodiques

Un mot w est **périodique** s'il est la répétition d'un autre mot u un certain nombre de fois. Le mot u est appelé une **période** de w. Par exemple, $ababab$ est périodique de période ab ; tandis que $ababa$ n'est pas périodique.

Montrez qu'un palindrome est périodique **si et seulement si** il admet un palindrome comme période.

Exercice 5 Exemple simple

Trouvez une solution au jeu de Post suivant :

$$\begin{array}{|l|}\hline 01\\\hline 0\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|l|}\hline 110010\\\hline 0\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|l|}\hline 1\\\hline 1111\\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|l|}\hline 11\\\hline 01\\\hline\end{array}$$

Exercice 6 Calculons

Trouvez des solutions aux jeux de Post suivants. Quel calcul est effectué ?

1. x $\begin{array}{|l|}\hline aaaaaaaa\\\hline a\\\hline\end{array}$ y $\begin{array}{|l|}\hline a\\\hline aaaaa\\\hline\end{array}$

2. $\begin{array}{|l|}\hline a\\\hline aaaaa\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline aaaaaaa\\\hline a\\\hline\end{array}$

Exercice 7 Sans carrés

Un mot est un **carré** s'il peut s'écrire $u\,u$, où u est un mot. Par exemple, le mot $abaaba$ est un carré car il peut s'écrire $aba\,aba$, tandis que bab n'est pas un carré. Un mot est **sans carré** s'il ne contient aucun sous-mot carré non-vide.

1. Le mot vide est-il un carré ?
2. Le mot vide est-il sans carré ?
3. Soit $\Sigma = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres. Construisez le plus long mot sur Σ sans carré.
4. Soit $T = \{a, b, c\}$ un alphabet à trois lettres. Tentez de construire le plus long mot sur T sans carré.

Exercice 8 Calculons plus

Soit x un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Trouvez des solutions aux jeux de Post suivants pour $x = abab$, $x = aaabbb$ et $x = abbabaab$. Quel calcul est effectué ?

Note : x est un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$, mais d'autres lettres sont autorisées dans les tuiles : c et d.

1. $\begin{array}{|l|}\hline c\,x\\\hline c\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline a'a'\\\hline a\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline b'b'\\\hline b\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline d\\\hline a'a'\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline d\\\hline b'b'\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline d\\\hline dd\\\hline\end{array}$

2. $\begin{array}{|l|}\hline c\,x\\\hline c\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline a'a'\\\hline a\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|}\hline \\\hline b\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline d\\\hline a'\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline d\\\hline b'\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|l|}\hline d\\\hline dd\\\hline\end{array}$