HLMA 101 2020-21

Feuille d'exercices N° 10 – Corrigé

Échauffement

Question 1

Soit f une fonction dérivable

(a) <u>Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.</u>

Il peut être tentant de répondre : VRAI.

<u>Cependant</u> : une hypothèse manque par rapport à l'énoncé du théorème du cours : le fait que f soit définie sur un <u>intervalle</u>.

Cette assertion est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :

$f(x) = \frac{-1}{x}$ vérifie $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ sur $D_f = \mathbb{R}^*$ mais f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $-1 < 1$ et $f(-1) = 1 > f(1) = -1$

(b) <u>Si f est strictement croissante, alors $f' > 0$</u>

De nouveau, il peut être tentant de répondre VRAI en pensant au fait que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$ pour $h \neq 0$ (par croissance stricte de f et disjonction de cas $h > 0$ et $h < 0$). On en déduirait que

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

L'erreur de ce raisonnement est que <u>les inégalités strictes ne passent pas à la limite</u>, à la différence des inégalités larges. On ne peut pas en conclure que $f'(x) > 0$ mais uniquement $f'(x) \geq 0$.

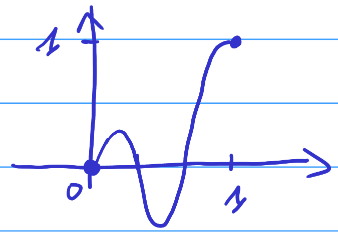
Cette assertion est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant :

$f(x) = x^3$ définit une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$. Nous savons qu'une fonction f telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf en des <u>points isolés</u> (si $f(x_0) = 0$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$, $f'(x) > 0$) est strictement croissante.

Question 2 Les assertions suivantes sont-elles vraies pour toute $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$?

(a) $\forall x \in [0;1], |f'(x)| \leq 1$

Faisons une représentation graphique des hypothèses pour développer nos intuitions



$|f'(x)| \leq 1$ est une condition sur la pente des tangentes

On ne voit pas pourquoi on aurait $-1 \leq f'(x) \leq 1$; la fonction tracée ne vérifie pas cette condition (elle est par endroits très pentue).

Essayons maintenant de donner une formule pour $f(x)$ qui fournisse un contre-exemple

Cette assertion est fausse comme le montre le contre-exemple suivant :

on cherche $f(x) = ax^2 + bx$ tq $f(1) = 1$ et $f'(\frac{1}{3}) = 2$

(on a pris $c = 0$ pour que $f(0) = 0$)

$f'(x) = 2ax + b$ d'où le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{2a}{3} + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 3b = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$ Ces valeurs fournissent un contre-exemple.

Remarque : On ne pouvait pas demander $f'(\frac{1}{2}) = 2$ car $f'(\frac{1}{2}) = a + b = 1$

Oubli : voir page 6 pour questions (b) et (c)

Travaux dirigés

Exercice 1 Déterminer des réels a et b tq $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;1[$ (et même à gauche en $x = 1$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = g'(1)$ où $g(x) = \sqrt{x}$, c'est-à-dire $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(1) = \frac{1}{2}$).

Par ailleurs, $x \mapsto ax^2 + bx + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $]1;+\infty[$ (et même à droite en $x = 1$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = h'(1)$ où $h(x) = ax^2 + bx + 1$, c'est-à-dire $h'(x) = 2ax + b$ et $h'(1) = 2a + b$).

Il suffit donc de déterminer a et b tel que f soit dérivable en $x = 1$.

Pour cela, il faut et il suffit que f soit continue en $x = 1$ et que

$(*)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. En effet, on sait que

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe si et seulement si les limites à droite et à gauche existent et sont égales.

On a $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x) = h(1) = a+b+1$

par continuité de $h(x)$. Donc f est continue en $x=1$ ssi $a+b+1=1$

D'après ce qui précède, la condition $(*)$ est équivalente à $2a+b = \frac{1}{2}$

On obtient donc le système $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=\frac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/2\end{cases}$

On a déterminé $\underline{a = 1/2}$ et $\underline{b = -1/2}$.

<u>Exercice 2</u> On pose $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}}$, $D_f = \mathbb{R}^*$.

(a) Mq $\underline{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \underline{f(x) = 0}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$$

On reconnaît la formule définissant la dérivée de la fonction sinus en $x=0$.
Or sin est dérivable, de dérivée $\sin'(x) = \cos(x)$. Comme $\cos(0)=1$, on en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Il s'agit maintenant de faire apparaître $\frac{\sin(x)}{x}$ dans le quotient $\frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}}$.
On divise et multiplie par x :

On a $\frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{|x|}}$

On $\frac{x}{\sqrt{|x|}} = \frac{\varepsilon(x)\,|x|}{\sqrt{|x|}} = \varepsilon(x)\sqrt{|x|}$ où $\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & x<0\end{cases}$ désigne le signe de x.

Comme $\sqrt{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\varepsilon(x)$ est bornée, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{\sqrt{|x|}} = 0$

On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{|x|}} = 1 \times 0 = 0$

(b) <u>Mq f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$</u>

La fonction $u : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $u'(x) = \cos(x)$.

La fonction $v : x \mapsto \sqrt{|x|}$ est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$: c'est la composée de la fonction $r : x \mapsto |x|$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $r'(x) = \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$, avec la fonction $s : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $s'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, on a $v'(x) = (s \circ r)'(x) = r'(x)\, s'(r(x))$
$= \varepsilon(x) \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$.

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de 2 fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$

$$= \frac{\cos(x)\sqrt{|x|} - \sin(x)\,\varepsilon(x)\frac{1}{2\sqrt{|x|}}}{|x|}$$

$$= \frac{2|x|\cos x - \varepsilon(x)\sin(x)}{2\,|x|^{3/2}}$$

(c) <u>Soit</u> $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (appelé prolongement de f par continuité en $x=0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$)

<u>Mq h n'est pas dérivable en $x = 0$.</u>

On a $\dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = +\infty$.

Ce n'est pas une limite finie donc h n'est pas dérivable en $x = 0$

Remarque : la courbe représentative de la fonction h aura une tangente verticale en $x = 0$.

Exercice 3 — Déterminer le nombre de solutions réelles de $e^x - 2x - 1 = 0$

Soit $f(x) = e^x - 2x - 1$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction exp et un polynôme).

On a $f'(x) = e^x - 2$, d'où $f'(x) > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$
et $f'(x) < 0 \iff x < \ln 2$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	α		$\ln 2$		β	$+\infty$
f'			$-$	0	$+$		
f	$+\infty$	0	$\searrow$	$1 - 2\ln 2 < 0$	$\nearrow$	0	$+\infty$

On a $e^x - 2x - 1 = e^x\left(1 - \dfrac{2x}{e^x}\right) - 1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée en $+\infty$)

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (1 - 0) - 1 = +\infty$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 + (+\infty) = +\infty$

Il y a 2 méthodes pour rédiger proprement le fait que $f(x) = 0$ admet 2 solutions (exactement) dans $\mathbb{R}$: a) soit invoquer le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie b) soit invoquer le théorème de la bijection réciproque.

Méthode a) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc il existe $x_0 > \ln(2)$ tq $f(x_0) > 0$

Comme $f(\ln 2) < 0$, on en déduit qu'il existe $\beta \in]\ln 2 ; x_0[$ tq $f(\beta) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires ; f est dérivable donc continue)

De plus, comme f est strictement monotone sur $]\ln 2 ; +\infty[$, f est injective sur cet intervalle donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution β.

On raisonne de même sur $]-\infty ; \ln 2[$, sachant que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

On en déduit qu'il existe une unique solution α dans $]-\infty ; \ln 2[$ de $f(x) = 0$.

Finalement, $f(x) = 0$ admet exactement 2 solutions dans $\mathbb{R}$: α et β.

Méthode b) La fonction f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; \ln 2]$ avec $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(\ln 2) = 1 - 2\ln 2$. D'après le théorème de la bijection réciproque, elle réalise une bijection $]-\infty ; \ln 2] \longrightarrow [1-2\ln 2 ; +\infty[$. Or $1-2\ln 2 < 0$. On en déduit que 0 possède un unique antécédent α par f dans $]-\infty ; \ln 2]$.

De même, f est strictement croissante sur $]\ln 2 ; +\infty[$ avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le même théorème, f réalise une bijection $]\ln 2 ; +\infty[\longrightarrow]1-2\ln 2 ; +\infty[$ et 0 possède un unique antécédent β par f dans $]\ln 2 ; +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède exactement 2 solutions dans $\mathbb{R} =]-\infty ; \ln 2] \cup]\ln 2 ; +\infty[$, à savoir α et β.

Suite de Q2 échauffement :

(b) $\exists x \in]0;1[, \ |f'(x)| \leq 1$

(c) $\exists x \in]0;1[, \ f'(x) = 1$

A la différence de (a), il s'agit maintenant d'un résultat d'existence qui n'est pas sans rappeler le théorème des accroissements finis :

Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors

$$\exists c \in]a;b[, \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction f avec $a=0$ et $b=1$; on a :

$$\exists c \in]0;1[, \quad \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(c)$$

D'après les hypothèses sur f, on trouve $f'(c) = 1$

Ceci montre que (c) est vraie

Or $f'(c) = 1 \Rightarrow |f'(c)| \leq 1$

Par conséquent, (b) est vraie également

Exercice 4

[Comment comprendre cet exercice ? Supposons qu'à la place de l'hypothèse $\lim_{x\to+\infty} h(x)e^{h(x)} = e$ on ait l'hypothèse (plus simple) $\lim_{x\to+\infty} e^{h(x)} = e$. On en déduirait alors, en "composant par la fonction ln", que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \ln(e) = 1$.

On utilise deux choses :

(1) la fonction $X \mapsto e^X$, de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, est bijective, de réciproque donnée par $Y \mapsto \ln(Y)$. Et notamment : $\forall X \in]0,+\infty[, \ \ln(e^X) = X$.

(2) cette réciproque $Y \mapsto \ln(Y)$ est une fonction continue. On l'utilise effectivement car en "composant par la fonction ln" dans la limite j'utilise le fait que $\lim_{Y\to e} \ln(Y) = \ln(e)$, ce qui n'est rien d'autre que la continuité de $Y \mapsto \ln(Y)$ en $Y = e$.

Cette discussion motive donc l'étude de la fonction $X \mapsto Xe^X$ et la recherche d'une réciproque pour cette fonction (partie (1) ci-dessus). Ceci nous sera donné par l'application du théorème de la bijection réciproque, ce qui nous donnera en sus la continuité de la réciproque, qu'on appliquera au calcul de la limite (partie (2) ci-dessus).]

(a) Soit $k : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $k(x) = xe^x$. On étudie k dans le but d'appliquer le théorème de la bijection réciproque.

- Variations. La fonction k est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit des fonctions usuelles $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$. On calcule, pour $x \in [0, +\infty[$: $k'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.
  Pour $x \geqslant 0$ on a $1 + x \geqslant 1 > 0$ et $e^x > 0$ donc $k'(x) > 0$.
  On en déduit que <u>k est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.</u>
  [On pourrait se passer de la dérivée ici et montrer à la main que pour $x, x' \in [0, +\infty[$, $x < x'$ implique $k(x) < k(x')$.]
- Continuité. Comme on a déjà justifié que k est dérivable, elle est continue sur $[0, +\infty[$.
  [Ou bien : elle est continue comme produit des fonctions usuelles $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$.]

• Valeurs / limites aux bornes de l'intervalle de définition.

- On a $k(0) = 0$.

- Comme $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, on a par produit $\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$.

On a bien vérifié les hypothèses de la bijection réciproque, qui implique donc que k réalise une bijection de $I = [0,+\infty[$ vers $J = [0,+\infty[$. Le théorème implique aussi que sa réciproque $k^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est continue.

[Très concrètement : cela veut dire que pour tout $y \in [0,+\infty[$ il existe un unique $x \in [0,+\infty[$ tel que $k(x) = y$. Ce x est ce qu'on note $k^{-1}(y)$.]

(b) On sait que $\lim_{x \to +\infty} h(x) e^{h(x)} = e$, ce qu'on peut écrire sous la forme : $\lim_{x \to +\infty} k(h(x)) = e$. Comme la fonction k^{-1} est continue d'après la question (a), et donc notamment continue au point $y = e$, on en déduit (par limite d'une composée) qu'on a : $\lim_{x\to+\infty} k^{-1}(k(h(x))) = k^{-1}(e)$, c'est-à-dire : $\lim_{x\to+\infty} h(x) = k^{-1}(e)$.

Comme $k(1) = e$, on a par définition $k^{-1}(e) = 1$ et donc : $\underline{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1}$.

Exercice 5

On définit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) - x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(a). Continuité.

Clairement, f est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme/produit des fonctions usuelles $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$. Il reste à étudier la continuité en $x = 0$, c'est-à-dire à calculer la limite de $x\ln(x) - x$ quand x tend vers 0 (avec $x > 0$).

Par le théorème de croissance comparée on a $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$.

[A priori il s'agit d'une forme indéterminée "$0 \times (-\infty)$".]

Comme $\lim_{x\to 0} x = 0$ on en déduit (par somme de limites) que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Vu que $f(0) = 0$, f est donc continue en 0, et donc continue sur $[0, +\infty[$.

- Dérivabilité.

Clairement, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme/produit des fonctions usuelles $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$. Calculons dès maintenant la dérivée : pour $x > 0$ on a

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x).$$

Il reste à étudier la dérivabilité en $x = 0$. Pour cela on revient à la définition via le taux d'accroissement et on calcule, pour $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \ln(x) - x}{x} = \frac{\cancel{x}(\ln(x) - 1)}{\cancel{x}} = \ln(x) - 1$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$, on obtient par somme :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty.$$

Comme ce n'est pas une limite finie on en déduit que f n'est pas dérivable en $x = 0$.

- ## Variations

On a calculé, pour $x > 0$: $f'(x) = \ln(x)$. Le signe de $f'(x)$ est donc facile à déterminer : on a

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 1.$$

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On a rempli le tableau avec $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = -1$ et avec la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, qu'on justifie maintenant. [A priori il s'agit d'une forme indéterminée "$+\infty - (+\infty)$"...] On écrit $x\ln(x) - x = x\left(\ln(x) - 1\right)$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln(x) - 1\right) = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on a par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln(x) - 1\right) = +\infty$

et donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(b) On a montré que f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$. On a aussi calculé $f(1)=-1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. On peut donc appliquer le théorème de la bijection réciproque, ce qui montre que f réalise une bijection de $I=[1,+\infty[$ dans $J=[-1,+\infty[$.

(c) On note $g:[-1,+\infty[\to[1,+\infty[$ la réciproque de cette bijection.

[Très concrètement : pour $y\in[-1,+\infty[$, $g(y)$ est l'unique $x\in[1,+\infty[$ tel que $f(x)=y$.]

Donc $g(0)$ est l'unique $x\in[1,+\infty[$ tel que $f(x)=0$. On résout donc, pour $x\geq 1$, l'équation :

$$\begin{aligned}
f(x)=0 &\iff x\ln(x)-x=0\\
&\iff x(\ln(x)-1)=0\\
&\iff \ln(x)-1=0 \quad \text{car } x\neq 0\\
&\iff \ln(x)=1\\
&\iff x=e \quad (\in[1,+\infty[)
\end{aligned}$$

On a donc $g(0) = e$.

Pour calculer $g'(0)$, on ne peut pas faire autrement que d'utiliser le théorème du cours sur la dérivée d'une réciproque.

[En effet, on n'a pas de formule pour $g(y)$ qu'on pourrait ensuite dériver "mécaniquement"...]

On a déjà dit que f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \ln(x)$. Notamment, f est dérivable en e et $f'(e) = \ln(e) = 1$, qui est $\neq 0$.

On en déduit (par le théorème du cours sur la dérivée d'une réciproque) que g est dérivable en 0 et que

$$g'(0) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exercice 6

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction "racine carrée" donnée par $f(t) = \sqrt{t}$. Pour un $x > 0$ fixé, on veut appliquer les accroissements finis à f sur l'intervalle $[1, 1+x]$.

Clairement, f est continue sur $[1, 1+x]$ et dérivable sur $]1, 1+x[$ (elle est même dérivable sur $[1, 1+x]$) et sa dérivée est donnée par la formule $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

Le <u>théorème des accroissements finis</u> me dit donc qu'il existe un $c \in]1, 1+x[$ tel que

$$\frac{f(1+x) - f(1)}{(1+x) - 1} = f'(c) \quad , \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad , \text{ ou encore :}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2\sqrt{c}} . \quad (*)$$

Comme $c > 1$ on a $\sqrt{c} > \sqrt{1}$ (la fonction "racine carrée" est strictement croissante), donc $2\sqrt{c} > 2$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} < \dfrac{1}{2}$.

En multipliant par x (qui est > 0) on obtient donc :
$\dfrac{x}{2\sqrt{c}} < \dfrac{x}{2}$. En remplaçant dans $(*)$ on obtient :

$$\sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2} \text{ , et donc } \underline{\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}}.$$

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On veut montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \ell$.

Pour cela on revient à la définition via le taux d'accroissement. Pour plus de clarté on va traiter séparément la limite à droite et à gauche de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

Pour un $x > 0$ fixé, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0, x]$ (f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ par hypothèse). Ce théorème nous donne l'existence d'un $c \in]0, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(c)$.

Vu que c dépend évidemment de x, on le note $c(x)$ pour clarifier la situation.

[Il y a une petite subtilité ici : pour un $x>0$ il peut y avoir plusieurs c qui conviennent ; on en <u>choisit</u> un qu'on note $c(x)$.]

Réécrivons donc : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(c(x))$.

Comme $0 < c(x) < x$, le théorème des gendarmes nous dit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} c(x) = 0$. Comme $\lim\limits_{X\to 0} f'(X) = \ell$, on obtient donc (limite d'une composée) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(c(x)) = \ell$,

et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ell$.

De la même manière on montre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ell$,

ce qui donne : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ell$. Cela implique, par définition, que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \ell$.