Programme

- Introduction
- Le langage de la LP (syntaxe)
- La sémantique de la LP
- Équivalence logique et Substitution
- **Conséquence logique**
  - $\mathbf{P} \vDash \mathbf{Q}$
  - **Théorème** liant les problèmes de logique : **conséquence logique, validité, insatisfiabilité**
- Méthode des séquents
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode de Davis et Putnam
- Initiation à la logique des prédicats

Conséquence logique

- **Définition** : « Une fbf C est ***conséquence logique*** d'un ensemble de fbf $\{H_1, ..., H_k\}$ ssi toute interprétation qui est un modèle commun à chaque H_j, pour j de 1 à k, est un modèle de C (i.e. pour toute I telle que, pour tout j, val(H_j,I)=1, on doit avoir val(C,I)=1) »
- On note $\{H_1, ..., H_k\} \models C$ ou simplement $H_1, ..., H_k \models C$
  - se lit « *H_1, ..., H_k ont pour conséquence logique C* »
  - Cette notion de conséquence logique doit être considérée comme une modélisation d'un raisonnement valide
  - Une conséquence logique peut être vérifiée sur une table de vérité en regardant si pour **toute ligne** ayant un 1 dans chacune des colonnes des H_j il y a aussi un 1 dans la colonne de C
    - Il suffit d'une ligne (et **il en faut au moins une**) avec des 1 sur les H_j et un 0 sur C pour qu'elle ne soit pas avérée.
    - Donc si aucune ligne n'a de 1 sur tous les Hj, la conséquence logique est avérée sans condition sur C

Propriétés de la conséquence logique

- Exemples

  $P,Q \models P \wedge Q$

  $P \models P \vee Q$ *(pour un q quelconque)*

  $P, P \Rightarrow Q \models Q$ *(modus ponens)*

  $\neg Q, P \Rightarrow Q \models \neg P$ *(modus tollens)*

- Propriétés
  - Si P est une fbf valide alors $E \models P$ pour un ensemble E quelconque de fbf (y compris $\emptyset$)
  - Si E est un ensemble inconsistant de fbf alors $E \models P$ pour une fbf P quelconque
  - Soit P et Q deux fbf : $P \equiv Q$ ssi $P \models Q$ et $Q \models P$

Propriété fondamentale de la conséquence logique

- **Théorème**

  $H_1, \ldots, H_k \models C$ ssi

  $H_1 \wedge \ldots \wedge H_k \Rightarrow C$ est valide ssi

  $H_1 \wedge \ldots \wedge H_k \wedge \neg C$ est insatisfiable

- Ainsi le problème de la validité d'un raisonnement (la conséquence logique) peut se ramener à celui de la validité ou satisfiabilité d'une formule

Equivalence des problèmes de la logique

- **Théorèmes**

  F est valide ssi $\neg$F est insatisfiable ssi $\top \models F$ (ou $\models F$)

  F est insatisfiable ssi $\neg$F est valide ssi $F \models \bot$

- Ainsi il suffit de savoir résoudre un des trois problèmes fondamentaux de logique (satisfiabilité, validité ou conséquence logique) pour résoudre n'importe lequel d'entre eux.