Ensembles, Fonctions, Applications

8

1 Ensembles

1.1 Définitions de base

Un ensemble est une collection d'objets distincts où l'ordre n'a pas d'importance.

1. L'ensemble vide, noté $\{\}$ ou $\emptyset$, n'a aucun élément.
2. Soit E un ensemble non vide. E a au moins un élément x. On dit que x *appartient* à E et l'on note $x \in E$. La négation de cette relation : x *n'appartient pas* à E se note $x \notin E$.
3. Un ensemble *discret* peut se décrire de deux façons :
   (a) par la suite de ses *éléments* s'il est *fini*. De tels ensembles sont dits définis en *extension*. *Exemple* : $\{1, 2, 3\}, \{\} = \emptyset, \{\texttt{vrai}, \texttt{faux}\}$.
   (b) Évidemment, un ensemble qui n'est pas fini ne peut être donné en extension. On doit donc le définir autrement, par une propriété. On dit qu'il est défini en *compréhension* (ou *intention*). Les ensembles infinis qui nous intéressent sont en bijection avec $\mathbb{N}$, autrement dit ils sont *équipotents* à $\mathbb{N}$ ou *dénombrables*.

       Exemple : $\mathbb{N}$, tous les entiers qui sont pairs, plus formellement : $\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}, n = 2 \times k\}$.
4. Le *cardinal* de E, noté $|E|$, est le nombre d'éléments de l'ensemble E.
5. Comparaison d'ensembles (dans la suite E est l'ensemble de référence et A et B des parties de E)
   (a) **Inclusion** Un ensemble A est dit contenu dans ou inclus dans un ensemble B si *chaque* élément de A est un élément de B. On note : $A \subseteq B$ si $\forall x \in A, x \in B$. On dit A est un *sous-ensemble* de B, ou encore A est une partie de B.
   (b) **Non inclusion** $A \nsubseteq B$ si la phrase précédente est fausse. Donc il y a au moins un élément de A qui n'est pas un élément de B, ce qui s'écrit $\exists x \in A \,|\, x \notin B$
   (c) **Égalité** $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ (Manière très classique de prouver l'égalité entre 2 ensembles).
   (d) **Non égalité** $A \neq B$ s'il y a un élément de A qui n'est pas un élément de B, ou s'il y a un élément de B qui n'est pas un élément de A.
   (e) **Inclusion stricte** A est strictement inclus dans B si $A \subseteq B$ et $A \neq B$. A est dit sous-ensemble *propre* ou *strict* de B.
6. On s'intéresse souvent aux *sous–ensembles ou parties* de E comme éléments eux-mêmes d'un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble exhaustif de toutes les parties de E.

Exemple : $C = \{1,2,3\}$. Comme C est fini on peut/doit énoncer $\mathcal{P}(C)$ en extension : $\mathcal{P}(C) = \{\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
On a par définition : $A \subseteq E$ ssi $A \in \mathcal{P}(E)$.

80 Exercice ⋆ Corr. p. ??

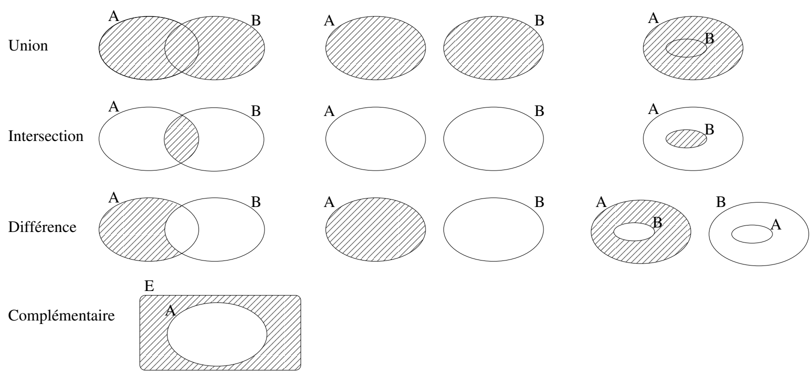
Donnez en extension l'ensemble $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

81 Exercice ⋆ Corr. p. ??

A–t–on $\{\} = \mathcal{P}(\{\})$? Calculez $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\}))$.

1.2 Opérations sur les ensembles

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$	union
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$	intersection
$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ et } x \notin A\}$	différence
$\overline{A}^E = E \setminus A \quad \text{pour } A \subseteq E$	complémentaire
$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$	produit cartésien



82 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soient deux ensembles E, F.

— Soit A une partie de $E \cap F$. A est-elle une partie de E ? de F ? En déduire une comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

— Soit B un ensemble qui est à la fois contenu dans E et aussi dans F. B est–il contenu dans $E \cap F$? En déduire une deuxième comparaison de $\mathcal{P}(E \cap F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

— Sur un exemple simple, montrez qu'une partie de $E \cup F$ peut ne pas être contenue dans E, ni dans F.

— Montrez que toute partie de E est une partie de $E \cup F$.
En déduire une comparaison de $\mathcal{P}(E \cup F)$ avec $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

1.3 Généralisation à plusieurs ensembles

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on note respectivement $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ leur union et leur intersection.

Le produit cartésien se généralise à une famille finie d'ensembles :
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \,|\, e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, \ldots, e_n \in E_n\}$
$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est appelé un *n-uplet*. Autre notation souvent utilisée : E^m pour $E \times E \times \ldots \times E$ m fois.

1.4 Propriétés de ces opérations

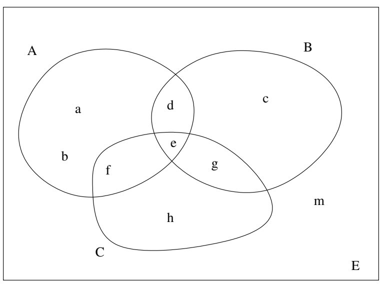
Soit E un ensemble, on rappelle que union et intersection sont définies dans $\mathcal{P}(E)$ et telles que :

1. L'union et l'intersection sont des opérations
   — associatives : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
   — commutatives : $A \cap B = B \cap A$
   — distributives l'une par rapport à l'autre : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   — Loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Lorsque deux ensembles n'ont aucun élément commun, leur intersection est vide. Les ensembles sont dits *disjoints*.
3. Attention : une *paire* est un ensemble à 2 éléments, alors qu'un *couple* est un 2-uplet, dans lequel l'ordre des éléments est important. Ainsi, les paires $\{1, 2\}$ et $\{2, 1\}$ sont égales alors que les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont différents.

83 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Dans cet exercice, on considère les ensembles E, A, B et C décrits dans le diagramme de Venn de la figure ci-dessous. Dites si les affirmations suivantes sont justes ou fausses

$g \in A \cap \overline{B}$	$g \in \overline{A} \cap \overline{B}$
$f \in C \setminus \overline{A}$	$g \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
$e \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	$m \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
$\{h, m\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$	$(A \setminus B) \cup C \cup \{c\} \in \mathcal{P}(E)$

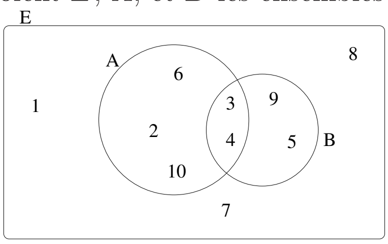


ENS.
SUITES
RAIS.
COMPL.
VECT.
DERIV.
TRIG.
BASE

84 Exercice

⋆ Corr. p. ??

Soient E, A, et B les ensembles décrits par le diagramme de Venn ci-dessous, trouvez



— M tel que $M \cap A = \emptyset$ et $M \cap B = \{9\}$
— N tel que $N \cup A = \{2,3,4,5,6,10\}$ et $N \cup B = \{3,4,5,9\} = B$. Remarquez qu'on a $N \subseteq B$
— $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O} \cap A = \{2,6\}$ et $\mathcal{O} \cap B = \{3,5\}$
— P tel que $\overline{P}^E = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 7\}$
— Q tel que $Q \setminus A = \{1,5\}$ et $Q \setminus B = \{1,6\}$

85 Exercice

⋆ Corr. p. ??

On définit l'opération $\diamond$ sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \diamond B = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ exprimez en fonction de la seule opération $\diamond$: $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$

86 Exercice

⋆ Corr. p. ??

A, B sont des parties de E un ensemble fini. Exprimez en fonction de $|A|$, $|A \cap B|$, $|B|$ les cardinaux des ensembles $A \cup B$, $A \setminus B$ et $A \times B$.

1.5 Partition d'un ensemble

Des parties d'un ensemble E, $A_1, \ldots, A_n$ réalisent une *partition* de E si elles sont non vides, disjointes, et leur union est E.

Exemple : $E = \{1,2,3,4,5\}$, $A_1 = \{1,4\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3,5\}$. L'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une partition de E.

Trois partitions remarquables :

— *les singletons :* si E est un ensemble fini, on associe à chaque élément $e \in E$ un ensemble à 1 élément, le singleton $E_e = \{e\}$;
— *la partition pleine :* contient un seul ensemble $E_1 = E$.
— Pour un sous-ensemble $A \subsetneq E$ non vide, $\{A, \overline{A}^E\}$ est une partition.

87 Exercice

⋆ Corr. p. ??

Trouver toutes les partitions possibles de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

88 Exercice

⋆ Corr. p. ??

Trouver une partition de $\mathbb{N}$ en trois parties infinies.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

2 Relations binaires

2.1 Relation binaire

Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ d'un ensemble X vers un ensemble Y est définie par un sous-ensemble du produit cartésien $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$, appelé le *graphe* de la relation.

Pour $(x, y) \in \mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$ et on dit que x et y sont en *relation*. (On dit aussi y est associé à x par $\mathcal{R}$, ou encore que y est image de x par $\mathcal{R}$)

Exemples :

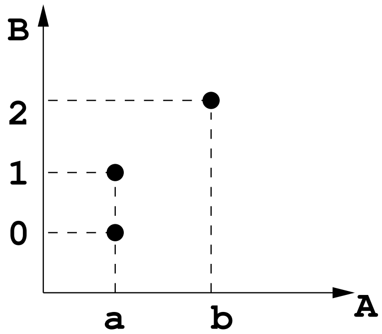
— $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1, 2\}$. $\mathcal{R} = \{(a, 0), (a, 1), (b, 2)\}$ est une relation binaire de A vers B. $a\mathcal{R}0$, $a\mathcal{R}1$, ...

— $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{2, 3\}$. « est un multiple de » définit une relation $\mathcal{S}$ de A vers B. $2\mathcal{S}2$, $3\mathcal{S}3$, $4\mathcal{S}2$, ...
$\mathcal{S}$ est $\{(2, 2), (3, 3), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\} \subseteq A \times B$

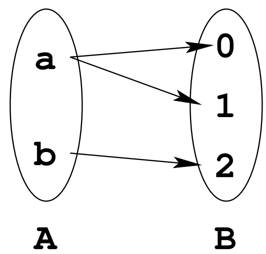
On *représente* une relation binaire de A vers B, par différentes sortes de diagrammes :

— diagramme cartésien ;

— diagramme sagittal (comme on fait dans les diagrammes de Venn : patatoïdes et flèches).



Le diagramme cartésien de $\mathcal{R}$



Le diagramme sagittal de $\mathcal{R}$

La relation *réciproque* d'une relation $\mathcal{R}$ de A vers B est notée $\mathcal{R}^{-1}$. $\mathcal{R}^{-1}$ est une relation de B vers A, c-à-d que $\mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$. $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$ ssi $(a, b) \in \mathcal{R}$, autrement dit $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b\mathcal{R}^{-1}a$.

Exemple : $\mathcal{R}^{-1} = \{(0, a), (1, a), (2, b)\}$

2.2 Fonctions et applications

Soit f une relation binaire d'un ensemble X vers un ensemble Y. Alors :

— f est *fonctionnelle* si pour tout $x \in X$, il existe au plus un élément $y \in Y$ en relation avec x.

— f est une *application* si pour tout $x \in X$, il existe exactement un élément $y \in Y$ en relation avec x.

— f est *injective* si pour tout $y \in Y$, il existe au plus un élément $x \in X$ en relation avec y.

— f est *surjective* si pour tout $y \in Y$, il existe au moins un élément $x \in X$ en relation avec y.

— f est *bijective* si c'est une application injective et surjective.

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

Remarques :

— Une relation fonctionnelle est aussi appelée une fonction.
— L'ensemble des applications de X vers Y est noté Y^X.
— Pour montrer que f est injective, on montre que pour tous $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

En notation fonctionnelle pour une fonction f de X vers Y, on note $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y. \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

— f est incluse dans $X \times Y$: $f \subseteq X \times Y$.
— X est l'ensemble de *départ* et Y l'ensemble *d'arrivée*.
— L'ensemble $Dom(f) = \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ avec } y = f(x)\}$ est le *domaine* ou *ensemble de définition* de f, $Dom(f) \subseteq X$.
— L'ensemble $Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ avec } y = f(x)\}$ est l'*image* de f, $Im(f) \subseteq Y$.
— **L**'*image* de $x \in X$ par f est l'élément y de Y tel que $y = f(x)$.
— **Un** *antécédent* par f d'un élément y de Y est un élément x tel que $y = f(x)$.

On se donne une fonction $f : X \longrightarrow Y$. Soit A une partie de X et B une partie de Y. On définit :

— *l'image directe* de A par f : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ avec } y = f(x)\}$ ($f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A),
— *l'image réciproque* de B par f : $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ($f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B).

Avec ces notations, on a $f(X) = Im(f)$ et $f^{-1}(Y) = Dom(f)$.

Dans le cas où $f : X \longrightarrow Y$ est une application bijective, on peut définir l'application réciproque de f :

$\mathbf{f^{-1}} : \begin{array}{ccl} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & \text{L'unique } x \text{ tel que } f(x) = y \end{array}$, qui est aussi bijective. $(f^{-1})^{-1} = f$.

89 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Les ensembles qui suivent définissent–ils une relation binaire fonctionnelle ? Si oui, donnez un ensemble de départ qui en fasse une application, vous direz ensuite si elle est injective, et s'il existe un choix de l'ensemble d'arrivée qui la rende surjective.

1. $\{(0,1),(0,0)\}$
2. a, b sont deux symboles. $\{(0,a),(1,a),(2,b)\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x + y \leqslant 4\}$
4. $A = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x \geqslant 4 \text{ et } y \geqslant 3\}$
5. $B = \mathbb{N}^2 \setminus A$

90 Exercice ⋆ Corr. p. ??

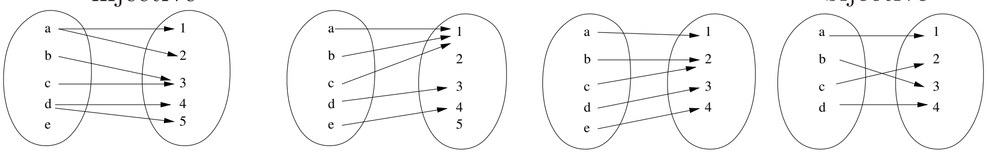
Soit l'application $\mathbf{f} : \begin{array}{ccc} E = \{1,2,3\} & \longrightarrow & F = \{1,2,3,4,5\} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$.

Écrire en extension la relation binaire qui définit f.

91 Exercice ⋆ Corr. p. ??

On rappelle qu'une relation binaire de l'ensemble A vers l'ensemble B est définie par son graphe, une partie de $A \times B$. On peut la représenter par un diagramme sagittal. Dites parmi les diagrammes sagittaux suivants lesquels sont :

— le graphe d'une application
— injective
— surjective
— bijective



(a) (b) (c) (d)

92 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ l'application double et $m : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n \div 2 \end{array}$ (division entière) l'application moitié. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Mêmes questions pour $d \circ m$ et $m \circ d$.

93 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit E un ensemble, et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)$ deux parties de E.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Donnez un exemple avec E fini de cardinal 6, A et B parties de E de cardinaux 4 et 3 ayant deux élément communs.
   Pour cet exemple, f est–elle injective. surjective. bijective ?
2. Trouvez des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B, en général, pour que f soit *i.* injective. *ii.* surjective. *iii.* bijective.

94 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit une application $f : E \longrightarrow F$, A une partie de E et B une partie de F.
Montrer que l'image directe d'une partition de E n'est pas toujours une partition de F.
(***) Montrer que, lorsque f est surjective, l'image réciproque d'une partition de F par f est une partition de E.

95 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soient E, F deux ensembles $\boxed{\text{finis non vides}}$, et A une partie de E, B une partie de F.

1. Faites un diagramme sagittal, pour une application f quelconque, des ensembles E, F, A, B de tailles respectives 5,6,3,2. Déterminez, avec votre exemple $f(A)$, $f^{-1}(B)$.
2. En général quelle est la relation entre $|A|$ et $|f(A)|$? $(<, =, \leqslant)$. Et entre $|B|$ et $|f^{-1}(B)|$?
3. Que deviennent vos relations quand f est injective ? surjective ?
4. Y a-t-il une réciproque, c'est à dire une relation entre les cardinaux qui impliquerait le caractère injectif, ou surjectif de f ?
5. Les propriétés précédentes sont elles encore vraies en cas d'ensembles infinis dénombrables ?

96 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit E un ensemble fini non vide. Peut–on construire une application bijective de $E \times E$ vers E ?

3 Exercices facultatifs

97 Exercice ⋆ Corr. p. ??

(***) (*difficile*) Pour chacune des propriétés suivantes donnez une partition infinie P de $\mathbb{N}$ la vérifiant :

1. Chaque $X \in P$ est fini.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ il existe un unique $X \in P$ avec n éléments.
3. Chaque $X \in P$ est infini

98 Exercice

⋆ Corr. p. ??

(***) Énumérer un ensemble infini E c'est exhiber ou construire une bijection de E vers $\mathbb{N}$. On définit les « techniques d'énumérations » suivantes :

1. On énumère les couples d'entiers par tranches successives d'équation $x + y = r, r = 0, 1, 2, \ldots.$ D'abord $(0,0)$, puis $(1,0), (0,1)$, puis $(2,0), (1,1), (0,2)$, puis ...
2. On énumère les couples d'entiers par périmètre de carré d'équation $(x = r, y \leqslant r)$ ou $(y = r, x \leqslant r)$: D'abord $(0,0)$, puis $(1,0), (1,1), (0,1)$, puis $(2,0), (2,1), (2,2), (1,2), (0,2)$, puis ...

Pour chacune de ces techniques :

1. Montrez qu'elle définit bien une application f_2
2. Indiquez en quelques mots pourquoi l'application est bien une bijection de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$.
3. Donnez les 10 premiers éléments de l'énumération.
4. Pour ceux qui ont du courage, on pourra définir l'expression algébrique de $f_2(x, y)$ en fonction de x et y.

99 Exercice

⋆ Corr. p. ??

(***) Soit $f_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ une application énumérant $\mathbb{N}^2$.

1. Utilisez f_2 pour construire une énumération f_3 de $\mathbb{N}^3$.
2. Utilisez f_2 et f_3 pour construire une énumération f_4 de $\mathbb{N}^4$.