Programme

- Introduction
- **Le langage de la LP (syntaxe)**
- La sémantique de la LP
- Équivalence logique et Substitution
- Conséquence logique
- Méthode des séquents
- Formes normales et clausale
- Méthode de résolution
- Méthode de Davis et Putnam
- Initiation à la logique des prédicats

Syntaxe de la logique des propositions

- Soit l'ensemble des mots définis sur l'alphabet $A = S \cup C \cup D \cup L$ où :
  - **S** est un ensemble dénombrable de symboles propositionnels

    Notés en lettre minuscule dans les exemples S={p,q,r…}

  - C={$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$} est l'ensemble des connecteurs logiques

    non (négation), et (conjonction), ou (disjonction), implique /si-alors (implication), équivalent/si-et-seulement-si (équivalence)

  - D={(,)} est un jeu de parenthèses

  - L={$\top, \bot$} les constantes logiques

    Top(True/Vrai), Bottom(Absurde)

FBF : Formules Bien Formées

- On définit **PROP(S)**, l'ensemble des fbf de la logique des propositions (ou simplement propositions), construites sur S par induction :

  (base) $S \cup \{\bot, \top\}$

  (cons) Soit P et Q des mots de $(S \cup C \cup D \cup L)^*$, on dispose de 5 règles de construction

  $r_1(P) = \neg P$

  $r_2(P,Q) = (P \wedge Q)$

  $r_3(P,Q) = (P \vee Q)$

  $r_4(P,Q) = (P \Rightarrow Q)$

  $r_5(P,Q) = (P \Leftrightarrow Q)$

Remarques

- Convention de ce cours :
  - Les majuscules dénotent des propositions (fbf):

    P,Q,R…
  - Les minuscules dénotent des symboles propositionnels

    p, q, r
- Attention :
  - Tout symbole propositionnel est une proposition

    p est à la fois une fbf de PROP({p,q}) et un symbole de {p,q}
  - Le contraire n'est pas vrai !

    $(p \wedge q)$ est une fbf de PROP({p,q}) mais n'est pas un symbole
  - Une formule réduite à un symbole propositionnel ou aux constantes logiques $\top$ ou $\bot$ est appelée une formule atomique ou atome

Différentes syntaxes

- Différentes fbf peuvent représenter les « mêmes conditions de vérité » (avoir la même sémantique)

  ➔ les connecteurs sont redondants

  Ex. $(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

- Dans les démonstrations, on pourra se limiter aux seuls connecteurs $\neg, \wedge$ en traitant les autres comme des macros *(i.e. des raccourcis d'écriture)* :
  - $\bot$ pour $(P \wedge \neg P)$
  - $\top$ pour $\neg\bot$
  - $(P \vee Q)$ pour $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
  - $(P \Rightarrow Q)$ pour $(\neg P \vee Q)$

Notions utiles

- L'ensemble des symboles propositionnels d'une fbf.

$\mathcal{SP}$: PROP(S) → 2^S qui à une fbf P associe :

(base) si $P \in S$, $\mathcal{SP}(P) = \{P\}$

si $P=\top$ ou $P=\bot$, $\mathcal{SP}(P) = \{\}$

(cons)

r_1 : si $P=\neg Q$, $\mathcal{SP}(P) = \mathcal{SP}(Q)$

r_2, r_3, r_4, r_5 :

si $P=(Q\wedge R)$ ou $P=(Q\vee R)$ ou $P=(Q\Rightarrow R)$ ou $P=(Q\Leftrightarrow R)$,

$\mathcal{SP}(P)= \mathcal{SP}(Q)\cup\mathcal{SP}(R)$

Notions utiles (suite)

- Nombre de connecteurs d'une fbf :

  nbc: PROP(S) → N

  (base) nbc(P) = 0

  (cons)

  r_1 : P=¬Q, nbc(P) = 1+nbc(Q)

  r_2,r_3,r_4,r_5 : P=(Q c R) avec c connecteur binaire

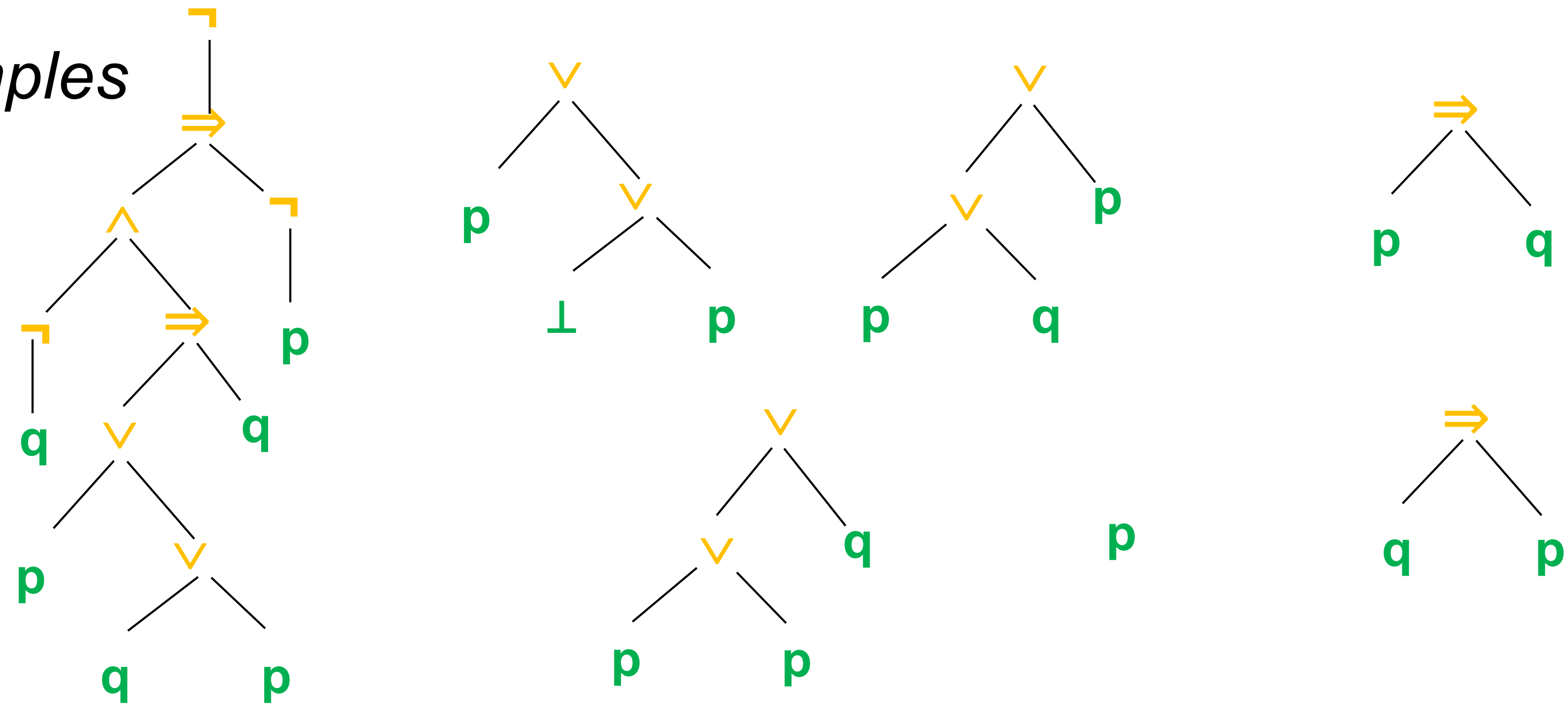
  nbc(P) = 1+nbc(Q)+nbc(R)

- *Exercice*
  - *Ensemble des connecteurs d'une fbf*
  - *Ensemble des sous-fbfs d'une fbf (i.e. les fbfs utilisées pour construire cette fbf)*
    - *Ex : ssfbf(((a∧b)⇒¬a)) = {a,b,¬a,(a∧b),((a∧b)⇒¬a)}*

Notions utiles (suite)

- Soit ARBO(S) l'ensemble des arborescences dont
  - les **feuilles** sont étiquetées par des éléments de $S \cup \{\top, \bot\}$, et
  - les **autres nœuds** par des connecteurs avec respect de l'arité
    - Un nœud étiqueté par un connecteur binaire a deux fils (gauche et droit)
    - Un nœud étiqueté par le connecteur unaire ¬ a un fils

Exemples



Notions utiles (fin)

- Propriété : A toute fbf correspond une unique arborescence (et vice versa) :
  - Soit fbf2arb (l'arbor. associée à une fbf) : PROP(S) → ARBO(S)

    (base) fbf2arb(P)= arbor. réduite à un sommet étiqueté par P

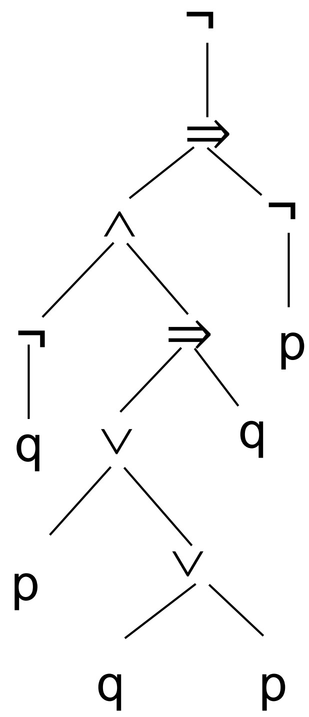
    (cons)
    r1: P=¬Q, fbf2arb(P)= arbor. de racine étiquetée par ¬ ayant comme unique fils la racine de fbf2arb(Q)

    autres r : P=(Q c R), fbf2arb(P)= arbor. de racine étiquetée par c ayant comme fils gauche la racine de fbf2arb(Q) et comme fils droit la racine de fbf2arb(R)

  - On montre que fbf2arb est une bijection

    - *Exercice : dessiner fbf2arb((a∧¬b)∧a))*
    - *Exercice : définir arb^{-1} la fonction qui a une arbor. associe une fbf*
    - *Exercice : définir profondeur d'une fbf*

Notation des formules



- Si les arbres montrent bien la structure d'une fbf, ils ne sont pas « pratique » pour l'écriture en ligne
  - Les notations **préfixée** ou **post-fixée** ont l'avantage de ne pas nécessiter de parenthèses mais sont peu lisibles !

    PRE (Rac, FG, FD) : $\neg \Rightarrow \wedge \neg q \Rightarrow \vee p \vee q\, p\, q \neg p$

    POST (FG, FD, Rac) : $q \neg p\, q\, p \vee \vee q \Rightarrow \wedge p \neg \Rightarrow \neg$

  - La notation **infixée** est la manière classique d'écrire les fbf mais elle nécessite l'utilisation de parenthèses

    $\neg((\neg q \wedge ((p \vee (q \vee p)) \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p)$

Conventions d'écriture

- On peut par des convention éliminer certaines parenthèses
  - Les parenthèses externes ne sont jamais utiles

    $(a \wedge (b \vee c))$ *peut s'écrire sans ambiguïté* $a \wedge (b \vee c)$

  - On introduit un ordre sur les connecteurs de celui qui « lie » le plus ses opérandes à celui qui les « lie » le moins

    (+ fort) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (- fort)

    $((a \vee (b \Rightarrow c)) \Leftrightarrow \neg a)$ *peut s'écrire par convention* $a \vee (b \Rightarrow c) \Leftrightarrow \neg a$

    $a \vee \neg b \wedge c$ *doit se comprendre par convention* $(a \vee (\neg b \wedge c))$

  - Entre deux mêmes connecteurs, on utilise des priorités de position :
    - Gauche-Droite (celui de gauche lie plus que celui de droite) pour $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$

      $((a \vee b) \vee c)$ *peut s'écrire par convention* $a \vee b \vee c$

    - Droite-Gauche pour $\Rightarrow$

      $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c))$ *peut s'écrire par convention* $a \Rightarrow b \Rightarrow c$

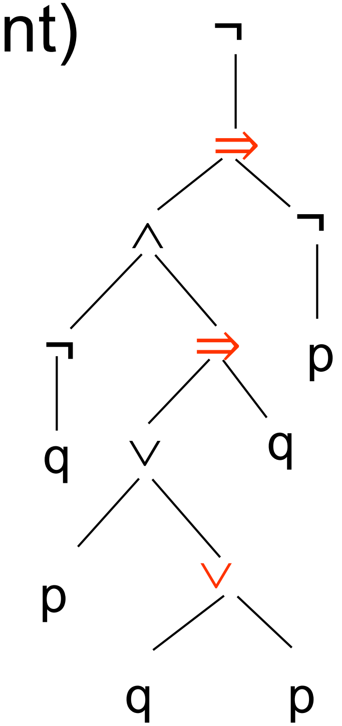
Notation des formules

Convention : (+ liant) $\neg$, $\wedge_G$, $\vee_G$, $\Rightarrow_D$, $\Leftrightarrow_G$ (- liant)

$p \Rightarrow \neg q \vee \neg\neg q \wedge p \Rightarrow q$ *doit se comprendre* $(p \Rightarrow ((\neg q \vee (\neg\neg q \wedge p))) \Rightarrow q))$

$\neg((\neg q \wedge ((p \vee (q \vee p)) \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p)$ *peut s'écrire par convention*

$\neg(\neg q \wedge (p \vee (q \vee p) \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$



- On a ainsi un langage alternatif de fbf à priorité
  (base) $\bot$, $\top$ et les symboles s de S sont des fbf à priorité
  (cons) si P et Q sont des fbf à priorité alors
  (P), $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$ sont des fbf à priorité

- Une fbf à priorité est une abréviation d'une fbf totalement parenthésée et correspond donc à une unique arborescence
  … mais ne pas hésiter à mettre des parenthèses pour faciliter la lecture