Correction de la feuille d'exercices N$^\circ$ 6

1. ÉCHAUFFEMENT (AVANT LES TD)

Question 1. $AB \in M_2(\mathbb{R})$.
En effet, on ne peut définir/calculer le produit matriciel AB que si les matrices A et B sont de **type compatible**, c'est-à-dire si le **nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.** Lorsque ce produit AB est calculable (comme c'est le cas ici), le résultat a **autant de lignes que la matrice $\boldsymbol{A}$ et autant de colonnes que la matrice $\boldsymbol{B}$**. Voilà pourquoi ici, $AB \in M_2(\mathbb{R})$.

Question 2. $A \in M_{7,5}(\mathbb{R})$ (autrement dit A est de taille (7,5)) et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

En effet, si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, la matrice associée à f est la matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Inversément, si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice, l'application linéaire associée à A est

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{X} & \longmapsto & A\mathbf{X}. \end{array}$$

Question 3. La matrice $A \in M_{4,5}(\mathbb{R})$ associée à cette application linéaire est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Question 4. L'application linéaire f associée à cette matrice de taille (3,4) est :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x-y+z+2t \\ x+y-3z+2t \\ x-y-z+2t \end{pmatrix}. \end{array}$$

Question 5.

- $-2A$ est bien définie (c'est le produit d'une matrice par un scalaire). Comme A, $-2A \in M_3(\mathbb{R})$ et

$$-2A = -2 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2\times 2 & -2\times 3 & -2\times 4 \\ -2\times 4 & -2\times 5 & -2\times 0 \\ -2\times(-1) & -2\times 0 & -2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -8 \\ -8 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

- $A+B$ est bien définie (car A et B sont deux matrices du même type, c'est-à-dire, de même taille). Comme A et B, $A+B \in M_3(\mathbb{R})$ et

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2+(-1) & 3+1 & 4+0 \\ 4+(-1) & 5+(-3) & 0+(-4) \\ -1+0 & 0+1 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

- **$x+\xi$ n'est pas bien définie car x et ξ ne sont pas du même type (autrement dit, x et ξ n'ont pas la même taille).**
- AB est bien définie (car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). Le produit $AB \in M_3(\mathbb{R})$ et

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\times(-1)+3\times(-1)+4\times 0 & 2\times 1+3\times(-3)+4\times 1 & 2\times 0+3\times(-4)+4\times 6 \\ 4\times(-1)+5\times(-1)+0\times 0 & 4\times 1+5\times(-3)+0\times 1 & 4\times 0+5\times(-4)+0\times 6 \\ -1\times(-1)+0\times(-1)+3\times 0 & -1\times 1+0\times(-3)+3\times 1 & -1\times 0+0\times(-4)+3\times 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -5 & -3 & 12 \\ -9 & -11 & -20 \\ 1 & 2 & 18 \end{pmatrix}$$

- BA est bien définie (car le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A). Le produit $BA \in M_3(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+4+0 & -3+5+0 & -4+0+0 \\ -2-12+4 & -3-15+0 & -4+0-12 \\ 0+4-6 & 0+5+0 & 0+0+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -10 & -18 & -16 \\ -2 & 5 & 18 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- **xA n'est pas bien définie car le nombre de colonnes de x n'est pas égal au nombre de lignes de A.**
- **$B\xi$ n'est pas bien définie car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de ξ.**
- Ax est bien définie (car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de x). Le produit $Ax \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
Ax &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 1 + 3\times 2 + 4\times 3 \\ 4\times 1 + 5\times 2 + 0\times 3 \\ -1\times 1 + 0\times 2 + 3\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- ξB est bien définie (car le nombre de colonnes de ξ est égal au nombre de lignes de B). Le produit $\xi B \in M_{1,3}(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
\xi B &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\times(-1)+0\times(-1)+1\times 0 & 4\times 1+0\times(-3)+1\times 1 & 4\times 0+0\times(-4)+1\times 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Question 6.

- **$f+g$ n'est pas définie car f et g n'ont pas le même espace d'arrivée. Autrement dit, les matrices associées à f et à g ne sont pas de même**

taille. En effet, en appelant A et B les matrices associées respectivement à f et g, on a $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

- $f \circ g$ est définie car **l'espace de définition de f correspond à l'espace d'arrivée de g**. En effet, on a $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Pour expliciter $f \circ g$, on peut utiliser l'une des deux méthodes ci-dessous : soit utiliser directement la définition de la composée de deux applications, soit utiliser les matrices qui sont associées à f et g.

  Première méthode : Utiliser directement la définition de la composée des deux applications.

  Par définition, on a

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f\left(g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\right) = f\begin{pmatrix} x+2z \\ 2x+5y-2z \\ 3x+4y+8z \end{pmatrix}. \end{array}$$

  C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} f \circ g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x+2z+2(2x+5y-2z)+3(3x+4y+8z) \\ 4(x+2z)+5(2x+5y-2z)+6(3x+4y+8z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14x+22y+22z \\ 32x+49y+46z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Deuxième méthode : Utiliser les matrices associées à ces 2 applications.

  En appelant A et B les matrices associées respectivement à f et g, on a que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

  D'après le cours, la matrice associée à $f \circ g$ est la matrice produit AB, c'est-à-dire

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 22 & 22 \\ 32 & 49 & 46 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que

$$\begin{array}{rccc} f \circ g : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 14x + 22y + 22z \\ 32x + 49y + 46z \end{pmatrix}. \end{array}$$

- $g \circ f$ **n'est pas définie car l'espace de définition de** g **est différent de l'espace d'arrivée de** f**. Autrement dit, le nombre de colonnes de la matrice associée à** g **n'est pas égal au nombre de lignes de la matrice associée à** f**.**

2. TRAVAUX DIRIGÉS

Exercice 1

Reconstituons les paires d'énoncés équivalents.

- (1) $\Leftrightarrow$ (B)
- (2) $\Leftrightarrow$ (D)
- (3) $\Leftrightarrow$ (A)
- (4) $\Leftrightarrow$ (E)
- (5) $\Leftrightarrow$ (C)

Exercice 2.

Oui une telle application existe et est définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ -x + z \end{pmatrix}. \end{array}$$

En effet, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$, d'après le cours, une telle application linéaire existe et sa matrice associée a pour colonnes les vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans cet ordre. Ainsi, la matrice canonique, A, associée à f est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

d'où l'on déduit l'application linéaire f donnée plus haut.

Exercice 3

Supposons qu'une telle application linéaire existe et appelons-la g.

Comme $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on aurait

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = g(3e_1 - 2e_2) &= 3g(e_1) - 2g(e_2) \text{ (par linéarité de } g) \\ &= 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Donc une telle application linéaire n'existe pas.

Exercice 4

(a) Déterminons une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ un plan d'équation $x + 2y - z = 0$.

Première méthode :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + 2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + 2y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}
\end{aligned}
$$

Deuxième méthode :

On choisit 3 points appartenant au plan $\mathcal{P}$ de sorte à former deux vecteurs non nuls et non proportionnels. Par exemple choisissons les points $O(0,0,0)$, $A(-1,1,1)$ et $B(1,0,1)$ puis posons $u = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a bien u et v non nuls et non proportionnels. Ainsi une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donnée par exemple par :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \left\{ O + su + tv \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -s + t \\ s \\ s + t \end{pmatrix} \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

(b) Déterminons des générateurs de l'image de $\mathcal{P}$ par l'application linéaire f de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant la première méthode : On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\mathcal{P} = f(\mathcal{P}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x+y+x+2y \\ x+y+x+2y \\ x-3y+x+2y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2x+3y \\ 2x-y \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

En utilisant la deuxième méthode :

On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\mathcal{P} = f(\mathcal{P}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s+t \\ s \\ s+t \end{pmatrix} \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -s+t+s+s+t \\ -s+t+s+s+t \\ -s+t-3s+s+t \end{pmatrix} \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} s+2t \\ s+2t \\ -3s+2t \end{pmatrix} \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

(c) Déterminons une équation de l'image de $\mathcal{P}$.

En utilisant la première méthode : Soit $B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$B\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; f(\mathcal{P}) = B \text{ est compatible}$$

$$\Leftrightarrow\; \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} 2x + 3y = b_1 \\ 2x + 3y = b_2 \\ 2x - \ \ y = b_3 \end{cases} \text{ compatible}$$

Trouvons la (les) condition(s) sur $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sous la(les)quelle(s) ce système est compatible. Pour cela, échelonnons $\tilde{A}$, la matrice augmentée du système, en appliquant l'algorithme de Gauss.

On obtient :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 2 & -1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 2 & -1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & -4 & b_3 - b_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{b_2 - b_1} \end{array}\right)$$

Rappel : Un système <u>échelonné</u> est compatible si et seulement si la dernière colonne de sa matrice augmentée ne contient pas de pivot.

Ici, on voit que la dernière colonne de la matrice augmentée échelonnée obtenue contient un pivot que l'on a encadré ($b_2 - b_1$). Par conséquent, pour que ce système soit compatible, il faut que $b_1 - b_2 = 0$.

Donc,

$$\mathrm{Im}\ \mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - b_2 = 0 \right\}$$

Ainsi une équation de l'image de $\mathcal{P}$ est : $b_1 - b_2 = 0$.

En utilisant la deuxième méthode : Soit $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; f(\mathcal{P}) = B \text{ est compatible}$$

$$\Leftrightarrow\; \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} s + 2t = x \\ s + 2t = y \\ -3s + 2t = z \end{cases} \text{ compatible}$$

Trouvons la (les) condition(s) sur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sous la(les)quelle(s) ce système est compatible. Pour cela, échelonnons $\tilde{A}$, la matrice augmentée du système, en appliquant l'algorithme de Gauss.

On obtient :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & y \\ -3 & 2 & z \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ -3 & 2 & z \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 8 & z+3x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 8 & z+3x \\ 0 & 0 & \boxed{y-x} \end{array}\right)$$

Rappel : Un système <u>échelonné</u> est compatible si et seulement si la dernière colonne de sa matrice augmentée ne contient pas de pivot.

Ici, on voit que la dernière colonne de la matrice augmentée échelonnée obtenue contient un pivot que l'on a encadré $(y - x)$. Par conséquent, pour que ce système soit compatible, il faut que $x - y = 0$. Donc,

$$\operatorname{Im} \mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \right\}$$

Ainsi une équation de l'image de $\mathcal{P}$ est : $x - y = 0$.

(d) Déterminons l'image réciproque de $\mathcal{D}$ par f.

Cela revient à déterminer $f^{-1}(\mathcal{D})$. Or,

$X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in f^{-1}(\mathcal{D})$ si $f(X)$ (c'est-à-dire AX) $\in \mathcal{D}$;

Comme $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, cela revient à trouver

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } \begin{cases} x + \ \ y + z = t \\ x + \ \ y + z = t \\ x - 3y + z = -t \end{cases} \right\}.$$

La matrice augmentée de ce système s'écrit : $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & -3 & 1 & -t \end{array}\right)$.

En l'échelonnant, on obtient que $\tilde{A} \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Par conséquent, on choisit z comme un paramètre de l'ensemble des solutions et on déduit que :

$$\exists (t, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x \ = \frac{t}{2} - z \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{D}) &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t}{2} - z \\ \frac{t}{2} \\ z \end{pmatrix} \mid (t, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} A \in M_4(\mathbb{R}) \text{ est inversible } &\iff \text{ sa forme échelonnée réduite est la matrice identité } (I_4) \\ &\iff \left(AX = 0 \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\iff \forall\, B \in M_{4,1}(\mathbb{R}), \text{ le système linéaire } AX = B \text{ admet une unique solution } X. \end{aligned}$$

On peut donc utiliser une de ces trois équivalences pour montrer l'inversibilité de A.

Ici, nous utiliserons la première équivalence. Concrètement, Pour montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1} à l'aide de cette équivalence, on applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $\hat{A} = \left(A \;\middle|\; I_4\right)$. A la fin si on obtient $\hat{A} \iff \left(I_4 \;\middle|\; B\right)$, on en déduit que A est inversible et son inverse, A^{-1}, est la matrice B obtenue. Sinon A n'est pas inversible.

Appliquons donc la méthode du pivot de Gauss à la matrice $\hat{A} = \left(A \;\middle|\; I_4\right)$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 5 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 1 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 1 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4 \leftarrow -\frac{L_4}{4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

On voit bien ici, qu'à la fin, $\hat{A} \iff \left(I_4 \;\middle|\; B\right)$. On en déduit donc que A est inversible et d'inverse

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Explicitons l'application linéaire ϕ associée à A, en précisant bien les espaces de départ et d'arrivée.

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ -x+3y \\ 2x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Déterminons Ker ϕ et étudions l'injectivité de ϕ.

Par définition,

$$\text{Ker } \phi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$$

On cherche donc les solutions du système suivant d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Pour trouver x et y, on va se ramener à un système beaucoup plus simple à résoudre en échelonnant $\tilde{A}$, la matrice augmentée du système d'origine grâce à l'algorithme du pivot de Gauss.

On obtient :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ \qquad 5y = 0 \end{cases}$$

D'où $y = 0$ et $x = 0$. Par ailleurs, ϕ étant linéaire, on sait que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est toujours solution.

On a donc

$$\mathrm{Ker}\phi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalement, comme l'application ϕ est **linéaire** et son noyau est réduit à **l'espace nul**, on en déduit que ϕ est **injective.**

(c) Description de Im ϕ, équation de Im ϕ, surjectivité et bijectivité de ϕ.

D'après un résultat du cours, on sait que Im ϕ est l'espace engendré par les colonnes de sa matrice. On a donc

$$\mathrm{Im}\phi = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour trouver une équation satisfaite par les éléments de Im ϕ on rappelle qu'on a l'équivalence suivante : $\forall\ B \in \mathbb{R}^3$,

$$B \in \mathrm{Im}\phi \Leftrightarrow \text{le système } AX = B \text{ est compatible.}$$

Alors, soit $B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$AX = B \text{ est compatible} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ -x + 3y = b \\ 2x - \ y = c \end{cases} \text{compatible.}$$

Trouvons la (les) condition(s) sur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sous la(les)quelle(s) ce système est compatible. Pour cela, échelonnons $\tilde{A}$, la matrice augmentée du système, en appliquant l'algorithme de Gauss.

On obtient :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ -1 & 3 & b \\ 2 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 5 & a+b \\ 2 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 5 & a+b \\ 0 & -5 & c-2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 5 & a+b \\ 0 & 0 & -a+b+c \end{array}\right)$$

Rappel : Un système <u>échelonné</u> est compatible si et seulement si la dernière colonne de sa matrice augmentée ne contient pas de pivot.

Ici, on voit que la dernière colonne de la matrice augmentée échelonnée obtenue contient un pivot $(-a+b+c)$. Par conséquent, pour que ce système soit compatible, il faut que $-a+b+c=0$.

Donc,

$$\mathrm{Im}\,\phi = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -a+b+c=0 \right\}$$

L'image de ϕ n'étant pas l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, ϕ **n'est pas surjective.** Donc ϕ **n'est pas bijective.**

(d) On définit ψ une deuxième application linéaire par :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ 0 \\ 2x+z \end{pmatrix} \end{array}.$$

a. On a $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. L'espace de définition de ϕ est différent de l'espace d'arrivée de ψ. L'application $\phi \circ \psi$ n'est donc pas définie.

b. On a $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. L'espace de définition de ψ correspond à l'espace d'arrivée de ϕ. L'application $\psi\circ\phi$ est donc bien définie. De plus la matrice associée à ψ étant

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a, d'après le cours, que la matrice associée à $\psi \circ \phi$ est la matrice produit BA, c'est-à-dire,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$