Règles de calcul élémentaires

1

Nous rappelons ici quelques règles de calcul élémentaires et pratiques. Il est indispensable de bien comprendre et manipuler les fractions et les puissances. En outre, nous revoyons aussi les identités remarquables ainsi que les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.

1 Opérations sur les fractions

1. Simplification : Soient a un réel quelconque et (b, k) deux réels non nuls, alors
$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}.$$
2. Addition : Soient (a, c) deux réels quelconques et (b, d), deux réels non nuls, alors
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}.$$
3. Multiplication : Soient (a, c) deux réels quelconques et (b, d), deux réels non nuls, alors
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$
4. Division : Soient (a, c) deux réels quelconques et (b, d), deux réels non nuls, alors
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

1 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Simplifiez les expressions suivantes :

$$f_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \quad ; \quad f_2 = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\sqrt{8} \quad ;$$

2 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Montrez l'égalité suivante :
$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3.$$
Indication : multipliez le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2} - 1$..

2 Opérations sur les puissances

2.1 Règles de base

1. Multiplication : Soient $a > 0$ et (m, n), deux réels quelconques
$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$
2. Division : Soient $a > 0$ et (m, n), deux réels quelconques
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$
3. Exponentiation : Soient $a > 0$ et (m, n), deux réels quelconques
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

D'autre part, si l'exposant est le même (réel m) alors, pour (a, b) réels positifs, on peut aussi écrire
$$a^m \times b^m = (ab)^m \quad ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m.$$

2.2 Quelques valeurs remarquables

— Puissance 0 : Soit $a > 0$, alors
$$a^0 = 1.$$
Remarquez que 0^0 n'est pas défini. Par exemple, il faut impérativement spécifier la manière dont $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 pour connaitre la limite des fonctions du type $f(x)^{g(x)}$.

— Puissance 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$
$$a^1 = a$$

— Puissance -1 : Soit $a \neq 0$,
$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

— Puissance $(1/2)$: Soit $a \geq 0$,
$$a^{1/2} = \sqrt{a}.$$

3 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Simplifiez l'expression suivante :
$$f = \frac{\frac{2^{1/4}3^{3/4}}{\sqrt{6}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{1/4}}$$

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

3 Fonctions logarithme et exponentielle

3.1 Exponentielle

La fonction exponentielle, $\exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$, peut être définie comme la puissance x du nombre $e = 2,718...$: $\exp(x) = e^x$. À ce titre, elle transforme les sommes en produits

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),$$

puisque $a^{x+y} = a^x a^y$ pour tout nombre $a > 0$ et donc, pour $a = e$.

La fonction exponentielle est toujours positive, $e^x > 0$. Elle a en outre la propriété d'être sa propre dérivée, $(e^x)' = e^x$. Elle intervient dans beaucoup de problèmes de croissance.

3.2 Logarithme

La fonction logarithme est l'inverse de la fonction exponentielle. Elle est définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\ln(\exp(x)) = x.$$

On en déduit la propriété suivante pour les réels (x, y) positifs

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Une propriété corollaire est que pour $x > 0$ et n réel,

$$\ln(x^n) = n\ln(x).$$

Enfin, pour $x \neq 0$, la dérivée de $\ln(|x|)$ est donnée par

$$\ln(|x|)' = \frac{1}{x}.$$

3.3 Autres résultats importants

— Valeurs remarquables :

$$\exp(0) = 1 \quad ; \quad \ln(1) = 0.$$

— Identités pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\ln(\exp(x)) = x \quad ; \quad \exp(\ln(y)) = y \quad ; \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

— Limites :

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) \to \infty \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} \ln(x) \to \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \to 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) \to -\infty.$$

$$\forall n \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} \to \infty \quad ; \quad \forall n > 0,\ \lim_{x\to 0} x^n \ln(x) \to 0.$$

4 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Montrez les égalités suivantes :

$$(E_1)\ \frac{e^{-\frac{x}{4}}\sqrt{e^x}}{\exp(x/4)} = 1 \quad ; \quad (E_2)\ 2\ln\left(\sqrt{e^x}\right) - x = 0.$$

5 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Simplifiez :

$$x = \ln\left((-2)^2\right) \quad ; \quad y = \exp(10\ln(2)) \quad ; \quad z = \ln(100) - 2\ln(2) - \ln(5).$$

6 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Une certaine population bactèrienne croît de 2% toutes les heures. Au bout de combien de temps double-t-elle ?

4 Résultats divers

4.1 Identités remarquables

Les identités remarquables sont nécessaires dans la simplification des calculs. Elles permettent aussi souvent d'obtenir des résultats plus compacts et donc plus lisibles dans les formules compliquées.

— $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.
— $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
— $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

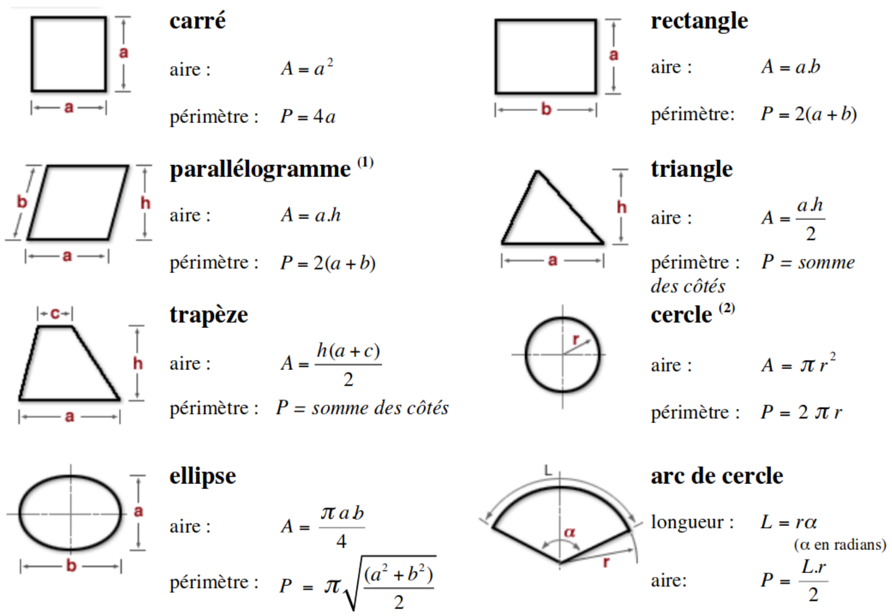

FIGURE 1.1 – Les aires et périmètres des surfaces classiques

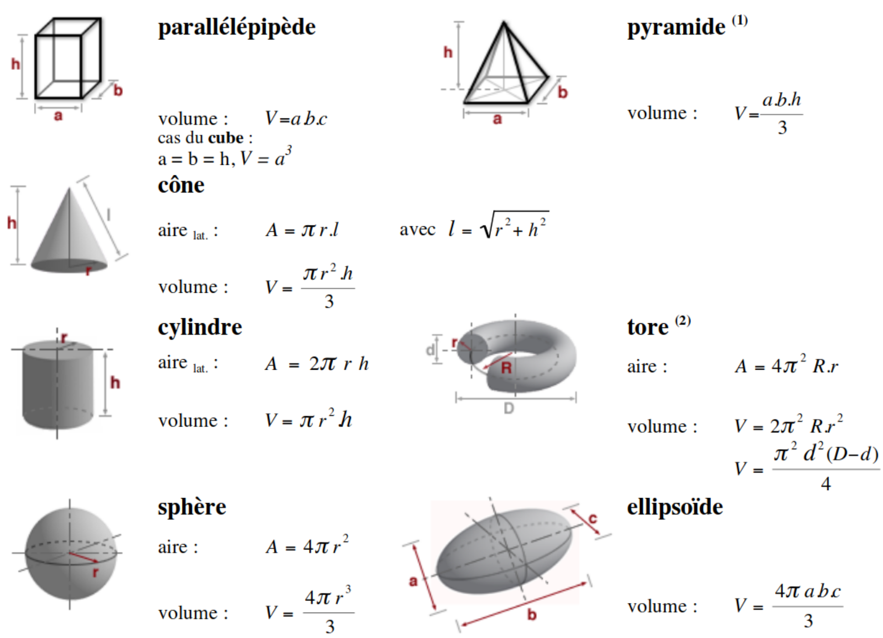

FIGURE 1.2 – Calcul de volumes des solides usuels.

7 Exercice ⋆⋆⋆ Corr. p. ??

Démontrez les identités de Gauss :

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-cb) \tag{1.1}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right] \tag{1.2}$$

En utilisant la deuxième égalité, factorizez $f(x) = x^3-3x+2$ et donnez la limite de $g(x) = f(x)/(x-1)^2$ lorsque $x \to 1$.
Indication : Posez $a = x$ et $b = c = 1$!

4.2 Formule du binôme

— Degré 2 : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
— Degré 3 : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
— Formule générale :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \tag{1.3}$$

où les C_n^k sont les coefficients binomiaux donnés par $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. Ces coefficients peuvent être obtenus de proche en proche par le triangle de Pascal.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
. & . & . & . & . & .
\end{array}$$

On calcule les coefficients d'une ligne donnée en sommant les deux coefficients situés immédiatement au-dessus et à gauche du coefficient à calculer dans la ligne qui précède. Ainsi, par exemple le coefficient 6 de la ligne 4 a été déterminé en ajoutant le 3 situé au dessus de lui et le 3 situé à sa gauche dans la ligne 3.

Une fois ces coefficients calculés, on obtient aisément le développement de $(a+b)^n$ (pour des n pas trop grands !) grâce à la ligne n du triangle de Pascal. Par exemple, $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

4.3 Sommes diverses

— Somme géométrique : Pour $q \neq 1$,

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{1.4}$$

Lorsque $|q| < 1$, la série infinie converge et

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \tag{1.5}$$

— Somme d'entiers consécutifs :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.6}$$

— Somme des carrés d'entiers consécutifs :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.7}$$

— Somme des cubes d'entiers consécutifs :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{1.8}$$

8 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Montrez que la somme des entiers impairs de 1 à $(2n-1)$ vaut $S = n^2$.

9 Exercice ⋆ ⋆ Corr. p. ??

Montrez que la somme des carrés des entiers impairs de 1 à $(2n-1)$ vaut $S = n(4n^2-1)/3$.

10 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Quelle est la limite de la fraction

$$k_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

lorsque x vers 1 ?

5 Equations

5.1 Equations du second degré

Soit (a, b, c) trois coefficients réels, $a \neq 0$. Les deux solutions (racines) *complexes* de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.9}$$

sont données par

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{1.10}$$

où le discriminant, Δ, est donné par

$$\Delta = b^2 - 4ac. \tag{1.11}$$

— Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles distinctes à l'équation (1.9).
— Si $\Delta = 0$, les deux solutions sont réelles et confondues.
— Si $\Delta < 0$, les deux solutions ont une partie imaginaire non nulle et elles sont complexes conjuguées. Dans ce cas, on peut écrire

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \tag{1.12}$$

Dans tous les cas, la *somme* et le *produit* des racines sont donnés par

$$x_+ + x_- = \frac{-b}{a}, \quad x_+ x_- = \frac{c}{a}. \tag{1.13}$$

11 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Résoudre les équations suivantes pour $x \in \mathbb{C}$ (sauf 4.)

1. $\frac{1-x}{1+x} = a$, *pour* $a \neq -1$.
2. $x^2 + x - 2 = 0$.
3. $x^2 + 2x + 2 = 0$.
4. $\exp(x^2) = 2$, $x \in \mathbb{R}$.

5.2 Équations de degrés supérieurs

On connait la solution générale des équations algébriques jusqu'au degré 4 inclus. Toutefois ces solutions sont généralement compliquées et il est assez rare qu'on y ait recours. En revanche, si une ou plusieurs solutions de l'équation sont évidentes, on peut factoriser cette dernière et éventuellement la ramener à une équation de degré 2 dont on peut trouver la solution en utilisant les résultats précédents.

Par exemple, $x = 1$ est solution de l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0$. On peut donc factoriser cette dernière sous la forme $(x-1)(x^2 + 2x + 4)$. Les solutions complexes de cette équation sont donc $x = 1$, $x = -1 + i\sqrt{3}$ et $x = -1 - i\sqrt{3}$.

Il est parfois aussi possible de ramener une équation de degré supérieur à une équation de degré 2 en changeant simplement de variable. C'est notamment le cas des équations bicarrées du type $ax^4 + bx^2 + c = 0$. En posant $y = x^2$, on trouve $ay^2 + by + c = 0$ qu'on sait résoudre pour y. Une fois les deux solutions y calculées, les solutions pour x sont $x_{\pm} = \pm\sqrt{y}$. Toutefois, cette opération est moins anodine qu'il n'y parait dans la mesure où il s'agit ici, dans le cas le plus général, de calculer la racine d'un nombre complexe. Cette opération s'effectue facilement pourvu qu'on utilise l'expression *polaire* du nombre complexe $y = \rho \exp(i\phi)$.

12 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Résoudre l'équation suivante pour $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

ENS. SUITES RAIS. COMPL. VECT. DERIV. TRIG. BASE

13 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *résoudre l'équation suivante :*
$(x + y - 2)^2 + (2x - y + 3)^2 = 0.$

6 Inéquations

6.1 Inéquation linéaire à deux inconnues

Soient a, b et c trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Dans un repère, (D) est la droite d'équation $ax+by+c = 0$. Dans ce repère, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $ax+by+c > 0$ est un demi-plan de frontière (D), qui ne contient pas (D). L'autre demi-plan, la frontière (D) étant exclue, est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $ax + by + c < 0$.

Exemple : résolution graphique de $2x + 3y - 6 < 0$; Dans un repère d'origine O, on trace la droite (D) d'équation $2x + 3y - 6 = 0$. L'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $2x + 3y - 6 < 0$ est un demi-plan de frontière (D). Les coordonnées de O, $(0, 0)$ vérifient l'inéquation donc les solutions de l'inéquation sont représentées par le demi-plan contenant O.

6.2 Système d'inéquations linéaires à deux inconnues

Résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires à deux inconnues, c'est représenter dans un repère l'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient simultanément toutes les inéquations du système.

Exemple : Résolution graphique du système

$$\begin{cases} 3x - 2y - 9 & < & 0 \\ 4y + 3x & < & 27 \end{cases}$$

(D) est la droite d'équation $3x - 2y - 9 = 0$. (D') est la droite d'équation $4y + 3x = 27$. Les coordonnées de O, $(0, 0)$ vérifient la première inéquation car l'inégalité $3 \times 0 - 2 \times 0 - 9 < 0$ est vraie. Les coordonnées de O, $(0, 0)$ vérifient la deuxième inéquation car l'inégalité $4\times0+3\times0 < 27$ est vraie. Donc les demi-plans qui représentent les solutions des deux inéquations du système sont respectivement les demi-plans de frontières (D) et (D'), contenant le point O.

Remarque : Les résolutions graphiques peuvent aussi se généraliser à des inéquations non linéaires !

14 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Résoudre (graphiquement) les inéquations suivantes :

1. $x + y > 3$
2. $4x - 2y < 8$
3. $x^2 + y < 2$

15 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Résoudre (graphiquement) les systèmes d'inéquations suivants :

1. $\begin{cases} 3x - y - 1 & < & 0 \\ 4y & < & 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y & < & 0 \\ -2x + 2y & > & 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - 2y - 9 & < & 0 \\ y + x^2 & < & 5 \end{cases}$