Avant de commencer la section C...

Lemme très important

Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall \varepsilon > 0$, $x \leqslant \varepsilon$.
Alors on a $x \leqslant 0$.

Preuve :
Par l'absurde : Supposons $x > 0$.
Posons alors $\varepsilon = \dfrac{x}{2} > 0$.
Alors $x \leqslant \dfrac{x}{2}$... Absurde ■

HLMA101 - Partie C : Analyse (fonctions réelles)

Chapitre 9
Limites

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2020-2021

Objectifs

- Donner une définition rigoureuse des limites.
- Applications des limites.

Sommaire

Motivation

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
Où étudier les limites de f ? en $a \in A$? en "bordure" de A ?

Définition

Soit I un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R}$. On dira que a est adhérent à I lorsque tout intervalle ouvert centré en a rencontre I :
$\forall \varepsilon > 0, \ \ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap I \neq \emptyset$
ou plus simplement : $\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists x \in I, \ \ |x-a| < \varepsilon$

Remarques

- Si $a \in I$, a est adhérent à I.
- Si I est un intervalle dont les bornes sont a et b, alors a et b sont adhérents à I

Exemples

- 1 est adhérent à $[0;1[$;
- 1 est adhérent à $[0;1]$; tout réel strictement supérieur à 1 n'est pas adhérent à $[0;1]$
- 0 est adhérent à $\mathbb{R}^*$
- Tout point de $\mathbb{R}$ est adhérent à $\mathbb{Q}$.

Propriété :

Soit I un sous ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$. Alors $\sup(I)$ et $\inf(I)$ sont adhérents à I.

Note : Revoir la caractérisation de la borne sup (resp. inf).

Exemple :

On note a_n le décimal $0,99\ldots9$ avec n décimales après la virgule. Alors 1 est adhérent à $\{a_n, \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Sommaire

Limite finie d'une fonction en un point

Définition :

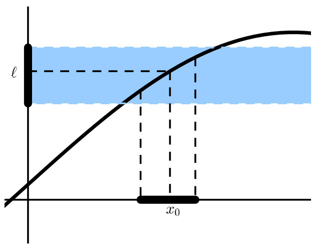
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un réel adhérent à I, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 lorsque : pour tout intervalle ouvert J centré en ℓ, il existe un intervalle ouvert J_0 contenant x_0 tel que :

$$\forall x \in I \cap J_0,\ f(x) \in J$$

Ceci s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big)$$

Schéma



Négation

$$f \text{ n'a pas pour limite } \ell \text{ en } x_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ \Big(|x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon\Big)$$

Illustrations.

Contre-exemples... et exemples.

Théorème :

Si f a pour limite ℓ en x_0 et $x_0 \in I$, alors $f(x_0) = \ell$.

Preuve

Remarque : Cela ne veut pas dire que si f est définie en x_0, sa limite en x_0 existe.

Théorème :

Si f a pour limite ℓ en x_0, alors ℓ est unique. Dans ce cas, on notera $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et on dit que f converge vers ℓ en x_0.

Preuve

Que dire de la limite éventuelle en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x > 0 \end{cases} \quad ?$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Et maintenant, que dire de la limite éventuelle en 0 de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \ ?$$

- D'après ce qui précède, la limite ne peut pas être 0 (car $f(0) = 1$)
- La limite ne peut pas valoir 1, car $\forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < \eta$ et $|f(x) - 1| \geqslant \frac{1}{2}$
- On parlera de limite <u>épointée</u> : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ \Big(|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon\Big)$$

Exercice

(a) Écrire la définition de « la limite de f lorsque x tend vers x_0 à gauche est ℓ »

(b) Écrire la définition de « la limite de f lorsque x tend vers x_0 à droite est ℓ »

(c) Écrire la définition de « la limite épointée de f lorsque x tend vers x_0 à gauche est ℓ »

(d) Écrire la définition de « la limite épointée de f lorsque x tend vers x_0 à droite est ℓ »

D'autres notions de limite

- **Limite "classique" :** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- **Limite "épointée" :** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in (]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I) \setminus \{x_0\},\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- **Limite "à gauche" :** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0] \cap I,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- **Limite "à droite" :** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [x_0, x_0 + \eta[\cap I,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- **Limite "épointée à gauche" :** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap I,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$
- **Limite "épointée à droite" :** $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap I,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Unicité

Il y a aussi unicité pour ces limites.

Preuve : en exercice.

Notations

On utilise les notations :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \leqslant 0}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \geqslant 0}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$; etc.

Existence !

Pour parler d'une limite, il faut qu'elle existe !

On ne peut pas écrire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ldots$ tant qu'on a pas montré que la limite existe !

Divergence

Diverger... c'est ne pas converger

Si une fonction n'admet pas de limite en x_0, on dit qu'elle diverge :

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I, \Big(|x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon\Big)$$

ou de façon équivalente

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in I \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon$$

À suivre : un cas particulier de divergence.

Limite infinie d'une fonction en un point

Définition :

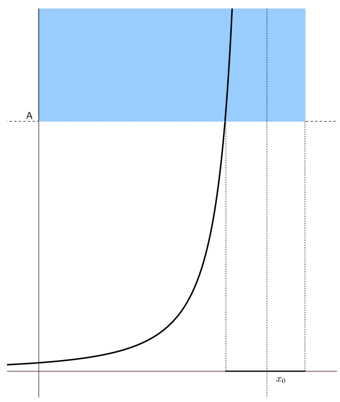
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un réel adhérent à I. On dit que f <u>tend vers $+\infty$</u> lorsque : pour tout intervalle de la forme $J_A =]A, +\infty[$, il existe un intervalle J_0 centré en x_0 tel que :

$$\forall x \in I \cap J_0,\ f(x) \in J_A$$

Ceci s'écrit :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > A\Big)$$

On dit que f **diverge** ou **tend** vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



Définition

De façon similaire, on dit que f diverge (ou tend) vers $-\infty$ quand x tend vers x_0, lorsque :

$$\forall A>0,\ \exists \eta>0,\ \forall x \in I,\ \Big(|x-x_0|<\eta \ \Rightarrow\ f(x)<-A\Big)$$

On écrit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Exercice

Montrer que si f diverge vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors f diverge.

Définition :

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, on dit que la courbe d'équation $y=f(x)$ admet la droite d'équation $x=x_0$ pour asymptote verticale.

Exemples

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty.$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty.$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Preuve :

$\forall x \in]1;+\infty[,\ \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{x-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$\forall A>0,\ \forall x>1,\ (\frac{1}{\sqrt{x-1}} > A \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{A^2})$

Conclusion : Soit $A>0$. On pose $\eta = \frac{1}{A^2}$. Alors,

$$\forall x>1,\ |x-1|<\eta \Longrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}} > A.$$

Sommaire

Condition pour étudier une limite en $+\infty$

Soit f une fonction de A dans $\mathbb{R}$.

Pour pouvoir étudier ce qu'il se passe en $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour f, il faut que l'on puisse s'approcher de $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans A.

En fait, il faut que $\forall C>0, \exists x \in A, x>C$.

(resp. $\forall c<0, \exists x \in A, x<c$)

C'est le cas en particulier pour un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,b]$).

On va énoncer les définitions et propriétés dans ce cadre.

Limite finie d'une fonction en l'infini

Définition :

Soit $f\ :\ I=[a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ lorsque : pour tout intervalle ouvert J centré en ℓ, il existe un intervalle du type $]\alpha;+\infty[$ tel que :

$$\forall x \in]\alpha;+\infty[\cap I,\ f(x) \in J$$

Ceci s'écrit :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0,\ \forall x \in I,\ \Big(x>\alpha \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\varepsilon\Big)$$

Limite finie en $-\infty$

À écrire en exercice : $f :]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ a pour limite ℓ en $-\infty$.

Unicité

Il y a unicité de la limite en $\pm\infty$ (en exercice).

On peut écrire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots$

Exemple

1. On considère $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Alors,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
2. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Alors,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Limite infinie d'une fonction en l'infini

Définition :

Soit $f\ :\ I=[a;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque : pour tout intervalle du type $]A;+\infty[$, il existe un intervalle du type $]\alpha;+\infty[$ tel que :

$$\forall x\in I\cap]\alpha;+\infty[,\ f(x)\in]A;+\infty[$$

Ceci s'écrit :

$$\forall A>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in I,\ \Big(x>\alpha\ \Rightarrow\ f(x)>A\Big)$$

Autres limites infinies en l'infini

Exercice : écrire les définitions de :

- $f\ :\ I=[a;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$
- $f\ :\ I=]-\infty,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$
- $f\ :\ I=]-\infty,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$

et trouver un exemple de fonction pour chaque cas.

Exemples

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$
2. $x\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (mais prend des valeurs aussi grandes que l'on veut)

Sommaire

Somme

Définition

Soient $f:\ I\ \to\ \mathbb{R}$ et $g:\ I\ \to\ \mathbb{R}$ deux fonctions. On notera $h=f+g$ la fonction définie pour tout $x\in I$ par $h(x)=f(x)+g(x)$.

Dans la suite, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I, x_0 désigne un réel adhérent à I ou l'infini (et dans ce cas, I est du type $[A;+\infty[$ ou $]-\infty;A]$)

Limite d'une somme en $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell'$. Alors $f+g$ a une limite en a : $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\ell+\ell'$.

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$. Alors $f+g$ diverge en a : $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=+\infty$.

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$. Alors $f+g$ diverge en a : $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=+\infty$.

Limite d'une somme en $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$. Alors $f+g$ diverge en a : $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=-\infty$.

Théorème

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$. Alors $f+g$ diverge en a : $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=-\infty$.

Plan de preuve : somme de deux limites finies en $x_0\in\mathbb{R}$

- On suppose que $\lim\limits_{x_0}f=\ell$ et $\lim\limits_{x_0}g=\ell'$.
- $\forall x\in I,\ |(f+g)(x)-(\ell+\ell')|\leqslant|f(x)-\ell|+|g(x)-\ell'|$;
- Soit $\varepsilon>0$.
  $\exists\eta_1>0,\ \forall x\in I,\ |x-x_0|<\eta_1\Rightarrow|f(x)-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$
  $\exists\eta_2>0,\ \forall x\in I,\ |x-x_0|<\eta_2\Rightarrow|g(x)-\ell'|<\frac{\varepsilon}{2}$
- On pose $\eta=\min(\eta_1,\eta_2)$;

$$\forall x\in I,\ |x-x_0|<\eta\ \Rightarrow\ |(f+g)(x)-(\ell+\ell')|<\varepsilon.$$

Exemples

1. $\lim\limits_{x\to 1} x + \dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 = ??$ Les théorèmes précédents ne permettent pas de conclure (c'est une forme indéterminée).

Multiplication par un réel et valeur absolue

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $g = \lambda f$ la fonction définie pour tout $x \in I$ par $g(x) = \lambda \times f(x)$.
On note $h = |f|$ la fonction définie pour tout $x \in I$ par $h(x) = |f(x)|$.

Multiplication par un réel et valeur absolue

Théorème

1. Soit f une fonction qui admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors :
   - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet une limite en a : $\lambda \ell$.
   - $|f|$ admet une limite en x_0 : $|\ell|$.
2. Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. Alors :
   - λf diverge vers $+\infty$ si $\lambda > 0$ et vers $-\infty$ si $\lambda < 0$.
   - $|f|$ diverge vers $+\infty$
3. Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. Alors :
   - λf diverge vers $-\infty$ si $\lambda > 0$ et vers $+\infty$ si $\lambda < 0$.
   - $|f|$ diverge vers $+\infty$

Produit

Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On notera $h = fg$ la fonction définie pour tout $x \in I$ par $h(x) = f(x) \times g(x)$.

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$. Alors fg converge en a et $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = \ell\ell'$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell > 0$ avec $\ell \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Alors fg diverge en a et $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell < 0$ avec $\ell \neq 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Alors fg diverge en a et $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = -\infty$.
4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = +\infty$.
5. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = +\infty$.
6. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = -\infty$.

Plan de la preuve

Montrons par exemple le cas 1

- $\forall x \in I,\ f(x)g(x) - \ell\ell' = (f(x)-\ell)(g(x)-\ell') + \ell(g(x)-\ell') + \ell'(f(x)-\ell)$
- Soit $\varepsilon > 0$.
  $\exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta_1 \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3(1+|\ell'|)}$.
  $\exists \eta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{3(1+|\ell|)}$.
  $\exists \eta_3 > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta_3 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.
  $\exists \eta_4 > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta_4 \Rightarrow |g(x) - \ell'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$.
- Pour $\eta = min(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, on a :

$$\forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |fg(x) - \ell\ell'| < \varepsilon$$

Théorème

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ avec $\ell \neq 0$,
   alors $\frac{1}{f}$ converge en a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$,
   alors $\frac{1}{f}$ converge en a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f}(x) = 0$

Exemples

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

Limite d'une composée

Rappel

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{Im}(g) \subset I$. Alors $f \circ g$ est la fonction définie pour tout $x \in J$ par $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{Im}(g) \subset I$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = \ell'$, alors $f \circ g$ converge en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f \circ g(x) = \ell'$.

Remarque

Ce théorème reste valable en remplaçant ℓ ou ℓ' par $+\infty$ ou $-\infty$.

Attention !

Cet énoncé n'est valable en toute généralité **que** pour la limite "classique" !

Dans les autres cas, il faut regarder "à la main".

Contre-exemple.

Plan de la preuve

Montrons par exemple le cas $x_0 \in \mathbb{R}$, et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$.

- Il existe $\eta_1 > 0$ tel que
  $\forall x \in I,\ |x - \ell| < \eta_1 \Rightarrow\ |f(x) - \ell'| < \varepsilon\,;$
- Et pour ce $\eta_1 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que
  $\forall x \in J,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - \ell| < \eta_1;$
- Soit $x \in J$.
  si $|x - x_0| < \eta$, alors $|g(x) - \ell| < \eta_1$, et donc $|f(g(x)) - \ell'| < \varepsilon$

Conclusion :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in J,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(g(x)) - \ell'| < \varepsilon$

Exemple

Nous admettons que $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
On a alors
$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-2x} + 1}{(\mathrm{e}^{-x} + 1)^2}\right) = 0$$
car :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$
- $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y^2 + 1}{(y + 1)^2} = 1$
- $\lim\limits_{z \to 1} \ln(z) = 0$

Sommaire

Limites et inégalités strictes

Théorème :

Soit f une fonction définie sur I, et x_0 un nombre adhérent à I. m et M sont des réels.

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < M$, alors il existe un intervalle ouvert centré en x_0 sur lequel $f(x) < M$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > m$, alors il existe un intervalle ouvert centré en x_0 sur lequel $f(x) > m$

Exemple :

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell < 0$. Alors
$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]-\alpha; \alpha[, f(x) < 0$$

Remarques

- Le théorème reste vrai en remplaçant x_0 par $+\infty$, resp. $-\infty$ (et l'intervalle centré en x_0 devient un intervalle de la forme $[A; +\infty[$, resp. $]-\infty, A]$).
- Le théorème est faux en remplaçant les inégalités strictes par des larges.
- Si f a une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0.

Limites et inégalités larges

Théorème :

On suppose que f et g possèdent des limites finies en x_0. Si pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Remarques :

- Ce théorème est faux avec des inégalités strictes
- Ce résultat est souvent utilisé avec l'une des fonctions qui est constante

Existence de limites

Théorème d'encadrement / Minoration / Majoration

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $m : I \to \mathbb{R}$, $M : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions, x_0 adhérent à I, et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0} m(x) = \lim\limits_{x \to x_0} M(x) = \ell$ et si $m(x) \leqslant f(x) \leqslant M(x)$ autour de x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f$ **existe** et vaut ℓ
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} m(x) = +\infty$ et si $f(x) \geqslant m(x)$ autour de x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **existe** et vaut $+\infty$
3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} M(x) = -\infty$ et si $f(x) \leqslant M(x)$ autour de x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ **existe** et vaut $-\infty$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **croissante** et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adhérent à I "à gauche".
Alors :

- ou bien f admet une limite épointée à gauche en a
- ou bien f tend vers $+\infty$ en a.

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **croissante** et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adhérent à I "à gauche".
Si f est **majorée**, alors elle admet une limite épointée à gauche en a.

Preuve.

Exemple

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - E(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - E(x) = -\infty$