Deux aspects dans la formalisation du raisonnement

- L'aspect sémantique
  => théorie des modèles (de la vérité)
  – On définit à l'aide d'interprétations les conditions de validité d'un raisonnement $\models$

- L'aspect preuve
  => théorie de la démonstration
  – On définit des règles de déduction élémentaire permettant de démontrer un raisonnement $\vdash$

Qu'est-ce qu'une démonstration

- Une démonstration doit être un moyen d'établir qu'un énoncé (mathématiques) est vrai

- Un énoncé (syntaxiquement correct) est soit vrai (valide), soit faux (non valide)
  - *« Tout nombre réel est le carré d'un nombre réel » : faux*
  - *« Tout nombre complexe est le carré d'un nombre complexe » : vrai*

- Une démonstration doit « correspondre » à son énoncé
  - On montre ce qu'affirme l'énoncé sous ses éventuelles hypothèses

- Une démonstration est soit correcte (enchainement de déductions) ou incorrecte vis-à-vis d'un énoncé donné
  - *« ($F \wedge G$) insatisfiable donc il existe une interprétation I telle que $val(F \wedge G, I)=0$. Par la sémantique du $\wedge$, $val(F,I)=0$ ou $val(G,I)=0$, donc G ou F insatisfiable » est incorrecte car le donc final n'est pas une bonne déduction (noter que le premier donc est une bonne déduction bien que trompeuse) !*

Qu’est-ce qu’une démonstration

- Pour pouvoir dire qu’une démonstration est correcte il est donc nécessaire de fixer ce que sont de « bonnes déductions » c’est-à-dire se doter de règles de productions d’énoncés à partir d’énoncés : un système de démonstration
  - Si j’ai l’énoncé **P** et que j’ai également l’énoncé **si P alors Q** alors produire l’énoncé **Q** est une bonne déduction
- La démonstration « classique » sur papier fait l’hypothèse que tout le monde connait implicitement ces règles de production et les utilise correctement lors de la rédaction d’une démonstration
- La théorie de la démonstration les formalise et permet ainsi de vérifier formellement la correction d’une démonstration

Démonstration et vérité

- Une démonstration correcte est un moyen d'établir qu'un énoncé (mathématiques) est vrai => on souhaite donc qu'un système de démonstration permette d'établir les propriétés suivantes entre démonstration et vérité :

Propriété d'adéquation (ou correction) :

Si une démonstration d'un énoncé est « correcte » alors l'énoncé qu'elle prouve est vrai

Propriété de complétude :

Si un énoncé est vrai, une démonstration « correcte » permettra de le prouver

=> Attention à ce que vos démonstrations soient correctes !

- Un énoncé peut être vrai, mais sa démonstration incorrecte
- Une démonstration incorrecte peut laisser croire qu'un énoncé est vrai

Conseils de rédaction de démonstration

- Les énoncés se notent généralement dans une syntaxe mathématiques précise :
  - expressions arithmétiques, (in)équations, expressions ensemblistes, formules logiques mais utilisent aussi des formes écrites des connecteurs logiques : *non, si…alors, et, ou, équivalent*
- Les démonstrations se rédigent en langage usuel et sont faites pour convaincre le lecteur
  - le français pour nous avec ses coordinations : or, donc, ainsi, par conséquent, par ailleurs… et en justifiant les enchainements et sans usage de la syntaxe des énoncés !

- Conseil 1 : respecter la syntaxe des énoncés
- Conseil 2 : rédiger vos démonstrations en français (sans abréviation ni symbole mathématiques) en justifiant chaque étape

Conseils de rédaction de démonstration

Conseil 3 : Schéma général de rédaction

1. Je rappelle l'énoncé à prouver et le type de démonstration (directe, par cas, absurde, induction…) que je m'apprête à réaliser
2. Je réalise ma démonstration
3. Je conclus

Exemple :

Démontrons que « Soient x et y deux entiers, si $x<y$ alors $2x\leq 2y+1$ » par démonstration directe.

On a $x<y$.

En multipliant par 2 chaque partie de l'inégalité on déduit que $2x<2y$.

Un entier étant strictement inférieur à son successeur on a $2y<2y+1$.

Par transitivité de $<$, on déduit que $2x<2y+1$

Par la sémantique du ou, on déduit que $2x\leq 2y+1$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : le niveau de détail dépend du contexte ! Ici on aurait pu se contenter de dire « on a $x<y$ donc $2x\leq 2y+1$ »

Conseils de rédaction de démonstration

Conseil 4 : Démonstration d'énoncés de la forme P et Q

1. Démontrer P
2. Démontrer Q

Conseil 5 : Démonstration d'énoncés de la forme P ou Q

1. Démontrer l'un des deux sous-énoncés, au choix P ou Q (mais nécessite parfois une preuve par cas)

Cosneil 6 : Preuve par cas d'un énoncé P

1. Ecrire « *Soit on a C_1,* » et Démontrer : si C_1 alors P
2. Ecrire « *Soit on a C_2,* » et Démontrer : si C_2 alors P
3. …
4. Démontrer que C_1 ou C_2 ou... C_n couvrent tous les cas possibles

Souvent on se ramène à des cas binaires : *« Soit on a C, …   Soit on a non C, … »* ce qui rend évident la dernière étape !

Conseils de rédaction de démonstration

Enoncés de la forme : si P alors Q

- Conseil 7 : Preuve directe
  1. Supposer P et l'écrire *(« Supposons que P »)*
  2. Démontrer Q
- Conseil 8 : Preuve par contraposition
  1. Supposer non Q et l'écrire *(« Supposons qu'on n'a pas Q »)*
  2. Démontrer qu'on n'a pas P
- Conseil 9 : Preuve par l'absurde
  1. Supposer P et l'écrire *(« Supposons que P »)*
  2. Supposer non Q et l'écrire *(« Supposons qu'on n'a pas Q »)*
  3. Avoir une idée pour un énoncé A contradictoire
  4. Démontrer A
  5. Démontrer qu'on n'a pas A
  6. Conclure en affirmant la contradiction

  Peut aussi s'appliquer à un énoncé simple de la forme : P

  Supposer qu'on n'a pas P puis démontrer qu'on a A et non A

Conseils de rédaction de démonstration

Conseil 10 : Démonstration d'énoncés de la forme : P si et seulement si Q

1. Ecrire « *(sens direct)* » et Démontrer : si P alors Q
2. Ecrire « *(sens retour)* » et Démontrer : si Q alors P

Conseil 11 : Démonstration d'énoncés de la forme :

Pour tout x de E, P est vrai pour x

1. Ecrire : « *Soit un x quelconque de E, montrons P pour ce x* »
2. Démontrer que P est vrai pour ce x (sans hypothèse sur ce x)

Conseil 12 : Démonstration d'énoncés de la forme :

Il existe x de E, P est vrai pour x

1. Avoir une idée pour un élément e de E particulier !
2. Définir un tel e de E : Ecrire : « *Soit e de E tel que …* »
   Attention à ce que votre élément existe forcement (peut-être faudra t-il le démontrer) ! Par contre, plusieurs éléments de E peuvent répondre à votre définition.
3. Démontrer que P est vrai pour ce e