Des outils pour les suites

Suites arithmético-géométriques

Définition : On appelle suite arithmético-géométrique toute suite récurrente (u_n) de la forme :
$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$
où a et b sont des nombres réels.

Quelques cas particuliers :

- Si $a = 0$, la suite est constante à partir de u_1.
- Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, il s'agit d'une suite géométrique de raison a.

Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'aux cas où a est différent de 0 et de 1 et b est différent de 0.
On se propose de trouver la forme explicite d'une telle suite.
La méthode est standardisée :

a) Recherche du point fixe

On résout l'équation
$$x = ax + b$$
On trouve
$$x = \frac{b}{1 - a}$$
Solution acceptable puisque a n'est pas égal à 1.
Posons
$$\alpha = \frac{b}{1 - a}$$

b) Construction d'une suite auxiliaire :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par
$$v_n = u_n - \alpha$$

Proposition : La suite (v_n) est une suite géométrique de raison a.

Démonstration :
On a pour tout entier n
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha \\ &= au_n + b - \alpha \end{aligned}$$
Or par construction $\alpha = a\alpha + b$ donc
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= au_n + b - a\alpha - b \\ &= au_n - a\alpha \\ &= a(u_n - \alpha) \\ &= av_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison a.

c) Expression explicite de (v_n), puis de (u_n)

On a

$$v_0 = u_0 - \alpha$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (u_0 - \alpha)a^n$$

On a de plus

$$u_n = v_n + \alpha$$

Et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha}$$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition : On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 (ou double) toute suite récurrente (u_n) de la forme suivante : $\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ \forall n, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$

Cas particuliers :
Si $b = 0$, on a pour tout n, $u_{n+2} = au_{n+1}$ et donc $\forall n \geq 1, u_{n+1} = au_n$.
La suite (u_n) est donc géométrique à partir du rang 1.
On aura donc

$$\forall n \geq 1, u_n = u_1 a^{n-1}$$

Si de plus $a = 1$, on aura

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n$$

La suite est donc constante à partir du rang 1 :

$$\forall n \geq 1, u_n = u_1$$

Equation caractéristique
On se place dans le cas général, c'est-à-dire on considère dans la suite que $b \neq 0$.
On appelle équation caractéristique de la suite (u_n) l'équation d'inconnue x suivante :

$$x^2 = ax + b$$

On écrit cette équation sous la forme :

$$x^2 - ax - b = 0$$

On résout cette équation en calculant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-a)^2 - 4(-b) \\ &= a^2 + 4b \end{aligned}$$

Suivant la valeur de Δ, il y a une, deux ou pas de solutions à cette équation.
Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'aux cas

$$\Delta \geq 0$$

a) Cas où $\boldsymbol{\Delta} > 0$

L'équation caractéristique a deux solutions distinctes que l'on note souvent r_1 et r_2.
On a

$$r_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \text{ ou } r_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

Cherchons deux nombres *A* et *B* tels que l'on ait :

$$(\mathrm{S}) \begin{cases} A + B = u_0 \\ Ar_1 + Br_2 = u_1 \end{cases}$$

Ce système peut être résolu par substitution. On a :

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} A = u_0 - B \\ (u_0 - B)r_1 + Br_2 = u_1 \end{cases}$$

On en tire

$$B = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \text{ et } A = u_0 - \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}$$

Ces deux quantités existent puisque $r_1 \neq r_2$.

Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = A + B$ par définition de *A* et de *B*.
On a de plus

$$Ar_1^0 + Br_2^0 = A + B$$

Donc

$$u_0 = Ar_1^0 + Br_2^0$$

Pour $n = 1$, on a $u_1 = Ar_1 + Br_2$.
On a de plus

$$Ar_1^1 + Br_2^1 = Ar_1 + Br_2$$

Donc

$$u_1 = Ar_1^1 + Br_2^1$$

La formule est donc vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$.

$\forall n \geq 0$, montrons que si $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ et $u_{n+1} = Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}$, alors

$$u_{n+2} = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= a\left(Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}\right) + b\left(Ar_1^n + Br_2^n\right) \\ &= Ar_1^n(ar_1 + b) + Br_2^n(ar_2 + b) \end{aligned}$$

Or par définition r_1 et r_2 sont solutions de l'équation

$$x^2 = ax + b$$

Donc

$$\begin{aligned} ar_1 + b &= r_1^2 \\ ar_2 + b &= r_2^2 \end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= Ar_1^n(ar_1+b)+Br_2^n(ar_2+b) \\ &= Ar_1^n r_1^2 + Br_2^n r_2^2 \\ &= Ar_1^{n+2}+Br_2^{n+2} \end{aligned}$$

Il y a bien hérédité et donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n}$$

Théorème :
Soit une suite (u_n) définie par la donnée de u_0, celle de u_1 et telle que :
$$\forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
Soit $x^2 = ax + b$ l'équation caractéristique de cette suite.
Si $\Delta = a^2 + 4b$ est strictement positif, cette équation a deux solutions distinctes r_1 et r_2.
Soit A et B les solutions du système $\begin{cases} A + B = u_0 \\ Ar_1 + Br_2 = u_1 \end{cases}$.
Alors on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

b) Cas où $\Delta = 0$

Dans ce cas puisque $b \neq 0$, on a nécessairement $a \neq 0$.
En effet $\Delta = a^2 + 4b$. Si $\Delta = 0$ et $a = 0$, alors on a $0 = 0 + 4b$ et donc $b = 0$.

L'équation caractéristique a alors qu'une seule solution.
$$r = \frac{a}{2}$$
D'après ce que nous avons dit plus haut,
$$r \neq 0$$
Posons
$$u_0 = A$$
L'équation d'inconnue B
$$r(A+B) = u_1$$
a pour solution :
$$B = \frac{u_1 - ar}{r}$$

Montrons par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A + Bn)$$

Pour $n = 0$, on a par définition : $u_0 = A$
On a aussi
$$r^0(A + B \times 0) = A$$
Donc
$$u_0 = r^0(A + B \times 0)$$
Pour $n = 1$, on a par définition : $u_1 = r(A + B)$
On a aussi
$$r^1(A + B \times 1) = r(A + B)$$
Donc
$$u_1 = r^1(A + B \times 1)$$

La formule est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$.

$\forall n \geq 0$, montrons que si $u_n = r^n(A + Bn)$ et $u_{n+1} = r^{n+1}(A + B(n + 1))$, alors

$$u_{n+2} = r^{n+2}(A + B(n + 2))$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= au_{n+1} + bu_n \\ &= ar^{n+1}\big(A + B(n + 1)\big) + br^n(A + Bn) \\ &= r^n(A(ar + b) + nB(ar + b) + aBr) \end{aligned}$$

On sait que r est solution de l'équation $x^2 = ax + b$, donc $ar + b = r^2$ et donc :

$$u_{n+2} = r^n(Ar^2 + nBr^2 + aBr)$$

On sait également que $r = \frac{a}{2}$ donc $a = 2r$ et donc :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= r^n(Ar^2 + nBr^2 + 2Br^2) \\ &= r^{n+2}(A + Bn + 2B) \\ &= r^{n+2}(A + B(n + 2)) \end{aligned}$$

Il y a donc hérédité et l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A + Bn)$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème :
Soit une suite (u_n) définie par la donnée de u_0, celle de u_1 et telle que :

$$\forall n \geq 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } b \neq 0$$

Soit $x^2 = ax + b$ l'équation caractéristique de cette suite.
Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$, cette équation a une solution non nulle r
Soit A et B les nombres réels tels que $\begin{cases} A = u_0 \\ r(A + B) = u_1 \end{cases}$.
Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A + Bn)$$

L'inégalité des accroissements finis

C'est une inégalité très importante dont nous verrons des applications nombreuses. Il a deux formes.

L'inégalité simple

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I.
On suppose qu'il existe deux nombres réels m et M tels que

$$\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$$

Soit g la fonction définie sur I par

$$g(x) = f(x) - mx$$

La fonction g est dérivable comme différence de fonction dérivable. On a

$$\forall x \in I, g'(x) = f'(x) - m$$

D'après l'hypothèse on a

$$\forall x \in I, g'(x) \geq 0$$

La fonction g est donc croissante sur I.
Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que $a \leq b$.

On a donc

$$g(a) \leq g(b)$$

Donc

$$f(a) - ma \leq f(b) - mb$$

Donc

$$mb - ma \leq f(b) - f(a)$$

Et donc

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a)$$

On montrerait de la même façon que la fonction h définie sur I par :

$$h(x) = Mx - f(x)$$

est une fonction croissante.
On en déduit donc que pour le même couple (a, b) tel que $a \leq b$, on a :

$$f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

En rassemblant les deux inégalités, on en tire que

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

On a donc le théorème suivant :

<u>Théorème :</u>
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle qu'il existe deux nombres réels m et M et que

$$\forall x \in I, m \leq f'(x) \leq M$$

Alors $\forall a \in I, \forall b \in I$ avec $\boxed{a \leq b}$, on a :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

<u>Remarque :</u>
Dans le cas où l'intervalle I est un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, on démontre et nous admettrons que l'hypothèse de dérivabilité peut se limiter à l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$, la continuité étant simplement requise en α en en β.
On remplacera la phrase : f définie et dérivable sur I par :

f continue sur $[\alpha, \beta]$, et dérivable sur $]\alpha, \beta[$.

On a un résultat identique sur un intervalle semi-ouvert.
En pratique, dans la plupart des problèmes la fonction est dérivable sur tout l'intervalle et la distinction ne se pose plus.

<u>Une application de ce théorème :</u>
Ce théorème permet de construire des inégalités.
Prenons un exemple simple et classique :
La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. Elle est donc dérivable sur tout intervalle $[1, t]$ où t est un nombre réel supérieur à 1.
On a

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

La dérivée est une fonction décroissante. Sa restriction à l'intervalle $[1, t]$ est donc telle que :

$$\forall x \in [1, t], \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\frac{1}{t}(t-1) \leq \ln(t) - \ln(1) \leq 1(t-1)$$

On en déduit que

$$\forall t \geq 1, \frac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t-1$$

L'inégalité en valeur absolue

On considère une fonction dérivable sur un intervalle I (on a bien entendu les mêmes remarques que dans le cas précédent si I est un intervalle fermé ou semi-ouvert).
On suppose qu'il existe un nombre réel positif k tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$$

On peut donc écrire

$$\forall x \in I, -k \leq f'(x) \leq k$$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis.
Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle I.
Si $a \leq b$, on aura

$$-k(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq k(b-a)$$

Et donc en repassant aux valeurs absolues :

$$|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$$

Si $b \leq a$, on aura

$$-k(a-b) \leq f(a) - f(b) \leq k(a-b)$$

Et donc en repassant aux valeurs absolues :

$$|f(a) - f(b)| \leq k(a-b)$$

Dans le premier cas, puisque $a \leq b$, on a $b - a \geq 0$ et donc $b - a = |b - a|$
Dans le second cas, on a $|b - a| = -(b - a) = a - b$
Donc dans les deux cas le second membre peut s'écrire

$$k|b-a|$$

De plus on sait que deux nombres opposés ont la même valeur absolue, or les quantités $f(b) - f(a)$ et $f(a) - f(b)$ sont opposées, donc

$$|f(a) - f(b)| = |f(b) - f(a)|$$

Les deux inégalités se ramènent à une seule et ceci quelles que soient les places de a et b.

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$$

On a donc le théorème suivant :

<u>Théorème :</u>
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle qu'il existe un nombre réel positif k et que

$$\forall x \in I, |f'(x) \leq k$$

Alors $\forall a \in I, \forall b \in I$, on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$$

Ce théorème est très souvent utilisé pour montrer la convergence de suites récurrentes surtout si la fonction génératrice est décroissante.

Un exemple :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

1) Montrer que le domaine de définition de f est l'intervalle $]0, e^2]$.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de ce domaine.
3) Étudier les variations de f.
4) Montrer que l'image par f de l'intervalle $[1, e]$ est contenue dans l'intervalle $[1, e]$.
5) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1, e]$.
6) On considère la suite définie par récurrence pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

   a. Montrer à l'aide de l'inégalités des accroissements finis que :

$$|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)|u_n - a|$$

   b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq (a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   c. Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

.