HLMA101 - Partie A : Généralités

Chapitre 1
Bases du discours mathématique, éléments de logique

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2019-2020

Responsable L1 - département maths

Simon Modeste
simon.modeste@umontpellier.fr
Bât 9, bureau 425
(Amphi HLMA 101 série B + C5 C6)

Question administratives L1 : fds.l1@umontpellier.fr

Responsable UE HLMA101

Sylvain Brochard
sylvain.brochard@umontpellier.fr
Bât 9, bureau 307
(Amphi PEIP)

Programme de l'UE HLMA101 (Algèbre et Analyse)

Partie A : Généralités
Partie B : Introduction à l'algèbre linéaire
Partie C : Analyse (des fonctions réelles)

Évaluation

Examen final en janvier (3h)

Une note de Contrôle continu :
- CC1 le 4 novembre (8 points)
- CC2 le 5 novembre (8 points)
- Une note de TD (4 points)

Règle du "max" :

$$\text{note finale } = \max\left(E, \frac{3E+2CC}{5}\right)$$

1. Introduction

2. Logique des proposition

3. Variables et quantification

Sommaire

1. Introduction

2. Logique des proposition

3. Variables et quantification

Éléments du discours mathématique

1.3 Notion de groupe

Définition.
On appelle groupe un ensemble G muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre, telle que tout élément de G ait un inverse.

Si $xy = yx$ pour tout $x \in G$ et tout $y \in G$, on dit que G est *commutatif*, ou *abélien* .
Le cardinal de G s'appelle l'*ordre* du groupe G et sera noté $[G : 1]$.

Proposition.
Soit G un groupe.
(i) *Pour tout $a \in G$, la translation à gauche $l_a : x \mapsto ax$ et la translation à droite $r_a : x \mapsto xa$, sont bijectives, d'applications réciproques $l_{a^{-1}}$ et $r_{a^{-1}}$.*
(ii) *Pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$ on a $l_a \circ l_b = l_{ab}$ et $r_a \circ r_b = r_{ba}$.*
(iii) *La loi de composition est régulière.*
(iv) *L'élément neutre e est le seul idempotent de G .*

Démonstration. (i) et (ii) Les relations (ii) sont dues à l'associativité :
$\forall x \in G \quad l_a \circ l_b(x) = a(bx) = (ab)x = l_{ab}(x)$ et $r_a \circ r_b(x) = (xb)a = x(ba) = r_{ba}(x)$.
Avec $b = a^{-1}$, on obtient $l_a \circ l_{a^{-1}} = l_e = \mathrm{Id}_G$, puis $l_{a^{-1}} \circ l_a = \mathrm{Id}_G$ en remplaçant a par a^{-1}. Donc l_a est bijective et $(l_a)^{-1} = l_{a^{-1}}$. De même $(r_a)^{-1} = r_{a^{-1}}$.
(iii) et (iv) L'injectivité de l_a et celle de r_a donnent la régularité de l'opération :

$$(ax = ay) \Rightarrow (x = y) \quad , \quad (xa = ya) \Rightarrow (x = y) .$$

En particulier, pour tout $x \in G$,

$$x^2 = x \Leftrightarrow xx = xe \Rightarrow x = e. \quad \blacksquare$$

Éléments du discours mathématique

Un texte mathématique contient généralement des

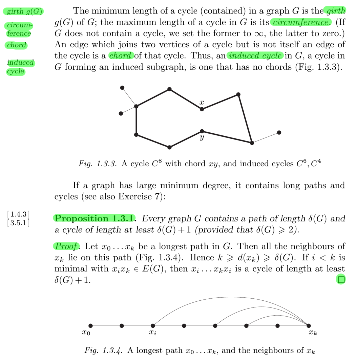
Définitions qui précisent la dénomination d'objets mathématiques dont on va parler, elles disent ce qui est et ce qui n'est pas dans la catégorie d'objet étudié.

Théorèmes (et lemmes, propositions, corollaires...) qui énoncent des faits mathématiques dont on considère qu'ils sont vrais

Démonstrations (ou preuves) qui attestent, justifient, prouvent que les théorèmes énoncés sont vrais.

Mais aussi des exemples, commentaires, illustrations, remarques, notes etc.

Éléments du discours mathématique



girth $g(G)$ — circumference — chord — induced cycle

The minimum length of a cycle (contained) in a graph G is the *girth* $g(G)$ of G; the maximum length of a cycle in G is its *circumference*. (If G does not contain a cycle, we set the former to ∞, the latter to zero.) An edge which joins two vertices of a cycle but is not itself an edge of the cycle is a *chord* of that cycle. Thus, an *induced cycle* in G, a cycle in G forming an induced subgraph, is one that has no chords (Fig. 1.3.3).

Fig. 1.3.3. A cycle C^8 with chord xy, and induced cycles C^6, C^4

If a graph has large minimum degree, it contains long paths and cycles (see also Exercise 7):

[1.4.3] [3.5.1]

Proposition 1.3.1. *Every graph G contains a path of length $\delta(G)$ and a cycle of length at least $\delta(G)+1$ (provided that $\delta(G) \geqslant 2$).*

Proof. Let $x_0 \dots x_k$ be a longest path in G. Then all the neighbours of x_k lie on this path (Fig. 1.3.4). Hence $k \geqslant d(x_k) \geqslant \delta(G)$. If $i < k$ is minimal with $x_i x_k \in E(G)$, then $x_i \dots x_k x_i$ is a cycle of length at least $\delta(G)+1$. □

Fig. 1.3.4. A longest path $x_0 \dots x_k$, and the neighbours of x_k

Objectifs de la partie A

- Reconnaître et établir des énoncés mathématiques qui ont du sens (corrects syntaxiquement)
- Déterminer si un énoncé mathématique est vrai ou faux (valeur de vérité)
- Concevoir et rédiger des preuves d'énoncés mathématiques
- Formaliser et structurer un certain nombre de concepts et de fondements indispensables au travail mathématique à l'université :
  - théorie des ensembles
  - ensembles de nombres
  - notion d'application

Sommaire

1. Introduction
2. Logique des proposition
3. Variables et quantification

Définition

On appelle **proposition** un énoncé (assertion) qui est soit vrai soit faux (c'est la valeur de vérité de la proposition).

Exemples

Les énoncés « 2 est un nombre pair », « $2+2=7$ », « HLMA101 est un cours de première année de Licence », « Le mouton est un animal carnivore » sont des propositions.
« $2+=\times 37-$ », « $3x^2-1$ », « Le premier ministre », « être un nombre premier » ne sont pas des propositions.

Remarque

Assertion mathématique : énoncé qui parle d'objets mathématiques et qui a un sens.

Construction de propositions

Définition

On suppose qu'on a un certain nombre de propositions dénotées par les lettres A, B, ... On peut composer ces propositions avec des opérateurs logiques :

Négation noté 'non' ou '$\neg$'

Conjonction notée 'et' ou '$\wedge$'

Disjonction notée 'ou' ou '$\vee$'

Implication notée 'implique' ou '$\Longrightarrow$'

Équivalence notée 'équivaut' ou '$\Longleftrightarrow$'

Négation

Soit A une proposition, la négation de A se note $\neg(A)$ (« non A »).
La proposition $\neg(A)$ est vraie quand A est fausse et elle est fausse quand A est vraie.

Table de vérité

A	$\neg(A)$
F	V
V	F

Exemples

Valeur de vérité de $\neg(2+2=4)$?
Valeur de vérité de non$(2+2=2\times 2)$?
Valeur de vérité de $\neg(\neg(2 \text{ est pair}))$?

Conjonction

Soit A et B deux propositions, la conjonction de A et de B se note $A \wedge B$ ou « A et B ».
La proposition $A \wedge B$ est vraie quand A et B sont vraies, et fausse sinon.

Table de vérité

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemples

Valeur de vérité de : $(2+2=4) \wedge (1+1=1)$?
Valeur de vérité de : (2 est pair) et (3 est impair) ?

Disjonction

Soit A et B deux propositions, la disjonction de A et de B se note $A \vee B$ ou « A ou B ».
La proposition $A \vee B$ est vraie quand au moins l'une des propositions A ou B est vraie et fausse sinon.

Table de vérité

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Exemples

Valeur de vérité de : $(2+2=4) \vee (1+1=2)$?
Valeur de vérité de : (2 est impair) ou (3 est impair) ?

Mélange d'opérateurs

On construit ainsi de nouvelles propositions, auxquelles on peut de nouveau appliquer des opérateurs logiques.

Exemple

Si A, B, C et D sont des propositions, on peut former les propositions suivantes :

- non(A et B)
- $(A \wedge B) \vee (\neg(C) \vee D)$
- $(B \wedge C) \vee (\neg(B) \wedge D)$
- (non(A) et B) ou non(B)

Valeur de vérité

Les tables de vérités des opérateurs permettent de déterminer la valeur de vérité d'une proposition en fonction des valeurs de vérités des propositions qui la composent.

Exemple pour $(\neg(A) \wedge B) \vee \neg(B)$

A	B	$\neg(A)$	$\neg(A) \wedge B$	$\neg(B)$	$(\neg(A) \wedge B) \vee \neg(B)$
F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	F

Propositions équivalentes

Si deux propositions A et B ont la même table de vérité ont dit qu'elles sont équivalentes et on écrit : $A \equiv B$.

Propriétés des opérations "et" et "ou"

Les opérations"et" et "ou" sont commutatives et associatives, et elles sont distributives l'une par rapport à l'autre.
Pour A, B et C des propositions :

- $(A \vee B) \quad \equiv \quad (B \vee A)$
- $(A \wedge B) \quad \equiv \quad (B \wedge A)$
- $((A \vee B) \vee C) \quad \equiv \quad (A \vee (B \vee C))$
- $((A \wedge B) \wedge C) \quad \equiv \quad (A \wedge (B \wedge C))$
- $(A \wedge (B \vee C)) \quad \equiv \quad ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- $(A \vee (B \wedge C)) \quad \equiv \quad ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Théorème (lois de De Morgan)

Soit A et B deux propositions.
$\neg(A \vee B) \quad \equiv \quad \neg(A) \wedge \neg(B)$
$\neg(A \wedge B) \quad \equiv \quad \neg(A) \vee \neg(B)$

Démonstration

Laissée en exercice.
Une possibilité : faire les tables de vérité.

Implication

Soit A et B deux propositions, l'implication de A vers B se note $A \Longrightarrow B$ (« A implique B »).
La proposition $A \Longrightarrow B$ est fausse uniquement quand A est vraie et B est fausse.

Table de vérité

A	B	$A \Longrightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Reformulation

L'implication $A \Longrightarrow B$ est vraie seulement quand A est fausse ou quand A et B sont vraies toutes les deux.

Implication

Exemples

Valeur de vérité de $(1+1=2) \Longrightarrow (2+2=4)$?
Valeur de vérité de (2 est impair) $\Longrightarrow$ (3 est pair) ?
Valeur de vérité de (2 est pair) $\Longrightarrow$ (4 est impair) ?
Valeur de vérité de $(1+1=3) \Longrightarrow$ (3 est pair) ?

Remarque

Attention : L'implication mathématique est parfois exprimée avec « Si ... alors ... », mais son sens diffère souvent du sens dans le langage courant.

Implication

Théorème

Soit A et B deux propositions.
Les proposition $A \Longrightarrow B$ et $\neg(A) \vee B$ ont la même table de vérité.

Démonstration

$A \Longrightarrow B$ est fausse dans l'unique cas où A et vraie et B est fausse, c'est-à-dire quand $\neg(A)$ et B sont toutes les deux fausses.
$A \Longrightarrow B$ a donc la même table de vérité que $\neg(A) \vee B$.

Autre preuve : construire la table de vérité de $\neg(A) \vee B$.

Remarque

Il est souvent utile de réécrire une proposition de la forme $A \Longrightarrow B$ sous la forme $\neg(A) \vee B$ pour éviter les erreurs.

Négation d'une implication

Théorème

Soit A et B deux propositions. La négation de $A \implies B$, c'est-à-dire $\neg(A \implies B)$ a la même table de vérité que $A \wedge \neg(B)$.

Preuve

D'après le théorème précédent et les lois de De Morgan, $\neg(A \implies B)$ a la même table de vérité que $\neg(\neg(A) \vee B)$, donc que $\neg(\neg(A)) \wedge \neg(B)$ et enfin que $A \wedge \neg(B)$.

On peut aussi construire les deux tables de vérité.

Remarque

La négation d'une implication **n'est pas** une implication !

Contraposée d'une implication

Théorème

Soit A et B deux propositions. $A \implies B$ et $\neg(B) \implies \neg(A)$ ont la même table de vérité.
$\neg(B) \implies \neg(A)$ est appelée la contraposée de $A \implies B$.

Preuve

Laissée en exercice.

Remarque

- Il équivalent d'affirmer une implication ou sa contraposée.
- Ne pas confondre la contraposée de $A \implies B$ avec sa réciproque $B \implies A$!

Équivalence

Soit A et B deux propositions, l'équivalence de A et B se note $A \iff B$ (« A équivalent à B »).
La proposition $A \iff B$ est vraie seulement quand les propositions A ou B ont même valeur de vérité.

Table de vérité

A	B	$A \iff B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemples

Valeur de vérité de $(2+2=4) \iff (1+1=1)$?
Valeur de vérité de (2 est impair) $\iff$ (3 est pair) ?

Équivalence et implication

Théorème

Les propositions $A \iff B$ et $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$ ont la même table de vérité.

Démonstration

Construire la table de vérité de $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$.

Remarque les opérateurs logiques

- Il existe d'autres opérateurs logiques
- Les opérateurs présentés sont les plus usuels et, en les combinant, ils sont suffisants pour exprimer toutes les situations (i.e. toutes les tables de vérités possibles).
- On peut même se passer de certains opérateurs logiques pour exprimer des propositions. Par exemple :

Théorème

Soit A une proposition qui dépend de propositions $V_1, \dots, V_n$:
Il existe une proposition composée de $V_1, \dots, V_n$ qui n'utilise que les opérateurs $\neg$ et $\wedge$ qui a la même table de vérité que A.
Il existe une proposition composée de $V_1, \dots, V_n$ qui n'utilise que les opérateurs $\neg$ et $\vee$ qui a la même table de vérité que A.

Sommaire

1. Introduction
2. Logique des proposition
3. Variables et quantification

Assertions, ensembles, variables

- En mathématiques, un énoncé (ou assertion) est une phrase qui porte sur des objets ou des familles d'objets et leurs liens (avec des connecteurs logiques et des opérateurs mathématiques) et qui a un sens mathématique.
- Les objets mathématiques peuvent être des éléments bien précis (le nombre 2, le nombre π ...) ou des éléments non précisés appartenant à des ensembles (les nombres entiers, les fonctions réelles, les droite du plan...)
- Pour parler de ces objets, on utilise des variables : des lettres qui désignent un élément qui peut « varier » dans un certain ensemble.

Usages des variables

Différents cas peuvent se présenter :

- « Donc $x^2 - 1$ est un réel positif » : on affirme quelque chose concernant x, on sait déjà ce que représente x.
- « On veut résoudre $y^2 - 2y + 1 = 0$ » : on cherche quelles valeurs de y rendent l'équation vraie (en général, on a donné l'ensemble dans lequel est la variable).
- « Posons $z = 2\pi$ » : On affecte une valeur à z (jusqu'à un moment donné).
- « Soit t un réel » : On introduit un élément qui est un réel (avec lequel on va travailler).

Prédicat (ou assertion ouverte)

Définition

On appelle prédicat (ou assertion ouverte) une assertion mathématique qui dépend d'une ou plusieurs variables (et qui a un sens mathématique).

Exemples

- « être pair » ou « n est pair » qui porte sur un entier.
- « $x \leqslant y$ » qui porte sur deux éléments (réels ? entiers ? ...).
- « être croissante sur son ensemble de définition », ou « f est croissante sur son ensemble de définition » qui porte sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- « $(x+y)^n = x^n + y^n$ » qui porte sur trois variables (deux réels et un entier ?).

Valeur de vérité

Un prédicat (ou assertion ouverte) peut être vrai ou faux selon les valeurs données aux variables.
Lorsqu'on attribue une valeur à une variable, on dit qu'on instancie la variable.

Exemples

- « n est pair » est vrai pour $n = 2$ et faux pour $n = 3$
- « $x \leqslant y$ » est faux pour $x = 1$ et $y = -1$
- « f est croissante sur son ensemble de définition » est vrai pour la fonction exponentielle
- « $(x+y)^n = x^n + y^n$ » ~~est toujours vraie~~

Opérateurs logiques

Comme avec les propositions, on peut utiliser les opérateurs logiques ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\implies$, $\iff$) entre des phrases ouvertes.

Note : les valeurs de vérité se définissent de la même façon

Exemples

- f est croissante **et** $f(0) = 1$
- $(x > y) \vee (x > -y)$
- $\text{non}(v \leqslant t)$
- $(n < m) \implies (n \leqslant m+1)$
- $(f(x) \geqslant 0) \iff x \geqslant 0$

Quantificateurs

On peut aussi vouloir affirmer une assertion pour tous les éléments d'un ensemble ou dire qu'il existe un élément vérifiant l'assertion.

Quantificateurs universel et existentiel

Soit $P(x)$ une assertion ouverte dépendant d'une variable x d'un ensemble E.
« $\forall x \in E,\ P(x)$ » est l'assertion qui affirme que tous les éléments de E vérifient P.
« $\exists x \in E,\ P(x)$ » est l'assertion qui affirme qu'(au moins) un élément de E vérifie P.

$\forall x \in E,\ P(x)$ et $\exists x \in E,\ P(x)$ ne dépendent plus de la valeur de x, ils sont soit vrai soit faux.

Valeurs de vérité

$\forall x \in E, P(x)$ est vraie si et seulement si tous les éléments x de E rendent vrai $P(x)$.
$\exists x \in E, P(x)$ est vraie si et seulement si au moins un élément x de E rend vrai $P(x)$.

Exemples

- $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est pair.
- $\exists n \in \mathbb{N}, n$ est pair.
- $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant 0$.
- $\exists y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant 0$.
- $\exists z \in \mathbb{Q}, z^2 = 2$.
- $\exists z \in \mathbb{R}, z^2 = 2$.

Variables muettes

Dans les assertions $\forall x \in E, P(x)$ et $\exists x \in E, P(x)$, la variable x est dite muette.
Il n'y a pas d'objet qui s'appelle x.

Il est strictement identique d'affirmer $\forall x \in E, P(x)$ et $\forall z \in E, P(z)$, ou encore $\exists x \in E, P(x)$ et $\exists \varphi \in E, P(\varphi)$.

Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ est la même chose que $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant 0$ et que « Le carré de tout réel est positif ».

Quantificateurs

Langage courant

Dans certaines formulations, la quantification est sous-entendue (parfois ambiguë) :

- « Tous les entiers sont pairs »
- « La racine carrée du carré d'un réel x est toujours égale à x »
- « Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante et impaire est positive sur $\mathbb{R}^+$ »
- « Un entier relatif est à la fois positif et négatif. »
- « **Théorème de Pythagore :** Soit ABC un triangle. ABC est rectangle en A si et seulement si... »

Le langage mathématique permet de formaliser les énoncés et lever certaines ambiguïtés.

Quantification multiple

On peut quantifier plusieurs variables d'une même assertion ouverte.

L'ordre des quantificateurs est important :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x < y$
- $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y$

Il peut être utile (et même parfois indispensable) de bien utiliser les parenthèses : $\forall x \in \mathbb{Z},\ ((x^2 \geqslant O)$ et $(x^2 \neq 5))$

Assertions closes

Une assertion dont toutes les variables sont quantifiées ou instanciées est dite close. Elle est alors soit vraie, soit fausse.

Exemple

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x-y)^2 > \dfrac{\varepsilon}{\delta}$
  $\forall \varepsilon > 0$, (une certaine propriété sur ε est vérifiée)
  ($\exists \delta > 0$, (une certaine propriété portant sur δ et ε...))
  ...

Définition

On peut utiliser les opérateurs logiques ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$) sur des assertions quantifiées.

Exemples

- ($\exists x \in \mathbb{Z}$, x est pair) et ($\exists x \in \mathbb{Z}$, x est impair)
- $\exists x \in \mathbb{Z}$, ((x est pair) et (x est impair))
- $\forall y \in \mathbb{R}$, (($y \leqslant 0$) ou ($y \geqslant 0$))
- ($\forall y \in \mathbb{R}$, $y \leqslant 0$) ou ($\forall y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant 0$)

Vrai ou Faux ?

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \geqslant 0$
- $\exists a \in \mathbb{N}$, $4a + 12$ est impair

Cas complexe : négation d'une assertion quantifiée

La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E$, non($P(x)$)

La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E$, non($P(x)$).

Exercice : écrire les négations des assertions

- $\forall x > 0, \quad 2x > 0$
- $\exists m \in \mathbb{N}, \quad m^2 - 10m > 0$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists p \in \mathbb{N}, p < k$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x-y)^2 > \dfrac{\varepsilon}{\delta}$

Retour sur un texte mathématique

Proposition.

Soit G un groupe.

(i) *Pour tout $a \in G$, la translation à gauche $l_a : x \mapsto ax$ et la translation à droite $r_a : x \mapsto xa$, sont bijectives, d'applications réciproques $l_{a^{-1}}$ et $r_{a^{-1}}$.*

(ii) *Pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$ on a $l_a \circ l_b = l_{ab}$ et $r_a \circ r_b = r_{ba}$.*

(iii) *La loi de composition est régulière.*

(iv) *L'élément neutre e est le seul idempotent de G.*

Même sans tout comprendre, on peut reconnaître la structure des énoncés et leur nature :

(i) $\forall a \in G$, $B(l_a) \wedge B(r_a)$ etc...

(ii) $\forall a \in G$, $\forall b \in G$, $P(l_a, l_b, l_{ab}) \wedge Q(r_a, r_b, r_{ab})$.

(iii) La "loi de composition" vérifie une certaine propriété ("être régulière")

(iv) $(\mathrm{I}(e)) \wedge (\forall c \in G, c \neq e \Longrightarrow \mathrm{non}(\mathrm{I}(c)))$

Prouver une assertion

Assertions quantifiées

Pour prouver une assertion de la forme $\exists x \in E, P(x)$, on peut trouver un élément de E qui vérifie la propriété P.
Mais comment le trouver ?

Pour prouver une assertion de la forme $\forall x \in E, P(x)$, il faut montrer que tous les éléments de E vérifient la propriété P.
Tous les tester ? S'il y en a beaucoup ? S'il y en a une infinité ?

Implication universellement quantifiées

En mathématiques, beaucoup d'assertions sont de la forme générale $\forall x \in E, P(x) \Longrightarrow Q(x)$.
Comment prouver de telles assertions ?