Soit P_n : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 2$ est pair

Démontrons par récurrence.

Base :

Montrons que $P(1)$ est vrai :

En effet, $1^2 + 1 + 2 = 4$, or 4 est pair.

Récurrence

Supposons $P(n)$ vrai, montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit le nombre $n+1$:

$(n+1)^2 + (n+1) + 2$

$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 4$

$\Leftrightarrow \underbrace{n^2 + n + 2}_{\text{Pair par Hypothèse de Récurrence}} + \underbrace{2n + 2}$

Posons que tout nombre pair est divisible par 2.

Ainsi, tout nombre pair n s'écrit de la forme $n = 2k$ avec n et $k \in \mathbb{N}$.

Or, $2n + 2 = 2(n+1)$, donc $2n + 2$ est pair

Conclusion : On a montré que $P(1)$ est vrai et que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geq 1$, donc par le principe de la récurrence $P(n)$ vraie $\forall n \geq 1$

$P(n) \stackrel{=}{=} \forall n \in \mathbb{N}$, chaque ensemble A de n éléments a 2^n sous ensemble $=$

Démontrons par récurrence :

Base =

Montrons $P(0)$, on a donc un ensemble à 0 élément, donc celui-ci contient une partie, la partie vide.

or $2^0 = 1$.

La propriété est donc vrai pour $n=0$

Récurrence : Supposons $P(n)$ vrai, montrons $P(n+1)$.

Ainsi, on a B, un ensemble de $n+1$ élément

or, $B = A \cup \{x\}$, A un ensemble de n éléments

et $\{x\}$ un ensemble composé uniquement de l'élément x

Par hypothèse de récurrence : $P(A) = 2^n$ $\left(\begin{array}{l}\text{On suppose} \\ x \notin A\end{array}\right)$

De plus, $P(\{x\}) = 2^1 = 2$

Or, on sait que $P(X \cup Y) = P(X) \times P(Y)$

Donc $P(B) = P(A) \times P(\{x\}) = 2^n \times 2 = 2^{n+1}$

Conclusion :

On a montré $P(0)$ vrai et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geq 0$

donc, par le principe de récurrence, $P(n)$ vraie $\forall n \geq 0$