Notation : $[1..n]_{\mathbb{N}} = \{1, 2, \dots, n\}$, noté $[1..n]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Le cardinal d'un ensemble est sa taille. Pour les ensembles finis on peut compter le nombre d'éléments, on le note $|E|$. Les ensembles infinis qui nous intéressent ont une nature très spéciale, *dénombrables*, que nous préciserons plus tard. En gros ils doivent être « analogues » à $\mathbb{N}$ (en fait *équipotents* à $\mathbb{N}$).
Contre–exemple (aspect dénombrable) : $\mathbb{R}$, les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, les fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\{0, 1\}$.

Cette partie du cours est « simplifiée ». Les ensembles que nous considérons sont *discrets* :
— ou bien finis comportant n éléments. On dit alors que leur *cardinal* est n. On note $card(E) = |E| = n$ pour un tel ensemble E. Dans ce cas particulier, E est équipotent à $[1..n]$
— ou bien infinis, mais dans notre cas équipotents à $\mathbb{N}$. On dit alors que E est infini dénombrable.

Énumération Dans les deux cas on est capable de compter/énumérer les éléments de ces ensembles :
— Si E est fini de cardianl n, il existe une bijection entre $[1..n]$ et E, appelons la *enum*. Cette application définit une énumération des éléments de E (le premier $enum(1)$, ..., le n^e $enum(n)$).
— Si E est infini équipotent à $\mathbb{N}$, alors *enum* est une bijection de $\mathbb{N}$ dans E et définit encore une énumération des éléments de E.

Pour les ensembles finis nous utiliserons 3 *principes* (justification hors programme) :

1. *Égalité* Si A, B sont des ensembles finis : $|A| = |B|$ ssi A et B sont équipotents.
2. *Additivité* Si A, B sont des ensembles finis disjoints : $|A \cup B| = |A| + |B|$
3. *Multiplication* Si A, B sont des ensembles finis : $|A \times B| = |A|.|B|$

Proposition 1 : Soient A, B deux ensembles finis : $|A| \leqslant |B|$ si et seulement si il existe une application injective $f\ : A \longrightarrow B$.
Preuve : *cf. fiche supplémentaire cours n°3*
$\Rightarrow$ $|A| = p \leqslant n = |B|$. $f_A\ : A \longrightarrow [1, p]$ bijection. $f_B\ : [1, n] \longrightarrow B$ bijection. Comme $p \leqslant n$, $\forall x \in [1, p]$: $x \in [1, n]$. Alors $\mathbf{g} : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f_B(f_A(x)) \end{array}$ est bien injective ($g = f_B \circ f_A$). Simple : énoncer l'image par f_A de 2 éléments distincts donne deux éléments distincts, qui par la bijection f_B donne à son tour deux éléments distincts.
$\Leftarrow$ Soit $f\ : A \longrightarrow B$ injective, alors $f(A)$, l'image par f de A, est une partie de B équipotente à A, dont le complémentaire est B_1. On utilise alors le principe d'additivité pour « compter » : $|B| = |B_1| + |f(A)| = |B_1| + |A| \geqslant |A|$.
□

Proposition 2 : $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini. Il est stable par addition, multiplication et exponentiation. Il est *bien ordonné* : Toute partie non vide admet un plus petit élément.
L'argument diagonal : L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.
Preuve : Nous ne prouverons que le fait qu'il n'y a pas d'énumération de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
cf. fiche supplémentaire cours n°3
Nous raisonnons par la contraposée. Une partie de $\mathbb{N}$ est donnée par sa fonction caractéristique, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq 2^{\mathbb{N}}$ qui est une suite de 0 et de 1. Soit $\phi : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ une énumération de parties de $\mathbb{N}$. En alignant ces suites $\phi(m)$ de 0 et de 1 les unes aux dessus des autres, on représente ϕ comme un quadrant de 0 et de 1, c'est-à-dire une suite double $(u_{n\,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ avec, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $\phi(m) = (u_{n\,m})_{n \in \mathbb{N}}$ avec m fixé et n variable.
Considérons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = 1 - u_{n\,n}$, soit l'opposé de ce qui apparaît sur la diagonale. Supposons qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{n\,i})_{n \in \mathbb{N}}$, alors $v_i = u_{i\,i} = 1 - u_{i\,i}$, ce qui est impossible. Donc cette suite n'est pas atteinte par ϕ, qui n'est pas surjective et ne peut donc pas être une bijection. Il y a donc plus de suites de 0 et de 1 que d'entiers, les parties de $\mathbb{N}$ ne sont pas dénombrables.
□