TD 4 - Méthode des séquents

Logique Propositionnelle - HAI304I

Exercice 1 Démontrez que les formules suivantes sont valides à l'aide du système $\mathcal{LK}_0$:

1. $p \Rightarrow q \Rightarrow p$
2. $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r$
3. $p \wedge q \Rightarrow p$
4. $p \Rightarrow q \vee p$
5. $p \vee q \Rightarrow (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow r$
6. $p \Rightarrow \bot \Rightarrow \neg p$
7. $\bot \Rightarrow p$
8. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow q$
9. $p \vee p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$
10. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Dans la suite, on se propose de compléter la démonstration d'adéquation du système $\mathcal{LK}_0$ vis-à-vis de la sémantique de la logique :

— **correction** : si un séquent $H_1, H_2, \ldots, H_k \vdash C_1, C_2, \ldots C_n$ est démontrable dans $\mathcal{LK}_0$ alors $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\} \models C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$;

— **complétude** : si $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\} \models C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$ alors le séquent $H_1, H_2, \ldots, H_k \vdash C_1, C_2, \ldots C_n$ est est démontrable dans $\mathcal{LK}_0$.

Dans les trois exercices qui suivent nous prouvons quelques uns des lemmes nécessaires aux preuves de correction et complétude.

Exercice 2 Démontrez que les 3 séquents conséquents des règles axiomatiques (ax, $\bot_g$ et $\top_d$) du système $\mathcal{LK}_0$ correspondent bien à des conséquences logiques.

Exercice 3 Démontrez pour chaque application des règles $\Leftrightarrow_{\mathsf{d}}$, $\wedge_{\mathsf{d}}$, $\wedge_{\mathsf{g}}$, $\neg_{\mathsf{d}}$ que si les séquents obtenus par application de la règle correspondent à des conséquences logiques alors le séquent sur laquelle la règle a été appliquée (ce séquent est de la forme du séquent conséquent de la règle) correspond bien à une conséquence logique.

Exercice 4 [Réversibilité des règles] Démontrez pour chaque application des règles $\Leftrightarrow_{\mathsf{d}}$, $\wedge_{\mathsf{d}}$, $\wedge_{\mathsf{g}}$, $\neg_{\mathsf{d}}$ que si le séquent sur laquelle la règle a été appliquée correspond à une conséquence logique les séquents obtenus par application de la règle correspondent bien à des conséquences logiques .

Exercice 5 Démontrez à l'aide du système $\mathcal{LK}_0$ que les conséquences logiques suivantes correspondent à des séquents démontrables :

1. $\neg(q \wedge \neg r) \wedge (p \Rightarrow q \vee r \wedge \neg p) \models \neg(r \Rightarrow s) \vee \neg p \vee r \wedge s$
2. $\{a \Rightarrow b,\ c \wedge d \Rightarrow a,\ e \Rightarrow c,\ d \wedge e\} \models b$

Exercice 6 Dites si les formules suivantes sont valides ou non à l'aide du système $\mathcal{LK}_0$.

— $a \wedge \neg b \vee \neg(b \Rightarrow c) \vee (c \wedge a) \vee (a \vee b \Rightarrow \bot)$

— $a \wedge (a \vee b) \Rightarrow a \wedge b \vee b$

Exercice 7 Dans cet exercice, nous allons voir comment raisonner efficacement en présence de nouveaux connecteurs logiques.

1. On considère le connecteur binaire « ou exclusif », noté $\oplus$, et défini comme suit :

$$\phi \oplus \phi' = (\phi \vee \phi') \wedge \neg(\phi \wedge \phi')$$

où ϕ et ϕ' sont des formules.

En 1965, Prawitz eut l'idée d'intégrer les connecteurs logiques dérivés aux règles de déduction du système de preuve. Par exemple, dans le calcul des séquents (système LK), on peut ajouter les deux règles suivantes (une règle gauche et une règle droite) pour raisonner sur le « ou exclusif » :

$$\frac{\Gamma, (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta}\ \oplus_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}\ \oplus_{\mathsf{right}}$$

Avec ces nouvelles règles, démontrer les formules suivantes :

— $\mathcal{F}_1 = p \oplus \neg p$;

— $\mathcal{F}_2 = \neg(p \oplus p)$.

2. Faire de même avec le connecteur ternaire « Si Alors Sinon », noté _?_; _, et démontrer les formules suivantes :

— $\mathcal{F}_3 = (\top ? p; q) \to p$;

— $\mathcal{F}_4 = (\bot ? p; q) \to q$.

3. En 2007, Brauner, Houtmann et Kirchner eurent l'idée d'aller plus loin en observant qu'une fois intégrée comme une règle de déduction, on pouvait continuer à « déstructurer » la formule dépliée et ensuite éliminer les étapes de déstructuration. On obtient ainsi une règle « compilée », plus compacte, qu'on appelle règle de superdéduction. Par exemple, pour $\oplus_{\mathsf{right}}$, on obtient :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\mathsf{right}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\mathsf{left}}}{\Gamma \vdash \Delta, \neg(A \wedge B)}\ \neg_{\mathsf{right}}}{\Gamma \vdash \Delta, (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)}\ \wedge_{\mathsf{right}}}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}\ \oplus_{\mathsf{right}}$$

Ce qui devient en éliminant les étapes de déstructuration intermédiaires :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \qquad \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}\ \oplus_{\mathsf{right}}$$

Faire de même pour la règle $\oplus_{\mathsf{left}}$.
Avec ces nouvelles règles, faire à nouveau la preuve de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

4. Produire les règles (gauche et droite) de superdéduction du connecteur « Si Alors Sinon », puis avec ces nouvelles règles, faire à nouveau la preuve de $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.