HLMA101 - Partie C : Analyse (fonctions réelles)

Chapitre 10
Continuité

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2020-2021

1. Continuité

2. Théorème des valeurs intermédiaires

3. Continuité et monotonie, bijection

Sommaire

1. Continuité

2. Théorème des valeurs intermédiaires

3. Continuité et monotonie, bijection

Continuité en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Remarque

On a alors : f continue en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe.

Reformulation

$$f \text{ continue en } x_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\cap I,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Non-continuité

f discontinue en x_0

$\Updownarrow$

$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in I, (|x - x_0| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon)$

Remarque

La continuité est une notion **locale** : seul compte le comportement de f au voisinage de x_0.

Exemples

1. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est continue en x_0
2. La fonction partie entière est discontinue en tout entier relatif.

Continuité à gauche et à droite

Définition

Soit $x_0 \in I$, et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dira que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \leqslant x_0}} f(x)$ (resp. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \geqslant x_0}} f(x)$) existe.

Exemple

La fonction partie entière est continue à droite en chaque entier relatif, mais pas à gauche.

Théorème

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0.

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in I \cap J$.

(i) $|f|$ est continue en x_0

(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est continue en x_0

(iii) $f + g$ est continue en x_0

(iv) $f.g$ est continue en x_0

(v) si $f(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est continue en x_0

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Idée des preuves : C'est une conséquence directe des théorèmes sur les opérations sur les limites.

Continuité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Exemples

1. Une application constante est continue sur $\mathbb{R}$.
2. L'identité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   est discontinue en tout point.

Propriétés

- $\mathscr{C}(I)$ est stable par combinaisons linéaires
- $\mathscr{C}(I)$ est stable par produit
- Si $f \in \mathscr{C}(I)$,alors $|f| \in \mathscr{C}(I)$
- Si f et g sont dans $\mathscr{C}(I)$ et g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}(I)$.
- Si f est une application continue de I dans J, et g continue de J dans $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est continue sur I

Idée des preuves

C'est une conséquence directe des théorèmes précédents sur la continuité en un point.

Exemples

1. Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$ (par exemple : $x \mapsto 2x^3 - \sqrt{2}x + 1$)
2. Toute fonction fraction rationnelle est continue où elle est définie.
3. $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \text{ si } x < 2 \\ f(x) = -x + 4 \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Sommaire

1. Continuité

2. Théorème des valeurs intermédiaires

3. Continuité et monotonie, bijection

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$

Preuve.

Exemples

- On retrouve que pour tout réel $a \geqslant 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = a$.
- L'équation $e^{-x} = x$ admet une solution dans $[0; 1]$.

Corollaire (pratique)

Si f est continue sur un intervalle $I = [a; b]$ avec $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle : si I est un intervalle et $f \in \mathscr{C}(I)$, alors $f(I)$ est aussi un intervalle.

Idée de la preuve :

- Soient $a' < b'$ deux éléments de $f(I)$:
  i.e. $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$ avec $a, b \in I$
- Soit c' tel que $a' < c' < b'$: c' est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- TVI : Il existe $c \in [a; b]$ (ou $c \in [b; a]$) tel que $c' = f(c)$
- Conclusion : comme I est un intervalle, $c \in I$ et $c' = f(c) \in f(I)$.

Théorème :

Soit f une fonction monotone sur I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.

Rappels :

- f est dite monotone si f est croissante sur I, ou décroissante sur I.
- f est dite croissante sur I lorsque :

$$\forall a, b \in I,\ a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

- f est dite décroissante sur I lorsque :

$$\forall a, b \in I,\ a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

Théorème des valeurs extrêmes

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes.
Autrement dit, il existe c et c' dans $[a, b]$ tels que :

$$\forall x \in [a, b], f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(c')$$

Note : Pas tout à fait au programme, mais c'est bien d'avoir compris ce que ça dit et de savoir que ça existe.

Sommaire

1. Continuité
2. Théorème des valeurs intermédiaires
3. Continuité et monotonie, bijection

Bijection réciproque

Théorème

Soit f une application continue strictement croissante sur un intervalle I. Alors :

(i) f induit une bijection de I sur $J = f(I)$.
(ii) La réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement croissante.
(iii) L'image $f(I)$ de f est un intervalle de $\mathbb{R}$, de même nature que I, dont le bornes sont les limites de f aux extrémités de I.

Preuve.
Remarque : Il existe un théorème analogue pour le cas f strictement décroissante.