

Exercice 1.

En cours on a vu une bijection des suites d'entiers avec \mathbb{N} , notons f cette bijection.

1. Donner une bijection g des suites croissantes d'entiers dans les suites d'entiers.
2. En déduire une bijection entre les suites croissantes d'entiers et \mathbb{N} .

Exercice 2.

Soit f une fonction totale calculable et g une fonction calculable.

Soit $E_g = \{x \mid g(x) \text{ est défini et } f(x) < g(x)\}$.

1. Donner la fonction semi caractéristique de E_g
2. Donner un algorithme pour afficher tous les éléments de E_g .
3. Soit p une procédure et $E_p = \{x \mid p(x) \text{ est défini}\}$. E_p est-il toujours décidable, E_p est-il toujours récursivement énumérable ? (justifier vos réponses).
4. Soit p une procédure et $E'_p = \{x \mid p(x) \text{ n'est pas défini}\}$. E'_p peut-il être décidable ? Récursivement énumérable et non décidable ? Non récursivement énumérable ? (justifier à chaque fois vos réponses).

Exercice 3.

Soit T l'ensemble des fonctions totales et calculables de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

1. Existe-t-il une bijection de T dans \mathbb{N} et pourquoi ?
2. Soit f une bijection calculable de \mathbb{N} dans une partie de T . Soit $F = \{f(0), f(1), \dots, f(i), \dots\}$. Notons $f_i = f(i)$.
Donner une fonction totale, strictement croissante et calculable qui n'appartienne pas à F .