Un ensemble est une collection d'objets distincts où l'ordre n'a pas d'importance.

1. L'ensemble vide, noté $\{\}$ ou $\emptyset$, n'a aucun élément. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de l'entier naturel 0.
2. Soit E un ensemble non vide. E a au moins un élément x. On dit que x *appartient* à E et l'on note $x \in E$. La négation de cette relation : x *n'appartient pas* à E se note $x \notin E$
3. Comment spécifier un ensemble *discret* ? *Par opposition aux ensembles* continus*, comme* $\mathbb{R}$ *muni de sa topologie usuelle. Mais encore ?*
   (a) En *extension* : un ensemble qu'on peut décrire par la suite de ses *éléments* est *fini* et discret.
   Exemple : $\{1, 2, 3\}, \{\} = \emptyset, \{\texttt{vrai}, \texttt{faux}\}$.
   La répétition d'éléments entre les accolades ne modifie pas l'ensemble : $\{1, 1, 2, 2, 2, 3\} = \{1, 1, 1, 1, 3, 2, 2\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$, on utilisera bien sûr l'écriture la plus simple. (Les deux premiers exemples sont des *multiensembles.*)
   (b) En *compréhension* : les ensembles sont définis par une propriété.
   Exemples : tous les entiers qui sont pairs, plus formellement : $Pair = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \texttt{pair}(n)\}$, tous les entiers supérieurs à 10, $List01$ toutes les listes constituées de 0 ou de 1, $List01 = \{L \in Liste \,|\, \forall x$ élément de $L, x = 0$ ou $x = 1\}$, ...
4. Cardinalité de manière informelle $\sim$ taille de l'ensemble. Pour les ensembles finis on peut compter le nombre d'éléments, on le note $|E|$. Les ensembles infinis qui nous intéressent ont une nature très spéciale, *dénombrables*, que nous préciserons plus tard. En gros ils doivent être « analogues » à $\mathbb{N}$ (en fait *équipotents* à $\mathbb{N}$).
5. Comparaison d'ensembles (dans la suite E est l'ensemble de référence et A et B des parties de E)
   (a) **Inclusion** Un ensemble A est dit contenu dans ou inclus dans un ensemble B si *chaque* élément de A est élément de B. On note : $A \subseteq B$ si $\forall x \in A, x \in B$. On dit A est un *sous-ensemble* de B, ou encore A est une partie de B. Attention : $\in$ et $\subseteq$ ont des significations différentes.
   (b) **Non inclusion** $A \nsubseteq B$ si la phrase précédente est fausse. Donc il y a au moins un élément de A qui n'est pas élément de B, ce qui s'écrit $\exists x \in A \,|\, x \notin B$
   (c) **Égalité** $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Manière très classique de prouver l'égalité entre 2 ensembles, par exemple entre $Pair = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \texttt{pair}(n)\}$ et $Mul2 = \{2 * p \,|\, p \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2 * p\}$. + rmq $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.
   (d) **Non égalité** $A \neq B$ s'il y a un élément de A qui n'est pas élément de B, ou s'il y a un élément de B qui n'est pas élément de A. On nie la phrase précédente. Exemple avec $Pair$ et les puissances positives de 2 : $Puiss2 = \{2^p \,|\, p \in \mathbb{N}^*\} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists p \in \mathbb{N}^*, n = 2^p\}$
   (e) **Inclusion stricte** A est strictement inclus dans B si $A \subseteq B$ et $A \neq B$ (peut se noter $A \subsetneq B$ mais attention à ne pas confondre cette notation avec $A \nsubseteq B$). A est dit sous-ensemble *propre* ou *strict* de B. Exemple : $Puiss2 \subsetneq Pair$
6. On s'intéresse souvent aux *sous–ensembles ou parties* de E comme éléments eux mêmes d'un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble exhaustif de toutes les parties de E.[1]
   Exemples :
   (a) $C = \{1, 2, 3\}$. Comme C est fini on peut/doit énoncer $\mathcal{P}(C)$ en extension :
   $\mathcal{P}(C) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

   On a par définition : $A \subseteq E$ ssi $A \in \mathcal{P}(E)$.

---

1. *$\emptyset$ et E font toujours partie de $\mathcal{P}(E)$, mais est-ce qu'on a toujours $|\mathcal{P}(E)| \geqslant 2$? NON : $|\mathcal{P}(\emptyset)| = \{\emptyset\}$ qui contient un seul élément*