HLMA101 - Partie C : Analyse (fonctions réelles)

Chapitre 12
Dérivation

Simon Modeste

Faculté des Sciences - Université de Montpellier

2020-2021

Sommaire

Dérivabilité en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.
On dira que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$.

Exemples

- La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable en 1 et on a $f'(1) = 2$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0

Remarques

- f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.
- f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel λ et une fonction φ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ tels que
  $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \quad (\lambda = f'(x_0))$
- Pour tout $x_0 \in I$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'est pas définie en x_0.
- Pour tout $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé le taux d'accroissement de f entre x et x_0. C'est le coefficient directeur de la pente de la droite (AB), où $A(x; f(x))$ et $B(x_0; f(x_0))$.

Dérivabilité sur une réunion d'intervalle

Définition

Soit f définie sur une réunion d'intervalles I. f est dite dérivable sur I si f est dérivable en x_0, pour tout $x_0 \in I$. Dans ce cas, la fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I est appelée la fonction dérivée de f.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Tangente

Définition

Soit f dérivable en x_0. La droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est la tangente à la courbe représentative de f en x_0.

Propriété

Dans ce cas, une équation de cette tangente est
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
C'est une "approximation" de f au voisinage de x_0, et l'"erreur" est de $(x - x_0)\varphi(x)$.

Lien avec la continuité

Propriété :

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0

Preuve

Soit f une fonction dérivable en x_0.
Alors, il existe un réel λ et une fonction φ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$
tels que : $\quad f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$
Par somme de limite, on en déduit que f a une limite en x_0, qui vaut $f(x_0)$, et donc que f est continue en x_0. $\blacksquare$

La réciproque est-elle vraie ? ? NON ! ! ($x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais non dérivable en 0)

Dérivabilité à gauche et à droite

Définition :

Soit f une fonction définie sur I, et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) existe et est finie.
Dans ce cas, on note $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$) cette limite.

Exemple :

$f : x \to |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, et $f'_g(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$.

Théorème

Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 ET $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemples

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leqslant 0 \\ x^3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

Sommaire

Théorème

• Soient f et g deux fonctions définies sur I, et soit $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0.

1. $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

• Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On suppose f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$$

Remarques

- Ce théorème a une version “globale” : tous les énoncés restent vrais en remplaçant “en x_0” par “sur un ensemble I”.
- Exercice : écrire proprement l'énoncé dans le cas de la composée de deux fonctions dérivables (sur quels domaines de définitions ?).

Plan de preuve du point 1 (combinaison linéaire)

- Pour λf :
  $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi(x)$
  $\lambda f(x) = \lambda f(x_0) + (x-x_0)\lambda f'(x_0) + (x-x_0)\lambda\varphi(x)$
  On pose $\gamma = \lambda\varphi$ et on a $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = 0$
- Pour $f+g$:
  $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi_1(x)$
  $g(x) = g(x_0) + (x-x_0)g'(x_0) + (x-x_0)\varphi_2(x)$
  On calcule alors $(f+g)(x)$, et on trouve $(f+g)(x) = f(x_0)+g(x_0)+(x-x_0)(f'(x_0)+g'(x_0))+(x-x_0)(\varphi_1+\varphi_2)(x)$

Plan de preuve du point 2 (produit)

- $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varphi_1(x)$ et $g(x) = g(x_0) + (x-x_0)g'(x_0) + (x-x_0)\varphi_2(x)$
- On calcule alors f(x)g(x), et on trouve $fg(x) = fg(x_0) + (x-x_0)(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)) + (x-x_0)\varepsilon(x)$

Plan de preuve du point 3 (quotient)

- On montre d'abord que $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.
  $\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}$ (au voisinage de x_0, $g(x) \neq 0$ car g continue en x_0 et $g(x_0) \neq 0$)
  Par passage à la limite, on obtient le résultat car g dérivable en x_0.
- Le cas du quotient se déduit du cas précédent et du produit.

Preuve pour la composition de fonctions.

Exemple

On admet que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réciproque

Théorème

Soit f une application strictement monotone d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable en $x_0 \in I$. La fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et on a alors

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Exemple

La fonction racine est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Plan de la preuve

($\Rightarrow$)

- On a $f^{-1} \circ f = Id$ donc $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$
- Alors $f'(x_0) \neq 0$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

($\Leftarrow$)

- On suppose $f'(x_0) \neq 0$, montrons que $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.
- f est dérivable en x_0 donc $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- f^{-1} est continue en y_0 donc $f'(x_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0} = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}$.
- Comme cette limite n'est pas nulle, on compose par la fonction inverse.

Corollaire

Soit f une application strictement monotone d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, dérivable sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I. La fonction f^{-1} est dérivable sur J et on a

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemples

- Réciproque des fonctions puissances entières
- Réciproque des fonctions trigonométriques

Sommaire

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit a un point intérieur à I. On dit que f a un maximum (resp. minimum) local en a s'il existe un intervalle I_0 ouvert centré en a tel que, pour tout $x \in I_0$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$). Si $I_0 = I$, on parle d'extremum (maximum ou minimum) global.

Théorème “des valeurs extrêmes” (admis)

Soit f une fonction continue sur un segment fermé $[a; b]$. Alors f admet un maximum et un minimum sur $[a; b]$.

Lien avec la dérivée

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit a intérieur à I. Si la fonction f a un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$

Remarque

La réciproque est-elle vraie ?
NON : $x \mapsto x^3$ en 0 !

Plan de la preuve

Supposons que a est un maximum ; $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Alors $f'(a) \geqslant 0$ et $f'(a) \leqslant 0$: $f'(a) = 0$.

Remarques

- On a une condition nécessaire pour être un extremum local à l'intérieur de I : on cherche les extremums locaux parmi les x intérieurs à I tels que $f'(x) = 0$.
- Attention, ça ne dit rien sur les "bords" de l'intervalle, qui **peuvent** être des extremums :
  Exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$.

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve.

Théorème des Accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Idée de la preuve

On applique le théorème de Rolle à
$x \mapsto f(x) - (\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a))$

Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Supposons que : $\exists M > 0, \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant M$.
Alors,

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant M|b - a|$$

Propriété 1 (dérivée nulle)

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I et telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors f est constante.

Propriété 2 (signe de la dérivée)

Soit f une fonction définie et continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout x intérieur à I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout x intérieur à I, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : tableau de variations

Ces propriétés justifient ce que l'on écrit dans les tableaux de variations.