Vecteurs 4

1 Définition et règles de calcul

1.1 Définition

Un vecteur est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extré-mités un point de départ et un point d'arrivée. Néanmoins son emplacement dans le plan ou l'espace n'a pas d'importance : seuls comptent *sa longueur (norme), sa direction (droite qui le porte) et son sens (celui de la flèche qui le représente)*. Un vecteur a donc une infinité de représentants, tous parallèles et de même sens. Nous nous limiterons ici aux vecteurs de l'espace usuel à 2 ou 3 dimensions ($\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$).

Un vecteur est noté symboliquement par une flèche. Par exemple, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ou encore $\overrightarrow{AB}$. Ainsi sur la Fig. 4.1, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux représentants d'un même vecteur, $\vec{u}$.

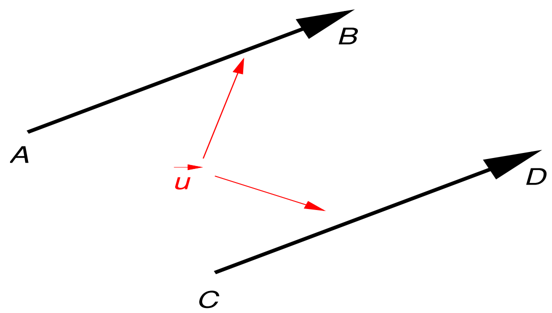

FIGURE 4.1 – $ABDC$ forme un parallélogramme.

1.2 Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se construit en joignant l'origine de $\vec{u}$ à l'extrémité de $\vec{v}$ tout en faisant coïncider l'extrémité de $\vec{u}$ avec l'origine de $\vec{v}$ (voir Fig. 4.2).

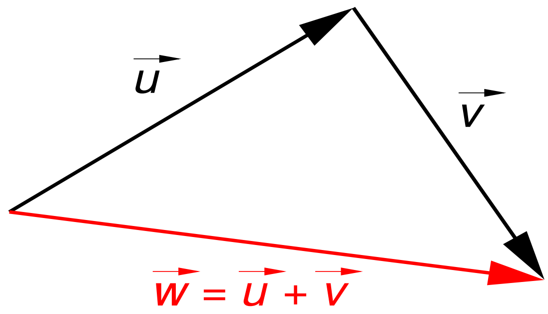

FIGURE 4.2 – Somme vectorielle : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

1.3 Multiplication par un scalaire

On peut multiplier tout vecteur $\vec{u}$ par un scalaire (nombre réel) a. Le vecteur résultant $\vec{v} = a\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$, même sens si $a > 0$ et sens opposé sinon, et une norme multipliée par $|a|$ par rapport à celle de $\vec{u}$.

1.4 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Cette notion est utile pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ou que des points sont alignés. En effet, $(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$. D'autre part, A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Cette relation permet par exemple de trouver l'équation d'une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. C'est en effet l'ensemble des points M tels que A, B et M soient alignés, c'est à dire, l'ensemble des points M tels que pour tout réel k, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

1.5 Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \tag{4.1}$$

Cette relation permet par exemple de décomposer tout vecteur en introduisant un point supplémentaire (B ici). Elle permet souvent de simplifier les expressions vectorielles.

1.6 Algèbre vectorielle

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et les réels n et m,

— Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

1. Définition et règles de calcul

- Associativité : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$.
- Associativité de la multiplication : $n(m\vec{u})=(nm)\vec{u}$.
- Distributivité : $(m+n)\vec{u}=m\vec{u}+n\vec{u}$ et $m(\vec{u}+\vec{v})=m\vec{u}+m\vec{v}$.

34 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Simplifiez au maximum : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}$,
$\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BO}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MO}+\vec{v}/4$.

35 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit ABC un triangle quelconque, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$. Tracez E et F et montrez que les droites (EC) et (BF) sont parallèles.

36 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit ABC un triangle quelconque, et deux points, $B'\in[AB]$ et $C'\in[AC]$, tels que $(B'C')\parallel(BC)$. Démontrer le théorème de Thalès :

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

Indication : Exprimez $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et et $\overrightarrow{AC}$.

37 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Le centre de gravité (barycentre) G d'un triangle ABC est défini par la relation

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

1. *Montrez que quel que soit le point O, on a*

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

2. *Soit I le milieu de $[BC]$. Montrez que $\overrightarrow{AG}=(2/3)\overrightarrow{AI}$.*
   Indication : Choisissez $O=I$!
3. *Tracez un triangle ABC quelconque et représentez son centre de gravité G.*

2 Coordonnées cartésiennes

2.1 Coordonnées cartésiennes d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on peut choisir des vecteurs *unitaires* (c'est à dire de norme 1) et *orthogonaux* pour décomposer tout autre vecteur de $\mathbb{R}^3$. On les appelle $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ en référence aux axes $(0x)$, (Oy) et (Oz) usuels). Dans ce cas, tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière *unique* sous la forme

$$\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z. \tag{4.2}$$

Le triplet de nombres réels (u_x, u_y, u_z) est appelé *coordonnées cartésiennes* du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Ce sont les projections (algébriques) du vecteur $\vec{u}$ sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz) (voir Fig. 4.3). On appelle aussi parfois ces coordonnées, *composantes* du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

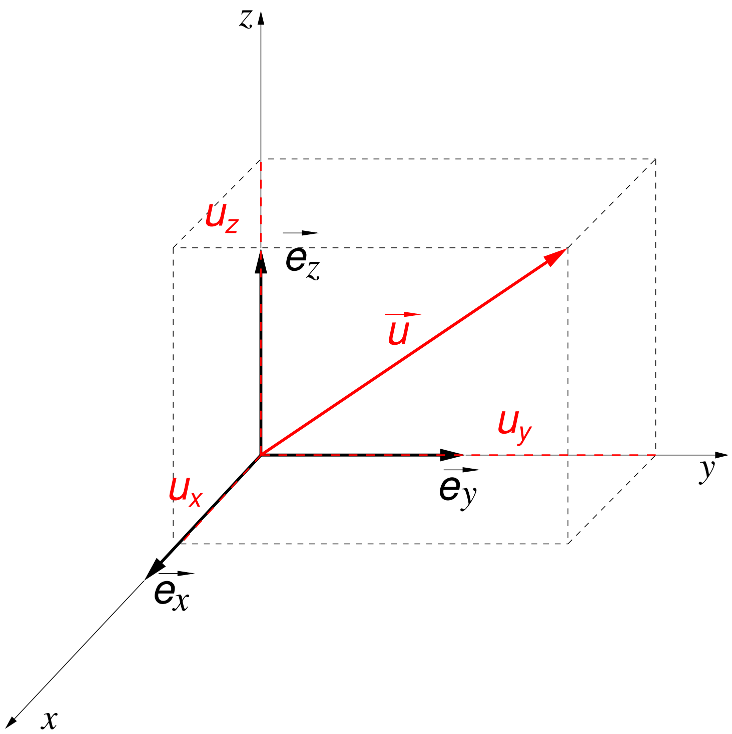

FIGURE 4.3 – Coordonnées cartésiennes (composantes) (u_x, u_y, u_z) du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Si le représentant d'un vecteur est défini par deux points A et B dont les coordonnées cartésiennes dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{e}_x + (y_B - y_A)\vec{e}_y + (z_B - z_A)\vec{e}_z. \tag{4.3}$$

Un vecteur est nul si et seulement si *toutes* ses coordonnées sont nulles, $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = (0, 0, 0)$.

2.2 Algèbre vectorielle en coordonnées cartésiennes

Si, dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, alors, quels que soient les réels (a, b),

$$a\vec{u} + b\vec{v} = (au_x + bv_x)\vec{e}_x + (au_y + bv_y)\vec{e}_y + (au_z + bv_z)\vec{e}_z. \tag{4.4}$$

Les composantes du vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont donc $(au_x + bv_x, au_y + bv_y, au_z + bv_z)$.

3 Produit scalaire

3.1 Définition

Il existe plusieurs expressions du produit scalaire. Prenant l'une pour définition, on peut en déduire les autres. Nous nous contentons ici de rappeler ces expressions, sans démonstration. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **un nombre réel (positif ou négatif), pas un vecteur !** On le note $\vec{u}.\vec{v}$ et on peut le définir par

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\ \cos(\vec{u}, \vec{v}). \tag{4.5}$$

En coordonnées cartésiennes, dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, si $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, alors une expression équivalente du produit scalaire est :

$$\vec{u}.\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \tag{4.6}$$

Enfin, compte tenu des propriétés citées ci-après, il est facile de montrer qu'une autre expression du produit scalaire ne faisant intervenir que les normes des vecteurs concernés et de leur somme est donnée par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right). \tag{4.7}$$

3.2 Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le réel k,

- Commutativité : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- Distributivité : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$.
- Associativité : $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.
- Orthogonalité : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
- Lien avec la norme : $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

3.3 Quelques résultats utiles

— Norme en coordonnées cartésiennes :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

— Cosinus en coordonnées cartésiennes ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls) :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}}.$$

— Identités remarquables ($\vec{u}^2 := \vec{u}.\vec{u}$) :

$$(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \pm 2\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 \pm 2\vec{u}.\vec{v},$$

$$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2.$$

38 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit ABC un triangle quelconque. Démontrez le théorème d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,AC\cos(\widehat{BAC}).$$

Indication : Utilisez le produit scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}$ ($= BC^2$) en décomposant $\overrightarrow{BC}$ pour faire intervenir les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Que devient ce théorème si le triangle est rectangle en A ?

39 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Soit PQ le diamètre d'un cercle de rayon r et M un point quelconque de ce cercle. Montrez que $(PM) \perp (MQ)$. Soit θ l'angle $\widehat{QOM}$ où O est le centre du cercle. En supposant $\theta \in [0, \pi]$, que vaut l'aire S du triangle PQM en fonction de r et θ ?
Indication : Décomposez les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{MQ}$ en faisant intervenir le centre du cercle, O.

40 Exercice ⋆ Corr. p. ??

Dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes respectives $\vec{u} = (1, -2)$ et $\vec{v} = (4, 2)$.

1. *Tracez $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en prenant pour origine le point O.*
2. *Soit A le point défini par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et B le point défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Quelles sont les coordonnées de A et de B dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?*
3. *Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}$. Comment est l'angle $\widehat{OAB}$?*
4. *Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ ainsi que les normes OA et OB. Que vaut $\cos\widehat{AOB}$? En déduire la valeur (géométrique) de l'angle $\widehat{AOB}$ en degrés puis celle de $\widehat{ABO}$.*
5. *En supposant que l'unité est le cm, quels sont le périmètre P et l'aire S du triangle OAB ?*

41 Exercice

⋆ Corr. p. ??

On voit en mécanique qu'un point matériel est en équilibre si la somme (vectorielle) des forces auxquelles il est soumis est nulle : $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$. Un point matériel placé à l'origine du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est soumis aux trois forces suivantes : $\overrightarrow{F_1} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{F_3} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Les composantes sont données en Newton (N) (unité de force).

1. Représentez les 3 forces agissant sur le point matériel.
2. Le point matériel est-il en équilibre ?
3. Un étudiant tente d'équilibrer le point matériel en appliquant une quatrième force dans la direction du vecteur $\vec{k}$. Cela est-il possible ?
4. Donnez la direction, le sens et l'intensité de la force $\overrightarrow{F_4}$ qui permet de maintenir le point matériel en équilibre. (On rappelle que l'intensité F d'une force est la norme du vecteur $\vec{F}$.)