De la combinatoire aux graphes (HLIN201) – L1

Graphes II : cheminement non orienté

Sèverine Bérard

Université de Montpellier

2^{e} semestre 2017-18

Graphes II : cheminement non orienté

Cheminement non orienté

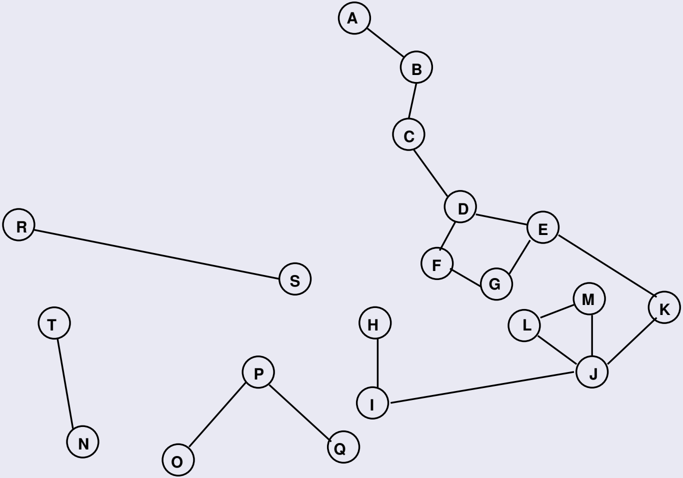


FIGURE – Graphe du plan des pistes de Montpellier sans orientation

Quels cheminements ?

Questions posées

- cheminement pour aller de A à L ?
- `(A,B,C,D,E,G,F,D,E,K,J,L,M,J,I,H)` va bien de `A` à `H`. Mais le trajet n'a pas l'air optimal. On peut faire mieux ?
- Si on coupe la piste du Verdanson, on supprime l'arête `{D,E}`. Peut-on toujours aller de `A` à `H` ?
- Un cycliste convaincu cherche un itinéraire uniquement cyclable, qui utiliserait toutes les jonctions. C'est possible ?

Marche

Définitions $G = (X, E)$ est un graphe non orienté.

- Une marche de G est une suite $w = (x_0, \ldots, x_h), h \geqslant 0$ de sommets de G Chaque $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$
- La marche w passe par l'arête $\{x_i, x_{i+1}\}$, x_i et x_{i+1} consécutifs dans w
- x_0 et x_h sont les extrémités de w
- h est la longueur de w. C'est aussi le nombre d'arêtes par lesquelles elle passe
- La marche de longueur 0 est réduite à un sommet
- Une marche d'extrémités les sommets a et b est dite *ab*-marche
- La marche w est dite extraite de la marche w' si toutes les arêtes de w sont dans w' et y apparaissent dans le même ordre

Chemin

Définition $G = (X, E)$ est un graphe non orienté.

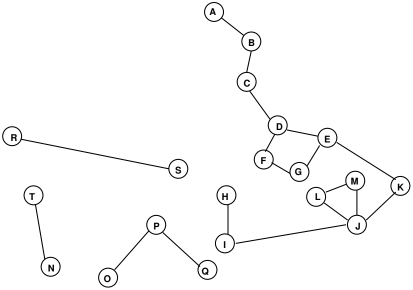
- Un chemin est une marche qui ne passe pas 2 fois par le même sommet (donc pas 2 fois par la même arête non plus)

- Mêmes notions d'extrémité, longueur, xy-chemin, chemin extrait, ...

Vocabulaire que l'on peut aussi rencontrer

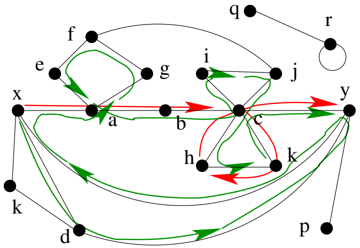
- Une marche est parfois appelée chaîne
- Une marche, ou chaîne, est dite
  - simple : si ses arêtes sont distinctes
  - élémentaire : si ses sommets sont distincts (= chemin)
  - eulérienne : si elle est simple, et passe par toutes les arêtes de G
  - hamiltonienne : si elle est élémentaire, et passe par tous les sommets de G

Exemples



- $w_1 = (A, B, C, D, E, G, F, D, E, K, J, I, H)$ est une AH-marche, de longueur 12. Elle passe par l'arête $\{D, E\}$ (même 2 fois)
- $w_2 = (A, B, C, D, E, K, J, I, H)$ est un AH-chemin extrait de w_1 et de longueur 8
- (A, C, B, D) n'est pas une marche de G
- $w_3 = (E, K, J, L, M, J, I, H)$ passe plusieurs fois par la même arête ? *non* ; par le même sommet ? *oui :* J
- w_2 passe plusieurs fois par la même arête ? *non* ; par le même sommet ? *non*

Rappel : Une marche extraite de la marche w est une sous-suite des éléments de w (même ordre mais pas forcément tous), qui forme une marche du graphe, et dont toutes les arêtes sont des arêtes de w.



- Le graphe $G = (X, E)$. $w = (x, d, y, x, a, g, f, e, a, b, c, i, j, c, h, k, c, y)$ une xy-marche de G.
- (a, g, f, j, c) est une marche de G mais pas une marche extraite de w
- (b, c, y, x, a, g) est une marche de G mais pas une marche extraite de w
- (x, a, b, c, i, j, c, y) est une xy-marche extraite de w.
- (x, a, b, c, k, h, c, y) est une xy-marche de G mais pas une marche extraite de w

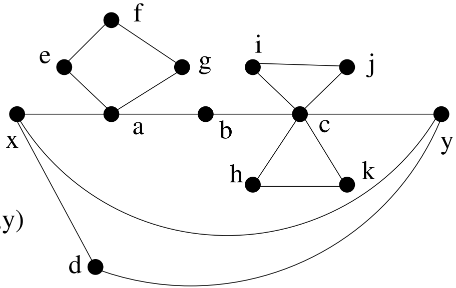
Propriété (Chemins extraits)

Soient x et y deux sommets de $G = (X, E)$. De toute xy-marche w, on peut extraire un xy-chemin.

Preuve :

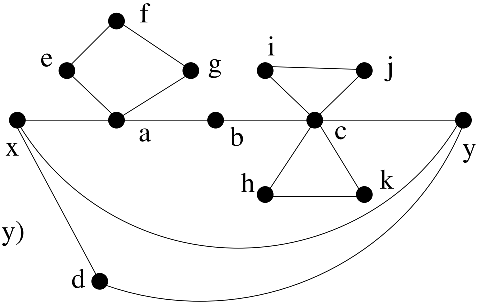
1. Version constructive : par extraction récursive d'une xy- marche extraite de w et possédant strictement moins de répétitions de sommet que w. À la fin, plus de répétition, donc xy-chemin.
2. Version non constructive : considérons l'ensemble des xy-marches extraites de w. Leurs longueurs forment un ensemble d'entiers qui possède donc un plus petit élément k. Toutes ces xy-marches de longueur k sont nécessairement des chemins. Sinon ...

w = (x,d,y,x,a,g,f,e,a,
b,c,i,j,c,h,k,c,y)



Remarque

Il n'y a pas unicité des *xy*-chemins extraits d'une même *xy*-marche



w = (x,d,y,x,a,g,f,e,a,
b,c,i,j,c,h,k,c,y)

$w' = (x, d, y)$ et $w'' = (x, a, b, c, y)$ sont 2 chemins extraits de w

Connexité

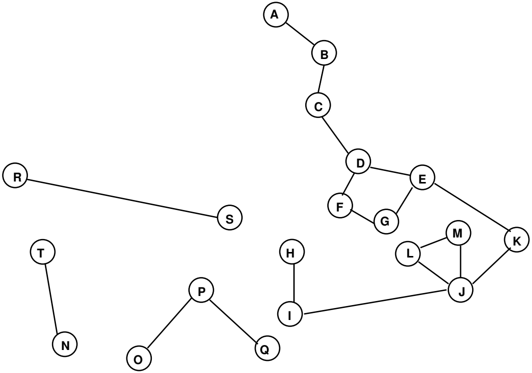
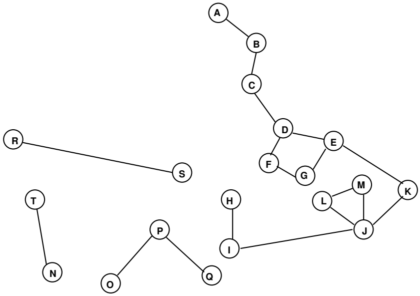


FIGURE – Graphe du plan des pistes de Montpellier sans orientation

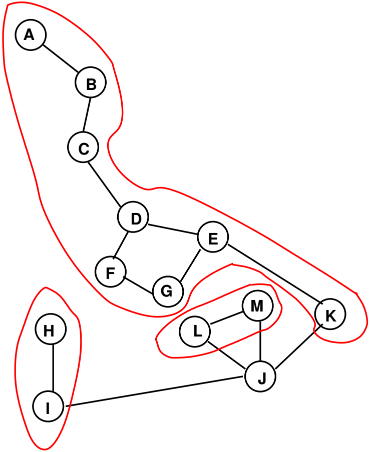
- On peut rejoindre A et M : ils sont en relation de connexité
- On ne peut aller de A à R, ils ne sont pas connexes
- Tous les sommets en connexité avec O sont O, P et Q

Définitions $G = (X, E)$ est un graphe non orienté.



- La relation de connexité $\underset{c}{\approx}$ sur X est : $x \underset{c}{\approx} y$ ssi il existe un xy-chemin dans G
  La relation $\underset{c}{\approx}$ est une relation d'équivalence sur X
- Les composantes connexes de $G = (X, E)$ sont les classes d'équivalence de $\underset{c}{\approx}$
- Un graphe est dit connexe s'il possède une seule composante connexe.

Définition : $G = (X, E)$ est un graphe non orienté. Un point d'articulation de G est un sommet a tel que $G(X \setminus \{a\})$ n'est pas connexe.



- Dans *Nord* le sommet F n'est pas point d'articulation.
- Par contre le sommet J est un point d'articulation, car $Nord(Z \setminus \{J\})$ devient non connexe.
- **Rmq** : dans le graphe *Nord*, le sommet J « voit » chacune de ces 3 composantes, au sens où chacune de ces 3 composantes possède au moins un sommet « relié à » J.
- Les autres points d'articulations sont B, C, D, E, K et I.

$Z = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$. Le graphe $Nord = PC(Z)$

Lemme fondamental

Lemme

Désigné sous le nom de ***Lemme fondamental des graphes connexes*** *:*
Tout graphe connexe d'ordre $\geqslant 2$ *contient au moins deux sommets qui ne sont pas des points d'articulation.*

Exemple

Dans le graphe *Nord*, les sommets qui ne sont pas points d'articulation sont A, H, F, G, L et M. Dans la preuve qui suit, on va considérer un chemin de longueur maximale. Il n'y en a qu'un dans notre exemple, c'est $ch = (A, B, C, D, F, G, E, K, J, I, H)$.
Et ses extrémités A et H ne peuvent pas être points d'articulation.

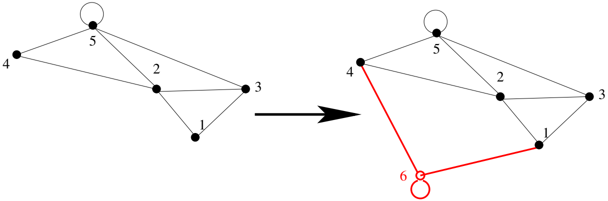
Preuve du Lemme Fondamental

Soit $ch = (x_0, x_1, ..., x_h)$ un chemin de longueur maximum.
Supposons que x_0 soit un point d'articulation.
Puisque ch est un chemin, aucune arête $\{x_i, x_{i+1}\}, 1 \leqslant i < h$ n'a pour extrémité x_0.
Donc chaque arête $\{x_i, x_{i+1}\}, 1 \leqslant i < h$ est conservée dans $G(X \setminus \{x_0\})$.
Donc les sommets $x_1, ..., x_h$ se trouvent tous dans une même composante connexe X_1 de $G(X \setminus \{x_0\})$.
Comme x_0 est point d'articulation de G, le graphe $G(X \setminus \{x_0\})$ n'est pas connexe. Il possède donc au moins une autre composante connexe : X_2.
D'après la remarque de l'exemple précédent : x_0 voit chacune des composantes connexes de $G(X \setminus \{x_0\})$, en particulier x_0 voit X_2.
Donc X_2 contient au moins un sommet y relié à x_0 dans G.
Donc $(y, x_0, x_1, ..., x_h)$ est un chemin dans G et de longueur $h + 1$ ce qui contredit l'hypothèse.
Conclusion, l'extrémité x_0 n'est pas un point d'articulation.
On prouverait de même pour l'autre extrémité x_h.

Règle de construction de $G + x$

$G = (X, E)$ un graphe non orienté.
Règle de construction : On va construire un nouveau graphe $G' = (X', E')$ et qu'on note $G + x$ en « ajoutant » un nouveau sommet x « relié » à G et tel que :

1. $x \notin X$
2. $X' = X \cup \{x\}$
3. E' est E auquel on adjoint un ensemble d'arêtes ayant toutes une extrémité x, et qui contient au moins une arête qui « relie » x à X, c'est à dire une arête de la forme $\{x, y\}, y \in X$.



Construction inductive des graphes connexes

Proposition

L'ensemble des graphes connexes est défini par le schéma inductif :

- *Base : Les graphes à un seul sommet sont dans* $\mathcal{GC}$
- *Règle : Soit* $G = (X, E) \in \mathcal{GC}$*. Tout graphe* $G + x$ *est dans* $\mathcal{GC}$*.*

Tout graphe de $\mathcal{GC}$ est connexe

Preuve par induction structurelle : soit P(G) : "G est connexe"
Montrons que P(G) est vraie $\forall G \in \mathcal{GC}$

- Base : les 2 graphes de la base sont connexes
- Règle : soit $G \in \mathcal{GC}$ tel que P(G) est vraie. G a donc une seule composante connexe. Par construction, dans tous les graphes $G + x$, x est en relation de connexité avec au moins un sommet de G. Donc $G + x$ est connexe.
- Conclusion : P(G) est vraie $\forall G \in \mathcal{GC}$

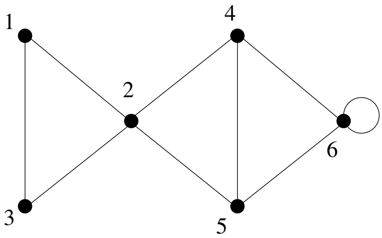
Tout graphe connexe est dans $\mathcal{GC}$

Preuve par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 1$ des graphes connexes. Soit $P(n)$: "tout graphe connexe d'ordre n est dans $\mathcal{GC}$"

- Base : $n = 1$. Tout graphe à un sommet est dans la base de $\mathcal{GC}$. Donc $P(1)$ vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit alors $G = (X, E)$ un graphe connexe d'ordre $n+1 \geqslant 2$
  - G possède un sommet x qui n'est pas point d'articulation (lemme fondamental)
  - Donc $H = G(X \setminus \{x\})$ est connexe d'ordre n
  - D'après l'**HR**, H est dans $\mathcal{GC}$
  - Or G est un graphe $H + x$, donc d'après la règle de construction de $\mathcal{GC}$, G est dans $\mathcal{GC}$. Donc $P(n+1)$ vraie
- Conclusion : on a montré P(1) vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$
  c.-à-d. que tout graphe connexe est dans $\mathcal{GC}$

Cycles

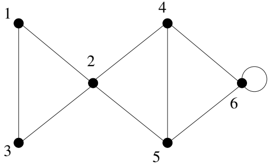
Dans ces cheminements non orientés, on visite des sommets le long d'une marche. Il s'agit de partir d'un sommet et de revenir à ce même sommet.
Dans la variante que nous utilisons (une parmi bien d'autres), un cycle est un *chemin fermé* (n'utilise pas deux fois le même sommet).



$c_1 = (1, 2, 3, 1)$ et $c_2 = (4, 6, 5, 2, 4)$ sont des cycles
$c_3 = (1, 2, 4, 5, 2, 3, 1)$ est une marche fermée

Définitions $G = (X, E)$ est un graphe non orienté.

- Un cycle est un chemin :
  - comportant au moins une arête (longueur non nulle),
  - commençant et finissant au même sommet x. C'est donc un xx-chemin,
  - dont les sommets, sauf les extrémités, sont deux à deux distincts.
- Les cycles (et les marches fermées) restent invariants par rotation et retournement : $(x_1, x_2, x_3, x_1), (x_2, x_3, x_1, x_2)$ et (x_3, x_1, x_2, x_3) sont des suites de sommets qui définissent un même cycle, à une rotation des sommets près, tout comme (x_1, x_2, x_3, x_1) et (x_1, x_3, x_2, x_1) à un retournement des sommets près.



- $c_3 = (1, 2, 4, 6, 6, 5, 2, 3, 1)$ est une marche fermée
- $c_3 = (4, 6, 6, 5, 2, 3, 1, 2, 4) = (3, 2, 5, 6, 6, 4, 2, 1, 3)$
- $(1, 2, 6, 5, 2, 1)$ est ...
- $(1, 2, 3, 1)$ cycle extrait de c_3

Remarque

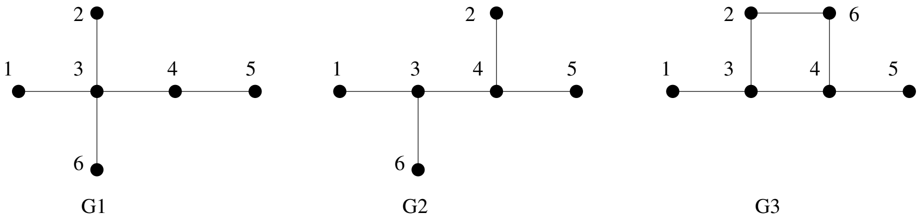
Un cycle de G est donc un sous-graphe G' de G qui est connexe et dont les sommets sont de degré 2.
La propriété est-elle caractéristique ? OUI

- Un cycle est hamiltonien s'il contient tous les sommets du graphe.
- Une marche fermée est eulérienne si elle contient toutes les arêtes du graphe. (on peut trouver le terme de *cycle eulérien*)

Sommets pendants

Définition

On appelle sommet pendant d'un graphe, tout sommet de degré 1.



Sommets pendants de graphes connexes :
1,2,5 et 6 pour G_1 et G_2, 1 et 5 pour G_3.

Lemme

Soit $G = (X, E)$ un graphe contenant n sommets avec $n \geqslant 2$, comptant $m = |E|$ arêtes.

(i) G est connexe et sans cycle.

entraîne l'existence dans G d'au moins deux sommets pendants.

Preuve : (i) : G est sans cycle donc toute marche est un chemin.
Il existe au moins un chemin de longueur non nulle, car G est connexe et $n \geqslant 2$.
Soit $w = (x_0, x_1, ..., x_h)$ un chemin de longueur maximum (longueur non nulle d'après les hypothèses).
Supposons x_0 sommet non pendant :

- x_0 a donc au moins un voisin y différent de x_1.
- y n'est pas dans w (pas de cycle),
- donc $(y, x_0, x_1, ..., x_n)$ est un chemin de longueur supérieure à celle de w.
- Contradiction.

x_0, et de même x_n, les extrémités d'un tel chemin de longueur maximum, sont deux sommets pendants.
□

Lemme

Soit $G = (X, E)$ un graphe contenant n sommets avec $n \geqslant 2$, comptant $m = |E|$ arêtes.

(ii) G est sans cycle et $m = n - 1$.

(iii) G est connexe et $m = n - 1$.

entraîne l'existence dans G d'au moins deux sommets pendants.

Preuve : (ii) : Il existe au moins un chemin de longueur non nulle, car $m = n - 1 \geqslant 1$.
le reste est identique avec la preuve de (i)
(iii) : G est connexe donc chaque sommet a un degré strictement positif.
Supposons qu'il existe au plus un sommet pendant.

- 1 sommet de degré 1, et $n - 1$ sommets de degré au moins 2 : $2\,m = \sum d(x) \geqslant 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.
- ou bien tous les sommets de degré au moins 2 : $2\,m = \sum d(x) \geqslant 2n$.
- dans tous les cas $m \geqslant n$
- Contradiction.

□

Lemme (Existence Sommets Pendants - ESP)

Soit $G = (X, E)$ *un graphe contenant* n *sommets avec* $n \geqslant 2$*, comptant* $m = |E|$ *arêtes. L'une ou l'autre des conditions qui suivent :*

(i) G *est connexe et sans cycle.*

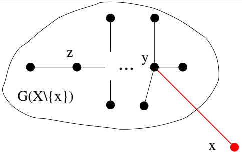
(ii) G *est sans cycle et* $m = n - 1$*.*

(iii) G *est connexe et* $m = n - 1$*.*

entraîne l'existence dans G *d'au moins deux sommets pendants.*

Lemme (Propriétés Retrait d'un Sommet Pendant - PRSP)

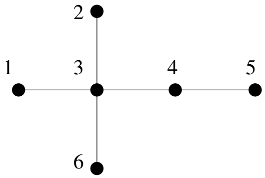
Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe, d'ordre au moins 2, et contenant un sommet pendant x. Alors $G(X \setminus \{x\})$ est connexe.
Si de plus G est sans cycle alors $G(X \setminus \{x\})$ est aussi sans cycle.



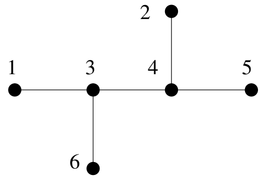
Preuve :
x a un exactement un voisin $y \neq x$ dans G.
Comme G est connexe, il existe un xz-chemin pour tout sommet z différent de x dans G : $(x, y, ..., z)$. Le successeur de x dans chacun de ces chemins est nécessairement y.
Le chemin extrait $(y, ..., z)$ ne contient pas x, c'est donc un chemin de $G(X \setminus \{x\})$.
Donc y est en relation de connexité avec chaque sommet dans $G(X \setminus \{x\})$ qui est connexe.
Un cycle de $G(X \setminus \{x\})$ est formé de sommets et d'arêtes de G. Or G est sans cycle. Un tel cycle ne peut donc exister.
$\square$

Définition

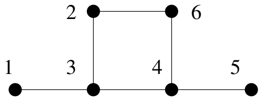
Un arbre est un graphe connexe sans cycle.
Une forêt est un graphe sans cycle.



G1



G2

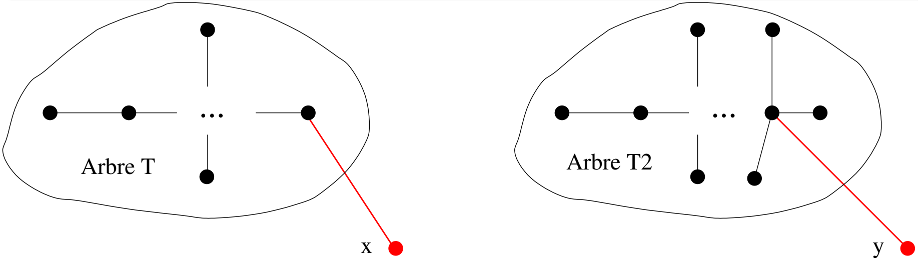


G3

Les graphes G_1 et G_2 sont des arbres. G_3 n'est pas un arbre.

Remarque

Soit $T = (X, E)$ un arbre. S'il est d'ordre au moins 2, il possède, d'après le lemme ESP(i), au moins deux sommets pendants, appelons un de ces sommets x.
Et, d'après le lemme PRSP, $T(X \setminus \{x\})$ est connexe et sans cycle. C'est donc un arbre.
D'où le schéma d'induction et les preuves par récurrence qui suivent.



Construction inductive des arbres : les arbres $T + x$ et $T_2 + y$

Construction inductive des arbres

Proposition

La classe $\mathcal{T}$ des arbres est définie par le schéma inductif :

- *Base : K_1, le graphe sans boucle à un sommet, est dans $\mathcal{T}$*
- *Règle : Si $T \in \mathcal{T}$, alors tout graphe $T + x$ dans lequel x est un sommet pendant, est dans $\mathcal{T}$.*

Preuve

Tout graphe de $\mathcal{T}$ est un arbre.

Preuve par induction structurelle : soit P(T) : "T est un arbre"
Montrons que P(T) est vraie $\forall T \in \mathcal{T}$

- Base : K_1 est un arbre, donc P(K_1) vraie
- Règle : soit $T \in \mathcal{T}$ tel que P(T) est vraie. T est donc connexe et sans cycle. Par construction, $T + x$ est connexe, et un cycle de $T + x$ devrait contenir x qui serait donc de degré au moins 2 – *impossible*.
- Conclusion : P(T) est vraie $\forall T \in \mathcal{T}$

Tout arbre T est dans $\mathcal{T}$.

Preuve par récurrence sur le nombre n de sommets. Soit $P(n)$: “tout arbre d’ordre n est dans $\mathcal{T}$”.

- Base : $n = 1$, K_1 est le seul arbre d’ordre 1, et il est dans $\mathcal{T}$. Donc $P(1)$ est vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit alors $T = (X, U)$ un arbre d’ordre $n + 1 \geqslant 2$.
  - D’après le lemme ESP(i) T contient un sommet pendant x.
  - D’après le lemme PRSP, $T(X \setminus \{x\})$ est connexe et sans cycle.
  - $T(X \setminus \{x\})$ est un arbre d’ordre n, qui est dans $\mathcal{T}$ par **HR**.
  - On en déduit que T, qui se construit à partir de $T(X \setminus \{x\})$ avec la règle du schéma d’induction est lui aussi dans $\mathcal{T}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : on a montré P(1) vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$, donc par le principe de récurrence on a $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$
  c.-à-d. que tout arbre est dans $\mathcal{T}$

Caractérisation des arbres

Théorème (Petit théorème des arbres)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T *est un arbre.*

(ii) T *est un graphe sans cycle d'ordre* $n \geqslant 1$ *et* $m = n - 1$

(iii) T *est un graphe connexe d'ordre* $n \geqslant 1$ *et* $m = n - 1$

Preuve

- $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(i) \Rightarrow (iii)$. On a directement T sans cycle et connexe. Montrons que P(T) : " T vérifie $m = n - 1$ " est vraie $\forall T \in \mathcal{T}$ en utilisant l'induction structurelle définissant les arbres :
  - Base : K_1 vérifie bien $m = n - 1$.
  - Règle : soit $T \in \mathcal{T}$ tel que P(T) vraie. On a donc $m = n - 1$, alors $T + x$ dans lequel x est pendant a $n + 1$ sommets et $m + 1$ arêtes. Donc $(m + 1) = (n + 1) - 1$.
  - Conclusion : T vérifie $m = n - 1$ $\forall T \in \mathcal{T}$

Caractérisation des arbres

Preuve

$(ii) \Rightarrow (i)$. Par récurrence sur l'ordre n de T. Soit $P(n)$: " tout graphe T sans cycle d'ordre $n \geqslant 1$ avec $m = n - 1$ est un arbre".

- Base : $n = 1$, $m = n - 1 = 0$: c'est le graphe K_1 qui est un arbre. Donc $P(1)$ est vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$
  Soit alors un graphe T sans cycle d'ordre $n' = n + 1 \geqslant 2$ et vérifiant $m' = n' - 1$.
  - D'après le lemme ESP(ii), T possède au moins un sommet pendant x.
  - D'après le lemme PRSP, $T(X \setminus \{x\})$ reste sans cycle.
  - Or $T(X \setminus \{x\})$ vérifie l'**HR**. C'est donc un arbre.
  - Et T est construit à partir de l'arbre $T(X \setminus \{x\})$ avec la règle de construction des arbres. C'est donc aussi un arbre. D'où $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Idem, en utilisant ESP(iii) au lieu de ESP(ii).

Arbre couvrant

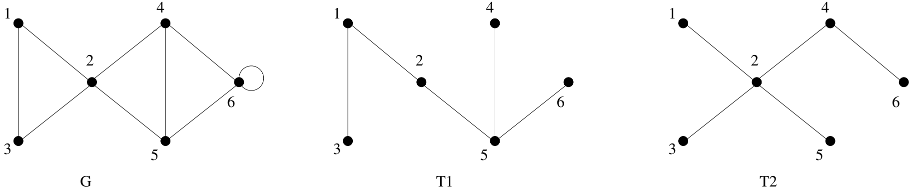


FIGURE – Deux arbres T_1 et T_2 couvrants le même graphe connexe G

Définition

Un arbre couvrant d'un graphe G est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.

Théorème

Un graphe G est connexe si et seulement si il admet un arbre couvrant.

Preuve

$\Leftarrow$: immédiat. Un arbre est connexe. $\Rightarrow$: Par récurrence sur l'ordre n de G. Soit $P(n)$: "tout graphe connexe d'ordre n admet un arbre couvrant".

- Base : $n = 1$, les deux graphes connexes à 1 sommet admettent un arbre couvrant : K_1. Donc $P(1)$ vraie.
- Récurrence : Montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)\ \forall n \geqslant 1$
  HR : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geqslant 1$
  - Soit alors G un graphe connexe d'ordre $n+1$, il possède au moins deux points qui ne sont pas d'articulation (lemme fondamental).
  - On choisit x l'un de ces points qu'on enlève. Le sous-graphe induit obtenu, $G(X \setminus \{x\})$, est connexe. On obtient ce sous-graphe en ôtant au moins une arête $\{x, y\}$, car le graphe initial est connexe.
  - Par **HR**, $G(X \setminus \{x\})$, qui est d'ordre n, possède un arbre couvrant T.
  - On ajoute à T le sommet x et une arête $\{x, y\}$ enlevée. Le graphe obtenu est tel que x est un sommet pendant. Utilisant le schéma inductif des arbres, c'est un arbre, et un sous-graphe couvrant de G. Donc $P(n+1)$ vraie
- Conclusion : $P(n)$ vraie $\forall n \geqslant 1$

Caractérisation des arbres

Théorème (Grand théorème des arbres)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *(i)* T *est un arbre.*
- *(ii)* T *est un graphe sans cycle d'ordre* $n \geqslant 1$ *et* $m = n - 1$
- *(iii)* T *est un graphe connexe d'ordre* $n \geqslant 1$ *et* $m = n - 1$
- *(iv)* T *est maximal sans cycle (maximal en terme d'arêtes pour la propriété d'être sans cycle. C'est à dire,* $T = (X, E)$ *est sans cycle et* $\forall x, y \in X, \{x, y\} \notin E \Rightarrow (X, E \cup \{\{x, y\}\})$ *contient un cycle.*
- *(v) Entre deux sommets quelconques de* T *il existe un et un seul chemin.*
- *(vi)* T *est minimal connexe (minimal en terme d'arêtes pour la propriété d'être connexe. C'est à dire,* $T = (X, E)$ *est connexe et* $\forall x, y \in X, \{x, y\} \in E \Rightarrow (X, E \setminus \{\{x, y\}\}))$ *n'est pas connexe.*

Caractérisation des arbres

Théorème (Grand théorème des arbres)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est un arbre.

(iv) T est maximal sans cycle.

(v) Entre deux sommets quelconques de T il existe un et un seul chemin.

Preuves

$(i) \Rightarrow (iv)$ Comme T est connexe. Si on ajoute l'arête $\{x, y\}$, comme il existe un xy-chemin dans T, on a un cycle dans le nouveau graphe.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Contraposée. On a 0 (non connexe) ou au moins deux xy-chemins distincts. On peut en extraire deux x_1y-chemins dont la première arête est différente (on en enlève le préfixe commun le plus long, qui est un xx_1-chemin). On recherche le premier sommet commun qui existe. On construit alors un cycle. Non connexe ou cycle donc pas maximal sans cycle.

Caractérisation des arbres

Théorème (Grand théorème des arbres)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *T est un arbre.*

(v) *Entre deux sommets quelconques de T il existe un et un seul chemin.*

(vi) *T est minimal connexe.*

Preuves

$(v) \Rightarrow (vi)$ Contraposée. On enlève l'arête $\{x, y\}$ et le graphe reste connexe. Il existe donc un xy-chemin, ne contenant pas $\{x, y\}$. On aurait alors dans le graphe deux xy-chemins.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Soit $T = (X, E)$. Si T a un cycle, alors soit $\{x, y\}$ une arête de ce cycle. Le graphe $(X, E \setminus \{\{x, y\}\})$ reste connexe, donc T n'a pas cycle. Donc T est un arbre.