Modèles de calcul

Université de Montpellier

TD 1 : rappels sur les Langages

Rappels sur la terminologie :
Un **alphabet** Σ est un ensemble de **lettres**. Par exemple, $\Sigma = \{0, 1\}$ est l'alphabet du code binaire.
Un **mot** est une concaténation de **lettres**. Par exemple, 0011 est un mot sur $\Sigma = \{0, 1\}$, de longueur 4.
L'ensemble des mots possibles que l'on peut fabriquer à partir d'un alphabet Σ se note Σ^*. Il comprend des mots de longueur 1, qui sont composés d'une seule lettre, et des mots d'une longueur quelconque n qui peut parcourir $\mathbb{N}$. Il comprend aussi le mot vide ε qui est de longueur 0.
Un **langage** L sur un alphabet Σ est un sous-ensemble de Σ^* .
Par exemple, on peut définir L comme étant le langage des mots de Σ^* qui sont de longueur impaire.
Le langage Français est un (très petit) sous-ensemble des mots que l'on peut fabriquer avec les 26 lettres de l'alphabet latin.

Exercice 1 Notations

Auteurs : G. Lafitte, B.Durand.
Soient w un mot et a une lettre sur $\Sigma = \{a, b\}$. On note $|w|_a$ le nombre d'occurrences de a dans w. Écrivez la liste des mots appartenant à chacun des langages suivants :

1. $\{w$ tels que $|w|_a < 3\} \cap \{a, aa, aaa, aaaa, abaa, bbbb, aabbbbb\}$
2. $\{w$ tels que $|w| < 3\} \cup \{a, aa, aaa, aaaa, abaa, bbbb, aabbbbb\}$
3. $\{w$ tels que $|w|_a < 3\} \cap \{w$ tels que $|w|_b < 2\}$
4. $\{w$ tels que $|w|_a = |w|_b\} \cap \{w$ tels que $|w| < 5\}$
5. $\{w$ tels que $|w|_a > 5\} \cap \{w$ tels que $|w| < 3\}$
6. $\{w$ tels que $|w| < 1\}$

Exercice 2 Préfixes, suffixes et facteurs

Auteur : P. Janssen.
Modifié par : V. Prince
Rappels sur les notions :
Un mot x est dit **préfixe d'un mot** y s'il existe un mot u tel que $y = x.u$ où . est l'opération de concaténation.
Un mot x est dit **suffixe d'un mot** y s'il existe un mot v tel que $y = v.x$.
Un mot x est dit **facteur d'un mot** y s'il est préfixe ou suffixe de y ou s'il existe deux mots z et t tels que $y = z.x.t$.

1. Dans le mot $baabbabaab$ donnez :
   1. tous les préfixes
   2. tous les suffixes
   3. le plus long mot, hormis le mot lui-même, à la fois préfixe et suffixe
   4. tous les facteurs qui ne sont ni préfixe ni suffixe
2. Quel est le nombre de préfixes, suffixes, facteurs de *facteur* ?

Exercice 3 Concaténation

Auteurs : G. Lafitte, B. Durand
Rappel sur les notations :
Soit Σ un alphabet. On note $u\Sigma^*$ l'ensemble des mots de la forme $u.v$ où $v \in \Sigma^*$,c'est-à-dire l'ensemble des mots qui ont pour préfixe u.

1. Laquelle des inclusions suivantes est-elle vraie pour tous mots x et y, lorsque x est un préfixe de y (noté $x \prec y$) ? Faire une preuve.

$$x\Sigma^* \subseteq y\Sigma^*$$
$$y\Sigma^* \subseteq x\Sigma^*$$

2. Pour l'autre inclusion, déterminer pour quels x et y elle reste vraie.
3. Montrez que $\varepsilon \in v\Sigma^*$ **si et seulement si** v est le mot vide.

Exercice 4 Palindromes

Auteurs : G. Lafitte, B.Durand
Un mot est un **palindrome** si l'ordre des lettres reste le même, qu'on le liste de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, aa et $abaaba$ sont des palindromes, tandis que ab et $ababab$ n'en sont pas.

On appelle ***miroir*** l'opération qui renverse l'ordre des lettres du mot. On note $\bar{u}$ le miroir de u. On définit cette notion plus formellement par $\bar{\epsilon} = \epsilon$ et $\forall a \in \Sigma, \forall u \in \Sigma^*,\ \overline{a.u} = \bar{u}.a$. Montrez que $\overline{x.y} = \bar{y}.\bar{x}$.

Montrez que tout palindrome non-vide de longueur paire contient deux fois successivement la même lettre. Par exemple, $abaabbaaba$ contient bb. On proposera deux preuves différentes, une si l'alphabet a deux lettres et une autre pour un alphabet quelconque.

Exercice 5 Palindromes périodiques

Auteurs : G. Lafitte, B.Durand
Un mot w est **périodique** s'il est la répétition d'un autre mot u un certain nombre de fois. Le mot u est appelé une **période** de w. Par exemple, $ababab$ est périodique de période ab ; tandis que $ababa$ n'est pas périodique.

Montrez qu'un palindrome est périodique **si et seulement si** il admet un palindrome comme période.

Exercice 6 Langages Palindromes

Auteur : P. Janssen
Un langage L est un **langage palindrome** si et seulement si $\forall m \in L$ on a$\overline{m} \in L$ où $\overline{m}$ désigne le mot image miroir de m.

1. $\{aba; abb; bba; aabab; babaa; aaaaa\}$est-il un langage palindrome ?
2. L'ensemble des mots ne contenant pas le facteur aab est-il un langage palindrome ?
3. L'union de 2 langages palindromes est-elle un langage palindrome ?
4. Montrez par récurrence que si L est un langage palindrome $L^k(k \in N)$est également palindrome.
   Rappel : L^k est $LxLx....L$ k fois, où x est le produit (ou la concaténation) sur les langages.
   Par exemple, un mot u appartient à LxL noté L^2, s'il existe v de L et w de L tels que $u = v.w$.

Exercice 7 Sans carrés

Auteurs : G. Lafitte, B. Durand
Un mot est un **carré** s'il peut s'écrire $u\,u$, où u est un mot. Par exemple, le mot $abaaba$ est un carré car il peut s'écrire $aba\,aba$, tandis que bab n'est pas un carré. Un mot est **sans carré** s'il ne contient aucun sous-mot carré non-vide.

1. Le mot vide est-il un carré ?
2. Le mot vide est-il sans carré ?
3. Soit $\Sigma = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres. Construisez le plus long mot sur Σ sans carré.
4. Soit $T = \{a, b, c\}$ un alphabet à trois lettres. Tentez de construire le plus long mot sur T sans carré.

Exercice 8 Commutativité

Auteurs : G. Lafitte, B. Durand
Modifié par : V. Prince
On observe que la concaténation n'est pas une opération commutative. En d'autres termes, il peut arriver que $u\,v \neq v\,u$ pour certains mots u, v.

1. Trouvez deux mots distincts, u et v, tels que $u\,v = v\,u$.
2. Trouvez un mot x tel que, pour tout mot y, $x\,y = y\,x$.
3. On travaille sur un alphabet Σ. Soit v un mot de Σ^* et deux mots de longueur 1, a et b, également dans Σ^*. Montrer que si $av = vb$ alors $a = b$ et v est une puissance de a c'est-à-dire que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $v = a^p$.
   On peut généraliser ensuite pour n'importe quel mot, mais la démonstration est plus délicate. Pour ceux qui voudraient la faire, voici la question :
   Montrez que, si z et t sont deux mots non vides tels que $z\,t = t\,z$, alors les mots z et t sont puissance d'un même mot.