Master 1 Informatique 2022-2023

Examen
Master 1 Informatique
UE HAI718I
Probabilités, statistiques
Mardi 10 janvier 2023

<u>1h00 - Notes de cours, TD et TP autorisés</u>

A) Modélisation de densités de probabilité (6 pts)

Soit les 3 distributions *H1(x)*, *H2(x)* et *H3(x)*, toutes composées de 100 évènements, représentant les occurrences pour *x* compris entre 0 et 31 :

H1(x) = {0 3, 1 2, 2 3, 3 2, 4 4, 5 3, 6 2, 7 4, 8 2, 9 2, 10 3, 11 4, 12 2, 13 3, 14 4, 15 3, 16 5, 17 3, 18 4, 19 4, 20 3, 21 3, 22 5, 23 3, 24 3, 25 3, 26 4, 27 3, 28 3, 29 3, 30 2, 31 3}

H2(x) = {0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 0, 6 1, 7 2, 8 3, 9 6, 10 18, 11 40, 12 18, 13 6, 14 3, 15 2, 16 1, 17 0, 18 0, 19 0, 20 0, 21 0, 22 0, 23 0, 24 0, 25 0, 26 0, 27 0, 28 0, 29 0, 30 0, 31 0}

H3(x) = {0 0, 1 0, 2 0, 3 0, 4 0, 5 1, 6 2, 7 4, 8 6, 9 10, 10 17, 11 20, 12 17, 13 10, 14 6, 15 4, 16 2, 17 1, 18 0, 19 0, 20 0, 21 0, 22 0, 23 0, 24 0, 25 0, 26 0, 27 0, 28 0, 29 0, 30 0, 31 0}

1) A partir de ces 3 distributions, calculer et tracer les densités de probabilité (ddp) correspondantes *f1(x)*, *f2(x)* et *f3(x)*.
2) A partir de la fonction générique $f(x) = C.exp(-K|x|^{\alpha})$ en déduire la valeur de α la plus pertinente pour chacune des ddp *f1(x)*, *f2(x)* et *f3(x)*. Pour rappel, $\alpha = 0$: distribution uniforme ; $\alpha = 1$: distribution Laplacienne ; $\alpha = 2$: distribution Gaussienne.
3) Approcher la ddp *f2(x)* par une distribution Gaussienne en calculant *moy2* et *sigm2*, correspondant à la valeur moyenne et l'écart type (donner la formule obtenue). Tracer cette distribution sur la courbe représentant *f2(x)*.
4) Approcher la ddp *f3(x)* par une distribution Gaussienne en calculant *moy3* et *sigm3*, correspondant à la valeur moyenne et l'écart type (donner la formule obtenue). Tracer cette distribution sur la courbe représentant *f3(x)*.
5) Qu'en déduisez-vous ? Comment mesurer la distance ou la divergence entre une ddp et distribution Gaussienne qui l'approche ?

B) Mélange de 2 Gaussiennes (4 pts)

Soit la densité de probabilité (ddp) suivante *f(x)* représentant les probabilités pour *x* compris entre 0 et 31 :

H(x)= {0 0, 1 0, 2 0.01, 3 0.02, 4 0.05, 5 0.06, 6 0.03, 7 0.04, 8 0.06, 9 0.1, 10 0.15, 11 0.17, 12 0.14, 13 0.06, 14 0.05, 15 0.03, 16 0.02, 17 0.01, 18 0, 19 0, 20 0, 21 0, 22 0, 23 0, 24 0, 25 0, 26 0, 27 0, 28 0, 29 0, 30 0, 31 0}

1) Tracer f(x)
2) En considérant que *f(x)* est un mélange de 2 gaussiennes, indiquer la valeur des 2 modes (valeurs maximales) et proposer une valeur de seuil séparant les 2 modes.
3) Pour chacun des modes, calculer la valeur moyenne et l'écart type $\mu 1$, $\sigma 1$, $\mu 2$, $\sigma 2$.
4) Par rapport aux probabilités par mode ($\beta 1$ et $\beta 2$), proposer un modèle de mélange de 2 Gaussiennes - paramètres à introduire $\mu 1$, $\sigma 1$, $\mu 2$, $\sigma 2$ et $\beta 1$ (sachant que $\beta 2 = 1- \beta 1$).

William PUECH et Konstantin TODOROV Université Montpellier william.puech@lirmm.fr

HAI718 Probabilité et statistiques

Examen session 2
Mars 2023

Exercice 1 *Dans une urne se trouvent 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement deux boules sans remise. Calculer et comparer les probabilités des deux événements suivants :*
— *Tirer deux boules de même couleur*
— *Tirer deux boules de couleurs différentes*

On suppose que $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ (Loi normale centrée réduite).

Exercice 2 *Calculer les probabilités suivantes :* $P(U < 1.5)$; $P(U > -1.5)$; $P(-1.5 < U < 1.5)$

Exercice 3 *Trouver la valeur de* u *telle que :* $P(U > u) = 0.5$; $P(U < u) = 0.5$; $P(U < u) = 0.99$;

On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 5^2)$ (Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).

Exercice 4 *Calculer les probabilités suivantes :* $P(X < 10)$; $P(4 < X < 10)$

Exercice 5 *Trouver la valeur de* x *telle que :* $P(X < x) = 0.95$; $P(3 - x < X < 3 + x) = 0.95$

Exercice 6 *Soit* $X_1, \ldots, X_n$ n *variables aléatoires normales* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *et indépendantes. On note* $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *la moyenne empirique. Quelle est la loi de* $\bar{X}$ *?*

Exercice 7 *Appliquer le théorème de la limite centrale au cas de* n *variables indépendantes de Bernoulli* $Be(p)$*. Que vaut* $\bar{X}$ *? En déduire une approximation de la loi binomiale par une loi normale.*

Exercice 8 *Dans le cadre d'un test statistique paramétrique, donner les définitions du risque de première espèce, du risque de deuxième espèce et de la puissance du teste. Accompagner votre réponse par des dessins montrant les courbes des densités de l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative.*

HAI718 Probabilité et statistiques

Contrôle - 2022
Durée de l'épreuve : 1h

Exercice 1

Le problème de l'ascenseur
Un ascenseur peut supporter une charge de 1000kg. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a un poids, en kilos, qui obéit à une loi normale de moyenne $m = 75kg$ et d'écart-type $\sigma = 4kg$. On veut savoir quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-6}.

1. *Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n représentant le poids de n personnes autorisées à monter dans l'ascenseur ?*
2. *Pour quelles valeurs de t a-t-on $P(T > t) \leq 10^{-6}$ où T suit une loi normale centrée réduite ?*
3. *Quelle est alors la condition que doit vérifier n pour que le risque de surcharge soit $\leq 10^{-6}$?*
4. *Indiquer une possibilité de solution de cette équation en posant $x = \sqrt{n}$.*

Tests statistiques

Exercice 2

On tire un échantillon de taille n d'une population avec une loi mère à moyenne μ et variance σ^2. Proposer une statistique pour faire un test sur la moyenne de cet échantillon et donner sa moyenne et sa variance.

Exercice 3
Les tests statistiques paramétriques permettent de (une seule réponse possible) :

1. *comparer la moyenne d'un échantillon à une valuer théorique*
2. *calculer des probabilités sous la loi de Student*
3. *démontrer empiriquement le théorème central limite*

Exercice 4

L'erreur de première espèce (une seule réponse possible) :

1. *est dénotée par β*
2. *est définie comme la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse*
3. *est définie comme la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est craie*