Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Partiel de calculabilité - 2023
11 octobre 2023

Durée 1h30
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable, appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Dans tout ce qui suit, comme dans le cours, le symbole $\prec$ désigne la *réduction many-one* ; les ensembles considérés sont des ensembles d'entiers, qu'ils contiennent des données ou des programmes.

Exercice 1 énumérations

1. Montrez que $\mathbb{K}$ est énumérable et qu'un ensemble A est énumérable si et seulement si $A \prec \mathbb{K}$.
2. Soit g une fonction récursive totale croissante (au sens large) et tendant vers l'infini. Montrez que si un ensemble A admet une fonction d'énumération f totale qui vérifie $\forall x\ f(x) \geq g(x)$, alors
    1. A est infini
    2. f peut être remplacée par une fonction récursive f', totale et *croissante* qui énumère aussi A
    3. A est récursif

Exercice 2 réductions

Soit A l'ensemble des programmes qui convergent sur au moins une entrée et, sur toutes les entrées où ils convergent donnent le même résultat, et divergent sur au moins une entrée.

1. Ecrivez A sous la forme d'une formule du type $A = \{x,\ \dots\}$.
2. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
4. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A).
5. Montrez que ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Exercice 3 points fixes

L'objectif de cet exercice est de montrer que étant donné un programme a, il existe une procédure qui trouve automatiquement d'autres programmes qui font la même chose. Bien sûr, si on fixe le langage de programmation c'est évident, il suffit d'ajouter des commentaires ou des parties qui ne servent à rien. On cherche donc ici à trouver un programme p qui s'arrête toujours, donne des sorties toutes distinctes qui calculent la même chose que a.

1. Soit la fonction constante partout définie f_0 qui à une entrée quelconque associe a. Quelle(s) fonction(s) les points fixes de f_0 calculent-ils ?

On choisit un point fixe arbitraire de f_0 comme valeur pour $p(0)$ (on écrit $p(0)$ au lieu de $[p|0]$ pour alléger les notation).

2. Donnez deux programmes b_1 et b_2 qui calculent des fonctions différentes. En déduire qu'il existe un programme b qui calcule une fonction différente de $[a|\cdot]$. Soit la fonction partout définie f_1 qui à $p(0)$ associe b et à une entrée différente de $p(0)$ associe a. Quelle(s) fonction(s) calculent les points fixes de f_1 ?
3. Définissez $p(1) \dots p(n) \dots$ et montrez que p est récursive totale, donne des valeurs toutes différentes et répond à l'objectif de l'exercice.
4. Le programme p est-il obtenu récursivement à partir de a et pourquoi ?

Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Partiel de calculabilité - 2022
19 octobre 2022

Durée 1h30
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Dans tout ce qui suit, comme dans le cours, le symbole $\prec$ désigne la *réduction many-one* ; les ensembles considérés sont des ensembles d'entiers, qu'ils contiennent des données ou des programmes.

Exercice 4 Klenee

L'objectif de cet exercice est de montrer que étant donné un programme a, il existe une procédure qui trouve automatiquement d'autres programmes qui font la même chose. Bien sûr, si on fixe le langage de programmation c'est évident, il suffit d'ajouter des commentaires ou des parties qui ne servent à rien. On cherche donc ici à trouver un programme p qui s'arrête toujours, donne des sorties toutes distinctes qui calculent la même chose que a.

1. Soit la fonction constante partout définie f_0 qui à une entrée quelconque associe a. Quelle(s) fonction(s) les points fixes de f_0 calculent-ils ?

On choisit un point fixe arbitraire de f_0 comme valeur pour $p(0)$ (on écrit $p(0)$ au lieu de $[p|0]$ pour alléger les notation).

2. Donnez deux programmes c_1 et c_2 qui calculent des fonctions différentes. En déduire qu'il existe un programme c qui calcule une fonction différente de $[a|\cdot]$. Soit la fonction partout définie f_1 qui à $p(0)$ associe c et à une entrée différente de $p(0)$ associe a. Quelle(s) fonction(s) calculent les points fixes de f_1 ?
3. Définissez $p(1) \dots p(n) \dots$ et montrez que p est récursive totale, donne des valeurs toutes différentes et répond à l'objectif de l'exercice.
4. Le programme p est-il obtenu récursivement à partir de a et pourquoi ?

Exercice 5 à propos de $\mathbb{K}$

1. Montrez que $\mathbb{K}$ est énumérable et qu'un ensemble B est énumérable si et seulement si $B \prec \mathbb{K}$.
2. Soit g une fonction récursive totale croissante (au sens large) et tendant vers l'infini. Montrez que si un ensemble B admet une fonction d'énumération f totale qui vérifie $\forall x \ f(x) \geq g(x)$, alors
    1. B est infini
    2. f peut être remplacée par une fonction récursive f', totale et *croissante* qui énumère aussi B
    3. B est récursif

Exercice 6 Rice etc.

Soit A l'ensemble des programmes qui convergent sur au moins une entrée et, sur toutes les entrées où ils convergent donnent des résultats tous différents, et divergent sur au moins une entrée.

1. Ecrivez A sous la forme d'une formule du type $A = \{x, \ \dots \}$.
2. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
4. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A).
5. Montrez que ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.