Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Examen - 2022-2023
10 janvier 2023

Durée 2h
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Dans tout ce qui suit, comme dans le cours, le symbole $\prec$ désigne la *réduction many-one* ; les ensembles considérés sont des ensembles d'entiers, qu'ils contiennent des données ou des programmes.

Exercice 1 mise en jambes

1. Montrez que $\mathbb{K}$ et son complémentaire $\overline{\mathbb{K}}$ ne sont pas comparables par $\prec$.
2. Montrez que si un ensemble est énumérable par une fonction récursive totale strictement croissante, alors il est infini et récursif.

Exercice 2 réductions

Soit A l'ensemble des programmes x dont l'ensemble de convergence (*i. e.* $\{y, [x|y] \downarrow\}$) est un ensemble récursif.

1. Un ensemble de convergence peut-il être récursif ? non récursif ? énumérable ? non énumérable ? Pour chaque cas, donnez un exemple si votre réponse est oui, une justification si la réponse est non.
2. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
4. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$.
5. Montrez que ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Exercice 3 la cohérence et la preuve

Soit T une théorie sur le langage $\mathcal{L}_T$ et f une formule de $\mathcal{L}_T$.

1. Montrez que $T \vdash f$ si et seulement si $T \cup \{\neg f\} \vdash f \wedge \neg f$.
2. Montrez que si T est cohérente, alors il en est de même d'au moins une des extensions $T \cup \{f\}$ et $T \cup \{\neg f\}$

Exercice 4 cours - incomplétude

On se place dans une théorie énumérable assez puissante (au sens du cours) qu'on note T sur le langage $\mathcal{L}_T$. L'exercice consiste à re-prouver des résultats du cours. Répondre "c'est traité dans le cours" ne rapporte pas de points.

1. Énoncez un lemme de codage pour la fonction *step* de la calculabilité puis utilisez-le pour montrer qu'il existe une formule de $\mathcal{L}_T$ (qu'on note $f(x)$) qui exprime $[x|0] \downarrow$.
2. Montrez qu'il existe a tel que $T \nvdash f(a)$ et $T \nvdash \neg f(a)$. Pour la suite on en choisit un, noté a_0.
3. Est-ce que $[a_0|0] \downarrow$ (au sens du cours de calculabilité) ?
4. Expliquez où et sous quelle forme la cohérence de T a été utilisée pour prouver le résultat de la question précédente.
5. Montrez qu'il existe une formule g, logiquement équivalente à la cohérence de T, telle que $T \nvdash g$ et $T \nvdash \neg g$.