Exercice 1 Réductions On considère $A = \{x \mid \forall y\ [x|y]\downarrow\ \}$ — en d'autres termes A est l'ensemble des (codes de) programmes qui convergent pour chaque entrée.

1(a) Montrer que A n'est pas récursif.

L'exercice traite de l'ensemble A, qui est l'ensemble des programmes informatiques dont la fonction qu'ils calculent convergent pour chaque entrée. En d'autres termes, A contient les codes de programmes qui ne provoquent pas de boucle infinie pour toutes les entrées possibles.

Pour montrer que A n'est pas récursif, on utilise le théorème de Rice. Ce théorème stipule qu'une propriété non triviale (c'est-à-dire, une propriété qui ne s'applique ni à tous les programmes ni à aucun programme) des fonctions calculées par des programmes ne peut pas être décidée de manière récursive.

Dans ce cas, la propriété non triviale est que la fonction calculée par un programme doit être totale, c'est-à-dire définie pour toutes les entrées. Donc, A est l'ensemble des programmes qui calculent une fonction ayant cette propriété.

Le théorème de Rice nous dit que si A n'est ni l'ensemble de tous les programmes possibles (N) ni l'ensemble de programmes qui ne font rien (⊥), alors A n'est pas récursif.

Puisque la fonction identité (Id : x → x) appartient à A (car elle est totale) et que la fonction qui provoque une boucle infinie (⊥ : x → ⊥) n'appartient pas à A (car elle n'est pas totale), le théorème de Rice nous permet de conclure que A n'est pas récursif.

1(b) Montrer que $K < A$ ($K = \{x \mid [x|x]\downarrow\ \}$)

L'objectif est de montrer que l'ensemble K (qui contient les codes de programmes dont la fonction qu'ils calculent converge pour eux-mêmes) est réductible à l'ensemble A (qui contient les codes de programmes dont la fonction qu'ils calculent converge pour toutes les entrées).

Pour ce faire, nous devons trouver une fonction calculable totale f telle que :
x appartient à K si et seulement si f(x) appartient à A.

Nous allons utiliser une fonction de réduction pour accomplir cela. Considérons un programme a, défini comme suit :

a⟨x,z⟩ : si [x|x]↓ alors z

La fonction S1⟨a, x⟩, qui est déterminée par a (nous fixons déjà a et x), peut avoir deux valeurs possibles :

> Soit S1⟨a, x⟩ = Id : z → z lorsque [x|x] converge (c'est-à-dire, se termine).
> Soit S1⟨a, x⟩ = ⊥ : z → ⊥ lorsque [x|x] diverge (c'est-à-dire, ne se termine pas).

Maintenant, nous allons définir notre fonction de réduction f comme suit :
f(x) = S1⟨a, x⟩

Il est important de noter que la réduction est une fonction calculable totale, car elle associe le code d'un programme (S1⟨a, x⟩) à une entrée x. Cela ne signifie pas que S1⟨a, x⟩ est un programme total, mais seulement que f(x) est calculable pour toutes les valeurs de x.

Maintenant, montrons que cette réduction envoie K dans A :

- Si x appartient à K, cela signifie que [x|x] converge pour x. Par conséquent, S1⟨a, x⟩ = Id, car nous choisissons la branche Id lorsque [x|x] converge. Donc, S1⟨a, x⟩ appartient à A.
- Si S1⟨a, x⟩ appartient à A, cela signifie que S1⟨a, x⟩ = Id, car nous savons que la branche ⊥ n'appartient pas à A. Cela implique que [x|x] converge pour x, c'est-à-dire que x appartient à K.

En conclusion, notre réduction f envoie l'ensemble K dans l'ensemble A, ce qui signifie que K est réductible à A.

1(c) Montrer que $K < \bar{A} = \{x \mid \exists y\ [x|y]\uparrow\}$

L'objectif ici est de montrer que l'ensemble K (qui contient les codes de programmes dont la fonction qu'ils calculent converge pour eux-mêmes) est réductible à l'ensemble complémentaire de A (c'est-à-dire, A¯, qui contient les codes de programmes dont la fonction qu'ils calculent ne converge pas pour toutes les entrées).

Pour y parvenir, nous allons utiliser une réduction similaire à celle de la partie précédente. Cette fois, nous voulons que la fonction f(x) ne converge pas pour toutes les entrées lorsque [x|x] converge.

Définissons un programme b comme suit :

b⟨x,z⟩ : si step(x, x, z) = 0 alors 0 else ⊥

Maintenant, regardons le comportement de S1⟨b, x⟩, qui est déterminé par le programme b (comme précédemment, nous fixons déjà b et x). S1⟨b, x⟩ peut avoir deux valeurs possibles :

Si [x|x] converge (c'est-à-dire, se termine), alors S1⟨b, x⟩ est la fonction z → z tant que z est inférieur à t (où t est le nombre d'étapes nécessaires pour que [x|x] converge), puis devient ⊥ dès que z atteint ou dépasse t. Dans ce cas, S1⟨b, x⟩ n'appartient pas à A (A¯), car il ne converge pas pour toutes les entrées lorsque [x|x] converge.

Si [x|x] ne converge pas (c'est-à-dire, diverge), alors S1⟨b, x⟩ est simplement la fonction identité z → z. Dans ce cas, S1⟨b, x⟩ appartient à A (car il converge pour toutes les entrées) et n'appartient pas à A¯.

Maintenant, montrons que cette réduction envoie K dans A¯ (le complémentaire de A) et que son complémentaire K¯ est envoyé dans A (A¯) :

- Si x appartient à K, cela signifie que [x|x] converge pour x. Dans ce cas, S1⟨b, x⟩ n'appartient pas à A (A¯), car il ne converge pas pour toutes les entrées lorsque [x|x] converge. Donc, S1⟨b, x⟩ appartient à A¯.

- Si x n'appartient pas à K, cela signifie que [x|x] ne converge pas pour x. Dans ce cas, S1⟨b, x⟩ appartient à A, car il converge pour toutes les entrées (étant simplement la fonction identité). Donc, S1⟨b, x⟩ n'appartient pas à A¯.

En conclusion, notre réduction f envoie l'ensemble K dans l'ensemble complémentaire de A (A¯), et son complémentaire K¯ est envoyé dans A (A¯). Cela signifie que K est réductible à A¯.

1(d) En déduire que ni A ni $\bar{A}$ ne sont énumérables.

Pour montrer que ni A ni A¯ (complémentaire de A) ne sont énumérables, nous allons utiliser les réductions que nous avons définies dans les questions précédentes.

Nous savons que K est réductible à A, c'est-à-dire que nous pouvons transformer les éléments de K en éléments de A en utilisant une fonction de réduction. Cela signifie que si A était énumérable, alors K le serait aussi, car nous pouvons simplement énumérer les éléments de A en utilisant la fonction de réduction pour trouver les éléments correspondants de K.
De même, nous avons montré que K est réductible à A¯ (le complémentaire de A). Donc, si A¯ était énumérable, alors K le serait aussi, car nous pouvons utiliser la même fonction de réduction pour énumérer les éléments de K.

Maintenant, supposons par l'absurde que A était énumérable. Cela signifierait que K est énumérable, ce qui est impossible car K n'est pas énumérable (sinon K serait récursif, ce qui n'est pas le cas).

De même, supposons par l'absurde que A¯ était énumérable. Cela signifierait également que K est énumérable, ce qui est encore impossible.

Par conséquent, ni A ni A¯ ne peuvent être énumérables, car cela conduirait à l'énumérabilité de K, ce qui contredit les propriétés de K.