Entrainement Logique GL IA

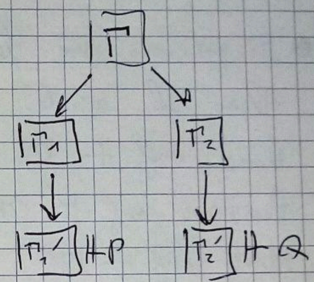
Exercice 1.6.1 : Montrer que pour tout monde Γ

① $\Gamma \Vdash (\Box X \equiv \neg \Diamond \neg X)$

Supposons $\Gamma \Vdash \Box X$, alors pour tout Δ, un monde accessible par Γ, on a $\Delta \Vdash X$. Or, $\Delta \Vdash X \equiv \Delta \nVdash \neg X$.

On a donc que pour tout monde accessible Δ par Γ, $\Delta \nVdash \neg X$ donc, il n'existe aucun Δ tel que "$\Delta \Vdash \neg X$" donc $\Gamma \nVdash \Diamond \neg X$ donc $\Gamma \Vdash \neg \Diamond \neg X$.

Exercice 1.7.3 : Montrer que $\Gamma \nVdash (\Diamond \Box P \wedge \Diamond \Box Q) \Rightarrow \Diamond \Box (P \wedge Q)$ sur l'exemple 1.7.4.



$\Gamma \nVdash (\Diamond \Box P \wedge \Diamond \Box Q) \Rightarrow \Diamond \Box (P \wedge Q)$

$\Gamma \nVdash \neg (\Diamond \Box P \wedge \Diamond \Box Q) \vee \Diamond \Box (P \wedge Q)$

$\Gamma \Vdash (\Diamond \Box P) \wedge (\Diamond \Box Q) \wedge \neg \Diamond \Box (P \wedge Q)$

On doit donc vérifier pour Γ si

$$(\Gamma \Vdash \Diamond \Box P) \wedge (\Gamma \Vdash \Diamond \Box Q) \wedge (\Gamma \Vdash \neg \Diamond \Box (P \wedge Q))$$

Est-ce que $\Gamma \Vdash \Diamond \Box P$?

$\equiv \Gamma_1 \Vdash \Box P$ ou $\Gamma_2 \Vdash \Box P$

$\equiv \Gamma_1' \Vdash P$ ou $\Gamma_2' \Vdash P$. ce qui est vrai car $\Gamma_1' \Vdash P$

Est-ce que $\Gamma \Vdash \Diamond \Box Q$?

$\equiv \Gamma_1 \Vdash \Box Q$ ou $\Gamma_2 \Vdash \Box Q$

$\equiv \Gamma_1' \Vdash Q$ ou $\Gamma_2' \Vdash Q$ ce qui est vrai car $\Gamma_2' \Vdash Q$

Est-ce que $\Gamma \Vdash \neg \Diamond \Box (P \wedge Q)$

$\equiv$ Negation $(\Gamma \Vdash \Diamond \Box (P \wedge Q))$

$\equiv \Gamma_1 \Vdash \Box (P \wedge Q)$ ou $\Gamma_2 \Vdash \Box (P \wedge Q)$

$\equiv \Gamma_1' \Vdash P \wedge Q$ ou $\Gamma_2' \Vdash P \wedge Q$, les deux sont faux.

La formule $\Gamma \Vdash \Diamond \Box (P \wedge Q)$ est donc fausse, sa négation $\Gamma \Vdash \neg \Diamond \Box (P \wedge Q)$ est donc vrai.

La formule de cet exercice est donc vérifiée car toutes ses composantes le sont.

Exercice 15 : Montrez que le schéma $\Box A \rightarrow \Diamond A$ est valide ssi R est sérielle.

- Supposons que pour tout monde m_i, on a $m_i \Vdash \Box A \rightarrow \Diamond A$.
  On a donc $(m_i \Vdash \Box A) \Rightarrow (m_i \Vdash \Diamond A)$
  Par l'absurde, supposons qu'il existe un monde m_f tel qu'il n'existe aucun monde accessible par m_f. On a donc que $m_f \Vdash \Box A$.
  Par la propriété $(m_i \Vdash \Box A) \Rightarrow (m_i \Vdash \Diamond A)$ on a donc que $m_f \Vdash \Diamond A$.
  Cela signifie que m_f a un monde accessible m_a tel que $m_a \Vdash A$, ce qui contredit notre hypothèse. Il n'existe donc pas de tel monde m_f sans monde accessible, R est donc sérielle.

- Supposons que le schéma $\Box A \rightarrow \Diamond A$ soit invalide.
  Alors, il existe au moins un monde m_f tel que $m_f \nVdash \Box A \rightarrow \Diamond A$.
  Donc $m_f \Vdash \Box A \wedge \neg \Diamond A$ donc $m_f \Vdash \Box A$ et $m_f \nVdash \Diamond A$.
  Puisque $m_f \nVdash \Diamond A$, il n'a aucun monde accessible vérifiant $m_a \Vdash A$.
  Mais $m_f \Vdash \Box A$, donc tous ses mondes accessibles vérifient $m_a \Vdash A$.
  m_f n'a donc aucun monde accessible, R n'est donc pas sérielle.

- La propriété est donc démontré, on a bien que $\Box A \rightarrow \Diamond A \equiv$ R est sérielle.