NOTES DE COURS
PRECONDITIONNEMENT

1 Généralités

Considérons un système linéaire
$$Au = b, \tag{1}$$
où A est une matrice carrée inversible d'ordre n.
Etant donné une matrice M inversible d'ordre n, le système
$$M^{-1}Au = M^{-1}b, \tag{2}$$
admet la même solution que (1). On dira que M est la matrice de préconditionnement associée au système préconditionné (2).
La convergence d'une méthode itérative dépendra beaucoup des propriétés spectrales de la nouvelle matrice $M^{-1}A$ améliorant celles de A. Dans la pratique, on ne calcule pas la matrice inverse M^{-1}. En fait, dans les méthodes itératives de type Krylov, on a seulement besoin de connaître le produit matrice-vecteur. Lorsque le système est préconditionné, l'opération matrice-vecteur correspond à
$$w = M^{-1}Av \quad \Longleftrightarrow \quad Mw = Av.$$
Par conséquent, il faut pouvoir résoudre facilement le système
$$Mw = c.$$
Comment choisir un préconditionnement est une question fort délicate qui, à ce jour, n'a pas de solution universelle. Par contre, on peut donner quelques idées directrices qui nous guideront dans l'élaboration d'un bon préconditionneur.
Il y a deux cas extrême :
- $M = A$.
  Dans ce cas, la convergence est immédiate mais peu utile car aussi difficile à résoudre que le problème original.
- $M = I$
  Dans ce cas, on ne fait rien. La convergence n'est pas accélérée.

De ces observations, on retiendra les faits suivants :

1. M doit être le plus près possible de A, c'est-à-dire ;
   – $Sp(M^{-1}A) \cong Sp(I)$,
   – $\|M^{-1}A - I\|_2 < \epsilon$,

2. On doit respecter la structure de la matrice, par exemple, le fait que A soit symétrique.

3. Le stockage de M ne devrait pas excéder de beaucoup celui de A.

4. D'après l'étude de la convergence des méthode itératives de type Krylov, un bon choix d'un préconditionneur M doit satisfaire les conditions :
   – la matrice $M^{-1}A$ doit être presque normale,
   – les valeurs propres de $M^{-1}A$ doivent être regroupées.

2 Préconditionnement :

Préconditionnement à gauche

On dira que M est une matrice de préconditionnement à gauche si le système original (1) est transformé sous la forme :

$$M^{-1}Au = M^{-1}b.$$

Préconditionnement à droite :

De manière analogue, on dira que M est une matrice de préconditionnement à droite si le système (1) est transformé sous la forme :

$$AM^{-1}y = b.$$

Dans ce cas, la solution s'obtient en posant :

$$u = M^{-1}y.$$

Préconditionnement à gauche et à droite :

En principe, on peut combiner ces deux types de préconditionnement. Il s'agira d'avoir deux matrices inversibles M_G et M_D et d'écrire le système (1) sous la forme

$$M_G^{-1}AM_D^{-1}y = M_G^{-1}b.$$

En général, on utilise un préconditionnement à gauche. Mais il y a un cas très important où ce type de préconditionnement est nécessaire.

Supposons que la matrice A soit symétrique et définie-positive. Dans cette éventualité, on voudrait utiliser la méthode du gradient conjugué qui est adaptée à cette situation. Mais, le choix d'un préconditionnement à gauche détruit cette propriété de symétrie. Dans ce cas, on construit de la manière suivante le préconditionneur.
Soit M une matrice symétrique et définie-positive. Cette matrice admet une factorisation de Cholesky

$$M = CC^t.$$

Le système original peut s'écrire :

$$\begin{aligned} Au &= b, \\ C^{-1}AC^{-t}C^t u &= C^{-1}b, \\ C^{-1}AC^{-t}y &= C^{-1}b, \end{aligned}$$

avec $y = C^t u$ ou encore $u = C^{-t}y$.
Or la nouvelle matrice du système préconditionné $C^{-1}AC^{-t}$ est aussi symétrique et définie-positive. De plus :

$$C^{-1}AC^{-t} \sim C^{-t}C^{-1}A = M^{-1}A.$$

Donc les spectres sont égaux :

$$Sp(C^{-1}AC^{-t}) = Sp(M^{-1}A).$$

3 Types de préconditionnement

3.1 Préconditionnement par les méthodes classiques itératives

Supposons que la matrice A admet la décomposition suivante

$$A = M - N,$$

où M est inversible.
Le système linéaire $Au = b$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} Au &= b, \\ Mu &= Nu + b, \\ u &= M^{-1}Nu + M^{-1}b, \\ (I - M^{-1}N)u &= M^{-1}b. \end{aligned}$$

Les méthodes itératives classiques telles que les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation sont toutes basées sur ce type de décomposition et s'écrivent :

$$u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$$

ou encore

$$M(u_{k+1} - u_k) = b - Au_k.$$

Or $M^{-1}N = I - M^{-1}A$. Par conséquent, ceci signifie qu'une méthode itérative classique converge vers la solution d'un problème préconditionné de la forme

$$M^{-1}Au = M^{-1}b.$$

Autrement dit, la matrice M est une matrice de préconditionnement du système linéaire $Au = b$.

Voici une liste de préconditionnement basée sur cette idée. On utilisera la décomposition $A = D-E-F$ telle que définie dans le chapitre sur les méthodes itératives classiques.

1. Jacobi :
$$M = D = \text{ la diagonale de la matrice } A$$

2. SOR :
$$M = D - \omega E$$
On obtient le préconditionnement Gauss-Seidel avec $\omega = 1$. En général, si la matrice A est symétrique, la matrice M ne l'est pas. Pour cette raison, on préfère utiliser le préconditionnement SSOR.

3. SSOR :
$$M = (D - \omega E)D^{-1}(D - \omega F)$$
On notera que, si A est symétrique, la matrice M l'est aussi car $F = E^t$. Donc, ce type de préconditionnement serait adapté à l'algorithme du gradient conjugué.

4. SGS : Ce type de préconditionnement est obtenu à partir de SSOR en posant $\omega = 1$.

Remarques :

On notera que l'inversion de M se fait uniquement par des descentes et remontées triangulaires. Le préconditionnement SSOR peut aussi être interprété comme une étape de l'algorithme de relaxation dans le sens ordinaire suivi d'une étape de relaxation dans le sens contraire, i.e. $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

3.2 Préconditionnement par factorisation incomplète

Voir le document séparé.

4 Méthode GMRES préconditionné

Considérons le système linéaire $Au = b$ préconditionné par la matrice M, i.e.

$$M^{-1}Au = M^{-1}b.$$

Par définition, l'algorithme GMRES préconditionné est la méthode GMRES appliquée au système

$$M^{-1}Au = M^{-1}b.$$

Etant donné un vecteur u_0, on définit le résidu préconditionné par

$$r_0 = M^{-1}(b - Au_0).$$

En présence de préconditionnement, l'espace de Krylov correspond à

$$K_m = \mathcal{K}_m(M^{-1}A, r_0) = [r_0, M^{-1}Ar_0, (M^{-1}A)^2 r_0, \ldots, (M^{-1}A)^{m-1} r_0].$$

L'algorithme GMRES appliqué à un système préconditionné, consiste à chercher, à l'étape m, une approximation u_m de la solution dans $u_0 + K_m$ minimisant le résidu préconditionné

$$\|r_m\| = \|M^{-1}(b - A(u_m))\| = \min_{v \in K_m} \|M^{-1}(b - A(u_0 + v))\|.$$

Voici l'algorithme GMRES préconditionné

1. Evaluer le résidu initial $r_0 = M^{-1}(b - Au_0)$, $\beta = \|r_0\|_2$ et poser $v_1 = r_0/\beta$.
2. Pour $j = 1, \ldots, m$ faire :
3. Calculer $w = M^{-1}Av_j$
4. Pour $i = 1, \ldots, j$, faire :

5. $h_{i,j} = (w, v_i)$
6. $w = w - h_{i,j} v_i$
7. Fin de la boucle sur i
8. Calculer $h_{j+1,j} = \|w\|_2$ et $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$
9. Fin de la boucle sur j
10. Poser $V_m = [v_1, v_2, \ldots, v_m]$ et $\bar{H}_m = (h_{i,j})$ la matrice de dimension $(m+1) \times m$
11. Résoudre le problème de moindres carrés

$$\min_{y \in R^m} \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$$

    et poser $u_m = u_0 + V_m y_m$
12. Si le critère d'arrêt n'est pas satisfait, poser $u_0 = u_m$ et revenir à l'étape 1.

5 Méthode du gradient conjugué préconditionné

Voici l'algorithme PCG

1. Evaluer le résidu initial $r_0 = b - Au_0$, $z_0 = M^{-1} r_0$ et poser $p_0 = z_0$.
2. Pour $i = 0, \ldots,$ jusqu'à convergence, faire :
3. calculer $\alpha_i = \frac{(r_i, z_i)}{(Ap_i, p_i)}$
4. $u_{i+1} = u_i + \alpha_i p_i$
5. $r_{i+1} = r_i - \alpha_i A p_i$
6. $z_{i+1} = M^{-1} r_{i+1}$
7. $\beta_i = \frac{(r_{i+1}, z_{i+1})}{(r_i, z_i)}$
8. $p_{i+1} = z_{i+1} + \beta_i p_i$
9. Fin de la boucle sur i