

Exercices - Programmation linéaire en nombres entiers (PLNE)
2023–2024

Exercice 1

On considère le problème P de programmation linéaire en nombres entiers suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 3x + 5y \\ x + 2y \leq 3 \\ 6x + 8y \leq 15 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

1. On considère la relaxation linéaire RP du problème précédent.
 - (a) Représenter graphiquement le polyèdre des contraintes du problème RP .
 - (b) Donner en extension l'ensemble E des points à coordonnées entières du polyèdre des contraintes.
 - (c) Résoudre graphiquement le problème RP .
 - (d) En déduire un majorant de $f_{max}(E)$ (maximum de la fonction f sur l'ensemble E).
2. Résoudre le problème P initial en utilisant la méthode de séparation et évaluation du cours. Résoudre graphiquement chacun des problèmes de relaxation.

Exercice 2

On considère le problème d'optimisation linéaire en nombres entiers suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = x + 2y \\ x + 3y \leq 15 \\ 7x + 5y \leq 49 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

1. Tracer le polygone des contraintes ainsi que la droite d'équation $f(x, y) = 4$.
2. Vérifier que les points $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \frac{34}{7} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont sur le polygone des contraintes et les placer sur le graphique.
3. Calculer les coordonnées du point d'intersection I des droites d'équations respectives $x + 3y = 15$ et $7x + 5y = 49$ et placer ce point sur la figure.
4. Utiliser la méthode de séparation et évaluation pour calculer f_{max} (i.e. le maximum recherché). Utiliser la méthode graphique pour calculer la fonction h d'évaluation par excès.

Exercice 3

Résoudre les problèmes de programmation linéaire en nombres entiers suivants en utilisant la méthode de séparation et évaluation. Pour chacun des problèmes de relaxation linéaire, utiliser la méthode graphique.

1. P_1

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = x + 5y \\ x + 10y \leq 20 \\ x \leq 2 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

2. P_2

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(x, y) = 3x + y \\ 8x + 3y \leq 20 \\ 3x + 3y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

3. P_3

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3(x, y) = 8x + 5y \\ x + y \leq 6 \\ 9x + 5y \leq 45 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$