Exercices - Programmation linéaire - Algorithme du simplexe
2023–2024

Exercice 1
On veut maximiser la fonction linéaire à 2 variables suivantes : $f(x,y) = x + y$.
On suppose de plus qu'on a les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On se propose de résoudre ce problème d'optimisation linéaire tout d'abord par une méthode graphique et ensuite en utilisant l'algorithme du simplexe :

1. (Rappels semestre 4) Résoudre graphiquement le problème d'optimisation. On donnera la valeur de f maximale ainsi que les valeurs de x et de y correspondantes.

2. Algorithme du simplexe :
   On considère les deux variables supplémentaires z et t définies par $z = 2 - x + y$ et $t = 2 - \frac{1}{2}x - y$. A l'aide de ces deux variables les contraintes $x - y \leq 2$ et $\frac{1}{2}x + y \leq 2$ peuvent se réécrire respectivement $z \geq 0$ et $t \geq 0$.
   (a) Compléter les tableaux suivants :

dictionnaire 1	expressions en fonction des variables hors base
variables hors base	
variables dans la base	
f	

variable entrant dans la base	....
contraintes	
variable sortant de la base	

   (b) Terminer l'algorithme et résoudre le problème d'optimisation linéaire.
   (c) Donner dans l'ordre les sommets du polyèdre admissible qui ont été évalués par l'algorithme. Pour chacun de ces sommets donner la valeur de f .

Exercice 2
On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{cases} f(x,y) = 3x + 2y \\ 2x - y \leq 2 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

L'objectif est de maximiser la fonction f.

1. Résolution graphique :
   (a) Représenter sur un graphique clair le polygone des contraintes.
   (b) Sur le même graphique, représenter les droites $f(x,y) = 3$ et $f(x,y) = 6$.
   (c) Résoudre graphiquement le problème (donner la valeur exacte du maximum de la fonction f ainsi que les coordonnées du point où ce maximum est atteint).
2. Résoudre le problème en utilisant l'algorithme du simplexe du cours (détailler chacun des "dictionnaires").

Exercice 3
Résoudre graphiquement puis en utilisant l'algorithme du simplexe chacun des problèmes d'optimisation linéaire suivants.

$$P_1 \begin{cases} f_1(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} f_2(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 4
Résoudre graphiquement puis en utilisant l'algorithme du simplexe le problème d'optimisation linéaire suivant. Pour les dictionnaires dégénérés, utiliser la règle de Bland.

$$P_3 \begin{cases} f_3(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 - x_1 \leq 0 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 5
Résoudre en utilisant l'algorithme du simplexe les problèmes d'optimisation linéaire suivants :

$$P_4 \left\{ \begin{array}{c} f_4\left(x_1, x_2, x_3\right) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$P_5 \left\{ \begin{array}{c} f_5\left(x_1, x_2, x_3\right) = 4x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_3 \leq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$