Algorithme du simplexe

Exercice 1

① Point d'intersection $C(x_c, y_c)$ des droites d'équations

$$\begin{array}{l} x - y = 2 \\ \frac{1}{2}x + y = 2 \\ \hline \frac{3}{2}x = 4 \end{array}$$

d'où $x = \frac{8}{3}$ et $y = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ $\quad C\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Solution : $f_{max} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ pour $x = \frac{8}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$

② ⓐ

Dictionnaire 1	
variables hors base	x, y
variables dans la base	$z = 2 - x + y$ $t = 2 - \frac{1}{2}x - y$
f	$f = x + y$

La solution basique du dictionnaire 1 est $(x=0, y=0, z=2, t=2)$ pour $f=0$.

variable entrante dans la base	x
contraintes	$z \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$ $t \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x \leq 2 \Rightarrow x \leq 4$
variable sortante de la base	z

(b)

Dictionnaire 2	
variables hors-base	y, z
variables dans la base	$x = 2 + y - z$ $t = 2 - (1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z) - y$ $= 1 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z$
f	$f = 2 + y - z + y = 2 + 2y - z$

La solution basique du dictionnaire 2 est
$(x = 2, y = 0, z = 0, t = 1)$ pour $f = 2$.

variable entrante dans la base : y
variable sortante de la base : t (pas le choix)

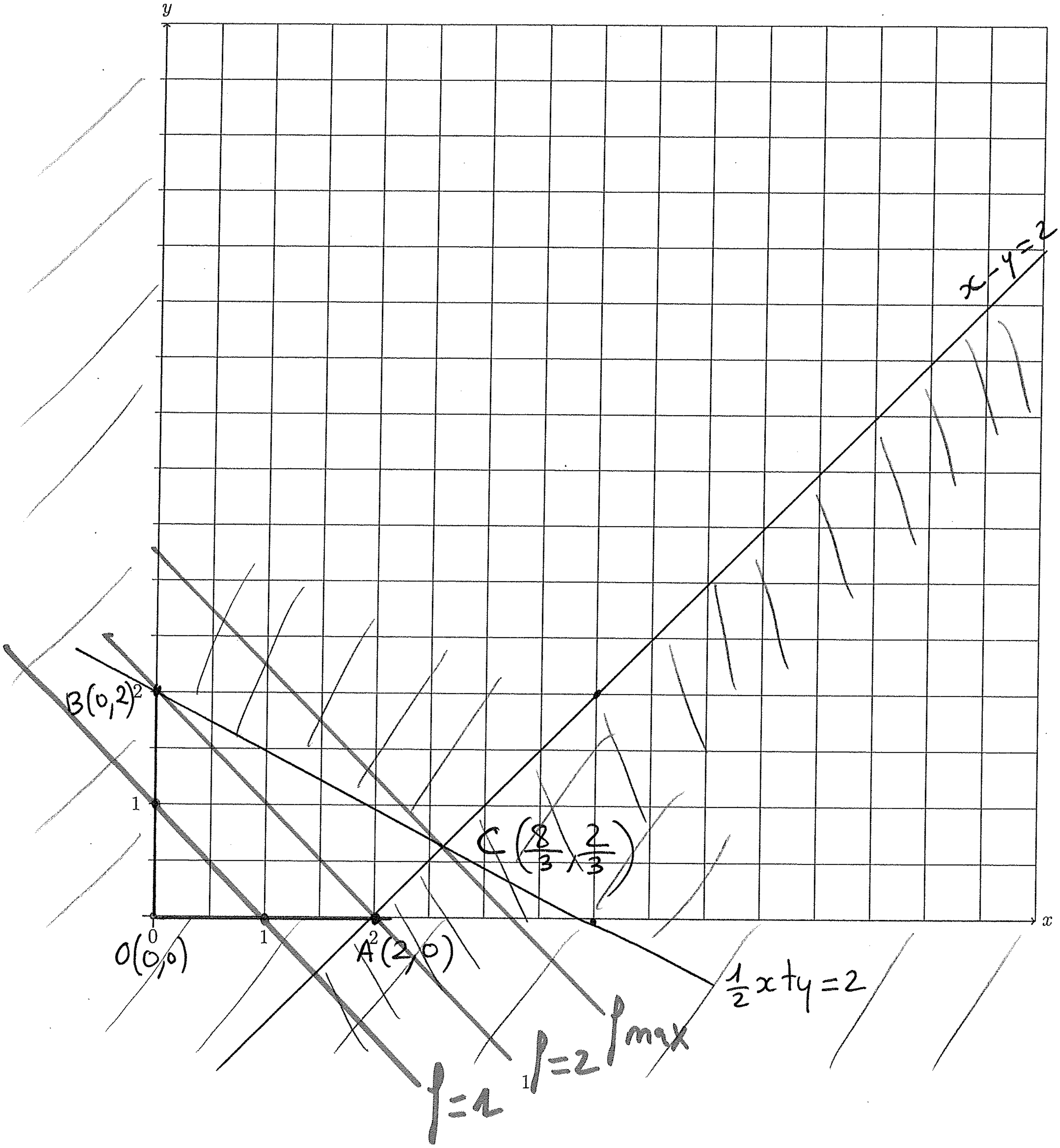
Dictionnaire 3	
variables hors base	z, t
variables dans la base	$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t$ $x = 2 + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t) - z$ $= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}t$
f	$f = 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}t - z$ $= \frac{10}{3} - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}t$

La solution du dictionnaire 3 est la solution du problème d'optimisation (car les coefficients de z et t dans f sont négatifs).
Solution : $(x = \frac{8}{3}, y = \frac{2}{3})$ pour une valeur maximale de $f = \frac{10}{3}$.

(c) $O(0,0)$: $f = 0$
$A(2,0)$: $f = 2$
$C(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$: $f = \frac{10}{3}$

Algorithme du simplexe

Graphique de l'exercice 1 .



Exercice 2

① ⓒ Solution : par $(x=1, y=4)$, $f_{max} = 3+8=11$

②

Dictionnaire 1	
variables hors base	x, y
variables dans la base	$z = 2-2x+y$ $t = 6-2x-y$ $u = 5-x-y$
f	$f = 3x+2y$

La solution basique du dictionnaire 1 est $(x=0, y=0, z=2, t=6, u=5)$ pour $f=0$

Variable entrante dans la base : y
variable sortante de la base : u

Dictionnaire 2	
variables hors base	x, u
variables dans la base	$y = 5-x-u$ $z = 2-2x+5-x-u = 7-3x-u$ $t = 6-2x-5+x+u = 1-x+u$
f	$f = 3x+10-2x-2u$ $= 10+x-2u$

La solution basique du dictionnaire 2 est $(x=0, y=5, z=7, t=1, u=0)$ $f=10$

Variable entrante dans la base : x
variable sortante de la base : t

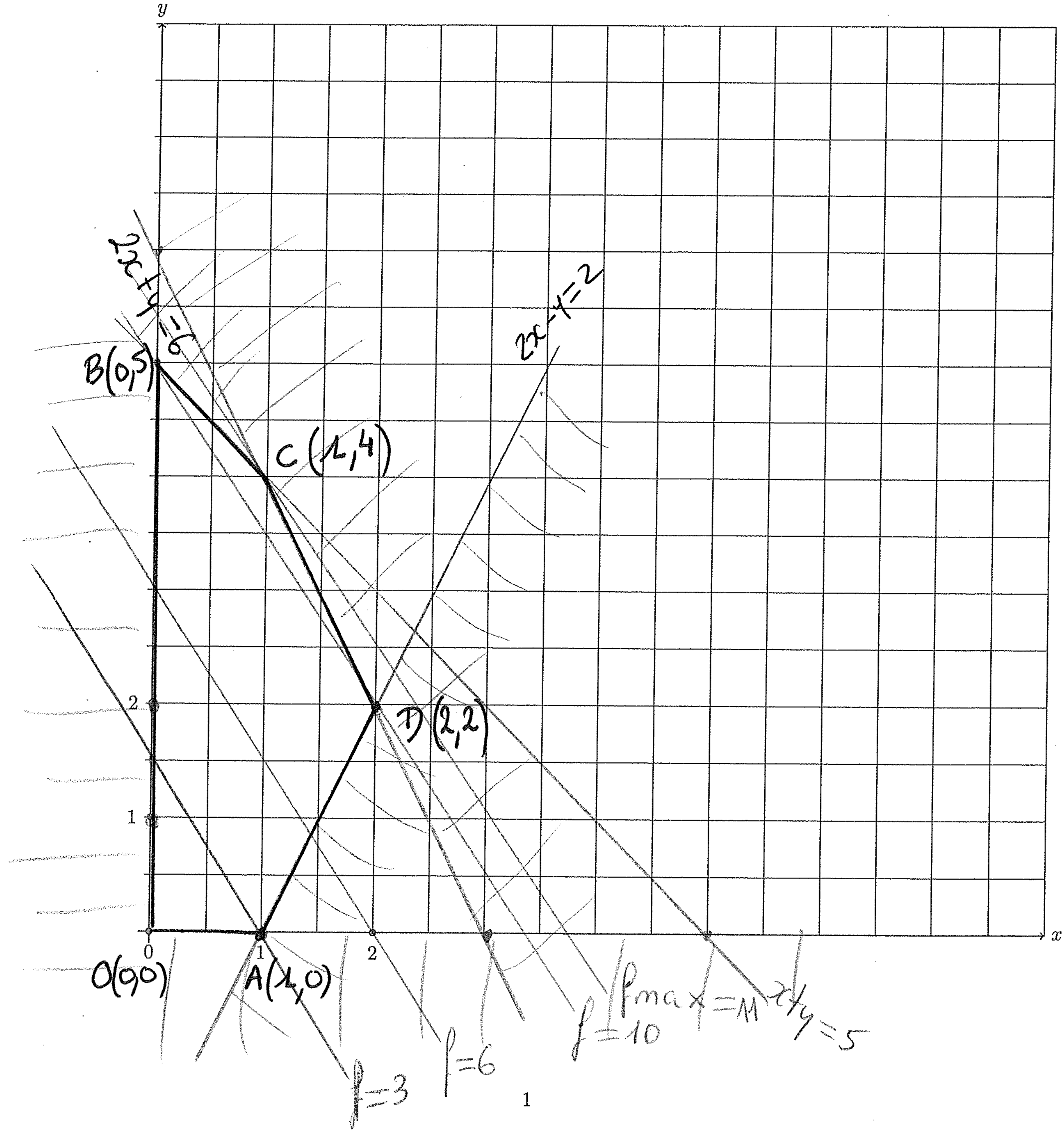
Dictionnaire 3	
variables hors base	t, u
variables dans la base	$x = 1 + u - t$ $y = 4 - u + t - u = 4 - 2u + t$ $z = 7 - 3 - 3u + 3t - u = 4 - 4u + 3t$
f	$f = 10 + (1 + u - t) - 2u$ $f = 11 - u - t$

La solution du dictionnaire 3 est la solution du problème d'optimisation.

Solution : $(x = 1, y = 4)$ $f_{max} = 11$

NOM : **PRENOM :**

Graphique de l'exercice 2

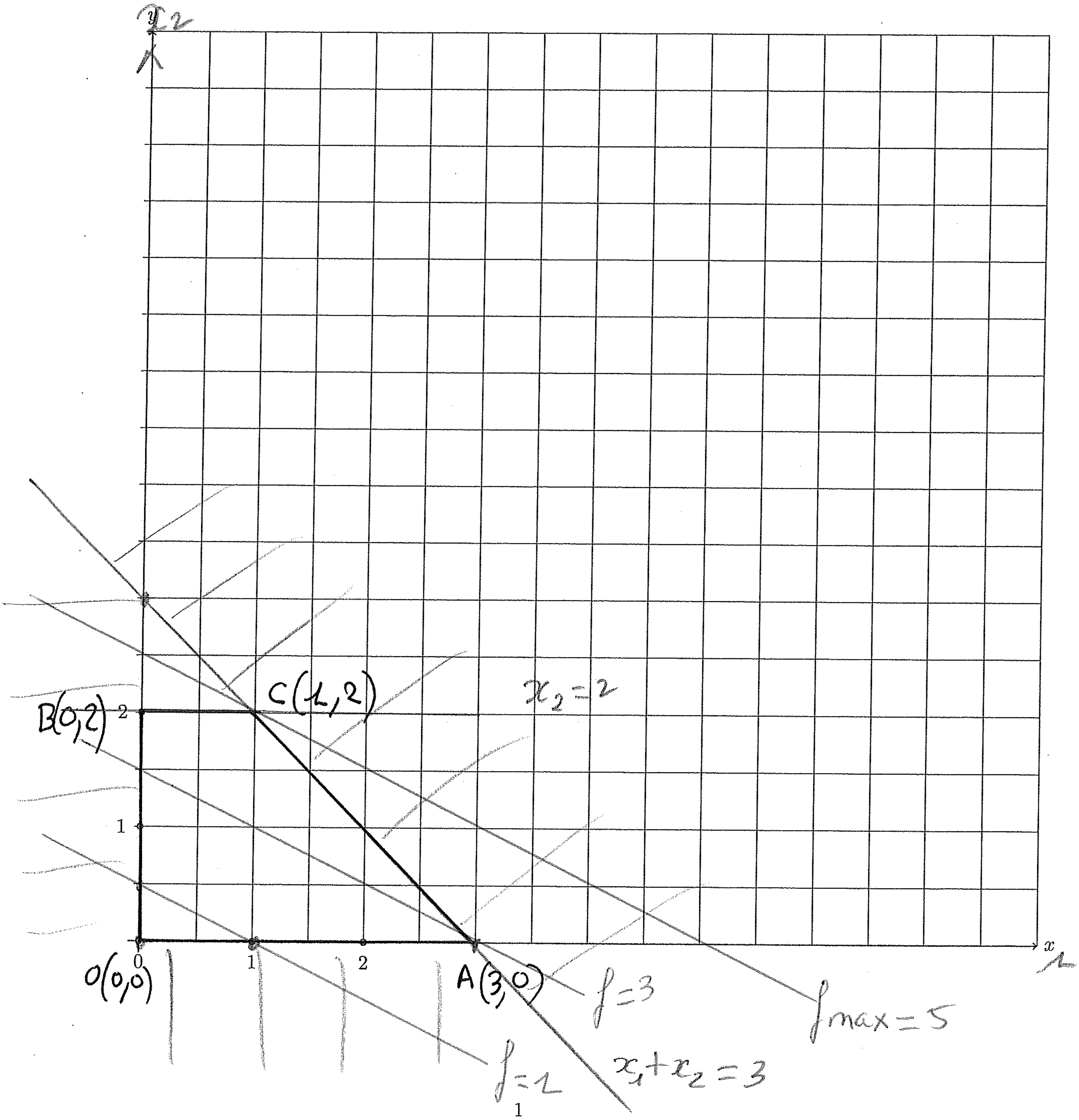


Exercice 3

NOM : **PRENOM :**

(P_1)

Graphique de l'exercice 3

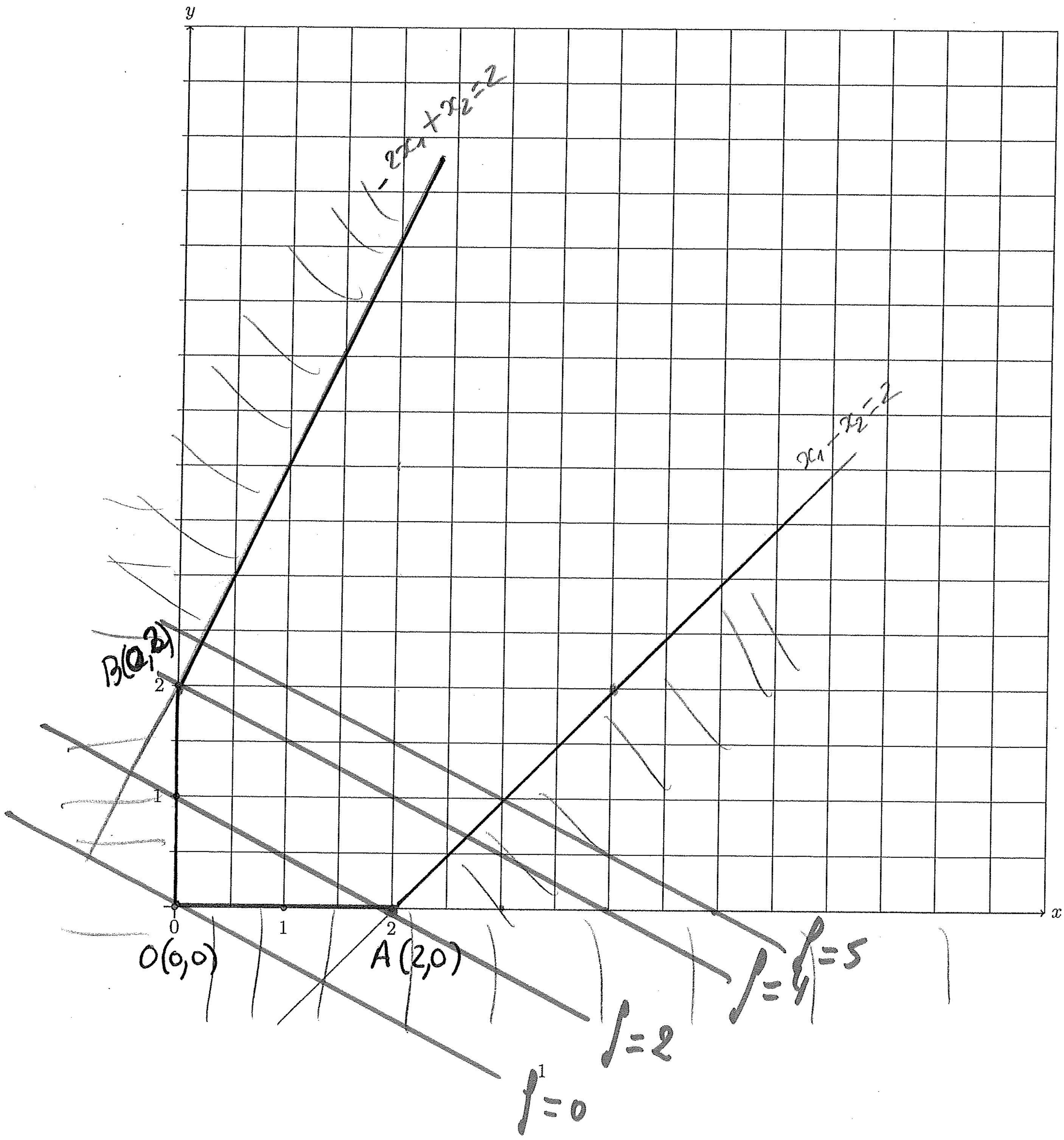


1

Exercice 3. (P_2)

NOM : **PRENOM :**

Graphique de l'exercice 3



Exercice 3 (suite) Algorithme du simplexe

① (P_1)

Dictionnaire 1
$x_3 = 3 - x_1 - x_2$ $x_4 = 2 - x_2$
$f = x_1 + 2x_2$

Sol $(x_1=0, x_2=0, x_3=3, x_4=2)$
$f=0$

x_2 va entrante
x_4 va sortante $\longrightarrow$

Dictionnaire 2
$x_2 = 2 - x_4$ $x_3 = 3 - x_1 - 2 + x_4$ $= 1 - x_1 + x_4$
$f = x_1 + (4 - 2x_4)$ $= 4 + x_1 - 2x_4$

Sol. $(x_1 = x_4 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1)$
$f = 4$

x_1 va entrante
x_3 va sortante $\longrightarrow$

Dictionnaire 3
$x_1 = 1 - x_3 + x_4$ $x_2 = 2 - x_4$
$f = 4 + (1 - x_3 + x_4) - 2x_4$ $= 5 - x_3 - x_4$

Sol. $(x_3 = x_4 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2)$
$f = 5$

Solution de (P_1): $(x_1 = 1, x_2 = 2)$ $f_{max} = 5$

② (P_2)

Dictionnaire 1
$x_3 = 2 - x_1 + x_2$ $x_4 = 2 + 2x_1 - x_2$
$f = x_1 + 2x_2$

Sol $(x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 2)$
$f = 0$

x_2 va entrante
x_4 va sortante $\longrightarrow$

Dictionnaire 2
$x_2 = 2 + 2x_1 - x_4$ $x_3 = 4 + x_1 - x_4$
$f = 4 + 5x_1 - 2x_4$

Sol: $(x_1 = x_4 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4)$
$f = 4$

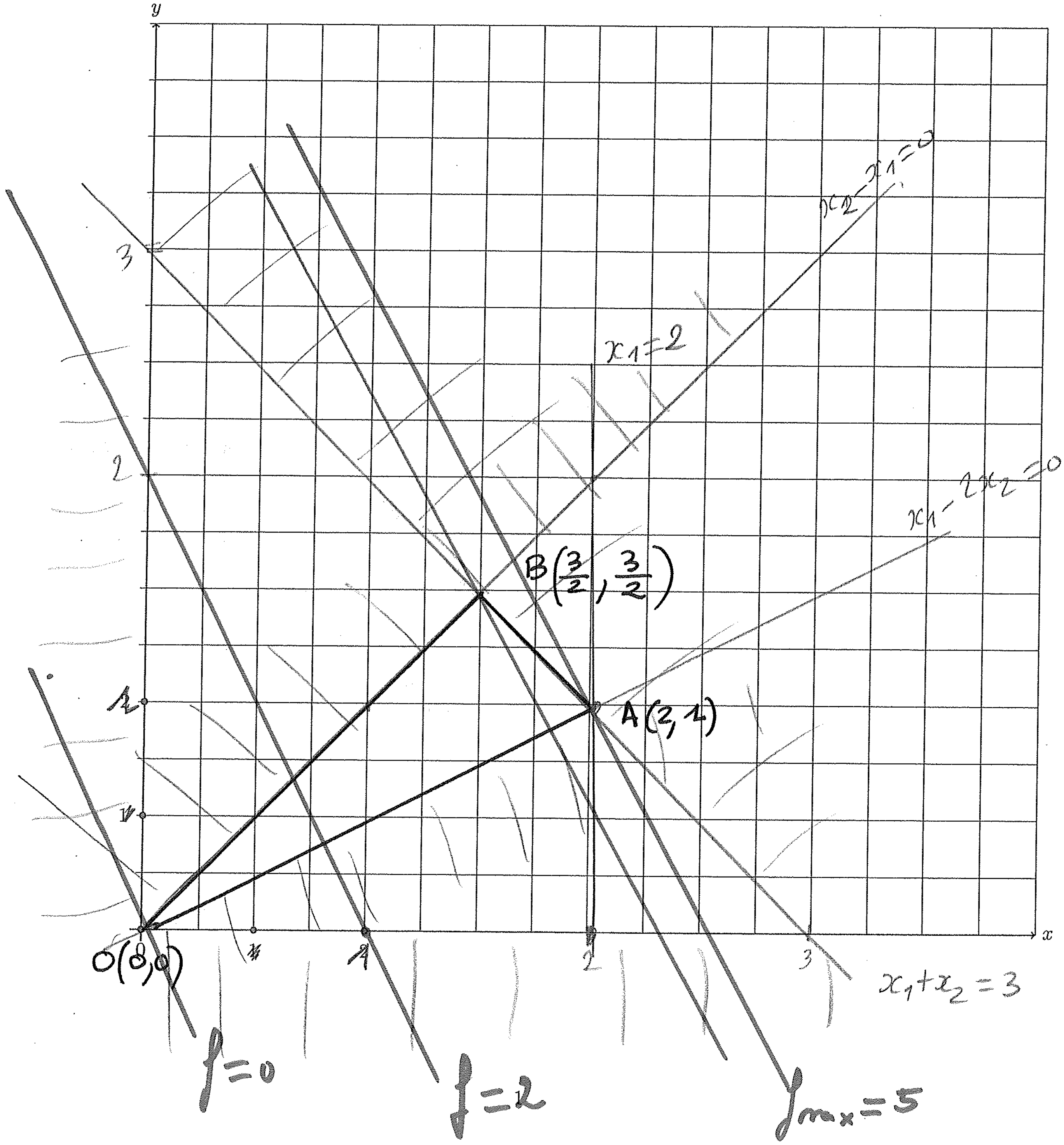
x_1 va entrante
pas de va sortante $\longrightarrow$

Le problème n'a pas de solution.

Exercice 4 (P_3)

NOM : **PRENOM :**

Graphique de l'exercice 3



Exercice 4 Algorithme du simplexe

Dictionnaire 1	
variables hors base	x_1, x_2
variables dans la base	$x_3 = 3 - x_1 - x_2$ $x_4 = 2 - x_1$ $x_5 = x_1 - x_2$ $x_6 = -x_1 + 2x_2$
f	$f = 2x_1 + x_2$

sol.
$(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 0, x_6 = 0)$
$f = 0$
dictionnaire dégénéré

Th Bland $\Rightarrow$ variable entrante x_2
variable sortante x_6

Dictionnaire 2	
variables hors base	x_2, x_6
variables dans la base	$x_1 = 2x_2 - x_6$ $x_3 = 3 - 2x_2 + x_6 - x_2$ $= 3 - 3x_2 + x_6$ $x_4 = 2 - 2x_2 + x_6$ $x_5 = x_2 - x_6$
f	$f = 4x_2 - 2x_6 + x_2$ $= 5x_2 - 2x_6$

sol
$(x_1 = x_2 = x_6 = x_5 = 0,$
$x_3 = 3, x_4 = 2)$
$f = 0$
dictionnaire dégénéré

Th Bland $\Rightarrow$ variable entrante : x_2
variable sortante : x_3

Dictionnaire 3	
variables hors base	x_3, x_6
variables dans la base	$x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6$ $x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_6 - x_6$ $= 2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6$ $x_4 = 2 - 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_6 + x_6$ $= \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6$ $x_5 = 1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_6$
f	$f = 5 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_6 - 2x_6$ $= 5 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6$

Solution de P_2 :
$(x_1 = 2, x_2 = 1)$
pour une valeur maximale de f égale à 5

Exercice 5

P_4

Dictionnaire 1	
variables hors base	x_1, x_2, x_3
variables dans la base	$x_4 = 4 - x_1 - x_2 + 2x_3$ $x_5 = 5 - 2x_1 - 3x_3$
f	$f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

Sol
$(x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 5)$
$f = 0$

variable entrante : x_1
variable sortante : x_5

Dictionnaire 2	
variables hors base	x_2, x_3, x_5
variables dans la base	$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$ $x_4 = 4 - \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5\right) - x_2 + 2x_3$ $= \frac{3}{2} - x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$
f	$f = \frac{15}{2} - \frac{9}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5 + 2x_2 + 4x_3$ $= \frac{15}{2} + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5$

Solution du dictionnaire 2

$$\left(x_2 = x_3 = x_5 = 0,\ x_1 = \frac{5}{2},\ x_4 = \frac{3}{2}\right) \quad f = \frac{15}{2}$$

variable entrante x_2
variable sortante x_4

Dictionnaire 3	
variables hors base	x_3, x_4, x_5
variables dans la base	$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$ $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_5$
f	$f = \frac{15}{2} + 3 - x_3 - 2x_4 + x_5 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5$ $= \frac{21}{2} - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 - \frac{1}{2}x_5$

Solution de P_4 :

$(x_1 = \frac{5}{2},\ x_2 = \frac{3}{2})$ pour une valeur maximale de f égale à $\frac{21}{2}$

(P_5)

Dictionnaire 1	
variables hors base	x_1, x_2, x_3
variables dans la base	$x_4 = 10 - x_1 - x_2 - x_3$ $x_5 = -x_1 + x_2$ $x_6 = -x_1 + x_3$
f	$f = 4x_1 - x_2 + x_3$

sol

$(x_1 = x_2 = x_3 = 0 = x_5 = x_6,\ x_4 = 10)$

$f = 0$

dictionnaire dégénéré

(Bland) va entrante x_1

va sortante x_5

Dictionnaire 2	
variables hors base	x_2, x_3, x_5
variables dans la base	$x_1 = x_2 - x_5$ $x_4 = 10 - 2x_2 - x_3 + x_5$ $x_6 = -x_2 + x_3 + x_5$
f	$f = 4x_2 - 4x_5 - x_2 + x_3$ $= 3x_2 + x_3 - 4x_5$

sol

$(x_2 = x_3 = x_5 = x_1 = x_6 = 0,$

$x_4 = 10)$

$f = 0$

va entrante x_2

va sortante x_6

Dictionnaire 3	
variables hors base	x_3, x_5, x_6
variables dans la base	$x_2 = x_3 + x_5 - x_6$ $x_1 = x_3 - x_6$ $x_4 = 10 - 2x_3 - 2x_5 + 2x_6 - x_3 + x_5$ $= 10 - 3x_3 - x_5 + 2x_6$
f	$f = 3x_3 + 3x_5 - 3x_6 + x_3 - 4x_5$ $= 4x_3 - x_5 - 3x_6$

Solution du dictionnaire 3 :

$(x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0,\ x_4 = 10)$ $f = 0$

variable entrante x_3

variable sortante x_4

Dictionnaire 4	
variables hors base	x_4, x_5, x_6
variables dans la base	$x_3 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6$ $x_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6$ $x_2 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6$
f	$f = \frac{40}{3} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 + \frac{8}{3}x_6 - x_5 - 3x_6$ $= \frac{40}{3} - \frac{4}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6$

Solution de P_5 :

$\left(x_1 = \frac{10}{3},\ x_2 = \frac{10}{3},\ x_3 = \frac{10}{3}\right)$ $f_{max} = \frac{40}{3}$