Coloration

Exercice 1 :

Donnez sans justification le nombre chromatique $\chi(G)$ des graphes suivants :

1. une chaîne d'ordre $n \geq 2$.
2. Un cycle d'ordre pair $n = 2k$ avec $k \geq 2$.
3. Un cycle d'ordre impair $n = 2k + 1$ avec $k \geq 1$.
4. Un graphe R constitué d'un cycle d'ordre pair et d'un sommet supplémentaire adjacent à tous les sommets du cycle (une "roue" d'ordre impair).
5. Un graphe R' constitué d'un cycle d'ordre impair et d'un sommet supplémentaire adjacent à tous les sommets du cycle (une "roue" d'ordre pair).

Exercice 2 :

1. Démontrez par récurrence sur $n \geq 2$ qu'un arbre A d'ordre n a pour nombre chromatique $\chi(A) = 2$.
2. Montrez par un contre-exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrez que si $\chi(G) = 2$ alors G n'admet pas de cycles impairs.

Exercice 3 :

Soient $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_7\}$ un ensemble de 7 travaux et $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_7\}$ un ensemble de 7 machines. Chaque travail t_i utilise un sous-ensemble M_i de machines :

$M_1 = \{m_1, m_3, m_5\}$
$M_2 = \{m_1, m_2, m_4\}$
$M_3 = \{m_2, m_3, m_5\}$
$M_4 = \{m_2, m_4, m_7\}$
$M_5 = \{m_5, m_6, m_7\}$
$M_6 = \{m_4, m_6, m_7\}$
$M_7 = \{m_5, m_6, m_7\}$

Le temps nécessaire à l'exécution de chaque travail t_i est le même (une journée) , mais deux travaux t_i et t_j ne peuvent être exécutés la même journée que s'ils utilisent des machines différentes (i.e. $M_i \cap M_j = \emptyset$).

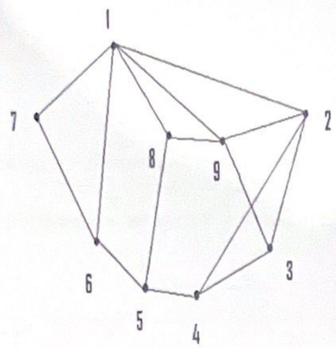
1. Représentez les contraintes de ce problème au moyen d'un graphe.
2. Combien de journées faudra-t-il au minimum pour réaliser tous ces travaux ?

Exercice 4 :

Pour chacun des graphes suivants donnez un ordre sur les sommets tel que l'algorithme de coloration gloutonne donne une coloration optimale, puis donnez si c'est possible un ordre sur les sommets tel que l'algorithme de coloration gloutonne ne donne pas une coloration optimale.

1. P_3
2. P_4
3. C_4
4. C_5
5. C_6

Exercice 5 :



1. Sans chercher à colorer le graphe G ci-dessus, donnez un encadrement de $\chi(G)$.
2. Donnez la coloration obtenue par l'algorithme de coloration gloutonne en prenant comme ordre sur les sommets $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Que peut-on en déduire pour $\chi(G)$?
3. Que vaut $\chi(G)$?

Exercice 6 :Organisation d'un tournoi

On suppose que pour l'organisation d'un tournoi sportif (du type jeux olympiques) les horaires des épreuves sont connus à l'avance. L'objectif des organisateurs est de réaliser toutes les épreuves en utilisant le moins de gymnases possibles. Pour une journée donnée, on a le tableau suivant des épreuves avec les horaires de début et de fin pour chacune d'entre elles :

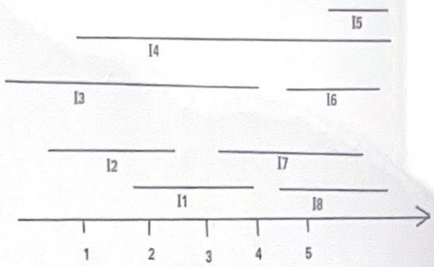
épreuves	début	fin
a	9h	10h30
b	9h30	11h30
c	10h	14h30
d	11h	12h
e	14h	16h
f	15h	17h
g	15h	18h
h	8h	10h

1. On veut résoudre ce problème en utilisant la théorie des graphes :
   (a) Modéliser la situation précédente par un graphe G permettant de résoudre le problème par une coloration optimale (le nombre de gymnases à prévoir sera le nombre chromatique du graphe).
   (b) Déterminer $\chi(G)$.
   (c) Montrer que l'algorithme glouton obtenu en ordonnant les sommets par ordre croissant des horaires de début donne une coloration optimale.

Exercice 7 : les graphes d'intervalles

Soit un ensemble $U = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ dont les n éléments sont des intervalles finis de $\mathbb{R}$. A cet ensemble on associe le graphe $G_U = (X, E)$ où $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ et $E = \{ij, I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$ (une arête de E relie les indices de deux intervalles d'insersection non vide). Ce graphe s'appelle le graphe d'interférence de la famille d'intervalle.

1. Représenter le graphe G correspondant à l'ensemble d'intervalles ci-dessous :



2. Déterminer $\Delta(G)$ et $\omega(G)$.
3. Démontrer que $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)$
4. Donner une coloration de G en utilisant l'algorithme de coloration gloutonne du cours. On prendra comme ordre sur les sommets celui qui correspond à l'ordre croissant des premieres bornes des intervalles.
5. En déduire $\chi(G)$
6. Cas général.
   (a) Soient $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ n intervalles rangés dans l'ordre croissant de leur première borne. Démontrer que dans le graphe correspondant on a $deg(n) \leq \omega(G) - 1$
   (b) Démontrer par récurrence sur le nombre de sommets que pour un graphe d'intervalle G on a $\chi(G) = \omega(G)$.

Exercice 8 : Allocation des registres

Un registre est un emplacement de mémoire interne à un processeur. Il s'agit de la mémoire la plus rapide d'un ordinateur. La capacité dépasse rarement quelques dizaines d'octets. Les programmes transfèrent d'abord les données de la mémoire centrale vers des registres, puis effectuent des opérations sur ces registres et enfin transfèrent le résultat en mémoire centrale. L'objectif pour le compilateur est de minimiser le nombre de registres utilisés simultanément.

Considérons une séquence d'opérations entre plusieurs variables :

	instructions	a	b	c	d	e	f
1	$a \leftarrow 1$						
2	$e \leftarrow a+1$	v					
3	$d \leftarrow e \times a$	v					
4	$f \leftarrow d \times 2$						
5	$c \leftarrow d + f \times e$						
6	$b \leftarrow f+2$						
7	$a \leftarrow b+c+e$						
8	return $a \times b$	v					

On étudie la duré de vie de chaque variable (la "vitalité") c'est à dire les moments où la variable utilise un registre : tout de suite après l'affectation jusqu'à sa dernière utilisation.

Dans le tableau ci-dessus on a mis des "v" dans la colonne de la variable a lorsque celle-ci est vivante. On ne met pas de "v" au moment de l'affectation ($a \leftarrow 1$) car dans un registre l'écriture se fait en fin de cycle (et la lecture en début).

Entre la dernière utilisation d'une variable et l'affectation suivante il est inutile de conserver la valeur dans un registre. Ainsi, on peut considérer que la variable a de la ligne 7 est une nouvelle variable que l'on notera a'.

1. Compléter les autres colonnes du tableau.
2. Dresser le graphe d'interférence G où chaque variable est un sommet. Il y aura une arête entre deux variables ssi ces deux variables ne peuvent pas utiliser le même registre (c'est à dire lorqu'elles sont vivantes à un même moment).

3. Déterminer $\chi(G)$ et en déduire le nombre minimum de registres nécessaires pour l'exécution de cette séquence.

Exercice 9 :

Dans un tournoi d'échecs chaque joueur doit affronter tous les autres. Chaque partie dure 1 heure.

1. Combien y aura-t-il de parties pour n joueurs ?
2. On note G_n le graphe où les sommets représentent les joueurs (on les numérote de 1 à n) et les arêtes représentent les rencontres. Représenter G_3, G_4 et G_5 .
3. L'organisateur veut limiter la durée du tournoi. Proposer un planning des rencontres pour $n = 3, 4, 5$ et 6. On pourra utiliser la notion d'indice chromatique.

Exercice 10 :

Soit $G = (X, E)$ un graphe. On appelle graphe adjoint de G , le graphe $G' = (X', E')$ où $X' = E$ (les sommets de G' sont les arêtes de G) et $E' = \{ef, e \in E \wedge f \in E \wedge e \cap f \neq \emptyset\}$ (il y a une arête entre deux sommets de G' si et seulement s'ils correspondent à deux arêtes de G ayant une extrémité en commun).

1. Soit G=($X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $E = \{ag, af, ac, ef, ch\}$)un graphe. Représenter G et G' .
2. Déterminer $\chi(G')$ et en déduire $\chi'(G)$.

Exercice 11 :

Trois jurys ont reçu la liste des candidats auxquels ils doivent faire subir une épreuve orale d'une heure :

— Jury 1 : Aurore, Charles, Denis.
— Jury 2 : Aurore, Charles, Fernand.
— Jury 3 : Aurore, Bernard, Denis.

A chaque nouvelle heure, les jurys appellent leur candidat suivant. Comme il faut bien établir une règle en cas de conflit, il est convenu que le jury 1 appelle en premier, puis le jury 2 et enfin le 3. Lorsqu'un jury appelle un candidat rendu indisponible par son interrogation dans un autre jury, la fiche du candidat passe en queue de liste pour ce jury, et ce jury appelle le candidat suivant.

1. Si les interrogations commencent à 14h, avec la règle de l'énoncé, à quelle heure se terminera la session ?
2. Proposer une meilleure organisation (en utilisant la théorie des graphes).

Exercice 12 :

Soit le graphe $G_0 = (X_0 = \{a, b\}, E_0 = \{ab\})$. A partir de ce graphe, on construit récursivement une suite de graphes $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

Pour construire G_{n+1} à partir de G_n , on recopie G_n puis pour chaque sommet x de G_n on crée un sommet x'qui a les mêmes voisins que x , et enfin on rajoute un sommet c_{n+1} qui est voisin de tous les sommets de type x' .

On notera $\chi_n = \chi(G_n)$ et $\omega_n = \omega(G_n)$.

1. Représenter successivement G_0, G_1 et G_2 . On ne cherchera pas à nommer les sommets de ces graphes.
2. Déterminer successivement ω_0, χ_0 ,ω_1, χ_1 puis ω_2, χ_2 .
3. Démontrer par récurrence les propositions suivantes :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, |G_n| = 3 \times 2^n - 1$ (rappel : $|G_n|$ est l'ordre du graphe G_n c'est à dire son nombre de sommets)
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = 2$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \chi_n = n + 2$

(conclusion : l'écart entre l'ordre du plus grand sous-graphe complet et le nombre chromatique peut être aussi grand que l'on veut)