Calcul matriciel

exercice 1: (algorithme de Gauss pour résoudre les systèmes)

Résolvez les systèmes suivants en utilisant l'algorithme de Gauss:

1. $S_1 \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

2. $S_2 \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

3. $S_3 \begin{cases} x + y + z + 2t = 2 \\ 2x + y + 3z + t = 1 \end{cases}$

4. $S_4 \begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y + 3z = 1 \end{cases}$

exercice 2: Calcul matriciel et géométrie affine

Dans le plan affine muni d'un repère orthonormal $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité:2cm) on considère les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On considère de plus la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenue en concaténant les coordonnées successives des points A, B, C et D. Cette matrice contient donc toutes les informations pour tracer les 3 segments $[AB], [B, C]$ et $[C, D]$ permettant de représenter la lettre "N" dans le plan.

On note de plus $R = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Représentez sur une figure la lettre "N" définie par la matrice N .
2. Calculez $N' = RN$ et représentez sur la figure précédente les trois segments définis par la matrice N' .
3. Calculez $N'' = HN$ et représentez sur la figure précédente les trois segments définis par la matrice N'' .
4. Calculez R^2, R^3, R^4 puis déduisez-en R^5, R^6, R^7 et R^8.
5. Montrez que la matrice R est inversible et calculez R^{-1} .
6. Calculez $R^{-1}N'$. Conclusion.
7. Quelles transformations affines représentent les matrices $R, R^2, \ldots, R^7$ et R^{-1} ?
8. Quelle transformation affine représente la matrice H .
9. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On souhaite trouver une opération matricielle permettant d'obtenir la matrice $t(N)$ représentant l'image de N par la translation de vecteur $\vec{u}$.
   (a) Représentez sur le graphique $t(N)$.
   (b) A l'aide d'une addition matricielle exprimez $t(N)$ en fonction de N (vous écrirez $t(N) = N + V$ avec V une matrice que vous déterminerez).
   (c) On désire exprimer la translation à l'aide d'un produit matriciel.
   On pose $N_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice obtenue à partir de N en rajoutant une ligne de "1". On note de même $t(N_H)$ la matrice obtenue à partir de $t(N)$ en rajoutant une ligne de "1".
   Déterminez une matrice T telle que $t(N_H) = TN_H$.

exercice 3:(rang d'une matrice)

Déterminez le rang des matrices suivantes:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

exercice 4: déterminant et inverse

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculez le déterminant de chacune des matrices précédentes.
2. Déduisez-en les matrices inversibles.
3. Déterminez l'inverse des matrices précédentes.
4. Déduisez-en l'inverse de la matrice AB puis celle de D^2.

exercice 5: système et matrice

On considère le système suivant:

$$S \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

1. Ecrivez ce système sous la forme $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ avec A une matrice que vous déterminerez.
2. Calculez $det\,(A)$. Que pouvez-vous en déduire sur le nombre de solutions du système S ?
3. Calculez A^{-1} et déduisez-en les solutions du système S .
   (a) **Remarques:**
      i. un système à n équations et n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la forme $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = B$ avec A une matrice carrée $n \times n$ **inversible** et B une matrice colonne $n \times 1$ donnée est appelé **un système de Cramer**. La solution d'un tel système est unique et est donnée par la formule $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B$.
      ii. Dans le cas où la matrice A n'est pas inversible le système à n équations et n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la forme $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = B$ admet soit une infinité de solutions soit aucune.

4. Déterminez simplement les solutions du système

$$S' \begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+5z=1 \end{cases}$$

5. Le système suivant admet-il une solution unique?

$$S" \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+2y+4z=4 \end{cases}$$

exercice 6: valeurs propres:

> **définitions:**
>
> Soit M une matrice réelle carrée $n \times n$. On dira qu'un réel λ est **une valeur propre** de M ssi le système à n équations et n inconnues $MX = \lambda X$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ admet au moins une solution distincte de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$. Une telle solution est appelée **un vecteur propre** associée à la valeur propre λ.

.

1. Montrez que $\lambda = 3$ est une valeur propre de la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et déterminez un vecteur propre associé à cette valeur propre.

2. Déterminez les valeurs propres éventuelles de la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Démontrez que 0 est une valeur propre de la matrice carrée M ssi M n'est pas inversible. Vous pouvez utiliser la remarque (question3) de l'exercice précédent.

4. **Généralisation:** démontrez que λ est une valeur propre de M matrice carrée $n \times n$ ssi $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Déduisez-en le résultat suivant:

> $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de M matrice carrée $n \times n \Leftrightarrow det(M - \lambda I_n) = 0$

5. Déterminez les valeurs propres des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$