Géométrie analytique dans le plan euclidien:

Exercice 1:

Dans le plan euclidien muni du repère orthonormal $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminez les coordonnées des points M, N et P tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0}$ et placez ces points sur une figure (unité 2cm)
2. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$.
3. Calculez la distance AB et la distance AC puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$.
4. Donnez une équation cartésienne des droites (AB) et (MN).
5. Les droites (AB) et (MN) sont-elles parallèles?
6. Donnez une équation paramétrée de la droite (AC) .
7. Les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires?
8. Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$?
9. On note H le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB). Calculez les coordonnées de H .

Exercice 2:

Dans le plan euclidien muni du repère orthonormal $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère les deux droites D_1 et D_2 dont les équations (l'une paramétrée et l'autre cartésienne) sont données par:

$$D_1 \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

$$D_2 : 2x - 3y = 5$$

On considère de plus le point $A\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}_R$.

1. $A \in D_1$?
2. $A \in D_2$?
3. Donnez un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ à la droite D_1 .
4. Donnez un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ à la droite D_2 .
5. Déterminez la distance du point A à la droite D_1.
6. Déterminez la distance du point A à la droite D_2.

Exercice 3:

Dans le plan euclidien muni du repère orthonormal $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère les deux droites D_1 et D_2 dont les équations paramétrées sont données par:

$$D_1 \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$

1. Tracez ces 2 droites.
2. Donnez, pour chacune de ces deux droites, un vecteur directeur.
3. Ces deux doites sont-elles parallèles?
4. Ces deux droites sont-elles perpendiculaires?
5. Déterminez les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
6. Donnez une équation cartésienne de la droite D_1

Exercice 4:

Dans le plan euclidien muni du repère orthonormal $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère les deux droites Δ_1 et Δ_2 dont les équations paramétrées sont données par:

$$\Delta_1 : 3x + 2y - 2 = 0$$

$$\Delta_2 : 2x - y + 1 = 0$$

1. Tracez ces 2 droites.
2. Donnez, pour chacune de ces deux droites, un vecteur directeur.
3. Ces deux doites sont-elles parallèles?
4. Ces deux droites sont-elles perpendiculaires?
5. Déterminez les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
6. Donnez une équation paramétrée de la droite Δ_1 .

Exercice 5:

Soient les droites du plan affine D_1 et D_2 d'équations paramétrées $D_i \begin{cases} x = \alpha_i t + \beta_i \\ y = \gamma_i t + \delta_i \end{cases} \quad i \in \{1, 2\}$.

et Δ_1 et Δ_2 d'équations cartésiennes $\Delta_i : a_i x + b_i y = c_i$.

1. Démontrez que $D_1 // D_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$
2. Démontrez que $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$
3. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $D_1 // \Delta_1$

Exercice 6:

Dans le plan euclidien muni du repère orthonormal $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère les 3 points $M_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Démontrez que M_1, M_2, M_3 sont alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Exercice 7:

Dans le plan euclidien muni du repère orthonormal $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère les points $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_R$ et $B \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}_R$.

On considère de plus les trois vecteurs $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$(dont les coordonnées sont données dans la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$).

1. Démontrez que le couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base du plan vectoriel. Déterminez les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette nouvelle base.

2. On note $R' = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (c'est donc un repère du plan euclidien). Déterminez les coordonnées du point B dans ce nouveau repère.