Probabilités - Exercices

Département Informatique IUT Montpellier

Année 2022

Table des matières

1 Probabilités - Probabilités conditionnelles **1**

2 Variables aléatoires discrètes **5**

3 Variables aléatoires continues **13**

4 Théorème Central Limite **19**

Chapitre 1

Probabilités - Probabilités conditionnelles

Exercice 1.1

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Soient les événements :

- A : la carte tirée est un carreau
- B : la carte tirée est une figure (roi, dame, valet)
- C : la carte tirée est un pique ou un trèfle

Calculer les probabilités des événements suivants :

1. A et B ;
2. A ou B ;
3. non(A ou B) ;
4. A et non C ;
5. A ou non C ;
6. au moins l'un des trois ;
7. exactement deux parmi les trois.

Exercice 1.2

Dans un groupe de 100 personnes sélectionnées pour répondre à une enquête d'opinion, il y a 30 personnes favorables à une réforme, 50 opposants et 20 indécis. On interroge simultanément 5 personnes différentes choisies au hasard parmi les 100. Quelle est la probabilité d'avoir :

1. 2 favorables, 2 opposants et 1 indécis ?
2. 2 favorables et 3 opposants, ou 2 indécis et 3 opposants ?
3. exactement 2 favorables ?
4. au moins 2 favorables et au moins un indécis ?

Exercice 1.3

Un dé est truqué de telle sorte que le chiffre 6 sort une fois sur deux. Les autres chiffres sont équiprobables entre eux. Décrire précisément l'espace probabilisé qui modélise cette expérience, puis calculer la probabilité d'obtenir

1. un nombre pair,
2. un nombre au moins égal à 3,
3. un nombre impair au moins égal à 3,
4. un nombre pair au plus égal à 3.

Exercice 1.4
Un jeu comporte des tickets de 40 cases à découvrir par grattage. Parmi les 40 cases on sait qu'il y a 30 cases banches et 10 cases rouges réparties de manière équiprobable. Un joueur gratte 5 cases parmi les 40. Il gagne s'il découvre au moins 2 rouges et au moins une blanche.

Définir un espace probabilisé de manière à calculer la probabilité de chacun des événements suivant qui concernent les cases grattées :

1. Les 5 cases sont rouges.
2. Les 5 cases sont de même couleur.
3. Il y a au moins une case blanche et une rouge.
4. Le joueur a gagné.

Exercice 1.5
On choisit une famille au hasard dans un certain pays, et on note les événements suivants :
- V_1 : la famille possède un seul véhicule
- V_2 : la famille possède deux véhicules
- R : la famille possède un réfrigérateur

On donne de plus

$$\mathbf{P}(V_1) = 0,63; \quad \mathbf{P}(V_2) = 0,19; \quad \mathbf{P}(R) = 0,54; \quad \mathbf{P}(V_2 \cap R) = 0,15; \quad \mathbf{P}(\overline{V_1 \cup V_2} \cap \bar{R}) = 0,$$

1. Expliciter les événements $V_2 \cap R$ et $\overline{V_1 \cup V_2} \cap \bar{R}$.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - la famille ne possède pas véhicule
   - la famille possède un réfrigérateur mais pas de véhicule
   - la famille possède un réfrigérateur et un seul véhicule
   - la famille possède deux véhicules mais pas de réfrigérateur
   - la famille possède un seul véhicule mais pas de réfrigérateur

Exercice 1.6
On jette un dé trois fois de suite. On obtient 3 valeurs a, b et c. Quelle est la probabilité pour que l'équation :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

admette deux racines réelles distinctes.

Exercice 1.7
Dans une loterie, tous les billets sont différents. Sur chacun figure un code composé de 3 chiffres différents et d'un couple de 2 lettres distinctes. Par exemple $057CE$ et $507EC$ sont 2 codes possibles. Les billets gagnants sont ceux dont le 3$^{\text{e}}$chiffre est 5 et la 2$^{\text{ème}}$ lettre est A. Tous les codes possibles ont été utilisés et tous les billets correspondants peuvent être choisis de manière équiprobable par tout acheteur.

On achète un billet. Quelle est la probabilité de gagner ?

Exercice 1.8
Dans une course de 15 chevaux, chacun ayant la même probabilité de se classer à une place donnée, sans ex–aequo possible, quelle est la probabilité, en jouant un tiercé, de le gagner :

1. dans l'ordre ?
2. dans l'ordre ou le désordre ?
3. dans le désordre ?

Exercice 1.9
Dans une urne se trouvent 4 boules rouges, 3 boules noires et 1 boule blanche. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité de l'événement « une boule de chaque couleur » en précisant correctement votre espace de probabilité.

Exercice 1.10
Dans un centre de loisirs Pradyland, 200 adhérents peuvent profiter chaque jour de l'une des activités suivantes : voile, cyclisme et équitation. Une enquête a été réalisée un jour où 50 avaient choisi la voile, 80 le cyclisme et 70 l'équitation (chacun fait une seule activité). On a établi que 75% des adhérents avaient été satisfaits de leur journée et que parmi eux 40% ont pratiqué le cyclisme. Parmi les 70 adhérents ayant choisi l'équitation, 30 n'ont pas été satisfaits. Si l'on choisit au hasard de manière uniforme un adhérent parmi ceux qui n'ont pas été satisfaits de leur journée, quelle est la probabilité qu'il ait fait de la voile ?

On définira soigneusement un espace probabilisé et les ensembles permettant de traduire l'énoncé en termes de probabilités et probabilités conditionnelles.

Exercice 1.11
Pour dépister une maladie, on applique un test. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le patient est en bonne santé, et ceci se produit dans 2% des cas. Sachant qu'en moyenne un patient sur 1000 est atteint de

la maladie à dépister, calculer la probabilité pour qu'un client soit atteint sachant que son test a été positif.

Exercice 1.12

Les Anglais et les Américains orthographient le mot rigueur, respectivement, *rigour* et *rigor*. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Une lettre est prise au hasard dans ce mot, c'est une voyelle. Or 40% des anglophones de l'hôtel sont des Anglais et les 60% restants sont Américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais ?

Exercice 1.13

On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge tandis que la troisième porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau, puis une carte est tirée au hasard et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Exercice 1.14

On jette 2 dés équilibrés. On appelle A_1 l'événement : "le résultat du premier dé est impair", A_2 l'événement : "le résultat du second dé est impair" et A_3 l'événement : "la somme des 2 résultats est impaire".

1. A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants deux à deux ?
2. $A1$, A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Exercice 1.15

Chaque année, un centre commercial installe dans sa galerie marchande son stand de galette des rois express. On peut y acheter des galettes et du cidre. Une étude statistique des ventes des années précédentes a permis d'estimer que tout client du centre commercial a la probabilité $0,3$ d'acheter une galette à ce stand. Il a de même la probabilité $0,1$ d'y acheter du cidre, mais cette probabilité s'élève à $0,2$ pour les clients qui y achètent aussi une galette. Indiquer les probabilités pour que le client achète :

1. les deux articles ;
2. au moins l'un des deux ;
3. aucun des deux ;
4. une galette sachant qu'il a acheté du cidre ;
5. une galette sachant qu'il n'a pas acheté de cidre ;
6. les deux articles sachant qu'il en a acheté au moins un.

Chapitre 2

Variables aléatoires discrètes

Exercice 2.1
On lance trois fois de suite un dé.

1. Quel est l'univers lié à cette expérience ainsi que sa mesure de probabilité associée ?
2. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues (par exemple $X((2,6,1)) = 3$; $X((4,4,2)) = 2$). Quelle est la loi de X ?

Exercice 2.2
Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

x	0	2	4
$\mathbf{P}(X = x)$	$21/32$	$6/32$	$5/32$

Calculer l'espérance de X et son écart-type.

Exercice 2.3
Le tableau de la loi de probabilité d'un dé truqué à six faces est :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

Soient les événements $A = \{i,\ i \leq 4\}$, $B = \{i,\ i \geq 4\}$, $C = \{i,\ i < 4\}$.
Calculer $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(A \cap B)$, $\mathbf{P}(A \cap C)$, $\mathbf{P}(B \cap C)$.

Exercice 2.4
Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X = x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.

3. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X > 2)$, $\mathbf{P}(3 < X < 4.5)$, $\mathbf{P}(2 \leq X < 4)$, $\mathbf{P}(2 < X < 4)$.
4. Soit $Y = 2X - 3$. Déterminer la loi de Y. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

Exercice 2.5

Déterminer la loi de probabilité, le mode, l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire discrète X dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{5} \text{ si } 1 \leq x < 1,5 \\ \frac{4}{5} \text{ si } 1,5 \leq x < 3 \\ 1 \text{ si } x \geq 3. \end{cases}$$

Exercice 2.6

Un jeu consiste à prendre une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On gagne 4 euros si la carte tirée est un as, 2 euros si c'est un roi, 1 euro si c'est une dame et 0 euro dans tous les autres cas. On considère la variable aléatoire X égale au gain pour une partie.

1. Décrire entièrement la loi de la variable aléatoire X.
2. Calculer en détaillant les calculs, l'écart-type et la variance de X.
3. Un joueur joue deux parties indépendantes de ce jeu. Quelle est l'espérance de son gain total sur ces deux parties ? La variance de ce gain ?

Exercice 2.7

On jette deux pièces truquées, chacune ayant une probabilité de $1/3$ de tomber sur pile et on note N le nombre de piles obtenus. Donner la loi de N.

Exercice 2.8

On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans l'ensemble $E = \{0,\ 1/3,\ 2/3,\ 1\}$ dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall x \in E, \quad P(X = x) \ = \ ax^2 + b. \qquad (1)$$

1. On suppose $b = \frac{1}{4}$. Montrer que $a = 0$. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. On suppose maintenant que $b = 0$. Calculer a. Calculer la probabilité pour que X soit supérieur à 0.5.
3. Trouver les conditions sur a et b pour que (1) définisse bien une loi de probabilité.

Exercice 2.9
Soient a et b deux réels, et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1\,;\,0\,;\,1\}$ telle que

$$\mathbf{P}[\{X=-1\}] = b-a; \qquad \mathbf{P}[\{X=0\}] = b \qquad \mathbf{P}[\{X=1\}] = b+a\ .$$

1. Montrer que l'on doit nécessairement avoir $b = \frac{1}{3}$ pour que les quantités ci–dessus définissent une loi de probabilité sur $\{-1\,;\,0\,;\,1\}$.
2. Calculer a pour avoir $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.10
On joue avec deux dés équilibrés à quatre faces. Sur le premier dé, les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 3. Sur le second dé, les faces portent les numéros 1, 2, 2 et 2. Deux règles du jeu sont possibles :

1. La partie coûte 1 euro. On lance les deux dés.
   (a) Si la somme est 2, on gagne 6 euros,
   (b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 2 euros,
   (c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.
2. La partie coûte 10 euros. On lance les deux dés.
   (a) Si la somme est 2, on gagne 60 euros,
   (b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 12 euros,
   (c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.

En étudiant l'espérance et l'écart-type de chacun de ces jeux, trouver lequel est le plus intéressant.

Exercice 2.11
On considère un couple de variables aléatoires X et Y dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

X Y	0	1	2
0	1/2	0	0
1	1/6	1/6	1/6

1. Déterminer la loi marginale de X. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer la covariance de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.12
Soient deux variables X et Y.
X prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités 1/2 et 1/2.
Y prend les valeurs 0 et 2 avec les probabilités 1/3 et 2/3.
On note : $P((X=0)\cap(Y=0))=p$.

1. Calculer, en fonction de p, les probabilités suivantes : $P((X=0)\cap(Y=2))$, $P((X=1)\cap(Y=0))$ et $P((X=1)\cap(Y=2))$.
2. Entre quelles limites peut varier p ?
3. Calculer, en fonction de p, la covariance entre X et Y.
4. Pour quelle valeur de p, X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.13
On considère les familles de deux enfants. X est le nombre de garçons, Y le nombre de filles. Les probabilités $P(X=2)$ et $P(Y=2)$ sont supposées égales et que $P(\{X=1\}\cap\{Y=1\})$ est égale à $0,5$.

1. Présenter le tableau de la loi du couple (X,Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi marginale de X et celle de Y.
3. Déterminer la distribution de probabilité de $Z=\frac{|X-Y|}{2}$.

Exercice 2.14
Une urne contient 4 boules numérotées 0, 1, 1 et 2. On effectue n tirages avec remise (c'est-à-dire qu'après chaque tirage la boule tirée est remise dans l'urne). On note X_i le numéro de la i-ème boule extraite.

1. Calculer la loi de X_i pour $i=1$, ..., n.
2. On pose $S=X_1\ +\ X_2\ +\ ...\ +\ X_n$. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 2.15
Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de blanches est 0.2. Les tirages se font avec remise ainsi la proportion de boules blanches ne change jamais.

1. Soit Y la v.a qui vaut 1, si on tire une boule blanche et 0 sinon. Loi de Y ? $\mathbf{E}(Y)$?
2. Soit X la v.a indiquant le nombre de boules noires tirées sur 6 tirages. Quelles sont l'espérance et la variance de cette variable ?

Exercice 2.16
Dans une PME, sont employés 6 ouvriers et 5 employés. Le PDG, souhaitant prendre l'avis de son personnel, interroge 7 personnes choisies au hasard parmi ces 11 personnes. Soit X la variable aléatoire "nombre d'ouvriers interrogés".

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Quelle est sa loi de probabilité ?
3. Calculer la probabilité d'interroger 4 ouvriers.

Exercice 2.17
L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Calculer la probabilité pour que le candidat ait révisé
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 2.18
Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. À chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question.
Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 2.19
Un joueur lance cinq dés ordinaires bien équilibrés indépendants, à six faces marquées de 1 à 6.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 représentant le nombre de 1 obtenus ? Justifier la réponse.
2. Les 1 obtenus valent 100 points chacun. Les 5 obtenus valent 50 points chacun. Les autres résultats ne valent rien.
   (a) Exprimer le gain en fonction du nombre de 1 et du nombre de 5 obtenus.
   (b) Quelle est l'espérance mathématique du gain dans un jet des 5 dés ?

Exercice 2.20

On considère un jeu de 32 cartes.

1. On tire au hasard successivement et avec remise, 10 cartes de ce jeu. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cœurs tirés.
   (a) Quelle loi suit X ? Justifier la réponse.
   (b) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\mathbf{P}(X = 3)$.
2. On tire au hasard successivement et sans remise, 10 cartes de ce jeu. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de cœurs tirés.
   (a) Quelle loi suit Y ? Justifier la réponse.
   (b) Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\mathbf{P}(Y = 3)$.

Exercice 2.21

Dans un verger bio, toute pomme a une chance sur 4 d'être véreuse, indépendamment des autres. Dans un panier de 5 pommes, quelle est la probabilité d'avoir au plus 3 pommes véreuses ? On donnera toutes les justifications nécessaires.

Exercice 2.22

Un centre de contrôle technique automobile a pris des rendez–vous pour contrôler 20 véhicules, dans une certaine journée, dont 15 sont équipés d'un moteur Diesel. Les rendez–vous sont pris aléatoirement dans la journée sans tenir compte du type de moteur (Diesel ou essence). Un des techniciens du centre est chargé de contrôler 10 véhicules.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire N «nombre de véhicule Diesel contrôlés par ce technicien» ?
2. Donner l'espérance de N en citant la formules de calcul. Calculer la probabilité que les 10 véhicules contrôlés soient tous des Diesel.

Exercice 2.23

Pour aller à son lycée à vélo, un élève rencontre 6 feux. L'état de chaque feu est indépendant des autres et la probabilité qu'un feu soit vert est $2/3$. Un feu orange ou rouge, fait perdre 1 minute 30 secondes à l'élève. Le lycée est situé à 3km du domicile et l'élève roule à 15km/h entre les feux. Soit X le nombre de feux verts rencontrés sur le trajet et T le temps mis par l'élève pour rejoindre le lycée.

1. Loi de X ?
2. Exprimer T en fonction de X. En déduire $\mathbf{E}(T)$.
3. L'élève part 17 minutes avant le début des cours. Est il raisonnable de penser qu'il arrivera à l'heure ? Quelle est la probabilité pour qu'il arrive en retard en cours ?

Exercice 2.24
On admet que le nombre d'accidents survenant sur une autoroute quotidiennement est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètrer $\lambda = 3$. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 accidents lors d'un jour donné ?

Exercice 2.25
Je dispose de 40 fléchettes. A chaque lancer, j'ai une probabilité 0,1 de tirer dans le mille. On suppose les lancers indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes que j'ai mises dans le mille.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X
3. Par quelle loi peut-on approcher celle de X ? En déduire une approximation de l'événement « je mets au plus 1 fléchette dans le mille ».

Exercice 2.26
Un jeu de loto consiste à tirer sans remise 6 numéros gagnants entre 1 et 45. Un joueur achète un billet portant 6 numéros tirés au hasard parmi ces nombres.

1. On note N le nombre de numéros gagnants sur un billet quelconque. Quelles sont les valeurs prises par N, quelle est la loi de N ?
2. Pour aller plus loin que le cours... Notons p la probabilité d'acheter un billet avec au moins trois numéros gagnants. Un joueur achète des billets jusqu'à acheter un billet avec au moins 3 numéros gagnants. On note T le nombre de billets achetés. On suppose que les billets sont indépendants et que la probabilité d'acheter un billet avec au moins 3 numéros est constante. Déterminer en fonction de p, la loi de T.

Exercice 2.27
On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 2.28
Un ambassadeur reçoit 500 personnes lors d'une réception le 1er janvier. Il a prévu d'offrir un cadeau coûtant 40 euros à chaque invité, sauf aux invités dont l'anniversaire tombe le 1er janvier, qui auront un cadeau coûtant 100 euros. On considérera qu'une année a 365 jours et que toutes les dates d'anniversaire ont la même probabilité.

1. Soit X la variable aléatoire « nombre d'invités ayant leur anniversaire qui tombe le 1er janvier ». Quelle est la loi suivie par X ? En déduire le coût moyen des cadeaux.
2. On approxime X par une loi de Poisson Y. Trouver le paramètre λ. Le coût moyen des cadeaux change-t-il ? Comparer dans les deux cas de figure, la probabilité qu'il y ait 0 invité né le 1er janvier.

Chapitre 3

Variables aléatoires continues

Exercice 3.1
Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[-1, 1]$ de densité f. Dans les cas suivants, vérifier que f est une densité, puis calculer l'espérance et la variance de X :

1. $f(x) = \frac{1}{2}$;
2. $f(x) = |x|$;
3. $f(x) = \frac{3}{2}x^2$.

Exercice 3.2
On donne

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -1, \\ a \text{ si } -1 < x \leq 2, \\ 0 \text{ si } x > 2. \end{cases}$$

1. Calculer a pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3.3
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + c \text{ si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ si } x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

1. Calculer le paramètre c pour que f soit une densité de probabilité.

2. Représenter graphiquement f.

   Dorénavant, on prendra $c = \frac{1}{4}$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition F de X. La représenter graphiquement.
4. Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.
5. Déterminer a telle que que l'on ait $P(a \leq X \leq 2) = 0.5$. Donner la médiane.

Exercice 3.4
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -1, \\ 1 + x \text{ si } -1 < x \leq 0, \\ 1 - x \text{ si } 0 < x \leq 1, \\ 0 \text{ si } x > 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable X.
2. Déterminer la fonction de répartition F.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3.5
Une variable aléatoire continue X prenant ses valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ a pour densité de probabilité, la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} k\ (1 - x^2) \text{ si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la constante k est égale à $\frac{3}{4}$.
2. Représenter graphiquement la fonction f.
3. Déterminer la fonction de répartition F de la variable X.
4. Calculer $P(X > 1/2)$.
5. Calculer $E(X)$.

Exercice 3.6
Sachant que X suit une loi $N(0, 1)$, calculer à l'aide de la table :

1. $P(X < 0,82)$; $P(X < 0,5)$; $P(X > 1,42)$; $P(X < -1,32)$; $P(X > -2,24)$; $P(-1 < X < 1)$; $P(-1,5 < X < 2,35)$.

2. Dans chacun des cas, calculer a sachant que X suit une $N(0,1)$
   a) $P(X < a) = 0,8238$ b) $P(X > a) = 0,0632$ c) $P(X < a) = 0,0268$.

Exercice 3.7

La variable aléatoire X suit une loi normale $N(18; 2,5)$. Calculer les probabilités suivantes : $P(X < 17)$; $P(X > 20)$ et $P(16 < X < 19,5)$.

Exercice 3.8

X suit une loi $N(68, 15)$. Déterminer a tel que $P(X < a) = 0,8315$.

Exercice 3.9

Déterminer les paramètres (espérance et écart type) d'une loi normale dont une variable aléatoire X qui suit cette loi, vérifie $P(X < 12) = 0,9772$ et
$P(X < 5) = 0,0668$.

Exercice 3.10

Soit X une va qui suit une loi $N(0;1)$ et soit $Y = -X$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3.11

Un candidat passant un examen est ajourné si sa note est inférieure à 7, passe un oral si sa note est comprise entre 7 et 12, est admis sans oral si sa note est supérieure à 12. On suppose que les notes suivent une loi normale de paramètre μ et σ.

1. On suppose $\mu = 9$ et $\sigma = 3$.
   (a) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit ajourné.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit admis sans oral.
   (c) Calculer la probabilité pour qu'un candidat passe l'oral.
   (d) On considère un ensemble de quatre candidats choisis au hasard. Quelle est la probabilité que deux de ces candidats soient ajournés ?
   (e) Déterminer l'intervalle centré en μ qui contient 96% des notes.
2. On suppose μ et σ inconnus. On souhaite admettre (sans oral) 15,87% des candidats et ajourner 6,68% des candidats.
   Déterminer les valeurs de μ et σ.

Exercice 3.12

Un modèle d'ordinateur est équipé d'une carte mère qui arrête le système dès que la température du processeur dépasse une valeur critique t, ajustable par l'utilisateur. Un laboratoire d'évaluation a déterminé que la température du processeur en fonctionnement est une variable aléatoire normale T, d'espérance 55°C et d'écart–type 10°C.

1. Calculer la probabilité d'arrêter le système si t est réglé sur 72°C.
2. Quelle valeur de t doit–on choisir pour avoir une probabilité 0.775 de fonctionner sans interruption ?

Exercice 3.13
Un étudiant de 2ème année d'IUT Informatique a un cours de mathématiques à 8 heures. Son réveil sonne à 7 heures et il met exactement 35mn pour se préparer. On suppose que la durée de son trajet domicile-IUT est une variable aléatoire X normale de moyenne 20mn et d'écart-type 10mn et que le temps passé à garer sa voiture est aussi une variable aléatoire normale Y de moyenne 10mn et d'écart-type 4mn, indépendante de la précédente.

1. Quelle est la loi de la variable $X + Y$?
2. Quelle est la probabilité que l'étudiant arrive avant l'heure à son cours ?
3. Comment doit-il régler la sonnerie de son réveil pour avoir 98% de chances de ne pas arriver en retard en cours ?

Exercice 3.14
Des étudiants, au nombre de 100, passent un examen comportant un écrit et un oral, ces deux épreuves étant notées de façon indépendante sur 20. Les notes d'écrit attribuées par le correcteur obéissent à la loi normale d'espérance 11,5 et d'écart-type 2. Quant aux notes d'oral distribuées par l'examinateur, elles obéissent à la loi normale d'espérance 13,3 et d'écart-type 2,5.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant ait la moyenne à l'écrit et à l'oral ?
2. Déterminer un intervalle centré sur l'espérance, dans lequel se trouve la moyenne empirique des notes à l'écrit avec une probabilité de 96%.
3. La note finale, sur 40, est la somme des deux notes d'écrit et d'oral.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire représentant la note finale, sans oublier de calculer son espérance et son écart-type.
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire représentant la note finale moyenne des 100 étudiants, sans oublier de calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 3.15
La taille d'un épi de blé dans un champ est modélisée par une variable aléatoire X de loi normale de moyenne 15 cm et d'écart-type 6 cm.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un épi ait une taille inférieure à 16 cm ? supérieure à 20 cm ?

2. Pour 10 épis prélevés avec remise, on note X_i, $i = 1, ...10$, la taille de chacun de ces épis. Quelle est la loi de la taille moyenne ? Calculer la probabilité que la taille moyenne de ces 10 épis appartienne à l'intervalle $[16; 20]$.

Chapitre 4

Théorème Central Limite

Exercice 4.1
120 personnes se font rembourser par une compagnie d'assurance. La somme versée à chacune est une variable aléatoire de moyenne 50 euros et d'écart-type de 30 euros. On suppose que ces sommes sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire S représentant la somme totale remboursée par la compagnie d'assurance.
2. Que peut-on dire de la loi de S ? Justifier la réponse.
3. Déterminer la probabilité pour que 6500 euros suffisent à effectuer tous les remboursements.

Exercice 4.2
Le temps nécessaire pour le décollage d'un avion de ligne est en moyenne de 5,5 minutes, avec un écart–type de 2,5 minutes. Il faut respecter un délai de sécurité de 3 minutes après chaque décollage. On note X le temps aléatoire nécessaire au décollage des 36 avions présents. Calculer les probabilités que ce temps soit

1. plus petit que 320 min
2. plus grand que 275 min
3. entre les deux.

Exercice 4.3
Chaque année, M. Durand effectue 2 fois par jour, 5 jours par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance 45 minutes et d'écart type 10 minutes. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes.

1. Écrire la variable aléatoire T représentant le nombre d'heures passées par M. Durand dans sa voiture au cours de l'année, en fonction des durées de chaque trajet.

2. Quelle est l'espérance mathématique et la variance de T ?
3. Quelle est la probabilité pour que M. Durand passe au moins 350 heures dans sa voiture au cours de l'année ?
4. On suppose maintenant que la loi de X est inconnue. Son espérance est toujours égale à 45 minutes et sa variance à 100 minutes.
   (a) Que peut-on dire de la loi de T ?
   (b) Combien doit-il faire de voyages pour que la probabilité qu'il passe moins de 300 heures dans sa voiture dans l'année soit égale à 0,95 ?

Exercice 4.4
La différence de prix d'une stock option de la Pilsdorff Beer Company sur deux jours consécutifs s'avère être une variable aléatoire centrée et de variance $\frac{1}{4}$. De plus, les variations sont indépendantes entre elles. Le premier jour de cotation, la valeur initiale est fixée à $Y_1 = 100$. Calculer la probabilité que la valeur au bout d'un an, notée Y_{365} soit plus grande que 100, 110 et 120 respectivement.

Exercice 4.5
Une géomètre britannique mesure la hauteur d'un falaise à Douvres (Dover, UK) au moyen d'un appareil à visée laser, dont la précision, i.e. l'écart-type est de 10 pieds. Elle envisage de faire plusieurs mesures du même site et de faire la moyenne.

1. Combien doit–elle faire de mesures pour que, avec une probabilité de 0,95, son résultat ne diffère pas de la vraie valeur de plus de 3 pieds ?
2. Quelle devrait être la précision de son appareil si elle ne veut prendre que 10 mesures ?

Exercice 4.6
Le gain obtenu par un candidat à un jeu d'une station de radio s'avère être une variable aléatoire X d'espérance 70 euros et d'écart–type 10 euros.
On accepte n candidats (indépendants les uns des autres) pour la session en cours et on note $\bar{X}_n$ la moyenne empirique des gains réalisés sur l'ensemble des candidats.

1. Quelle est l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$?
2. En utilisant le théorème central limite, déterminer le nombre de candidats qu'on doit admettre à concourir pour que cette moyenne ait une probabilité 0.95 d'être comprise entre 68.5 euros et 71.5 euros.

Exercice 4.7
Un viticulteur possède un grand nombre de pieds de vigne. Ceux–ci ont la probabilité $0,4$ d'être atteints par une maladie. On observe 450 pieds et l'on désigne par X le nombre de pieds malades dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité pour que $180 \leq X \leq 195$.

Exercice 4.8
Dans un monde imaginaire, une enquête a permis d'estimer que la probabilité qu'une lettre, choisie au hasard dans le courrier d'une entreprise, parvienne à son destinataire, le lendemain vaut 0,5. 400 lettres sont expédiées par jour. On note X la variable aléatoire qui, à un jour choisi au hasard, associe le nombre de lettres qui parviendront à leur destinataire le lendemain. On suppose que les acheminements de ces lettres se font en toute indépendance.

1. Quelle est la loi de X (justifier la réponse) ? Préciser ses paramètres, son espérance, sa variance.
2. Par quelle loi peut-on approcher celle de X ?
3. En déduire une approximation de $P[X > 215]$ ainsi que de $P[X = 55]$.
4. Déterminer un intervalle $[a, b]$ centré sur l'espérance de X tel que $P(a \leq X \leq b) = 0,8$.

Exercice 4.9
La société TRAM souhaite lutter contre la fraude et effectue pour cela des contrôles des titres de transport. Paul utilise ce transport tous les matins. Il a une probabilité $p = 0,06$ d'être contrôlé. Il effectue 500 voyages par an. On appelle N la v.a. égale au nombre de contrôles effectués sur une année.

1. Quelle est la loi de N ? Justifier.
2. A l'aide d'une approximation de la loi de N, calculer la probabilité que Paul soit contrôlé entre 40 et 50 fois dans l'année.
3. Sachant que le prix d'un ticket et 1 euro et que le prix de l'amende est de 15 euros, quelle est la probabilité que Paul soit "perdant" en n'achetant jamais de tickets ?

Exercice 4.10
Dans un journal, on peut lire : “ on estime à 60 % le pourcentage de français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année." On considère 50 personnes prises au hasard, avec remise, parmi la population française. On

désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 personnes associe le nombre de celles qui ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.

1. Quelle est la loi de X ? Justifier la réponse. On donnera son espérance et l'écart type.
2. Donner la probabilité de l'événement $[X = 18]$ (ne pas la calculer numériquement).
3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Justifier la réponse. Calculer $P(24 \leq X \leq 28)$.
4. Déterminer la probabilité que plus de la moitié de ces 50 personnes ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.

Exercice 4.11
A l'entrée d'une station de métro, un marchand de journaux remarque qu'en moyenne, entre 8 heures et 9 heures, une personne sur 10 achète un journal.

1. Sachant qu'il passe 400 personnes entre 8 h et 9 h, indiquer la loi de probabilité du nombre X de journaux vendus pendant cette période (préciser les hypothèses).
2. Donner l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la probabilité de l'événement : $X = 42$.
4. Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi de X ? Utiliser cette approximation pour calculer les probabilités des événements : $35 \leq X \leq 45$, $29 \leq X \leq 52$.

Exercice 4.12
Il est notoire que les bobines d'allumage montées sur les moteurs K4M (Renault) sont fragiles. En conséquence, 10% des véhicules neufs connaissent une panne couverte par la garantie. La concession des Prés d'Arènes a vendu 200 véhicules en 2013.

1. Donner la moyenne et l'écart–type de la distribution échantillonnale de la proportion de pannes pour les véhicules vendus par cette concessions ?
2. Connait–on la loi de proportion échantillonnale ? Si oui, donner cette loi, sinon donner une approximation justifiée.
3. À l'aide de la question précédente, donner un intervalle $[0,1 - h\ ;\ 0,1 + h]$ dans lequel cette proportion échantillonnale a 80% de chances de se situer.

Exercice 4.13
Dans l'eau minérale Volvic, le taux de nitrates annoncé est de 6,3 mg/l. On admet que le véritable taux pour une bouteille donnée est une valeur aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ inconnue et d'écart–type 2 mg/l. Pour estimer μ, on mesure exactement le taux de nitrates pour 25 bouteilles achetées dans des magasins différents et on note $\bar{X}$ la moyenne empirique des valeurs observées.

Déterminer h tel que

$$\mathbf{P}(\mu - h \leq \bar{X} \leq \mu + h) = 0,95 \; .$$

Exercice 4.14
On veut observer la moyenne empirique de la récolte d'été de 64 plants de tomates. Pour chaque pied, on suppose que le poids de la récolte observé suit une loi d'espérance inconnue μ kg et d'écart–type connu 2 kg.

1. Donner la loi (exacte ou approchée) de cette moyenne empirique en fonction de μ.
2. Calculer h tel que la probabilité pour que la moyenne empirique diffère de μ de moins de h soit de 0,98.
3. On observe maintenant autant de plants que l'on veut. Quelle devrait être le nombre de plants à cultiver pour que h soit égal à 1.

Exercice 4.15
La teneur en sucre d'une variété d'abricot est une variable aléatoire d'espérance $15\,g$ et d'écart–type $2\,g$. Un traiteur prépare une salade de fruits avec 100 abricots indépendants. On note S_{t} la teneur en sucre totale de la salade.

1. Donner un modèle pour cette expérience, en précisant les notations des variables utilisées et les hypothèses.
2. Donner l'espérance et l'écart–type de S_{t}.
3. Calculer (une approximation de) la probabilité pour que S_{t} soit entre $1485\,g$ et $1535\,g$.