Problème du sac à dos

Exercice 1

① $\frac{b_1}{p_1} = \frac{8}{10}$; $\frac{b_2}{p_2} = \frac{6}{7} > \frac{8}{10}$: le produit 2 rapporte le plus par unité de poids

② Si x et y non entiers, solution :

$$b_2 \frac{20}{p_2} = 6 \times \frac{20}{7} = \frac{120}{7} \simeq 17,14 € \text{ pour } (x,y) = \left(0, \frac{20}{7}\right)$$

③ $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

④ $f(x,y) = 4x + 6y$

⑤ Contrainte : $5x + 7y \leq 20$

⑥ $U = 0$

$E \to F_1\ (y=2)$: $h(F_1) = f(1,2) = 16$: on élague F_1 et $\underline{U = 16}$

$E \to F_2\ (y=1)$

$E \to F_3\ (y=0)$

Evaluation de F_1 : il reste 6 kg disponible donc $x = 1$

Evaluation de F_2 : il reste 13 kg disponible donc $x = 2$

$U = 16$

$E \to F_1$ élagué

$E \to F_2\ (y=1)$: $h(F_2) = f(2,1) = 14 < U$: on élague F_2

$E \to F_3\ (y=0)$

Evaluation de F_3 : il reste 20 kg disponibles donc $x=4$

$U=16$

$$E \to F_1 \text{ élagué}$$
$$E \to F_2 \text{ élagué}$$
$$E \to F_3\ (y=0) : h(F_3) = f(4,0) = 16 = U : \text{on élague}$$

$$\boxed{\text{Deux solutions : } (x,y) = (1,2) \text{ ou } (4,0) \quad f_{max} = 16}$$

7) voir feuille suivante

Exercice 2

1) $\frac{b_1}{p_1} = 0,8$, $\frac{b_2}{p_2} = \frac{6}{7} \simeq 0,86$, $\frac{b_3}{p_3} \simeq 0,875$

Le produit 3 rapporte le plus par unité de poids.

2) Si x et y non entiers, solution :

$$b_3 \frac{20}{p_3} = 7 \times \frac{20}{8} = \frac{140}{8} = 17,5 €$$

3) Si $z=1$, il reste 12 kg disponibles.
Le produit 2 rapporte plus par unité de poids que le produit 1, d'où $y = \frac{12}{7}$.

$$h(F) = 6 \times \frac{12}{7} + 7 \times 1 = \frac{121}{7} \simeq 17,28 €$$

4) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$

5) $f(x,y,z) = 4x + 6y + 7z$

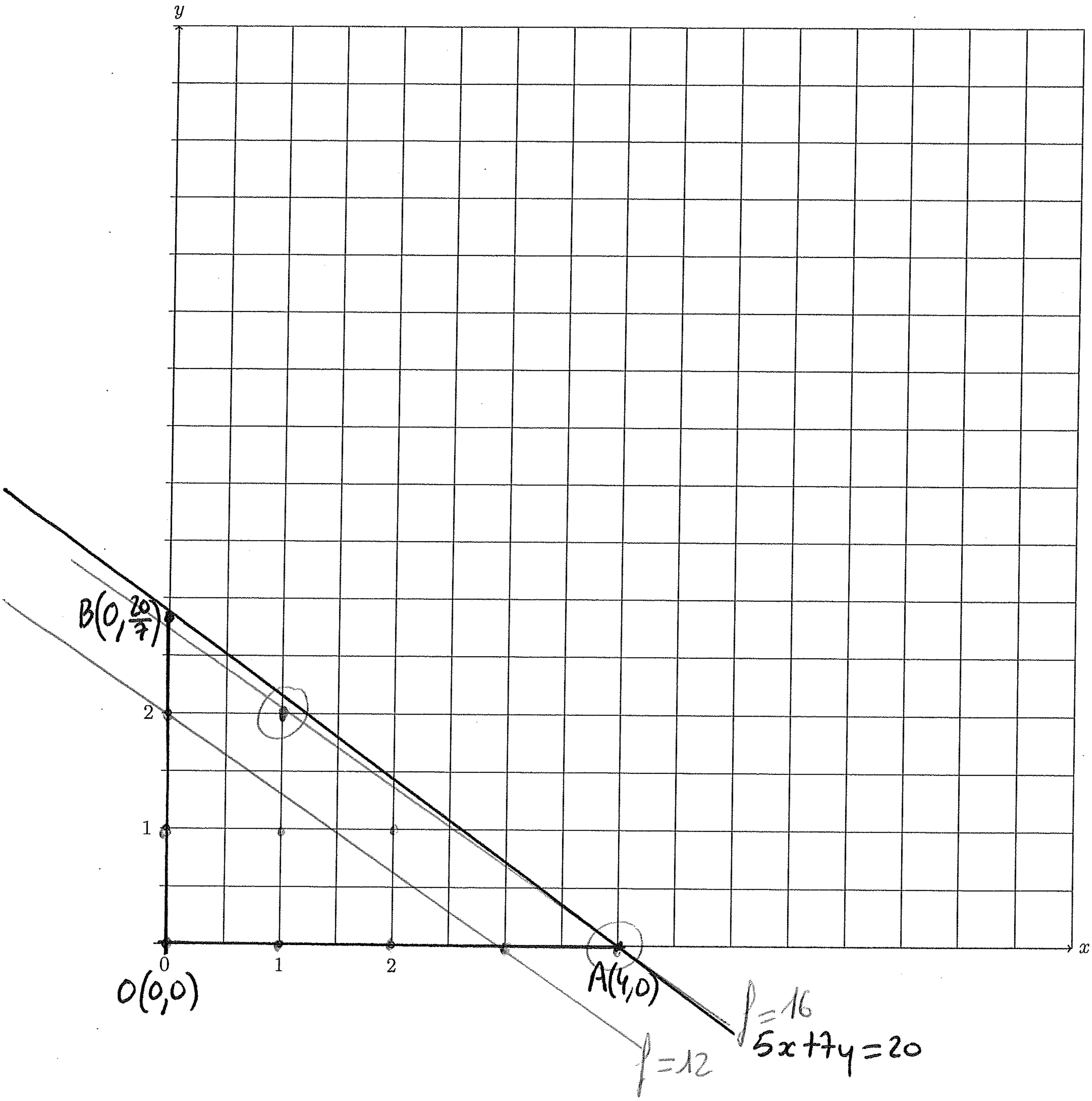
6) Contrainte : $5x + 7y + 8z \leq 20$

7) $U=0$ Evaluation de F_1 : il reste 4 kg disponibles, on ne peut rien rajouter.

$$E \to F_1\ (z=2) : h(F_1) = f(0,0,2) = 14 : \text{on élague } F_1 \text{ et } U=14$$
$$E \to F_2\ (z=1)$$
$$E \to F_3\ (z=0)$$

~~NOM :~~ ~~PRENOM :~~

~~Graphique de l'exercice 2~~ Exercice 1, question 7



$U = \cancel{14}$ $\quad U = 17$

$E \to F_1$ élagué

$E \to F_2\ (z=1) : h(F_2) > U$ (cf ③)

- $\to G_1\ (y=1) : h(G_1) = f(1,1,1) = 17 : U = 17$ on élague
- $\to G_2\ (y=0) : h(G_2) = f(2,0,1) = 15 < U :$ on élague

$E \to F_3\ (z=0)$

$\underline{U = 17}$

$E \to F_1$ élagué

$E \to F_2$ élagué

$E \to F_3\ (z=0) : h(F_3) = 6 \times \frac{20}{7} = \frac{120}{7} > U$

Evaluation de F_3 : il reste 20 kg disponibles

$E \to F_1$ élagué

$E \to F_2$ élagué

$E \to F_3\ (z=0)$

- $\to G_1\ (y=2) : h(G_1) = f(1,2,0) = 16 < U :$ on élague
- $\to G_2\ (y=1) : h(G_2) = f(2,1,0) = 14 < U :$ on élague
- $\to G_3\ (y=0) : h(G_3) = f(4,0,0) = 16 < U :$ on élague

$\boxed{\text{Solution : } f_{max} = 17 \text{ pour } (x,y,z) = (1,1,1)}$

Exercice 3

$$\frac{b_1}{p_1} = 2, \quad \frac{b_2}{p_2} = \frac{9}{5} = 1{,}8, \quad \frac{b_3}{p_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5 :$$

le produit 1 rapporte le plus par unité de poids

$$h(E) = 20 \times \frac{29}{10} = 58$$

~~U=0~~ U=55

$E \to F_1(x_1=2) : h(F_1) = 2 \times 20 + 9 \times \frac{9}{5} = 56{,}2$

- $\to G_1(x_2=1) : h(G_1) = f(2,1,2) = 55$
  U=55 et on élague
- $\to G_2(x_2=0) : h(G_2) = f(2,0,4) = 52 < U$
  on élague

$E \to F_2(x_1=1)$

$E \to F_3(x_1=0)$

U=55

$E \to F_1(x_1=2)$ élagué

$E \to F_2(x_1=1) : h(F_2) = 20 + 9 \times \frac{19}{5} = 54{,}2 < U$: on élague

$E \to F_3(x_1=0) : h(F_2) = 9 \times \frac{29}{5} = 52{,}2 < U$: on élague

$$\boxed{\text{Solution : } f_{max} = 55 \text{ par } (x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2)}$$

Exercice 4

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3$

i	1	2	3
b_i	4	6	7
p_i	5	7	8
$\frac{b_i}{p_i}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$

Le produit le plus rentable : 3

On peut mettre une quantité maximale

$$x_3 = \frac{22}{8} = 2,75$$

$$h(E) = 7 \times 2,75 = 19,25 \text{ €}$$

<u>$U=0$</u>

$E \to F_1\ (x_3 = 2) : h(F_1) = f(1,0,2) = 18$: on élague et <u>$U = 18$</u>

$E \to F_2\ (x_3 = 1)$

$E \to F_3\ (x_3 = 0)$

<u>$U=18$</u>

$E \to F_3(x_3 = 2)$ élagué

$E \to F_2\ (x_3 = 1) : h(F_2) = f(0,2,1) = 19 > U$: on élague et <u>$U = 19$</u>

$E \to F_3\ (x_3 = 0)$

(Evaluation de F_2 : il rste 14 kg ; $x_2 = \frac{14}{7} = 2$)

<u>$U=19$</u>

$E \to F_3(x_3 = 2)$ élagué

$E \to F_2\ (x_3 = 1)$ élagué

$E \to F_3\ (x_3 = 0) : h(F_3) = 6 \times \frac{22}{7} = \frac{132}{7} < U$: on élague

(Evaluation de F_3 : il rste 22 kg, $x_2 = \frac{22}{7}$)

$$\boxed{\text{Solution: } f_{max} = 19 \text{ pour } (x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 1)}$$

Exercice 4

② $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$

i	1	2	3
b_i	5	6	7
p_i	5	7	6
$\frac{b_i}{p_i}$	1	<1	>1

Le produit le plus rentable : 3

On peut mettre une quantité maximale

$x_3 = \frac{20}{6}$

$h(E) = 7 \times \frac{20}{6} = \frac{140}{6} \simeq 23{,}33$

$\underline{U=0}$

$E \to F_1\ (x_3=3) : h(F_1) = f(0,0,3) = 21$: on élague et $\underline{U=21}$

$E \to F_2\ (x_3=2)$

$E \to F_3\ (x_3=1)$

$E \to F_4\ (x_3=0)$

$\underline{U=21}$

$E \to F_1\ (x_3=3)$ élagué

$E \to F_2\ (x_3=2) : h(F_2) = 5 \times \frac{8}{5} + 7 \times 2 = 22 > U$

- $F_2 \to G_1\ (x_1=1)$: $h(G_1) = f(1,0,2) = 19 < U$: on élague
- $F_2 \to G_2\ (x_1=0)$: $h(G_2) = f(0,1,2) = 20 < U$: on élague

$E \to F_3\ (x_3=1)$

$E \to F_4\ (x_3=0)$

(Evaluation de F_2 : il reste 8 kg)

$\underline{U=21}$

$E \to F_1\ (x_3=3)$ élagué

$E \to F_2\ (x_3=2)$ élagué

$E \to F_3\ (x_3=1) : h(F_3) = 7 \times 1 + 5 \times \frac{14}{5} = 21 = U$

- $F_3 \to G_1\ (x_1=2)$: $h(G_1) = f(2,0,1) = 17 < \underline{U}$
- $F_3 \to G_2\ (x_1=1)$: $h(G_2) = f(1,1,1) = 18 < \underline{U}$
- $F_3 \to G_3\ (x_1=0)$: $h(G_3) = f(0,2,1) = 19 < \underline{U}$

$E \to F_4\ (x_3=0)$

$\underline{U=21}$

$E \to F_1$ élagué

$E \to F_2$ élagué

$E \to F_3$ élagué

$E \to F_4\ (x_3=0) : h(F_4) = f(4,0,0) = 20 < U$: on élague

$$\boxed{\text{Solution : } f_{max} = 21 \text{ pour } (x_1, x_2, x_3) = (0,0,3)}$$