Géométrie analytique dans le plan

L'objectif de ce cours est de rappeler les principales formules de géométrie analytique dans le plan.

1) Points et Vecteurs:

Intuitivement, on peut définir le plan euclidien $\mathcal{P}$ comme étant un ensemble de points pour lesquels on peut mesurer les distances et les angles. Un point sert à indiquer une position. Il n'y a aucune opération algébrique sur les points du plan. On peut associer à ce plan euclidien un plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sous-jacent. Ce plan vectoriel contient tous les vecteurs du plan. Il est muni de la multiplication d'un vecteur par un réel et de l'addition des vecteurs. Un vecteur est défini par sa direction son sens et sa longueur. Un vecteur sert à indiquer un déplacement et n'a donc pas de position.

Le lien entre le plan euclidien et le plan vectoriel est le suivant:

- Le déplacement du point A vers le point B correspond à un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.
- Inversement pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan vectoriel et pour tout point A du plan euclidien, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ (on note parfois $A + \overrightarrow{u} = B$)

a) Coordonnées d'un point du plan dans un repère; repère canonique:

Soient 3 points du plan **non alignés** O, I et J. En posant $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ on définit un repère du plan $\mathcal{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Nous avons vu, dans le module "outils fondamentaux" du BUT1 semestre 1 qu'un point A du plan euclidien était entièrement identifié par la donnée d'une matrice 2×1 $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ dans le repère canonique $\mathcal{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x_A \overrightarrow{i} + y_A \overrightarrow{j}$$

.

On dira que x_A et y_A sont les coordonnées du point A dans le repère $\mathcal{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Cette définition des coordonnées d'un point reste vraie dans un repère quelconque du plan.

Si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont représentés par des flèches perpendiculaires et de longueur 1 on dira que le repère est **orthonormal**. Le point O est un point quelconque du plan, fixé une fois pour toute. Une fois choisi un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on dira que ce repère est le repère **canonique** du plan euclidien. Il permet d'identifier le plan géométrique à l'ensemble des couples de $\mathbb{R}^2$: le couple de réel (x, y) correspondra au point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère canonique.

b) Coordonnées d'un vecteur dans une base; base canonique:

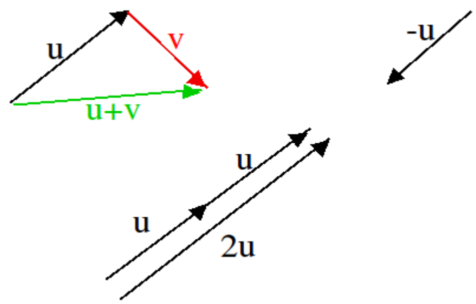
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan vectoriel est entièrement défini par la matrice colonne 2×1 de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_c = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

$$\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x_u \overrightarrow{i} + y_u \overrightarrow{j}$$

.

On dira que x_u et y_u sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base canonique. Cette définition des coordonnées d'un vecteur reste vraie dans une base quelconque du plan vectoriel.

Comme pour les points du plan affine euclidien, on peut donc identifier tout vecteur géométrique à un couple de $\mathbb{R}^2$. Cependant, alors qu'il n'y a aucune opération matricielle ayant un sens géométrique avec les coordonnées d'un point, les opérations matricielles usuelles entre les matrices colonnes de vecteurs ont un sens géométrique:



La somme matricielle $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$ correspond à l'addition géométrique $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ des vecteurs.

La multiplication d'une matrice par un réel $\lambda \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_u \\ \lambda y_u \end{pmatrix}$ correspond à la multiplication $\lambda \overrightarrow{u}$ d'un vecteur par un réel.

On rappelle les propriétés suivantes:

si un point M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et N a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le même repère, alors le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$ dans la **base** $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

.

La relation de Chasles:
Pour tous points A, B et C :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2) Vecteurs colinéaires:

On dira que deux vecteurs géométriques sont colinéaires ssi les flèches qui les représentent sont parallèles.
On peut traduire cette notion géométrique de la manière algébrique suivante:

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont colinéaires ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$

.

Cette dernière égalité signifie que les coordonnées de ces deux vecteurs sont proportionnelles. On peut traduire cette proportionnalité avec le déterminant:

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ deux vecteurs du plan $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont colinéaires ssi $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v = 0$

.

(cette propriété reste vraie même avec des coordonnées dans un repère qui n'est pas orthonormal).

Remarque: le vecteur nul du plan est colinéaire à tous les autres.

3) Vecteurs orthogonaux et norme d'un vecteur:

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est la longueur de ce vecteur. Elle est notée $\|\overrightarrow{u}\|$ et est évidemment positive ou nulle. Dans un plan vectoriel "euclidien" muni d'une **base orthonormale** $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est donnée par:

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

.

On a les propriétés immédiates suivantes:

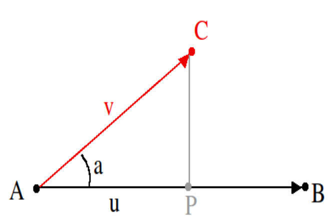
- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$
- $\left\|\overrightarrow{0}\right\| = 0$
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$ (inégalité triangulaire)

Dans un plan vectoriel "euclidien" munit d'une **base orthonormale** $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on définit **le produit scalaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de la façon suivante:

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = x_u x_v + y_u y_v$$

.

Interprétation géométrique du produit scalaire:



Avec les notations du schéma ci-dessus on a

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos(a) = \overline{AP} \times \overline{AB}$$

avec $AB = \|\overrightarrow{u}\|$, $AC = \|\overrightarrow{v}\|$ et P le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
On a $\overline{AP} \times \overline{AB} = AP \times AB$ si $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens.
Sinon $\overline{AP} \times \overline{AB} = -AP \times AB$

remarque:

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}$$

Définition:

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul
(le vecteur nul est donc orthogonal à tous les autres)

Géométriquement cela signifie que les flèches représentant ces deux vecteurs sont portées par des droites perpendiculaires.

Régles de calculs du produit scalaire:

- $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$ (commutativité du produit scalaire)
- $\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$ (distributivité du produit scalaire sur l'addition des vecteurs)
- $(a\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = a\,(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})$ (a est un nombre réel quelconque)

4) Bases du plan vectoriel et changement de bases:

Dans le plan vectoriel 2 vecteurs non colinéaires forment une base:

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan vectoriel $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v \neq 0$ (les deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires)
(x_u, y_u, x_v, y_v sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base canonique).

Changement de base:

Soient deux vecteurs du plan $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ non colinéaires.

Considérons la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du plan (donc distincte de la base canonique $\mathcal{B}_c = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$).

Soit un vecteur $\overrightarrow{w}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}_c = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ et celles dans $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$:

1. on a par définition des coordonnées dans $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$: $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$
2. en réécrivant matriciellement cette égalité dans la base $\mathcal{B}_c = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right))$ on obtient:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_u + bx_v \\ ay_u + by_v \end{pmatrix}$$
3. Puis avec le produit matricielle on obtient l'égalité:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$
On pose $M = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ la matrice ayant pour colonnes les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base canonique.
4. En inversant la matrice M on obtient finalement:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_C}$$

.

5) Droites dans le plan affine:

a) Equations paramétrées et équations cartésiennes d'une droite affine:

Une droite affine Δ du plan est entièrement définie par la donnée d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ et d'un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t \times \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t \times x_u \\ y = y_A + t \times y_u \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Le dernier membre de cette suite d'équivalences est **une équation paramétrée** de la droite Δ . Le paramètre est noté t et peut prendre toutes les valeurs réelles.

On obtient **une équation cartésienne** de la droite Δ en utilisant le déterminant de deux vecteurs pour traduire la colinéarité:

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_u x - x_u y - x_A y_u + y_A x_u = 0$

Remarque:

Aucune des deux équations précédentes n'est unique. En effet, pour une même droite Δ , il y a une infinité de points A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ permettant de définir cette droite.

b) Equation cartésienne d'une droite D passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ (la direction de $\overrightarrow{n}$ est perpendiculaire à celle de D):

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)\, x_n + (y - y_A)\, y_n = 0 \Leftrightarrow x_n x + y_n y - (x_n x_A + y_n y_A) = 0$

6) Repère du plan affine et changement de repère:

Le plan affine est muni du repère canonique $\mathcal{R}_c = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_C}$ un point du plan dont les coordonnées sont données dans le repère canonique.

On se donne un autre repère $R = (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du plan affine ($A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_c}$ est donc un point quelconque du plan et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_c}$ deux vecteurs non colinéaires du plan vectoriel). On souhaite calculer les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_R$ du point M dans ce nouveau repère en fonction de x et y :

1. Par définitions des coordonnées dans un repère on a l'égalité suivante:

$$\overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v}$$

2. En passant à l'écriture matricielle de cette égalité vectorielle on obtient:

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_c} = M\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_R$$

   En posant $M = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ la matrice ayant pour colonnes les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base canonique (mêmes notations que pour le changement de base).

3. En inversant M on obtient l'égalité matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_R = M^{-1}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_c}$$

7) Distance entre deux points du plan cartésien:

Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ deux points du plan dont les coordonnées sont données dans un **repère orthonormal**. Alors la distance entre ces deux points est données par:

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

.

8) Equations cartésiennes de cercles:

Dans le plan cartésien muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$ on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et de rayon $r > 0$:
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow CM = r \Leftrightarrow CM^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$
Le dernier membre est une équation cartésienne du cercle.

- équations paramétrées de cercles.
- il y aura un autre chapitre pour la géométrie dans l'espace: vecteurs coplanaires, équations cartésiennes et paramétriques de plans et de droites, sphères,...