Coloration

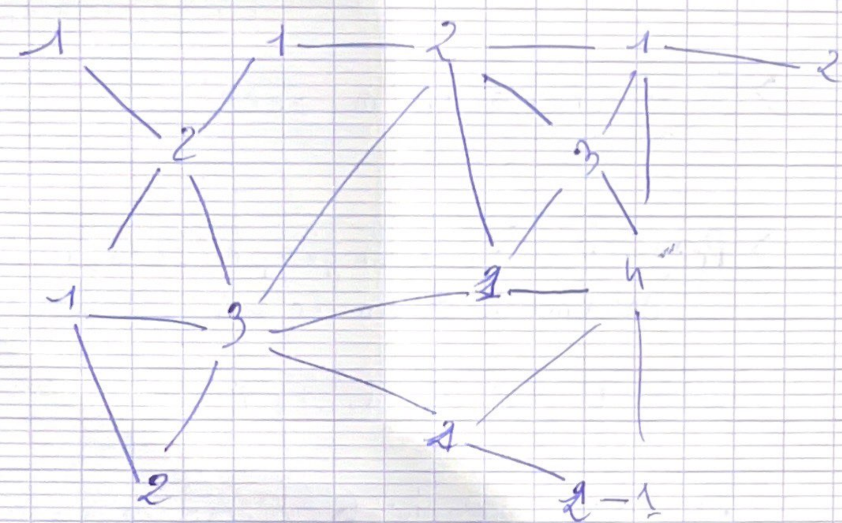
Definitions

> Om appelle coloration des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet. Une coloration utilisant k couleur est appelé k-coloration

> Une coloration est valide lorsque 2 sommets adjacents n'ont pas la même couleur

> Etant donné un graphe G, on appelle nombre chromatique de G, le plus petit nombre de couleur nécessaire à une coloration valide de ses sommets. On note $\chi(G)$ ce nombre

> Une coloration valide qui utilise $\chi(G)$ couleur optimale



B) Encadrement du nombre chromatique

> Si G est d'ordre n on a:
$\chi(G) \leqslant n$

> Propriété: Soit G un graphe et $\Delta(G)$ le degré maximum d'un de ses sommets.

Alors $\chi(G) \leqslant \Delta(G)+1$

> Pour tous graphe G, connexe qui n'est pas complets et ni un cycle impair on a:

$\chi(G) \leqslant \Delta(G)$

Propriété:

> Si on note $\omega(G)$ l'ordre maximum d'un sous graphe complet de G alors:

$\chi(G) \geqslant \omega(G)$

Algorithme Valide

Donnée: graphe G noté $(x_1, x_2, \dots x_m)$
Ensemble de couleur $(1, 2, 3, \dots)$

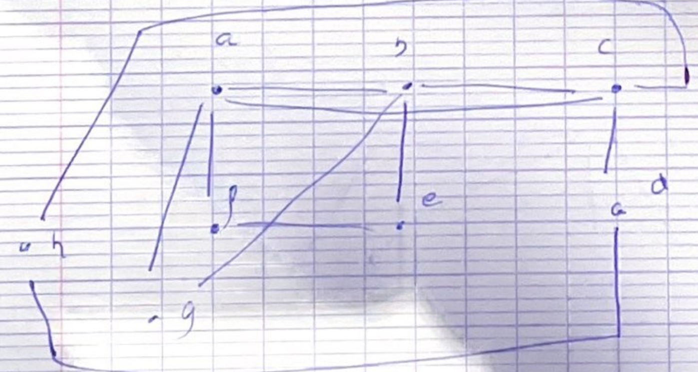
Résultat: un coloration valide de G

Pour i de 1 à m:
  Affecter au sommet x_i la + petite couleur non déjà affecter à ceux des sommets $(x_1, x_2, \dots x_{m-1})$ qui lui sont adjacents
Fin Pour

Retourne le graphes + couleur

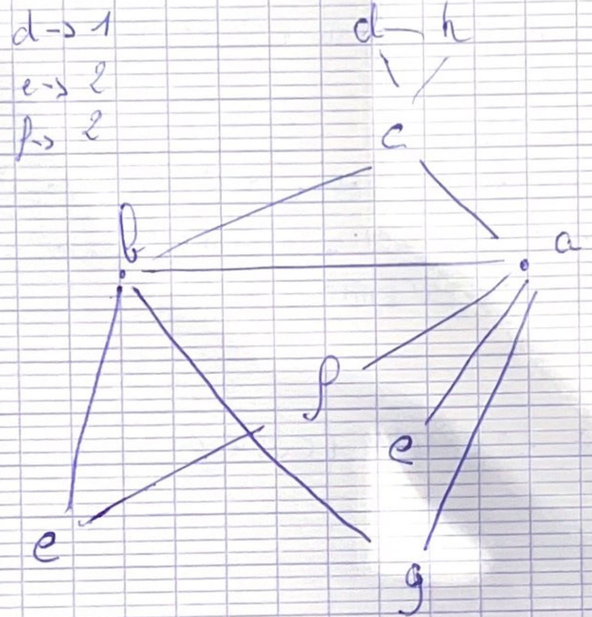
Exercice

G({a, b, c, d, e, f, g, h},
{ab, ac, af, ag, bg, be, bc, ch, cd, dh, ef})

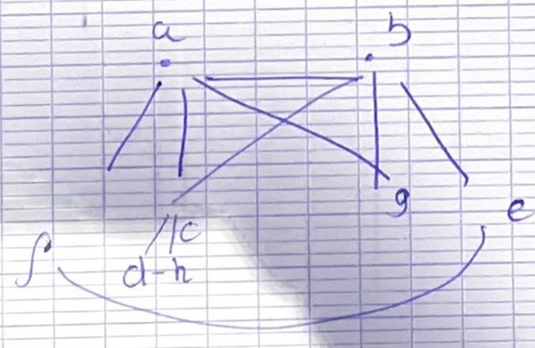


Tri des degrés:

a -> 4
b -> 4
c -> 3
d -> 1
e -> 2
f -> 2



min = 3 (triangle)
max = 4 (deg max)



Méthodes d'optimisation

Colorations des arrêtes.

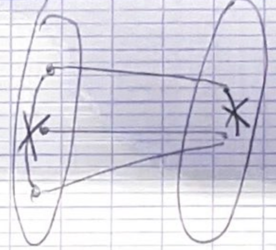
Coloration valide des arrêtes d'un graphes toute attribution d'une couleur à chaque arête de ce graphe, de sorte que 2 arête aient 2 couleur diff.

Un graphe G, ⊕ indice chromatique de G = plus petit nb de couleur à une coloration valide.

Théorème de Konig (1916) pour tout graphe bi-parti G, indice chromatique = ⊕ haut degré d'un sommet.

Théorème de Vising (1964) Indice chromatique de G est comprises entre ~~de~~ le degré maximum de ses sommets et ce degré + 1

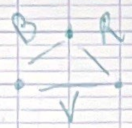
° Graphe Biparti



Exemple de Koning:

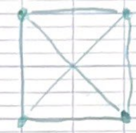
degré maximum : 2
donc indice chromatique : 2

Exemple de Vising:



deg max = 2

$X(G) = 2+1 = 3$



deg max = 3

$X(G) = 3$.

Le problème des 4 couleurs.

Pour un graphe planaire (sans croissement d'arretes) alors il faudrait au maximum 4 couleur.