Géométrie 2D (version provisoire)

Programmation Graphique

Abdelkader Gouaïch

2023/2024

Introduction

Définition de la géométrie

La géométrie est une discipline des mathématiques consacrée à l'étude des propriétés, des lois invariantes et des relations entre les objets géométriques. Ces objets sont définis par des éléments fondamentaux tels que les points, les lignes et les plans. Au-delà de ces éléments, la géométrie s'intéresse aux propriétés préservées à travers diverses transformations géométriques, notamment les rotations, les translations, les réflexions, les projections et les homothéties.

La démarche mathématique en géométrie

La démarche géométrique est intrinsèquement axiomatique, ce qui la rapproche étroitement de la logique et de l'algèbre.

Voici comment elle se déroule :

- Introduction de primitives sans nécessairement justifier leur existence initiale.
- Établissement de règles ou axiomes régissant ces primitives, sans justification préalable.
- Utilisation de schémas de déduction pour inférer de nouveaux faits à partir de faits établis.

Bien que la géométrie ait commencé par traiter des problèmes concrets liés à notre perception de l'espace, elle s'est rapidement émancipée de toute réalité tangible pour forger sa propre réalité abstraite, dans le but de déduire des résultats spécifiques à cet univers conceptuel.

Pour illustrer cette abstraction, considérons l'équation emblématique d'Albert Einstein, qui découle de propriétés géométriques. Les règles de la géométrie différentielle ont permis à Einstein de concevoir un espace géométrique quadridimensionnel — l'espace-temps — et de lui attribuer une métrique spécifique, en accord avec certains principes physiques. Ce qui a suivi n'était qu'une série de raisonnements mathématiques et logiques aboutissant à une corrélation de propriétés physiques exprimée par la célèbre formule $E = mc^2$.

Il est essentiel de comprendre que la géométrie ne se limite pas à des représentations graphiques. Elle aspire plutôt à l'abstraction des concepts pour élaborer des théorèmes généraux et parfois étonnants. Elle est capable de concevoir des objets géométriques qui dépassent notre intuition mais que nous pouvons néanmoins manipuler avec rigueur grâce à notre raisonnement.

Les notions fondamentales

Nous allons présenter les notions fondamentales qui sont communes aux différentes branches de la géométrie, bien que leur signification puisse varier selon le contexte. Pour ancrer notre compréhension, nous aborderons la signification de ces notions dans le cadre de la géométrie euclidienne, tout en gardant à l'esprit que cette interprétation n'est qu'un exemple parmi d'autres. Par exemple, la notion de point dans la géométrie projective diffère de celle de la géométrie euclidienne.

Le point

Il représente l'élément de base qui spécifie une position unique dans l'espace géométrique. En géométrie euclidienne, un point est défini par une localisation précise sans dimension ni volume.

La ligne

Une ligne est une collection de points unis par une relation spécifique. Dans le contexte euclidien, une droite est composée d'une infinité de points disposés de manière à former une suite ininterrompue et alignée.

Le plan

Il s'agit d'un ensemble de lignes liées par la relation de coplanarité. En géométrie euclidienne, un plan est déterminé par trois points non alignés, c'est-à-dire non colinéaires.

La relation d'incidence

Cette relation établit un lien entre les points et les lignes d'une part, et entre les lignes et les plans d'autre part. Chaque système géométrique définit cette relation par des axiomes spécifiques. En géométrie euclidienne, par exemple, les axiomes de construction stipulent comment une ligne peut être tracée à partir de deux points distincts ou comment un plan peut être défini à partir de trois points non alignés. Ces axiomes permettent de déterminer si un point appartient à une ligne ou si une ligne se trouve dans un plan.

Les transformations

Il s'agit d'opérations fonctionnelles qui associent les points d'une figure à de nouveaux emplacements. Lorsqu'une transformation est appliquée à une figure géométrique, sa forme peut changer, mais certaines propriétés restent inchangées. Par exemple, en géométrie euclidienne, la distance entre deux points reste constante lors de rotations ou de translations, mais pas nécessairement lors d'homothéties.

Considérons à présent l'angle formé par deux droites concourantes, c'est-à-dire qui se croisent. Cet angle reste invariant lors de translations, de rotations et même d'homothéties appliquées aux points des deux droites.

Géométrie Euclidienne

Notions Élémentaires

- **Point** : Un point représente une *position* unique dans l'espace. Il est souvent désigné par une lettre majuscule et est considéré comme n'ayant ni taille, ni forme, ni dimension, soit de dimension zéro.
- **Ligne** : Une ligne est un ensemble infini de points alignés. Elle est définie par deux points distincts et s'étend indéfiniment dans les deux sens. En géométrie euclidienne, une ligne est souvent désignée par une lettre minuscule et est considérée de dimension un.
- **Plan** : Un plan est une surface qui s'étend à l'infini et contient une infinité de lignes coplanaires. Il est défini par trois points non alignés ou par une ligne et un point qui n'appartient pas à cette ligne. Le plan est de dimension deux.

Angle et Distance

- **Distance** : La distance entre deux points est la longueur du plus court chemin les reliant, généralement un segment de droite. En géométrie euclidienne, la distance est mesurée à l'aide d'une règle.
- **Angle** : Un angle est formé par deux rayons partageant une origine commune, nommée sommet de l'angle. L'angle est mesuré en degrés ou en radians. Les angles peuvent être classifiés comme aigus, droits, obtus, plats ou pleins, selon leur mesure. En géométrie euclidienne, l'angle est mesuré avec un rapporteur.

Objets Géométriques Élémentaires

- **Cercle** : Un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un point central, le centre, à une distance donnée, le rayon. En géométrie euclidienne, un cercle est tracé à l'aide d'un compas.

- **Triangle** : Un triangle est une figure formée par trois segments de droite joignant trois points non alignés. Les triangles sont classifiés selon la longueur de leurs côtés (équilatéral, isocèle, scalène) ou la mesure de leurs angles (aigu, rectangle, obtus).
- **Quadrilatère** : Un quadrilatère est une figure formée par quatre segments de droite reliant quatre points. Les quadrilatères sont classifiés en diverses formes, telles que le carré, le rectangle, le losange et le parallélogramme.
- **Polygone** : Un polygone est une figure plane fermée composée de trois segments de droite ou plus. Les polygones peuvent être réguliers (tous les côtés et angles sont égaux) ou irréguliers.

Transformations Usuelles

Translation

- **Description** : Une translation déplace chaque point d'une figure d'une distance fixe dans une direction donnée. Elle est représentée par un vecteur indiquant la direction et la magnitude du déplacement.
- **Propriétés** : La translation est une transformation isométrique, préservant les distances et les angles. Elle est commutative et associative, permettant l'application de multiples translations sans se soucier de l'ordre.

Rotation

- **Description** : Une rotation est un mouvement circulaire d'une figure autour d'un point fixe, le centre de rotation, par un angle défini.
- **Formalisation** : Soit θ l'angle de rotation et O le centre de rotation. Chaque point P est alors déplacé en un point P' tel que $\angle POP' = \theta$.
- **Propriétés** : La rotation est une transformation isométrique. Avec un centre de rotation fixe, elle est commutative et associative.

Réflexion

- **Description** : Une réflexion est un retournement d'une figure par rapport à une ligne, l'axe de réflexion.
- **Formalisation** : Soit l l'axe de réflexion. Chaque point P est transformé en un point P' de sorte que l soit la médiatrice du segment $[PP']$.
- **Propriétés** : La réflexion est isométrique mais non commutative et non associative. Deux réflexions successives par rapport à des axes parallèles équivalent à une translation, tandis que deux réflexions par rapport à des axes concourants équivalent à une rotation.

Les Axiomes

Les cinq axiomes suivants, formulés par Euclide dans “Les Éléments”, établissent les fondements de la géométrie euclidienne sans nécessiter de justification formelle. Ils servent de base à la déduction de théorèmes.

Axiome 1 : Existence de Points et de Droites

> Deux points distincts déterminent une unique droite.

Axiome 2 : Extension des Droites

> Une droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens.

Axiome 3 : Existence du Cercle

> Pour tout point O et toute distance r, il existe un cercle de centre O et de rayon r.

Axiome 4 : Égalité des Angles Droits

> Tous les angles droits sont égaux.

Axiome 5 : Postulat des Parallèles

> Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la première.

Résultats Importants

Théorème de Pythagore

En géométrie euclidienne, le théorème de Pythagore stipule que dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Théorèmes sur les Angles

- **Angles Alternes-Internes** : Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes sont égaux.
- **Angles Correspondants** : Dans la même configuration, les angles correspondants sont égaux.

Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès énonce qu'en présence de deux triangles semblables, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

La géométrie Euclidienne analytique

La géométrie euclidienne analytique enrichit la géométrie euclidienne classique en lui superposant une structure supplémentaire qui permet de localiser les points à l'aide de vecteurs. Cette structure supplémentaire est désignée sous le terme d'espace vectoriel et elle réinterprète les concepts de la géométrie euclidienne en termes d'opérations algébriques sur des vecteurs. Ainsi, les équations algébriques se substituent aux instruments traditionnels tels que la règle, le rapporteur et le compas.

Concepts Fondamentaux

Coordonnées Cartésiennes

Le système de coordonnées cartésiennes est un dispositif de repérage orthogonal qui facilite la représentation de points dans un espace bidimensionnel ou tridimensionnel. Pour déterminer la position d'un point dans l'espace géométrique, on décompose le trajet depuis l'origine en une succession de déplacements alignés sur les directions des vecteurs de base. La séquence de ces déplacements correspond précisément à la localisation du point cible.

Le terme *analyse* s'éclaire à la lumière de son étymologie : "analyser" signifie décomposer une entité complexe en ses éléments constitutifs pour en saisir la structure.

Ainsi, nous décomposons la localisation spatiale d'un point en déplacements élémentaires qui, cumulés, désignent la même localisation. Les directions de ces déplacements élémentaires sont définies par des vecteurs constituant *la base*, et les longueurs de ces déplacements déterminent *les coordonnées*.

Plus formellement, un point $ P $ dans le plan euclidien est associé à un vecteur de coordonnées (x, y). Pour localiser le point, on se réfère à un point fixe, *l'origine*, et à des vecteurs de direction, *la base*. Cette configuration est formalisée par la notion de repère cartésien : $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où O est un point particulier dont les coordonnées sont $(0, 0)$.

Vecteurs

Les vecteurs sont des entités mathématiques caractérisées par une magnitude et une direction, utilisées pour représenter des déplacements ou des forces.

Un vecteur $\vec{v}$ peut être exprimé par des coordonnées relatives à une base fixe. Ce sont les déplacements élémentaires le long des vecteurs de base qui déterminent la direction et l'amplitude du vecteur.

Considérons une base composée de deux vecteurs non colinéaires $(\vec{i}, \vec{j})$. Représenter un vecteur $\vec{v}$ par les coordonnées (x, y) signifie que la relation suivante est vérifiée :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Cette logique peut être étendue à une base tridimensionnelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où les vecteurs ne sont ni coplanaires ni colinéaires deux à deux.

Dans un espace tridimensionnel, représenter un vecteur $\vec{v}$ par les coordonnées (x, y, z) implique que la relation suivante est satisfaite :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Équations de Lignes et de Courbes

La géométrie analytique convertit les objets géométriques en équations algébriques régies par les règles des espaces vectoriels. Elle offre ainsi un cadre de raisonnement puissant, libéré des contraintes liées à l'usage de la règle, du compas et du rapporteur.

Les objets géométriques et leurs représentations algébriques sont en correspondance. Par exemple, une ligne droite dans le plan est représentée par une équation linéaire de la forme $y = mx + b$. Un point appartient à la droite si et seulement s'il satisfait à cette équation. De manière plus générale, les courbes et les surfaces sont exprimées par des systèmes d'équations. L'incidence géométrique se traduit par l'appartenance à l'ensemble des solutions du système.

Axiomes

Les axiomes de la géométrie euclidienne sont reformulés en termes de coordonnées cartésiennes et d'équations. Par exemple, le postulat des parallèles peut être exprimé en termes de colinéarité des vecteurs directeurs des droites.

Espaces Vectoriels

Les espaces vectoriels constituent un cadre d'étude pour les vecteurs et les transformations linéaires, ayant une importance particulière en géométrie.

C'est la géométrie qui a inspiré les premiers travaux sur les espaces vectoriels au XVIIe siècle, notamment par René Descartes. Ces travaux ont eu des applications en physique, contribuant au développement de la mécanique et de l'électromagnétisme, et ont posé les fondations des théories de la relativité et de la mécanique quantique au XXe siècle.

Nous aborderons les espaces vectoriels plus en détail ultérieurement. Pour l'instant, présentons intuitivement les concepts clés.

Vecteur :

Un vecteur est un élément d'un ensemble qui obéit à certaines règles :

- L'addition de deux vecteurs donne un vecteur.
- La multiplication d'un vecteur par un scalaire donne également un vecteur.

Base :

Une *base* d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs permettant de générer tous les autres vecteurs par combinaison linéaire. Cet ensemble doit être minimal en termes de cardinalité.

Bien que les bases d'un espace vectoriel ne soient pas uniques, elles partagent toutes la même cardinalité.

On peut se demander s'il est possible de convertir les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ d'une base B à une autre base B'. Cette conversion est réalisée par une transformation linéaire.

Transformations Courantes

Translation La translation est le déplacement d'un point selon un vecteur donné.

Dans le plan, si $\vec{m} = (a, b)$, alors une translation $T\vec{m}$ est définie par :

$$T_{\vec{m}}(\vec{v}) = (x + a, y + b)$$

Rotation La rotation est la rotation d'un point ou d'un objet autour d'un point fixe à un angle donné.

Dans le plan, une rotation $R * \theta$ autour de l'origine à un angle θ est définie par :

$$R_\theta(\vec{v}) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

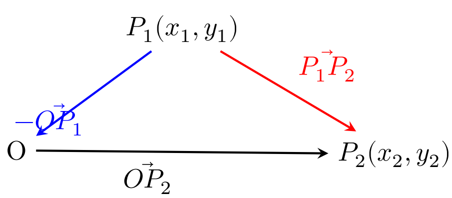
Homothétie (Dilatation) L'homothétie est un agrandissement ou une réduction proportionnelle d'un objet par un facteur donné.

Dans le plan, une homothétie $S(sx, sy)$ avec des facteurs sx et sy selon les directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est définie par :

$$S_{(sx,sy)}(\vec{v}) = (sx \cdot x, sy \cdot y)$$

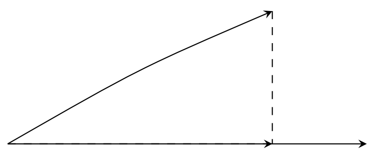
Résultats Importants

Distance et Produit Scalaire



La distance entre deux points est calculée en déterminant le vecteur les reliant, puis en calculant sa magnitude.

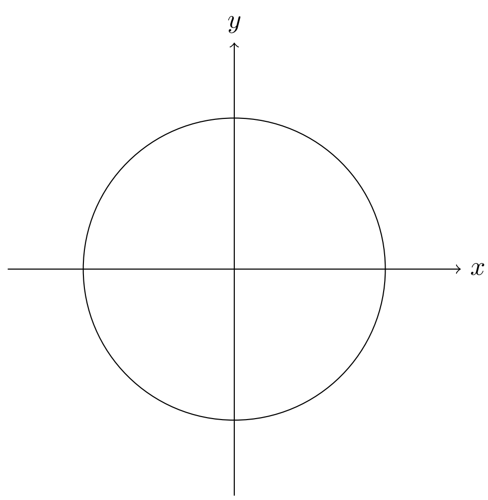
Le vecteur reliant deux points $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ est $\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, et la distance est $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



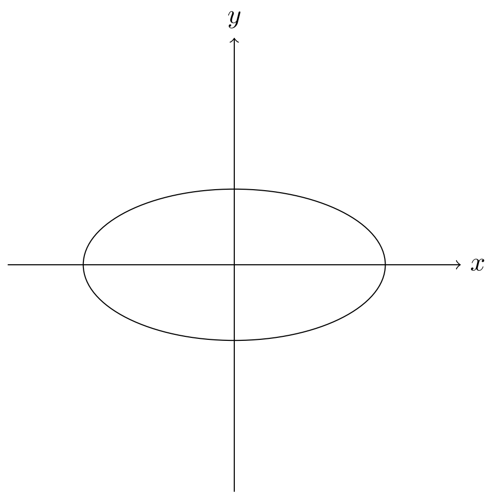
Le produit scalaire de deux vecteurs mesure leur "alignement" et est défini par $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \times |\vec{w}| \times \cos(\theta)$, où θ est l'angle entre les vecteurs. Si les vecteurs sont perpendiculaires, le produit scalaire est nul ; s'ils sont colinéaires, il est égal au produit de leurs magnitudes.

Équations de Coniques

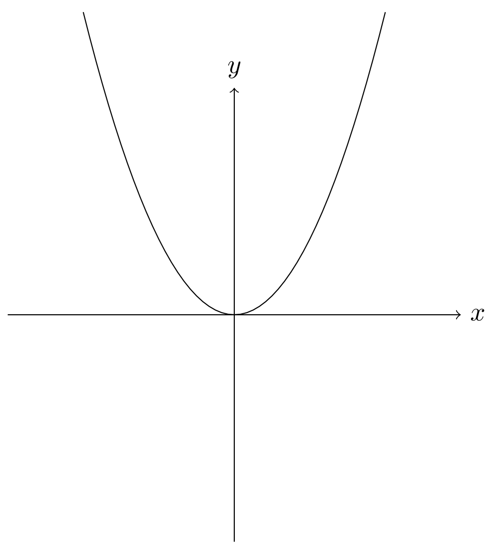
Les coniques sont des courbes obtenues en intersectant un cône avec un plan. Voici leurs équations dans le plan :



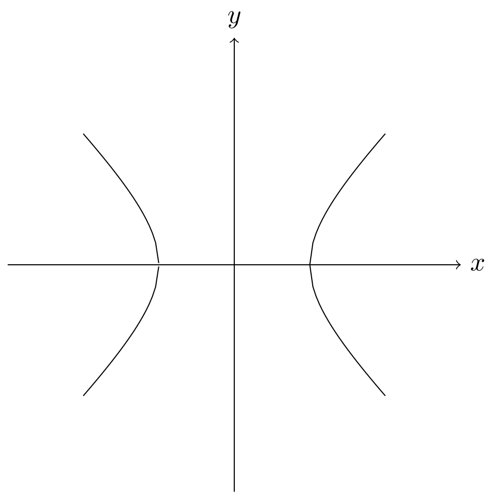
- Cercle centrée sur l'origine de rayon r: $x^2 + y^2 = r^2$



- Ellipse centrée sur l'origine de paramètres a, b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



- Parabole centrée sur l'origine de paramètres a, b, c: $y = ax^2 + bx + c$



- Hyperbole centrée sur l'origine de paramètres a, b: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ces équations définissent les figures géométriques en tant que sous-ensembles de points dont les coordonnées satisfont à des relations spécifiques.