Les Matrices

I) Définition et notation
II) Opérations
III) Rang d’une matrice
IV) Déterminant

I) Définition et Notation

- **<u>Exemple</u>**:

A est une matrice **réelle** à 2 lignes et 3 colonnes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients sont notés $a_{i,j}$ (ici $a_{2,3} = 0$)

On écrit $A = (a_{i,j})_{i \in \{1,2,\dots,n\}, j \in \{1,2,\dots,p\}}$

I) Définition et Notation (suite)

- **L'ensemble des matrices réelles** à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- **La taille** d'une matrice est le couple (n, p).

(on parle de matrices nxp)

- **Lorsque p=1**: matrice colonne.

- **Lorsque n=1**: matrice ligne.

- **Lorsque n=p**: matrice carrée

(l'ensemble des matrices carrées nxn est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

I) Définition et Notation (suite)

La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ a tous ses coefficients = 0 et on la note $0_{n,p}$.

- **La matrice identité** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée $\mathbb{I}_n$:

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Egalité de 2 matrices réelles

- $A = B \Leftrightarrow$ A et B sont de **même taille** et
  $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout couple (i,j)

- **transposition**

Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice nxp, **la transposée** de A est la matrice pxn ${}^tA=(a'_{i,j})$ avec $a'_{i,j}= a_{j,i}$.

II) Opérations:

- A) Addition dans $M_{n,p}$ (**R**):

Soient **A=($a_{i,j}$)** et **B=($b_{i,j}$)** deux matrices de **même taille** (n, p). On définit l'addition par:

A+B=($a_{i,j}$ + $b_{i,j}$) ← **Matrice nxp**

Propriétés:

L'addition des matrices est **associative** et **commutative**. $0_{n,p}$ est **l'élément neutre.**

II)Opérations(suite)

- A) Addition(suite):

Toute matrice **$A=(a_{i,j})$** a une **<u>opposée</u>** notée - **$A=(-a_{i,j})$**

<u>Soustraction</u>: A-B= **$(a_{i,j} - b_{i,j})$** =A+(-B)

${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$

II) Opérations(suites)

- B) **Multiplication par un réel k**:

Si **$A=(a_{i,j})$** $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$kA=(ka_{i,j})$ $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Propriétés: x et y réels, A et B matrices.

$(x+y)A=xA+yA$

$x(A+B)=xA+xB$

$(xy)A=x(yA)=xyA$

II) Opérations(suites)

- C) **Multiplication de 2 matrices:**

Attention à la taille des matrices!

Soit **A=($a_{i,j}$)** une matrice n x **p**

Soit **B=($b_{i,j}$)** une matrice **p** x **q**

Le produit C =A x B est une matrice **nxq** définie par **C=($c_{i,j}$)** avec:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

II) Opérations(suites)

- C) **Multiplication de 2 matrices (suite)**

Propriétés:

- $A \times (B+C) = AxB + AxC$
- $(B+C) \times A = BxA + CxA$
- $A \times (B \times C)=(A \times B) \times C$
- $(kA) \times B = k (A \times B) = A \times (kB)$

Lorsque ces opérations ont un sens.

(il faut faire attention à la taille des matrices)

II) Opérations(suites)

- C) **Multiplication de 2 matrices (suite)**

Propriétés (suite):

$^{t}(A\times B) = {}^{t}B \times {}^{t}A$

Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors $\mathbb{I}_n \times A = A \times \mathbb{I}_p = A$

- **Puissance d’une matrice carrée**:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice ***carrée.***

On note A^n le produit $A x A x \ldots x A$ (n fois).

Par convention $A^0 = \mathbb{I}_n$.

- <u>Matrices carrées inversibles</u>:

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** *ssi* il existe une matrice $\mathbf{A^{-1}}$ vérifiant: $\mathbf{A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \mathbb{I}_n}$

<u>Remarques</u>:

$(A^{-1})^{-1} = A$

Si A est **inversible**, son inverse est **unique**.

- Matrices carrées inversibles (suite)

Théorème:

Si A et B sont 2 **matrices carrées** d’ordre n **inversibles** alors AxB est inversible et

$(AxB)^{-1} = B^{-1}xA^{-1}$ et

$({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$

III)Rang d'une matrice

- A) <u>L-réduite échelonnée:</u>

La matrice **A=($a_{i,j}$)** $\in M_{n,p}$ (**R**) est dite **l-réduite échelonnée** ssi:

- **Toutes les lignes nulles** sont **au-dessous** des lignes non nulles.

- Dans chaque ligne non nulle **le premier élément non nul est 1** (« pivot »).

-Les pivots apparaissent en **ordre croissant par numéros de lignes et par numéros de colonne (« en escalier »)**

III)Rang d'une matrice (suite)

- A) L réduite échelonnée(suite)

<u>Théorème:</u>

Pour **toute** matrice **A**$\in$M$_{n,p}$ (**R**) il existe une **unique** matrice l-réduite échelonnée **B**$\in$M$_{n,p}$ (**R**) telle que B se déduise de A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note B=lré(A).

<u>Définition:</u>

le rang de A est le nombre de lignes non nulles de lré(A).

Opérations élémentaires sur les lignes.

- A) **Permutation** de la ligne n°i avec la ligne n°j (notée $L_i \leftrightarrow L_j$).

- B) **Multiplication** de la ligne n°i par k ($L_i \leftarrow kL_i$)

  (pour k $\neq$ 0)

- C) **Ajout** à la ligne i de la ligne j multipliée par k:

($L_i \leftarrow L_i + kL_j$)

- B) **Algorithme de Gauss-Jordan**:
- **Lré(A)** avec $\mathbf{A=(a_{i,j})} \in M_{n,p}(\mathbf{R})$.

pivot =1 et indice = 1

Tant que pivot $\leq$ p et indice $\leq$n faire

choisir un réel **x non nul** de la colonne pivot à partir de la ligne indice (si ce réel n'existe pas faire pivot = pivot+1 et recommencer Tant que)

permuter les lignes => **x** à la ligne indice

multiplier la ligne indice par 1/x

faire des ajouts sur les lignes (à partir de indice+1) pour n'avoir que des 0 sous le 1 de la colonne pivot

pivot = pivot+1 et indice = indice+1

Fin tant que

Retourne la matrice transformée Lré(A)

III)Rang d'une matrice (suite)

- B) **<u>Algorithme</u> de Gauss-Jordan**: (suite)

<u>Théorème:</u>

$\mathbf{A} \in M_n(\mathbf{R})$ inversible $\Leftrightarrow$ rg(A)=n

(et Iré(A)=I_n)

<u>En pratique</u>: pour rechercher $\mathbf{A}^{-1}$ on applique simultanément sur I_n les opérations faites sur A pour déterminer Iré(A). On utilise un tableau $\mathbf{[A \mid I_n]}$ (si Iré(A)=I_n la matrice A est inversible)

IV) Déterminant :

Déterminant d’une matrice 2X2 :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

A inversible ssi det(A) non nul

Déterminant d’une matrice nXn :$A=(a_{ij})$

On note D_{ij} le déterminant de la matrice obtenu à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Alors on définit récursivement pour $n \geq 2$ le déterminant d’une matrice carrée :

$$\det(A)=(-1)^{1+j}a_{1j}D_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}D_{2j}+\ldots+(-1)^{n+j}a_{nj}D_{nj}$$

Ce calcul est indépendant de l’indice de colonne $1 \leq j \leq n$ choisi

Propriétés du déterminant

1) Pour toute matrice A carrée nxn ($n \geq 1$) :

A inversible ssi det(A) non nul

2) det(AB)=det(A)*det(B) avec A et B deux matrices nXn

3) $det(A^t)=det(A)$

4) Si A contient une ligne ou une colonne nulle alors IAI=0

5) Si A contient 2 lignes (ou 2 colonnes) proportionnelles alors IAI=0

Propriétés du déterminant
(opérations élémentaire sur les lignes)

6) Lorsqu'on permute 2 lignes le déterminant change de signe.

7) Lorsqu'on multiplie une ligne par k le déterminant est multiplié par k

8) Lorsqu'à une ligne on rajoute un certain nombre de fois une autre le déterminant est inchangé

Propriétés du déterminant

9)

$|C_1 \ldots C_i + C'_i \ldots C_n| =$

$|C_1 \ldots C_i \ldots C_n| + |C_1 \ldots C'_i \ldots C_n|$

« Si la i$^{\text{ème}}$ colonne de A est la somme de deux matrices colonnes C_i et C'_i alors $|A|$ est la somme de 2 déterminants, l'un avec C_i, l'autre avec C'_i »