Géométrie analytique

dans le plan

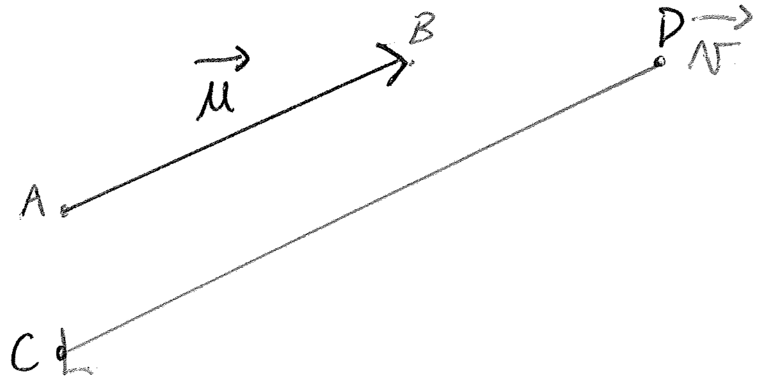
Vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ sont

<u>colinéaires</u>

ssi

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$



Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ alors

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$

<u>Equation paramétrique d'une droite affine (AB)</u> avec $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}-3-1\\4-2\end{pmatrix}\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Expression de la colinéarité à l'aide des coordonnées

Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ quelconque :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \parallel \vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\iff$$

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = 0$$

exemples:

1) • $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \nparallel \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ car $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 5 \times 2 = 2 \neq 0$

2) • Équation cartésienne de la droite (AB) avec $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $B\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$:

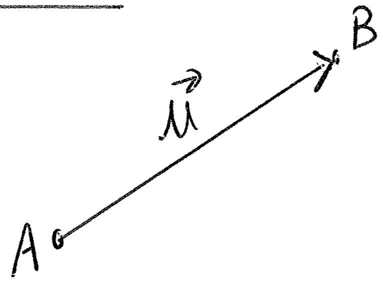
$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB} \iff \begin{vmatrix} x-1 & -3-1 \\ y-2 & 4-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x-1) \times 2 - (y-2)(-4) = 0$$

$$\iff \boxed{2x + 4y - 10 = 0}$$

Norme d'un vecteur

<u>La norme d'un vecteur</u> $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est <u>la longueur de</u> ce vecteur :



$$\|\vec{u}\| = AB$$
$$(\text{si } \vec{u} = \vec{AB})$$

Si $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est <u>orthonormale</u>

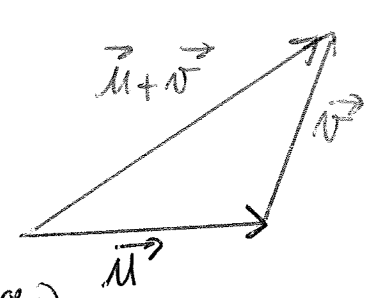
et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

- <u>propriétés</u> :

$$\|\vec{0}\| = 0$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$



- <u>distance entre 2 points</u> $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$

avec $\mathcal{R}$ un repère orthonormal,

$$\boxed{AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

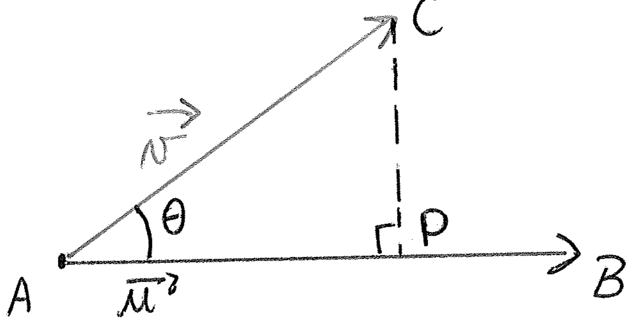
Produit scalaire

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormale

$\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v}$$

- interprétation géométrique :



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos\theta = \overline{AP} \times \overline{AB}$$

- propriétés :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$ avec $a \in \mathbb{R}$

définition : 2 vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul

Bases du plan vectoriel et changement de bases

Dans le plan vectoriel 2 vecteurs non colinéaires forment une base.

Changement de base :

Soient $B = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique
et $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ une base quelconque

avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}_B$

Soit $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$ un vecteur du plan

On cherche a et b les coordonnées de $\vec{w}$ dans B' :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{B'} \iff \vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\iff \boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{B'} = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}}$$