

# Potentiel de Hénon-Heiles et chaos

Romain Marcellin

# Sommaire

- ◊ Introduction
- ◊ Description mathématique du problème
- ◊ Méthodes numériques
- ◊ Résultats et analyse
- ◊ Conclusion

# Introduction



Michel Hénon  
1931-2013



Carl Heiles  
1939

# Description mathématique

◇ Potentiel :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \epsilon \left( x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)$$

$$\frac{dx}{dt^2} = - \frac{x + 2\epsilon xy}{m}$$

◇ Equations du mouvement :

$$\frac{dy}{dt^2} = - \frac{y + \epsilon(x^2 - y^2)}{m}$$

# Description mathématique

◇ Exposant de Lyapunov :

$$|\Delta r| = e^{\lambda \cdot t}$$

◇ Négatif (fini ou infini)

◇ Nul

◇ Positif (fini ou infini)

◇ Espace des phases :

$$E = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$$



# Méthode numérique

- ◇ Discrétisation du temps
- ◇ Transformation des équations du mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \dot{x} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{x + 2\epsilon xy}{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \dot{y} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{y + \epsilon(x^2 - y^2)}{m}\end{aligned}$$

# Méthode numérique

- ◇ Méthode d'intégration RK45
- ◇ Détermination des exposants de Lyapunov à chaque temps

# Résultats et analyse

◇ Choix trajectoire de référence :

Coordonnées : (0.201, 0, 0, 0.48)

◇ Vérification de la stabilité

Stable au-delà de  $t = 10\,000$  s

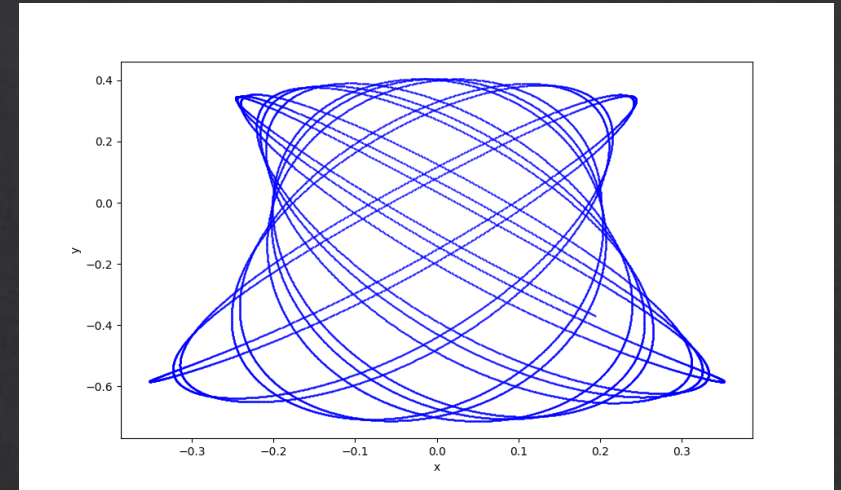


Figure 1. Trajectoire au bout de  $t = 100$  s

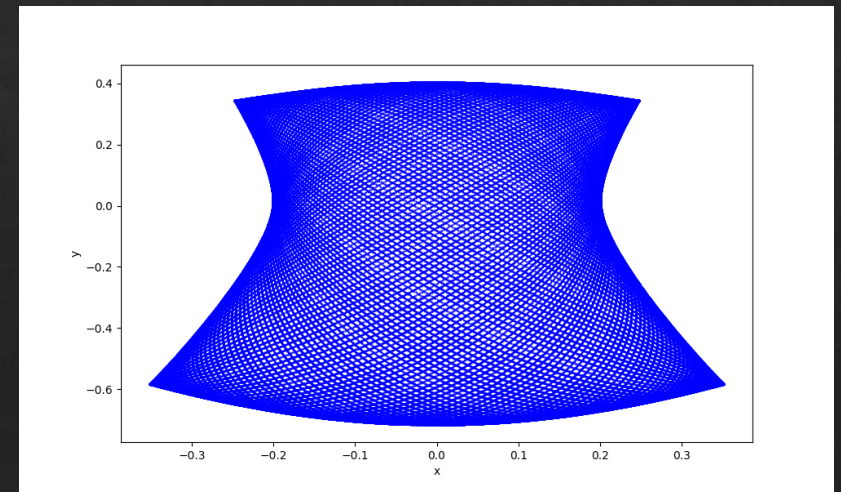


Figure 2. Trajectoire au bout de  $t = 1000$  s



# Résultats et analyse

◇ Recherche des points critiques (positifs)

Coordonnée de position variée					
x			y		
Valeur en x	$\lambda$ final	temps final	Valeur en y	$\lambda$ final	temps final
0,901	-2,659	100	0,3	-5,6	100
0,911	-3,108	100	0,4	-4,781	100
0,916	-1,682	100	0,423	-0,474	100
0,921	1,353	100	0,4235	1,815	100
0,931	38,05	94,45	0,425	38,15	94,15

Coordonnée de vitesse variée					
$v_x$			$v_y$		
Valeur en $v_x$	$\lambda$ final	temps final	Valeur en $v_y$	$\lambda$ final	temps final
1,475	-1,123	100	0,612	-5,046	100
1,485	-1,551	100	0,6125	-0,117	100
1,489	3,985	100	0,6126	0,496	100
1,49	5,749	100	0,6127	1,123	100
1,5	82,44	96,55	0,615	62,72	92,1

Tableau 1. Tableau des exposants autour des points critiques

$$dx = [0.916; 0.921]$$

$$dy = [0.423; 0.4235]$$

$$dv_x = [1.485; 1.489]$$

$$dv_y = [0.6125; 0.6126]$$

# Résultats et analyse

## ◇ Comportement de l'exposant avec le temps

Disparition de la phase de retour

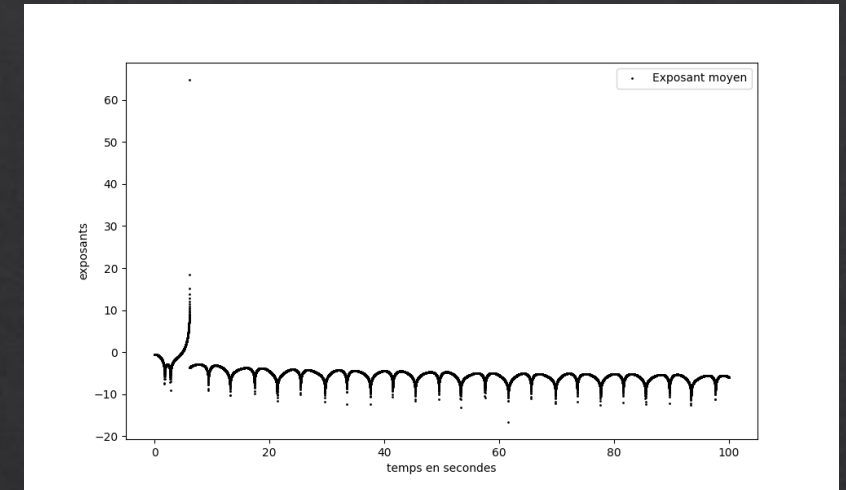


Figure 3. Exposant au cours du temps avec  $x = 0,4$

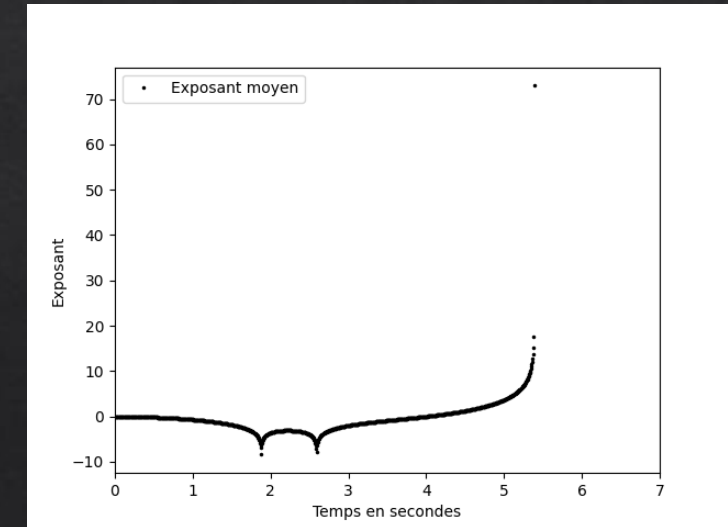


Figure 4. Exposant au cours du temps avec  $x = 1$

# Résultats et analyse

Décalage du pic vers les temps courts

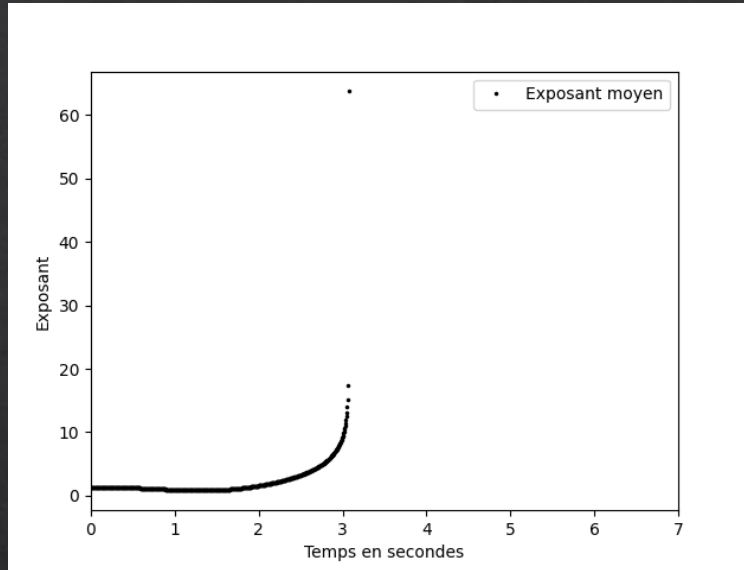


Figure 5. Exposant au cours du temps avec  $x = 2$

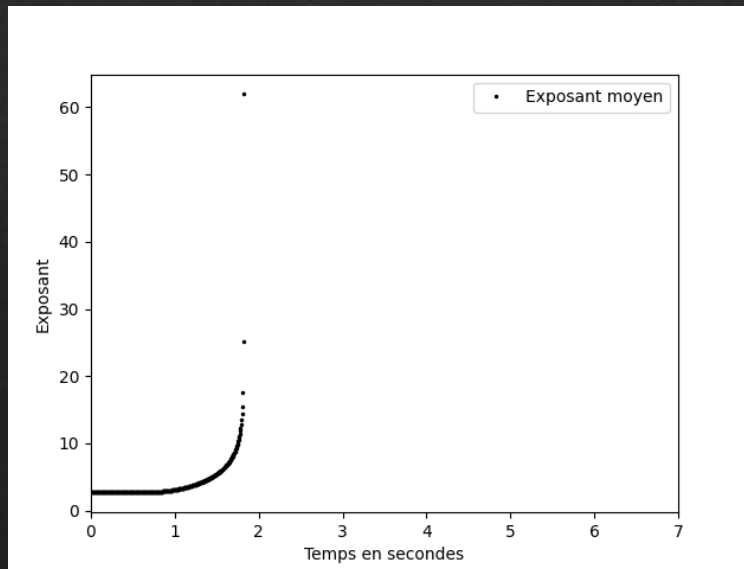


Figure 6. Exposant au cours du temps avec  $x = 4$

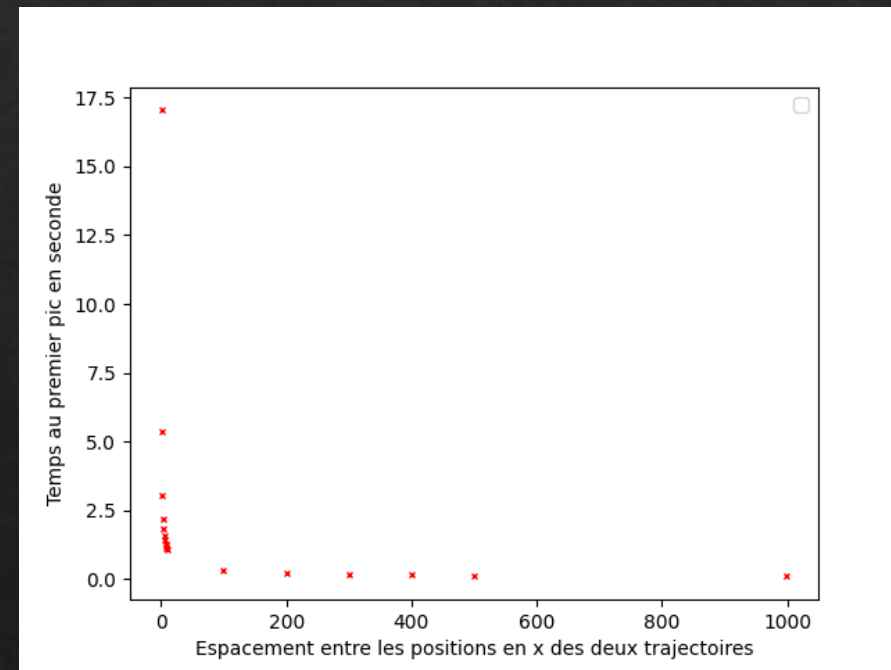


Figure 7. Variation du temps d'apparition du pic en fonction de la différence de position des particules

# Résultats et analyse

- ◇ Variation de la constante de non-linéarité :
- ◇ Conditions des trajectoires test :  $(1, 0, 0, 0.48)$

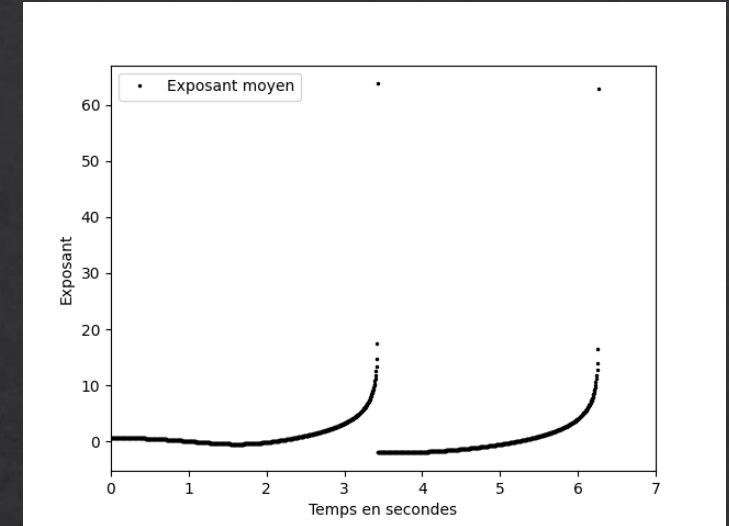


Figure 8. Exposant au cours du temps avec  $\epsilon = 2$

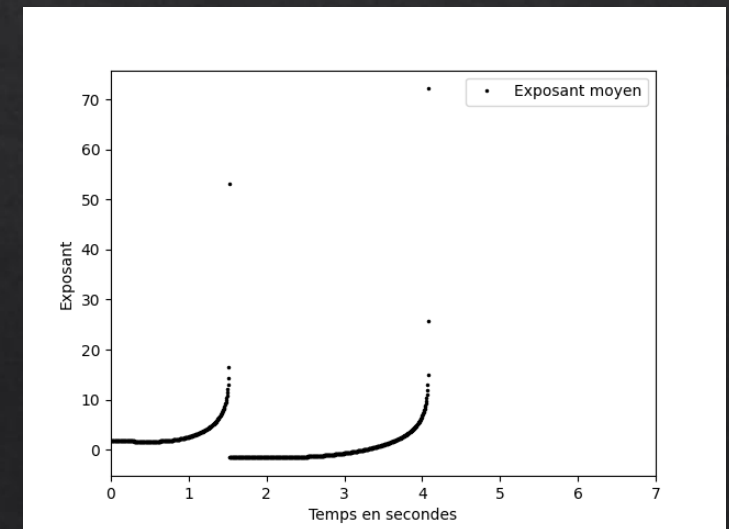


Figure 9. Exposant au cours du temps avec  $\epsilon = 6$

# Résultats et analyse

◇ Augmentation de l'aspect chaotique du système

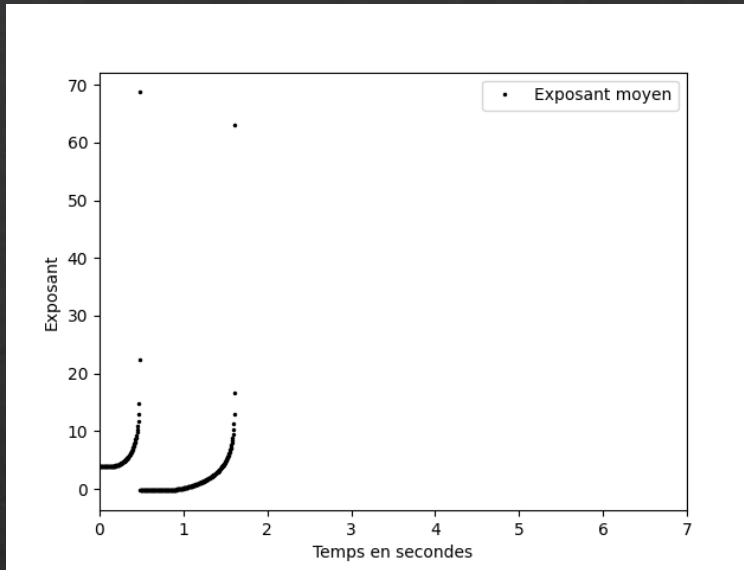


Figure 10. Exposant au cours du temps avec  $\epsilon = 50$

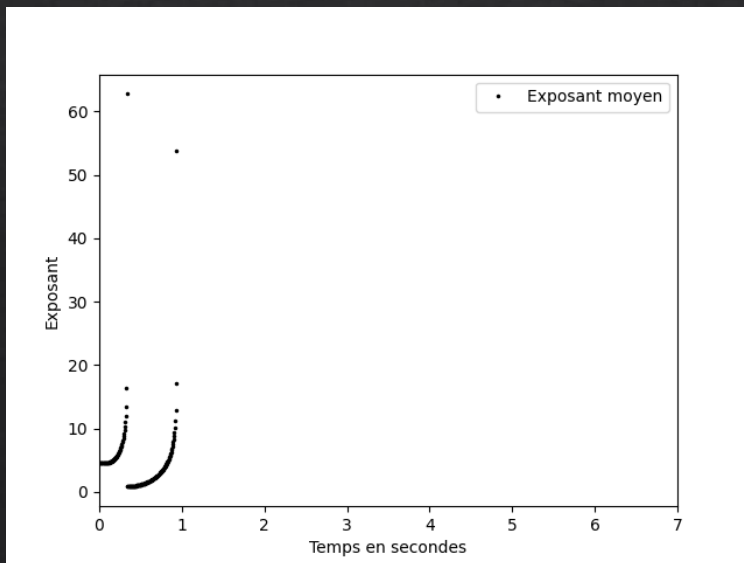


Figure 11. Exposant au cours du temps avec  $\epsilon = 100$

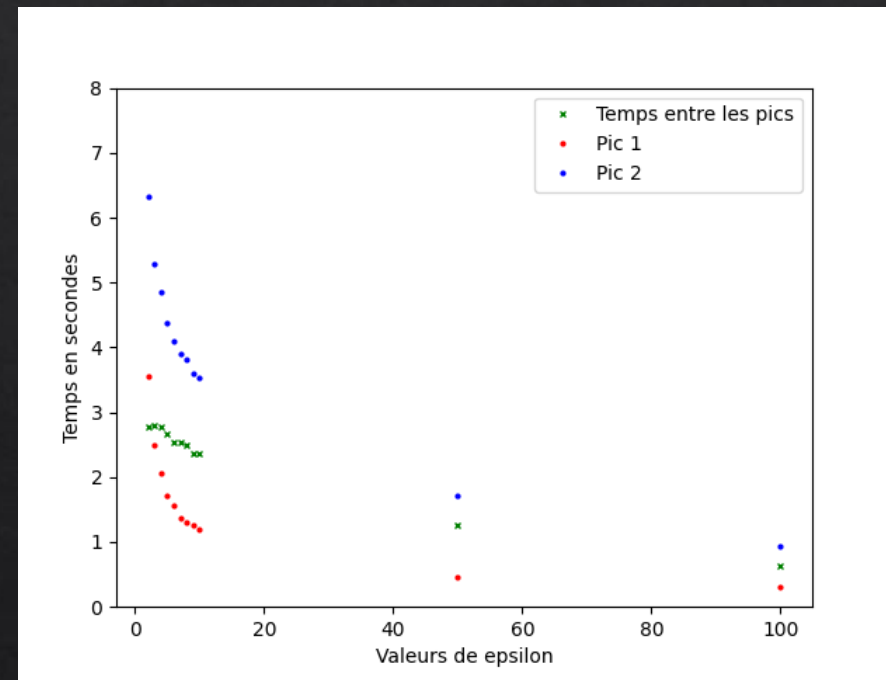


Figure 12. Variation du temps d'apparition des pics en fonction de la constante de non-linéarité



# Conclusion

- ◇ Grande sensibilité aux conditions initiales
- ◇ Constante de non-linéarité responsable du chaos
- ◇ Apparition de structures récurrentes
  - ◇ Peut être signe de phénomènes d'auto-organisation
  - ◇ Signes encourageants