

MÉTHODES NUMÉRIQUES ET SIMULATIONS  
PHQ 404

Présenté à  
Stephanos Kourtis

POTENTIEL DE HÉNON-HEILES ET CHAOS

Par  
Romain MARCELIN

14 avril 2023  
Université de Sherbrooke

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Description mathématique</b>	<b>3</b>
2.1	Équations du mouvement . . . . .	3
2.2	Exposant de Lyapunov . . . . .	3
2.3	Application à notre cas . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Résultats et interprétation</b>	<b>5</b>
4.1	Trajectoire stable . . . . .	5
4.2	Recherche des points critiques . . . . .	5
4.3	Comportement de l'exposant . . . . .	6
4.4	Constante de non linéarité . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>10</b>

## Table des figures

1	Trajectoire de référence au bout de 10 secondes . . . . .	5
2	Trajectoire de référence au bout de 100 secondes . . . . .	5
3	Trajectoire de référence au bout de 1000 secondes . . . . .	5
4	Exposant moyen avec $x_0 = 0.4$ . . . . .	6
5	Exposant moyen au cours du temps avec $x_0 = 1$ . . . . .	6
6	Exposant moyen au cours du temps avec $x_0 = 2$ . . . . .	6
7	Exposant moyen au cours du temps avec $x_0 = 4$ . . . . .	7
8	Graphique du temps de divergence en fonction de la distance des positions initiales . . . . .	7
9	Exposant moyen au cours du temps avec $\epsilon = 2$ . . . . .	7
10	Exposant moyen au cours du temps avec $\epsilon = 4$ . . . . .	7
11	Exposant moyen au cours du temps avec $\epsilon = 8$ . . . . .	8
12	Exposant moyen au cours du temps avec $\epsilon = 50$ . . . . .	8
13	Graphique du temps des temps d'apparition des pics et de leurs distance en fonction de $\epsilon$ . . . . .	8
14	Exposant moyen au cours du temps avec $\epsilon = 4$ et $x_0 = 1$ . . . . .	9
15	Exposant moyen au cours du temps avec $\epsilon = 4$ et $x_0 = 4$ . . . . .	9

## Liste des tableaux

1	Tableau des exposants de Lyapunov en fonction de la position pour la détermination des points critiques	10
2	Tableau des exposants de Lyapunov en fonction de la vitesse pour la détermination des points critiques	10

## Résumé

Dans ce rapport, nous étudierons le potentiel de Henon-Heiles et sa connexion à la théorie du chaos. Ce potentiel, à l'origine modélisé pour étudier le mouvement d'une étoile restreinte à un plan autour du centre d'une galaxie, présente les caractéristiques d'un potentiel chaotique. L'objectif de ce rapport est d'analyser en détail le mouvement d'une particule dans un tel potentiel, mettre en évidence sa nature chaotique en examinant l'impact de la variation des conditions initiales ainsi que de la variation de la constante de non-linéarité sur la sensibilité du système. Nous utiliserons notamment les outils mathématiques tels que les exposants de Lyapunov pour quantifier le degré de chaos dans le système. Enfin, nous discuterons des implications de notre étude sur la compréhension générale de la théorie du chaos et de son application potentielle dans d'autres domaines de la physique et des sciences appliquées.

# 1 Introduction

Le potentiel de Hénon-Heiles, créé à l'origine par Michel Hénon et Carl Heiles en 1962, est un modèle simplifié en deux dimensions, indépendant du temps, utilisé pour modéliser le mouvement non linéaire d'une étoile dans un plan autour du centre d'une galaxie. Il a été initialement développé dans le but de déterminer l'existence d'une troisième intégrale du mouvement pour certaines conditions initiales. Cependant, des recherches plus récentes ont montré que les trajectoires ne possédant pas cette troisième intégrale du mouvement sont en réalité chaotiques.

La théorie du chaos, une branche interdisciplinaire de la physique et des mathématiques, étudie les lois des systèmes dynamiques qui sont sensibles de manière extrême aux conditions initiales. Malgré leur apparence très aléatoire, les systèmes chaotiques complexes présentent des phénomènes de répétition, d'interconnexion et d'auto-organisation. L'extrême sensibilité aux conditions initiales se manifeste par une divergence exponentielle des trajectoires dans le temps pour des conditions initiales très proches, ce qui rend le comportement du système difficile à prévoir sur le long terme.

Le potentiel de Hénon-Heiles offre ainsi une opportunité d'étudier les mécanismes du chaos dans un contexte gravitationnel simplifié. Dans ce rapport, nous allons nous concentrer sur l'aspect chaotique de ce potentiel et nous pencher sur l'effet de la différence de conditions initiales sur l'exposant de Lyapunov, qui mesure la sensibilité aux conditions initiales et peut être utilisé pour quantifier le degré d'instabilité du système. Nous allons notamment nous intéresser aux trajectoires de référence qui sont stables, mais qui peuvent néanmoins présenter un comportement chaotique en présence de petites variations dans les conditions initiales.

Cette étude revêt une importance particulière dans le contexte des mathématiques modernes, car la théorie du chaos trouve de nombreuses applications dans divers domaines tels que la météorologie, la médecine, l'économie, la sociologie ou même l'évolution. En comprenant mieux les propriétés chaotiques du potentiel de Hénon-Heiles, nous pourrions mieux appréhender les comportements complexes et imprévisibles des systèmes dynamiques dans de nombreux domaines de la science et de la vie quotidienne.

## 2 Description mathématique

Dans cette section nous allons introduire les éléments mathématiques utiles à notre problème.

Nous commencerons par les équations du mouvement associées au potentiel considéré, puis nous définirons mathématiquement les exposants de Lyapunov.

### 2.1 Équations du mouvement

Le potentiel de Henon-Heiles possède la forme suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \epsilon(x^2y - \frac{y^3}{3}) \quad (1)$$

Où  $\epsilon$  est qualifiée de constante de non linéarité.

En utilisant les équations :

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a} \quad (3)$$

on obtient les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{x+2\epsilon xy}{m} \\ \ddot{y} = -\frac{y+\epsilon(x^2-y^2)}{m} \end{cases} \quad (4)$$

Il s'agit donc d'un système d'équation couplé non linéaire et du deuxième ordre sur la position d'une particule de masse  $m$  dans le plan  $(xOy)$ . On voit bien avec ces équations que la constante  $\epsilon$  est effectivement tributaire de l'importance de la partie non linéaire des équations du mouvement.

Nous considérerons dans la partie numérique le cas d'une particule possédant une masse unitaire et une vitesse nulle en  $z$ .

Ce système de deux équations du deuxième ordre peut être converti en un système de quatre équations du premier ordre en posant les nouvelles variables suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

En insérant ces relations dans les équations (4) nous obtenons les quatres équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ \ddot{x} = -\frac{x+2\epsilon xy}{m} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} \\ \ddot{y} = -\frac{y^2+\epsilon(x^2-y^2)}{m} \end{cases} \quad (6)$$

Ce système d'équations est plus facile à considérer pour l'intégration numérique. Comme nous avons maintenant quatre équations couplées du premier ordre, nous aurons besoin de quatre conditions initiales pour leur résolution numérique.

Nous devons choisir les positions  $x_0$  et  $y_0$  en  $x$  et  $y$ , ainsi que les deux composantes de la vitesse initiale  $v_x(0) = v_{x0}$  et  $v_y(0) = v_{y0}$ .

### 2.2 Exposant de Lyapunov

Maintenant que nous avons défini nos équations du mouvement, définissons les exposants de Lyapunov. Les exposants de Lyapunov d'un système dynamique sont des quantités qui caractérisent la rapidité de divergence de deux trajectoires dont les points de départ sont infiniment proches. Cet exposant, souvent noté  $\lambda$ , peut être

un nombre réel positif ou négatif, ou bien égal à  $-\infty$  ou à  $+\infty$ . Pour le définir, nous allons d'abord prendre un exemple simple.

Supposons pour l'instant que l'on ait une suite nous donnant la position d'une particule en une dimension en fonction de la position précédente un instant  $\delta t$  plus tard :  $x(t_n) = f(x_{n-1}, t_{n-1})$  avec  $t_n = n \cdot \delta t$ . Prenons maintenant deux particules 1 et 2 et plaçons les à la même position initiale mais séparés d'une distance infinitésimale  $\epsilon$  :

$$x_2(0) = x_1(0) + \epsilon \quad (7)$$

Nous avons donc une distance entre la particule 1 et 2 qui est :  $|\delta x| = \epsilon > 0$

Si nous plaçons conjointement ces deux positions initiales dans la suite  $f$ , après un nombre  $N$  de fois, nous obtenons :

$$f^N(x_1(0)) = f \circ f \circ \dots \circ f(x_1(0)) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f^N(x_2(0)) &= f^N(x_1(0) + \epsilon) \\ &= f^N(x_1(0)) + \mathcal{E} \end{aligned} \quad (9)$$

Nous avons donc la distance entre les 2 particules à un temps  $t_N = N \cdot \delta t$  qui est :

$$|f^N(x_2(0)) - f^N(x_1(0))| = |\mathcal{E}| \quad (10)$$

Cette quantité étant réelle et positive, on peut donc enfin poser :

$$|\mathcal{E}| = e^{\lambda \cdot t_N} \quad (11)$$

où  $\lambda$  est l'exposant de Lyapunov et est la quantité caractérisant la vitesse de séparation des particules.

C'est donc cet exposant  $\lambda$  que l'on va chercher à mesurer pour les trajectoires de notre potentiel.

Nous remarquons les propriétés suivantes de l'exposant de Lyapunov :

- Si  $\lambda = 0$  ou si  $\lambda < 0$  nous avons un système stable : une distance initiale donnée résultera en une distance finale inférieure ou égale à la distance initiale. Ce cas correspond par exemple à des systèmes linéaires.
- Si  $\lambda > 0$  nous avons un système instable. Dans ce cas, la distance entre les trajectoires augmente exponentiellement au fur et à mesure que le temps avance.

### 2.3 Application à notre cas

Notre problème en revanche est bidimensionnel. En effet notre particule se déplace dans le plan  $xOy$  et son mouvement est régi par 4 équations différentielles et non par une suite.

Mais la discrétisation du temps et l'application des techniques de résolution numérique de RK45 nous ramènent à la définition de quatre suites  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $v_{xn}$  et  $v_{yn}$ . Celles-ci nous donnent respectivement la position de la particule en  $x$  et en  $y$  ainsi que sa vitesse en  $x$  et en  $y$  au temps  $n$ .

Dans notre cas, il est pertinent de s'intéresser à l'espace des phases des particules que l'on observe. Étant

ici dans un espace à deux dimensions de position, l'espace des phases sera donc de dimension quatre. Nous pourrions donc calculer les exposants de Lyapunov dans cet espace. cela veut dire que l'on devra calculer quatre exposants correspondant aux divergences entre les positions en  $x$ , en  $y$ , et entre les vitesses en  $x$  et en  $y$  des deux particules observées au cours du temps. Il sera alors possible de faire la moyenne de ses exposants afin d'obtenir un exposant global des trajectoires observée et de caractériser l'effet des écarts de conditions initiales sur ses trajectoires.

## 3 Méthodes numériques

Tout d'abord, nous devons pouvoir résoudre numériquement les équations du mouvement. Pour cela nous allons utiliser la fonction *odeint* de *scipy* pour la résolution des équations différentielles couplées. Cette fonction utilise une méthode de résolution RK45, ce qui nous assure une précision d'ordre 4 sur notre résolution. Cette méthode nécessite en revanche de fournir des équations différentielles du premier ordre. C'est pourquoi nous avons effectué cette transformation précédemment.

Cette méthode est simple à utiliser et nous permet de connaître les trajectoires associées à de nombreuses conditions initiales. Nous pourrions ainsi tester ce potentiel pour différentes positions et différentes vitesses initiales.

Grâce à cette résolution numérique, les valeurs des positions et vitesses en  $x$  et  $y$  à chaque pas de temps seront stockées dans des listes. On résout alors les équations du mouvement avec deux set de conditions initiales proches : la première correspondant à une trajectoire stable de référence et la seconde correspondant à la trajectoire perturbée. On qualifie ici de stable une trajectoire qui ne diverge pas dans les temps d'intégration choisis. Cela permettra de faire la différence de chaque coordonnées de l'espace des phases entre la particule de référence et la particule perturbée, et ce, à chaque instants. Nous aurons alors accès aux distances entre les deux particules dans l'espace des phases et il est donc alors possible de calculer à chaque instant les exposants de Lyapunov pour toutes les coordonnées.

Cette méthode de calcul des exposants de Lyapunov possède l'avantage de permettre le suivi des valeurs des exposants dans le temps. Cela permet de caractériser à quel point les trajectoires divergent durant le temps d'intégration.

Les conditions initiales des trajectoires stables sont d'abord tracées afin de vérifier si elles divergent ou non au bout d'un certain temps. Si ce n'est pas le cas, la trajectoire est considérée comme assez stable pour notre analyse et elle est utilisée pour le calcul des exposants. Le temps d'intégration pour tester si les trajectoires sont stables est choisi beaucoup plus long que celui utilisé pour trouver les exposants de Lyapunov. Cela permet de s'assurer que les trajectoires restent stables suffisamment longtemps pour que les valeurs des coordonnées ne soient pas trop grandes et que les calculs des exposants ne dépassent pas les capacités de la machine. En effet,

une divergence de la trajectoire de référence entraînerait rapidement un overflow.

Néanmoins, malgré cette précaution, il arrive que la trajectoire perturbée, elle, diverge à partir d'un temps très court. Lorsque ce cas de figure est rencontré, la méthode mise en oeuvre fait en sorte que lorsqu'un overflow est rencontré lors du calcul des distances entre les coordonnées (caractérisé par le fait que la fonction ne retourne que des zéros juste après avoir retourné une valeur d'ordre supérieur à  $10^{16}$ ), nous stoppons l'intégration des équations du mouvement. On obtient alors les exposants au cours du temps, pour un temps conditionné par la divergence ou non de la trajectoire test.

Grâce à l'obtention des exposants de Lyapunov, il est possible de déterminer une plage de valeurs dans laquelle on peut faire varier les coordonnées initiales de la trajectoire test sans dériver de la trajectoire de référence. Pour une trajectoire de référence donnée, on peut donner quatre de ces plages de données : une pour chaque coordonnées (les coordonnées sont variées indépendamment des autres afin que l'apparition de la divergence soit due seulement à la coordonnée variée). Pour faire cela, une méthode de dichotomie est mise en place : une valeur initiale de la perturbation est choisie, si les exposants deviennent positifs avant la fin du temps d'intégration, on réduit la valeur de la perturbation. Si, au contraire, les exposants restent négatifs tout le long, on augmente un peu la valeur de la perturbation. On fait cela jusqu'à obtenir un intervalle assez fin, dans lequel se trouve la valeur de la perturbation pour laquelle l'exposant final est nul. On rappelle qu'un exposant négatif signifie un rapprochement des trajectoires, un exposant nul signifie une distance constante entre les trajectoires, et une valeur positive signifie une divergence entre les trajectoires.

Nous obtenons alors avec une certaine précision l'intervalle dans lequel on peut faire varier la coordonnée sans que les trajectoires divergent. Néanmoins, nous regardons s'il n'y a pas de divergence dans un temps assez court, et il faut garder en tête qu'il se pourrait que les trajectoires se mettent à diverger au delà de ce temps.

Ces manipulations sont effectuées à une valeur donnée de la constante de non linéarité :  $\epsilon = 1$ . Afin de déterminer le rôle de cette constante dans la sensibilité aux conditions limites, l'étude de la variation de ce paramètre sera faite en traçant la valeur de l'exposant au cours du temps pour plusieurs valeurs de cette constante.

## 4 Résultats et interprétation

### 4.1 Trajectoire stable

Tout d'abord, définissons notre trajectoire de référence. Le choix a été fait dans ce rapport de prendre les coordonnées initiales suivantes pour la trajectoire de référence :  $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}) = (0.201, 0, 0, 0.48)$ . Puis, il faut effectuer la vérification de la stabilité de cette trajectoire. Pour cela, les tracés de la trajectoire a été effectuée pour des temps allant de 0 à 10000 secondes. Voici les tracés :

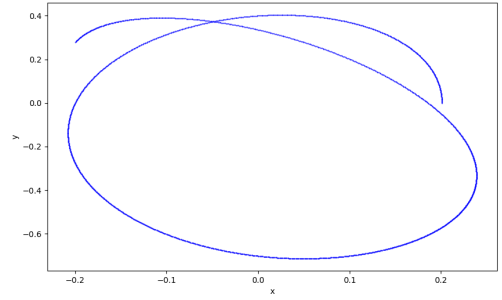


FIGURE 1 – Trajectoire de référence au bout de 10 secondes

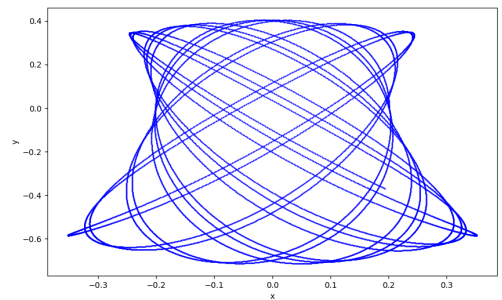


FIGURE 2 – Trajectoire de référence au bout de 100 secondes

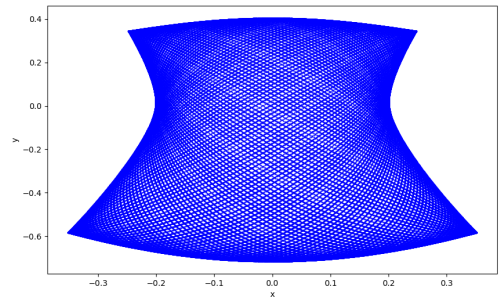


FIGURE 3 – Trajectoire de référence au bout de 1000 secondes

Il est clair sur ces courbes que la trajectoire de référence choisie est stable pendant un temps assez long pour étudier l'effet des perturbations des conditions initiales sur la divergence des trajectoires.

### 4.2 Recherche des points critiques

Il faut maintenant déterminer les intervalles dans lesquels la variation des coordonnées initiales n'a pas d'impact sur les trajectoires. Ces intervalles sont répertoriés dans les [tableau 1](#) et [tableau 2](#) présentés en annexe. Dans ces tableaux, l'exposant final  $\lambda_{final}$  est le dernier

exposant calculable avant de diverger. Le temps correspondant à cet exposant est également indiqué. On voit que l'exposant de Lyapunov fini par s'annuler entre les deux dernières lignes de chacun de ces tableaux. Cela veut dire que l'on a passé le point critique auquel l'ajout de distance entre les coordonnées de référence et de test donne une trajectoire test qui diverge de celle de référence. On peut donc définir les quatre intervalles de valeur suivants :

$$\begin{aligned} dx &= [0.916; 0.921] \\ dy &= [0.423; 0.4235] \\ dv_x &= [1.485; 1.489] \\ dv_y &= [0.6125; 0.6126] \end{aligned} \quad (12)$$

Ce sont les intervalles dans lesquels se trouvent les points critiques reliés à chaque coordonnées. Ainsi, une trajectoire ayant pour conditions initiales :  $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}) = (0.911, 0, 0, 0.48)$  par exemple, aura un exposant de Lyapunov négatif au moins jusqu'au temps  $t = 100$  s et donc sa trajectoire sera identique à la trajectoire de référence. En revanche, une trajectoire avec pour condition initiale :  $(x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}) = (0.931, 0, 0, 0.48)$  aura un exposant positif avant le temps  $t = 100$  s, et donc sa trajectoire divergera de la trajectoire de référence avant ce temps.

Ici nous nous intéressons à des ajouts positifs aux coordonnées de référence, mais on pourrait faire la même chose avec des ajouts négatifs. À noter que dans notre cas les points critiques négatifs ne sont pas l'opposé des points critiques positifs. Ce sont de toutes autres valeurs.

### 4.3 Comportement de l'exposant

Dans cette section, le comportement de l'exposant au cours du temps est étudié pour plusieurs variations des conditions initiales. Nous allons étudier l'effet du changement de la coordonnée de position en x.

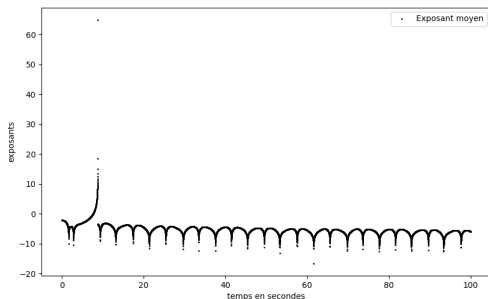


FIGURE 4 – Exposant moyen avec  $x_0 = 0.4$

On constate dans la [figure 4](#) que l'exposant se met à diverger pour une valeur de t autour de 8 secondes, puis qu'il revient en dessous de zéro. Cela signifie qu'avec le changement de coordonnée effectuée (ici on passe de

0.201 à 0.4), les trajectoires se mettent à se séparer aux alentours de 5 secondes. Mais comme après 8 secondes l'exposant revient en dessous de zéro, on en conclut que les trajectoires se rejoignent à nouveau après leur séparation initiale. De plus, on voit que les trajectoires ne divergent plus après cela puisque l'exposant reste négatif pendant le reste du temps. On voit également qu'après cette séparation initiale, l'exposant oscille de manière régulière.

Maintenant voyons l'effet du dépassement du point critique sur le comportement de l'exposant au cours du temps :

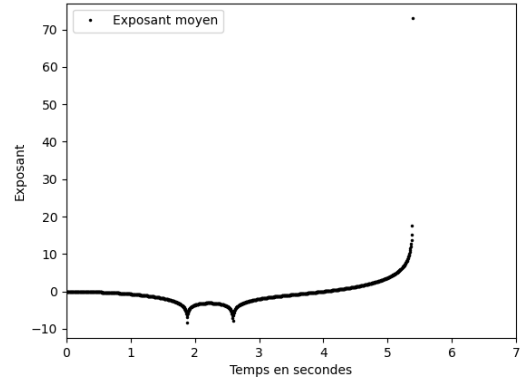


FIGURE 5 – Exposant moyen au cours du temps avec  $x_0 = 1$

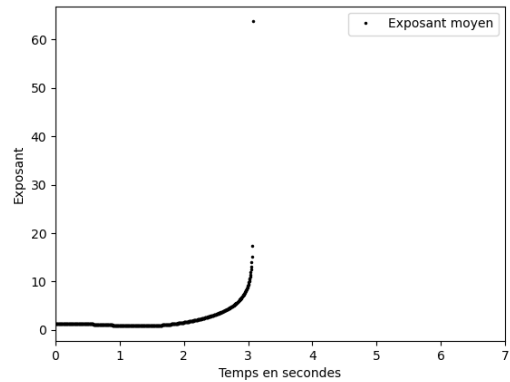


FIGURE 6 – Exposant moyen au cours du temps avec  $x_0 = 2$

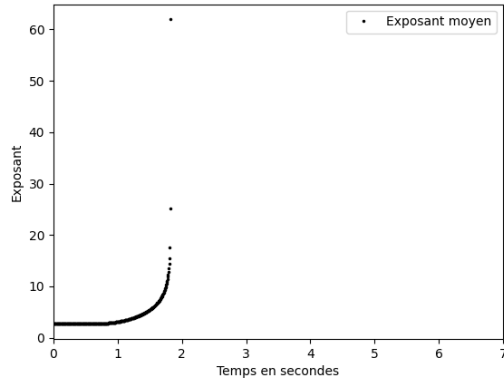


FIGURE 7 – Exposant moyen au cours du temps avec  $x_0 = 4$

Grâce aux figures 5, 6 et 7, on constate plusieurs phénomènes. Tout d'abord, on constate la disparition de la phase de "retrouvailles" des deux trajectoire car lorsque l'on dépasse le point critique, on ne retrouve plus de phase où l'exposant est négatif. On en conclut qu'avec une telle différence de condition initiale, l'exposant diverge trop pour pouvoir revenir à des valeurs négatives avant la fin du temps d'intégration. De plus, sur la figure 4 et la figure 5, on voit qu'il y a une phase précédant la première divergence dans laquelle l'exposant est négatif. Mais à partir de  $x_0 = 2$  (figure 6), on constate une disparition totale de cette phase.

Enfin, on remarque que le pic de divergence se déplace progressivement vers des temps plus petits, à mesure que la différence de condition initiale augmente. On peut tracer la valeur de l'abscisse de ces pics en fonction de la distance de position initiale en  $x$  entre les deux trajectoires :

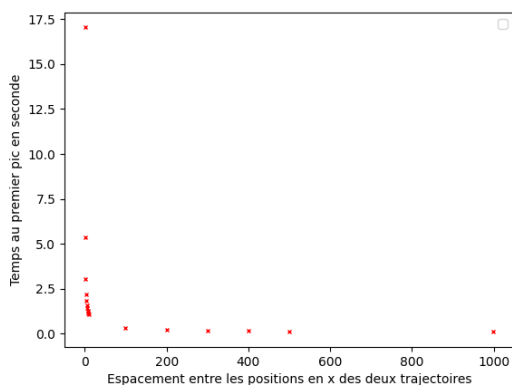


FIGURE 8 – Graphique du temps de divergence en fonction de la distance des positions initiales

On distingue alors clairement une diminution exponentielle du temps d'apparition du pic avec l'augmentation de la différence de condition initiale.

On en déduit donc comme attendu que l'augmentation de la différence des conditions initiales résulte

en des trajectoire dramatiquement différentes. On voit également que cette sensibilité aux conditions initiales se distingue en des temps très courts, qui ici sont inférieurs à 10 secondes, et que par ailleurs, ce temps diminue lorsque la différence initiale augmente.

#### 4.4 Constante de non linéarité

Pour étudier l'action de la constante de non linéarité sur la divergence des trajectoires, des courbes de l'exposant de Lyapunov en fonction du temps ont été tracées pour différentes valeurs de  $\epsilon$ . Nous prenons donc les conditions initiales suivantes pour les deux trajectoires :

$(0.201, 0, 0, 0.48)$  et  $(1, 0, 0, 0.48)$  et faisons varier  $\epsilon$ .

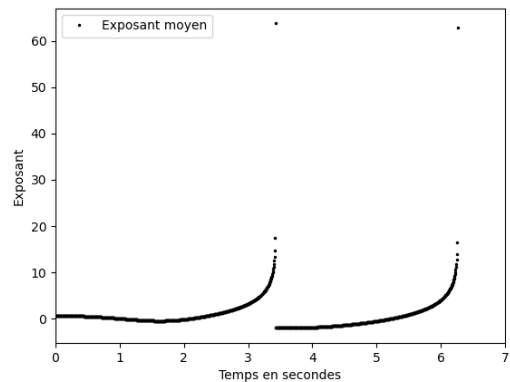


FIGURE 9 – Exposant moyen au cours du temps avec  $\epsilon = 2$

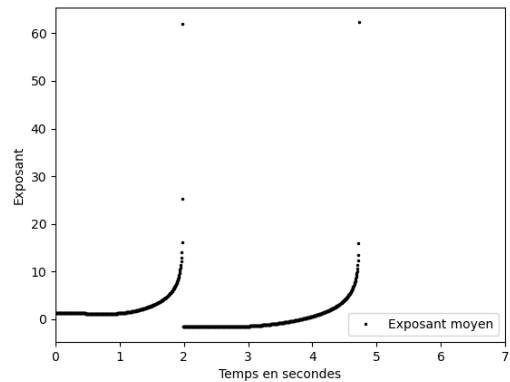


FIGURE 10 – Exposant moyen au cours du temps avec  $\epsilon = 4$



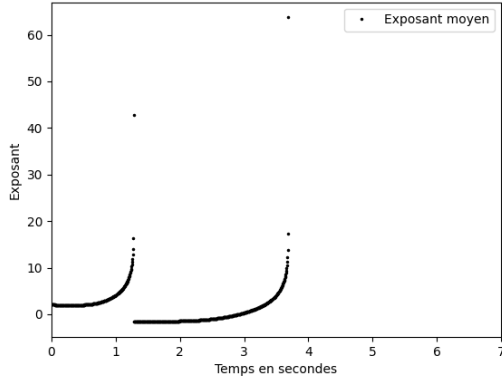


FIGURE 11 – Exposant moyen au cours du temps avec  $\epsilon = 8$

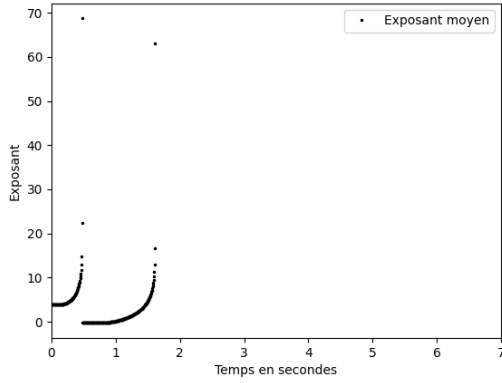


FIGURE 12 – Exposant moyen au cours du temps avec  $\epsilon = 50$

Comme précédemment, on constate un décalage vers les temps plus courts du premier pic. En revanche, un second pic qui n'était pas visible précédemment apparaît à partir de  $\epsilon = 2$ . On remarque également que ce pic aussi se décale vers des temps plus courts, et ce, à une vitesse qui semble être la même que le premier pic. Pour vérifier cela, on peut tracer le temps espaçant les abscisses des deux pics, ainsi que la valeur des temps où se produisent les pics en fonction de  $\epsilon$  :

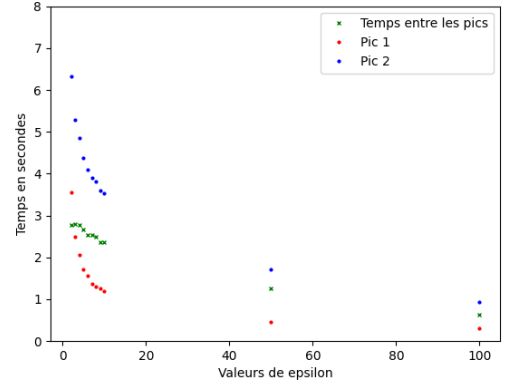


FIGURE 13 – Graphique du temps des temps d'apparition des pics et de leurs distance en fonction de  $\epsilon$

On voit alors que le temps entre les pics diminue presque de la même manière que le temps d'apparition des pics au fur et à mesure que  $\epsilon$  augmente. On remarque également que le temps d'apparition du premier et second pic décroît de la même manière que lorsque l'on faisait varier les conditions initiales : de manière exponentielle. Si on compare la [figure 8](#) et la [figure 13](#), on remarque néanmoins que la diminution du temps d'apparition du premier pic est plus rapide lors de la variation des conditions initiales que de l'augmentation de la constante de non linéarité. En revanche, la complexité du mouvement est augmentée plus rapidement avec de l'augmentation de cette constante car l'apparition d'un second pic témoigne du rapprochement à deux reprises des trajectoires, après avoir été séparées d'une très grande distance. Ce comportement n'arrive qu'une fois lors de la variation des conditions initiales, cela veut dire qu'après s'être rejointe, les trajectoires se séparent une deuxième fois et restent séparées. Alors qu'ici, elle se rejoignent une troisième fois. Par conséquent, dans ce cas, le comportement est plus chaotique que lors de la variation des conditions initiales.

Enfin, nous pouvons brièvement regarder l'effet des variations des conditions initiales avec une constante de non linéarité plus forte, et le comparer avec la même variation mais pour une constante  $\epsilon = 1$ . Pour cela, plaçons nous dans le cas où  $\epsilon = 4$  et voyons comment varie l'exposant de Lyapunov en fonction du temps lorsque l'on passe de  $x_0 = 1$  à  $x_0 = 4$  :

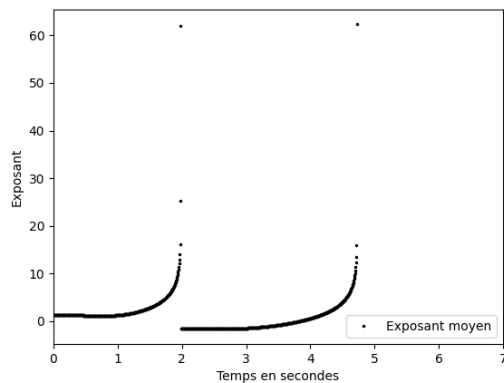


FIGURE 14 – Exposant moyen au cours du temps avec  $\epsilon = 4$  et  $x_0 = 1$

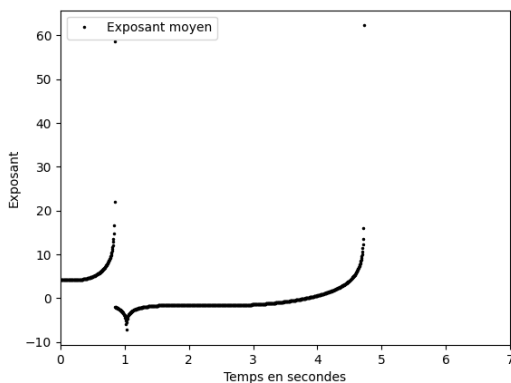


FIGURE 15 – Exposant moyen au cours du temps avec  $\epsilon = 4$  et  $x_0 = 4$

Si on compare les [figure 14](#) et [figure 15](#) aux [figure 5](#) et [figure 7](#), on se rend compte que l'effet du changement de condition initiale sur l'exposant est beaucoup plus marqué. En effet, on constate que pour la même variation de condition initiale, le premier pic se rapproche beaucoup plus vite vers les temps courts dans le cas où  $\epsilon = 4$  que dans le cas où  $\epsilon = 1$ . Par conséquent, on en déduit qu'une grande constante de non linéarité augmente la sensibilité aux conditions initiales.

On déduit de tous ces résultats que, comme attendu, l'augmentation de la valeur de non linéarité  $\epsilon$  coïncide avec une augmentation de l'aspect chaotique du système.

## 5 Conclusions

Pour conclure, l'étude numérique du potentiel de Hénon-Heiles dans ce rapport a confirmé l'aspect chaotique de ce potentiel. En effet, il a été montré que ce système est très sensible aux conditions initiales et que la constante de non linéarité présente dans la formule du potentiel augmente fortement l'aspect chaotique du système. Cela est attendu puisque ce sont les termes non linéaires qui sont à l'origine du chaos.

Pour approfondir le travail effectué lors de cette étude, la variation des autres coordonnées initiales telles que la position en  $y$ , ou les vitesses en  $x$  et  $y$ , est une approche pertinente. On pourrait garder la même trajectoire de référence et faire varier ces coordonnées de la même manière que l'on a varié la position en  $x$ , pour voir si les effets sur l'exposant de Lyapunov au cours du temps sont similaires ou non.

Les résultats présentés dans ce rapport font état de la présence de structures récurrentes dans ce potentiel. En effet, lors de l'étude d'une trajectoire particulière, on a pu voir l'apparition systématique de pics de même allure lors de la variation des conditions initiales ainsi que de lors de la variation de la constante de non linéarité. Ces structures récurrentes laissent à penser que malgré l'aspect chaotique de ce potentiel, il doit y exister des phénomènes d'auto-organisation, et donc peut être également dans les systèmes chaotiques d'une manière générale. Ce sont donc des résultats encourageant et qui démontrent l'intérêt que représente ce potentiel en tant que modèle d'étude des systèmes dynamiques chaotiques.

## 6 Annexe

Coordonnée de position variée					
x			y		
Valeur en x	$\lambda$ final	temps final	Valeur en y	$\lambda$ final	temps final
0,901	-2,659	100	0,3	-5,6	100
0,911	-3,108	100	0,4	-4,781	100
0,916	-1,682	100	0,423	-0,474	100
0,921	1,353	100	0,4235	1,815	100
0,931	38,05	94,45	0,425	38,15	94,15

TABLE 1 – Tableau des exposants de Lyapunov en fonction de la position pour la détermination des points critiques

Coordonnée de vitesse variée					
$v_x$			$v_y$		
Valeur en $v_x$	$\lambda$ final	temps final	Valeur en $v_y$	$\lambda$ final	temps final
1,475	-1,123	100	0,612	-5,046	100
1,485	-1,551	100	0,6125	-0,117	100
1,489	3,985	100	0,6126	0,496	100
1,49	5,749	100	0,6127	1,123	100
1,5	82,44	96,55	0,615	62,72	92,1

TABLE 2 – Tableau des exposants de Lyapunov en fonction de la vitesse pour la détermination des points critiques

## Références

- [1] M.Hénon, C.Heiles,  
*The Applicability Of The Third Integral Of Motion : Some Numerical Experiments*, The astronomical journal ;  
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175>, **69** (1), p. 73,(7 August 1963).
- [2] James P. Sethna ,  
*Entropy, Order Parameters, and Complexity*, Oxford University Press, ISBN : 9780198865254 ; (2021).