Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura

Análisis de Lenguajes de Programación

Trabajo Práctico III
λ-cálculo tipado

Román Castellarin
Juan Ignacio Suarez

5 de noviembre de 2018

0.1. Ejercicio 1

Notemos con $B^2 \equiv (B \to B)$ y con $B^3 \equiv (B \to B \to B)$.
A continuación definimos los siguientes contextos:

$\Gamma_1 = \{x : B^3, y : B^2, z : B\}$
$\Gamma_2 = \{x : B^3, y : B^2\}$
$\Gamma_3 = \{x : B^3\}$

Luego resulta,

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash x : B^3}\ \text{T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash z : B}\ \text{T-Var}}{\Gamma_1 \vdash x\ z : B^2}\ \text{T-App}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash y : B^2}\ \text{T-Var} \quad \dfrac{}{\Gamma_1 \vdash z : B}\ \text{T-Var}}{\Gamma_1 \vdash y\ z : B}\ \text{T-App}
}{\Gamma_1 \vdash (x\ z)\ (y\ z) : B}\ \text{T-App}
}{\Gamma_2 \vdash (\lambda z : B.\ (x\ z)\ (y\ z)) : B^2}\ \text{T-Abs}
}{\Gamma_3 \vdash (\lambda y : B^2.\ \lambda z : B.\ (x\ z)\ (y\ z)) : B^2 \to B^2}\ \text{T-Abs}
}{\vdash (\lambda x : B^3.\ \lambda y : B^2.\ \lambda z : B.\ (x\ z)\ (y\ z)) : B^3 \to B^2 \to B^2}\ \text{T-Abs}
$$

0.2. Ejercicio 2

De acuerdo a las reglas de tipado, algunas expresiones carecen de un tipo.
La función *infer* devuelve `Either String Type` ya que si el término no está bien tipado se puede retornar un `String` con un mensaje de error.
Esto se combina a su vez con el operador *bind* que toma un `Either String Type`, y una función `f` de `Type` en `Either String Type` y propaga el error si su primer argumento se trataba de un `String`, o en caso contrario aplica `f` al tipo contenido.
La utilidad de *bind* se puede apreciar mejor cuando se encadenan varias funciones, dejando un código prolijo y sin repeticiones.

0.3. Ejercicio 3 - 4

(en el codigo fuente)

0.4. Ejercicio 5

Conservando la notación anterior, tenemos

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{x : B \vdash x : B}\ \text{T-Var}}{\vdash (\lambda x : B.\ x) : B^2}\ \text{T-Abs}
}{\vdash (\lambda x : B.\ x)\ \texttt{as}\ B^2 : B^2}\ \text{T-Ascribe}
\quad
\dfrac{}{z : B^2 \vdash z : B^2}\ \text{T-Var}
}{\vdash (\texttt{let}\ z = (\lambda x : B.\ x)\ \texttt{as}\ B^2\ \texttt{in}\ z) : B^2}\ \text{T-Let}
}{\vdash (\texttt{let}\ z = (\lambda x : B.\ x)\ \texttt{as}\ B^2\ \texttt{in}\ z)\ \texttt{as}\ B^2 : B^2}\ \text{T-Ascribe}
$$

0.5. Ejercicio 6 - 8

(en el codigo fuente)

0.6. Ejercicio 9

Continuamos con la siguiente demostración:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \texttt{unit} : \texttt{Unit}}\ \textsc{T-Unit}}{\vdash \texttt{unit as Unit} : \texttt{Unit}}\ \textsc{T-Ascribe} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : (B,B) \vdash x : (B,B)}\ \textsc{T-Var}}{x : (B,B) \vdash \texttt{snd}\ x : B}\ \textsc{T-Snd}}{\vdash (\lambda x : (B,B).\ \texttt{snd}\ x) : (B,B) \to B}\ \textsc{T-Abs}}{\vdash (\texttt{unit as Unit}, \lambda x : (B,B).\ \texttt{snd}\ x) : (\texttt{Unit}, (B,B) \to B)}\ \textsc{T-Pair}}{\vdash \texttt{fst}\ (\texttt{unit as Unit}, \lambda x : (B,B).\ \texttt{snd}\ x) : \texttt{Unit}}\ \textsc{T-Fst}
$$

0.7. Ejercicio 10

(en el codigo fuente)

0.8. Ejercicio 11

(en el archivo correspondiente)