Problème n°1 : Philatélie

Equipe $\pi z^2 a$

Lycée Saint-Marc, Nivolas-Vermelle

April 2, 2023

Résumé du problème :

Dans ce problème d'optimisation géométrique, il nous était demandé, le plus souvent, de trouver l'aire maximale sous différentes contraintes. Le problème est composé de deux parties. La seconde est similaire à la première, à l'exeption de la condition " les tampons peuvent ne pas être parallèles aux axes". La première question nous aide à comprendre le problème: nous devions trouver l'aire du plus grand carré étant parallèle aux axes. La seconde question nous demandait de trouver le nombre de façons d'inscrire un tampon de taille maximale dans un polygône convexe. Nous avons trouvé que les seules configurations étaient 1 et ∞. Nous avons majoritairement utilisé des illustrations ainsi que de la justification pour répondre à cette question. Nous devions traiter le cas du ratio $\frac{A_{dis}}{A_g}$ dans la troisième question. Nous avons prouvé que celui-ci était borné par 1 et 2, mais aussi que son maximum était sûrement 1,6. La quatrième question était une reprise de la première, à la seule différence que nous devions placer 2 carrés couvrant une aire maximale. Résolutions d'équations et graphiques multidimensionnels nous ont aidés à trouver les réponses à cette question. La cinquième question, elle, ressemblait à la seconde, mais cette fois-ci, il fallait traiter le cas de deux carrés. Nous avons trouvé que les seules configurations étaient 1;2;3;4 et ∞. La sixième question nous a proposé de traiter des cas différents étant donné que nous pouvions superposer les carrés.
Ensuite, vient la deuxième partie, lorsque "les tampons peuvent ne pas être parallèles aux axes". Nous avons trouvé peu de différences avec la première, la troisième et la cinquième question de la première partie. Dans la deuxième question, en revanche, nous avons trouvé de nombreuses autres configurations grâce à notre raisonnement avec des polygônes réguliers. La quatrième question, elle, nous a permis de pouvoir imaginer toutes sortes de situations, notamment dans le triangle isocèle rectangle. La sixième et dernière question, encore une fois, était très ouverte et permettait de traiter beaucoup plus de cas différents.

Contents

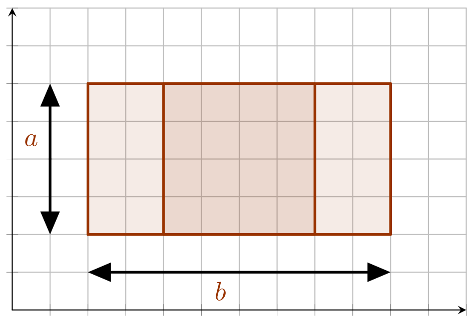
1 Première Partie

1.1 Première question, étude du plus grand carré parallèle aux axes

1.1.1 a) Dans un rectangle de côtés a et b

Les côtés du rectangle ainsi que ceux du carré sont parallèles aux axes. Dans cette situation, nous pouvons en déduire que le seul facteur limitant la taille du carré est le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle. Nous allons donc procéder à une disjonction des cas.

1) Premièrement, si $a \leq b$, le carré maximum est un carré de côté a. Pour donner du sens à nos propos, il convient de les illustrer.

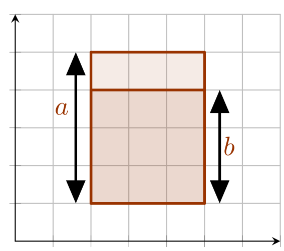


Rectangle de côtés a et b

Lorsqu'un carré est dans un rectangle, celui-ci ne peut avoir des côtés supérieurs à ceux du rectangle lui-même. En effet, il est trivial de remarquer que celui-ci ne pourrait être contenu dans le rectangle si cela était le cas. En revanche, il peut avoir des côtés égaux à la plus petite valeur entre a et b. Ici, le plus grand carré est donc de côté a. Son aire étant a^2.

2) Nous allons maintenant étudier le cas $b < a$.
Comme énoncé précédemment, "le plus grand carré peut avoir des côtés égaux à la plus petite valeur entre a et b". Ici, nous avons $b < a$, cela signifie que la valeur des côtés du plus grand carré est b.

Voici une illustration de nos propos :



Rectangle de côtés a et b lorsque $b < a$

Comme nous pouvons le constater, la taille maximale du rectangle est ici limitée par le côté b. Le carré possède donc une aire maximale de b^2 dans cette situation.

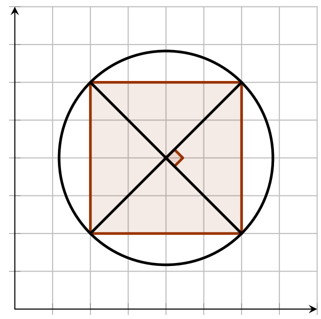
1.1.2 b) Dans un disque de rayon r

Dans un carré, les diagonales sont perpendiculaires l'une à l'autre et se coupent en leur milieu. Les sommets sont donc tous à la même distance de cette intersection.

La demi-diagonale du carré est la distance entre un sommet et le centre de celui-ci. Cette distance correspond également au rayon du cercle circonscrit du carré. Celui-ci étant le plus petit cercle pouvant "encadrer" le carré.

Autrement dit, lorsque la diagonale du carré est égale à deux fois la longueur du rayon du cercle, l'aire est maximale.

L'ilustration ci-dessous va nous permettre de justifier nos propos :



Le plus grand carré dans un cercle

Les 4 triangles constituant le carré sont rectangles et isocèles en un point commun. En effet, les diagonales du carré se coupant perpendiculairement, les 4 angles sont droits.

De plus, celles-ci se coupant en leur milieu, les côtés adjacents aux angles droits sont égaux. On note a, la longueur d'un côté du carré. Etant l'hypoténuse des 4 triangles, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$a^2 = r^2 + r^2$$

$$\iff a^2 = 2r^2$$

$$\iff a = \pm r\sqrt{2}$$

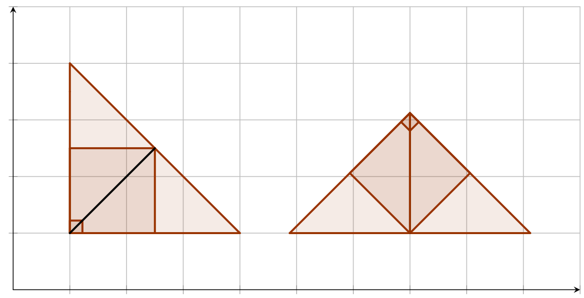
Grâce à ce théorème, nous avons exprimé la longueur d'un des côtés du plus grand carré dans un cercle. Son aire étant a^2, elle a pour valeur $2r^2$. En effet, une longueur ne peut être négative.

1.1.3 c) Dans un triangle isocèle rectangle

Afin de pouvoir répondre de la meilleure des façons à cette question, nous allons, dans un premier temps, nous intéresser au facteur limitant la taille du carré, ensuite, nous allons trouver le plus grand carré rentrant dans la triangle, enfin, nous exprimerons l'aire de celui-ci.

Les côtés adjacents à l'angle droit sont parallèles à l'axe des abscisses. La diagonale, déterminant la taille du carré, sera limitée par l'hypothénuse du triangle.

Nous allons donc illustrer la situation dans le but de pouvoir mieux comprendre comment est ce que l'on peut trouver la plus grande diagonale. Ici, nous choisissons de faire effectuer à l'ensemble, une rotation de 135° dans le sens horaire.



Le plus grand carré dans un triangle isocèle rectangle

On note h, la hauteur prenant pour base l'hypoténuse.

Le triangle étant isocèle et rectangle, cette hauteur est aussi la médiatrice du segment. Cette hauteur forme deux nouveaux triangles isocèles, un à droite, et un à gauche (voir illustration de droite).

Afin de former le plus grand carré, on trace la droite parallèle aux autres cotés adjacents à l'angle droit et passant par l'intersection hypoténuse-médiatrice.

Dans les petits triangles isocèles, ces droites correspondent aux médiatrices des nouvelles hypoténuses.

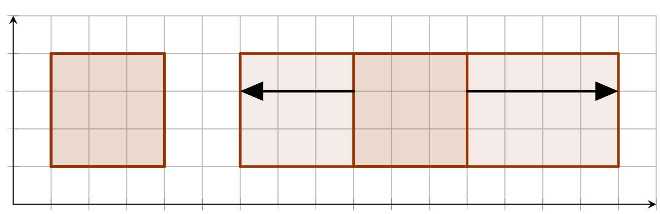
En effet, si deux droites sont parallèles et qu'une troisième droite est perpendiculaire à la première, alors, elle est également perpendiculaire à la seconde. Ainsi, ces médiatrices coupent les nouvelles hypoténuses en deux.

Donc, le plus grand carré a pour côtés les deux segments passant par le point d'intersection médiatrice-hypoténuse et par le milieu des deux autres côtés. On nomme a la longueur des côtés du triangle : le carré le plus grand possède donc des côtés de longueur $\frac{a}{2}$.

L'aire de ce rectangle est alors $\frac{a^2}{4}$.

1.2 Deuxième question, le nombre de façons d'inscrire un tampon de taille maximale dans un polygône convexe

Dans le but répondre au mieux à la question de l'exercice, nous allons utiliser une illustration de deux polygônes convexes. Le premier (à gauche) étant un carré, et le second (à droite), un long rectangle.



Un carré et un rectangle de côtés a et b, avec $b \geq 2a$

1) Le carré : Un carré, possèdant 4 angles de 90°, est convexe. Lorsque le polygône avec lequel nous travaillons est un carré, le plus grand carré qu'il peut contenir est lui-même.

En effet, un carré de côtés de même longueur que le polygône va remplir l'intégralité de l'aire disponible.

Dans cette situation, il n'existe donc qu'une seule manière d'inscrire un tampon de taille maximale sur son paquet.

2) Le long rectangle : Comme vu en $1a$, le plus grand carré a pour côté a.

Ici, le carré peut "se déplacer" de droite à gauche dans le rectangle (mouvements représentés par les flèches dans l'illustration). Il y a donc une infinité de possibilités d'inscrire un tampon de taille maximale sur son paquet.

En effet, si le carré est bien maximal et qu'il peut être mis à deux endroits dans le polygône, il peut en réalité être mis une infinité de fois entre ces deux positions, le polygône étant convexe.

Si l'on relie deux points appartenant à ce polygône, alors le segment qu'ils forment est dans le polygône, ainsi, le segment formé par les sommets correspondant à chacun des deux carrés, est dans le polygône. Les différents segments correspondent aux extrémités des diagonales.

Pour conclure, le nombre de différentes manières d'inscrire un tampon de taille maximale sur un paquet convexe sont 1 ou une infinité.

1.3 Troisième question, les valeurs du ratio $\frac{A_{dis}}{A_g}$

Afin de répondre à cette question de la meilleure des manières, nous allons, dans un premier temps, montrer que $1 \leq \frac{A_{dis}}{A_g} < 2$. Ensuite, nous nous intéresserons à la valeur maximale de celui-ci.

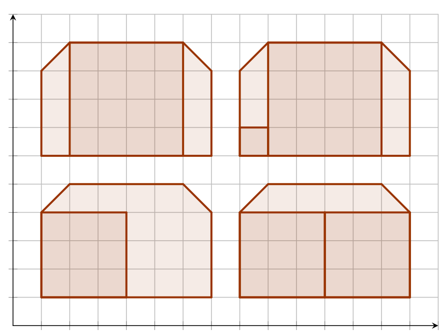
1) Roman, étant capable de disposer deux tampons de la façon dont il le souhaite pour former l'aire A_{dis}, celle-ci se doit d'être au minimum aussi grande que A_g.

En effet, s'il n'existe aucune meilleure disposition des carrés, Roman pourra quand même disposer ses carrés comme pour A_g. Ensuite, le ratio ne peut être supérieur à 2.

Supposons par l'absurde, que $2 \leq \frac{A_{dis}}{A_g}$, cela veut donc dire qu'il existe un carré au moins plus grand que le plus grand carré de A_g, ce qui est absurde. Nous pouvons donc en conclure que $1 \leq \frac{A_{dis}}{A_g} < 2$

2) Maintenant, nous allons devoir trouver un polygône convexe tel que $\frac{A_{dis}}{A_g}$ soit maximum.

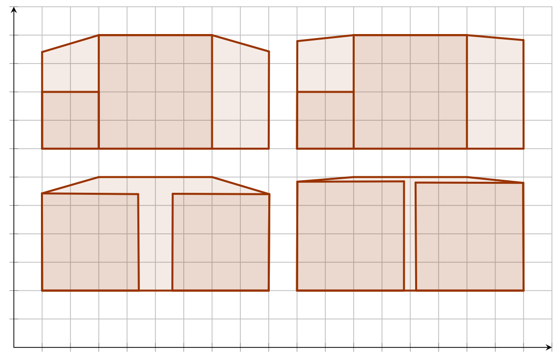
Pour cela, il va falloir que les 2 carrés que l'on dispose comme on veut tendent à être aussi grand que le plus grand carré possible, tout en gardant un deuxième carré le plus petit possible pour l'aire A_g.



Les étapes de la fabrication de l'aire A_g (en haut) et A_{dis} (en bas)

Dans ce polygône, nous apercevons que A_{dis} est plus grand que A_g : $\frac{A_{dis}}{A_g} = \frac{18}{17}$.

En effet, le principe de ce polygône est de ne pas laisser le choix quand au placement du plus grand carré pour enfin en placer deux autres, presque tout aussi grands à côté. Ensuite, nous allons optimiser notre polygône de telle façon que la longueur p tende vers n.



Maintenant, même si notre polygône ressemble tout bonnement à un rectangle, ce n'en est pas un.

Celui-ci oblige Roman à placer le plus grand carré au centre du polygône, tandis que deux autres carrés quasiment aussi grands seront placés d'une façon plus optimisée.

Propriété :

1) Le ratio $\frac{A_{dis}}{A_g}$ peut atteindre 1,6.

Notions importantes :

1) n : Longueur des côtés du plus grand carré.
2) m : Longueur des côtés du deuxième carré de A_g.
3) p : Longueur des côtés de chaucun des carrés de A_{dis}.
4) $2n$: Longueur du polygône.
5) h : hauteur du polygône
6) $\lim_{h \to n} p = n$.

Démonstration :

La longueur de polygône mesurant $2n$ et n étant le côté du carré placé au milieu, on a $m = 0.5n$.

$$A_g = n^2 + m^2 = n^2 + (0.5n)^2$$

$$A_{dis} = 2p^2$$

Donc, $\frac{A_{dis}}{A_g} = \frac{2p^2}{n^2+(0.5n)^2}$

Avec, $\lim_{h \to n} \frac{A_{dis}}{A_g} = \lim_{h \to n} \frac{2p^2}{n^2+(0.5n)^2} = \frac{2n^2}{n^2+(0.5n)^2} = \frac{2n^2}{1.25n^2} = \frac{2}{1.25} = 1.6$

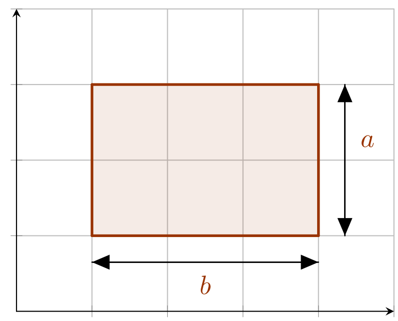
Conséquence immédiate :

Le ratio $\frac{A_{dis}}{A_g}$ peut atteindre 1,6.

1.4 Quatrième question, la plus grande aire qu'il peut obtenir s'il peut placer deux tampons disjoints comme il le souhaite

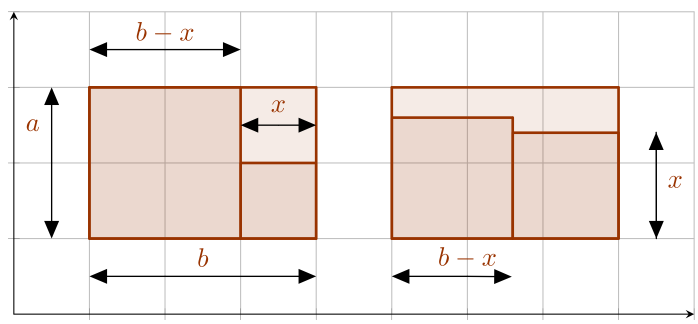
1.4.1 a) Dans un rectangle de côtés a et b

1) Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas $2a > b$. Le rectangle va donc être de cette forme :



Rectangle de côtés a et b, avec $b < 2a$

Nous allons donc créer deux carrés dépendant l'un de l'autre de la façon suivante :



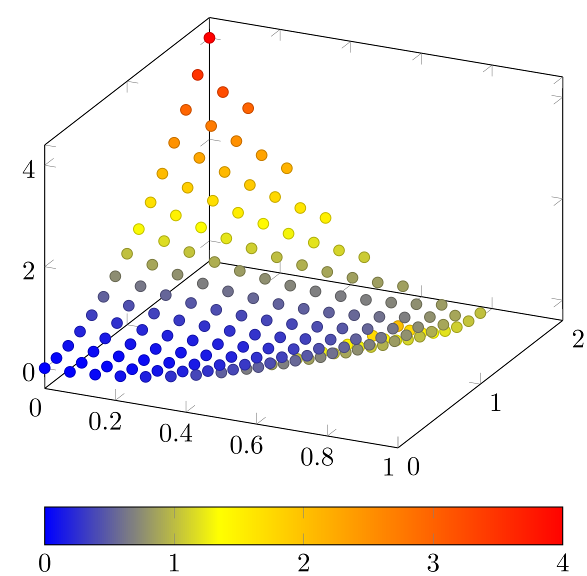
Rectangle de côtés a et b, avec deux carrés

Nous souhaitons exprimer l'aire A_{dis} en fonction de ces deux variables. Pour cela, exprimons tout d'abord l'aire des deux carrés. On a, $A_{carré1} = (b-x)^2$ et $A_{carré2} = x^2$

Donc, $A_{dis} = A_{carré1} + A_{carré2} = (b-x)^2 + x^2 = 2x^2 - bx + b^2$. Etant donné que $b < 2a$, on a : $0 \leq b < 2a$ mais aussi, $0 \leq x < a$. Comme toujours, nous tenons à illustrer nos propos dans le but d'une meilleure compréhension.

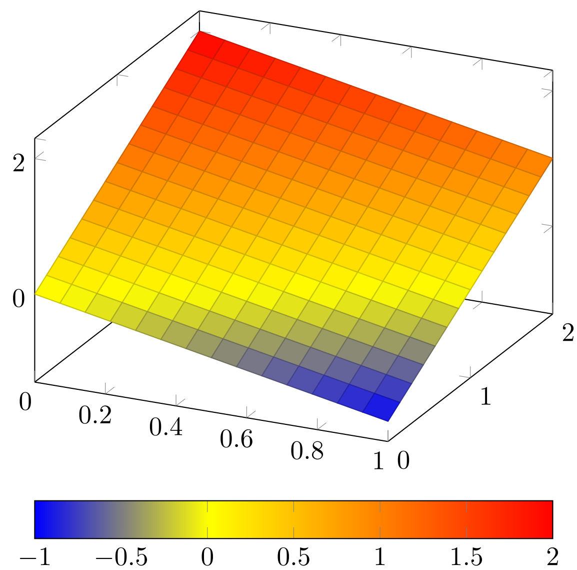
Nous considérons, pour rendre la tâche plus facile, que a vaut 1 unité arbitraire.

Nous encadrons donc b et x de la manière suivante : $0 \leq b < 2$ et $0 \leq x < 1$. Ci-dessous, est donc exprimé A_{dis} en fonction de x et b.



A_{dis} en fonction de x et b selon les encadrements mentionnés

Ensuite, pour donner plus de sens au graphique multidimensionnel ci-dessus, nous allons en faire un deuxième, celui-ci exprimant la différence entre b et x :



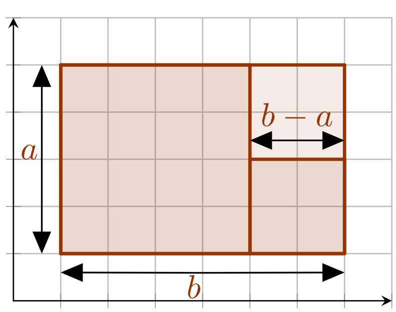
Différence entre x et b

Grâce à ces deux graphiques, nous pouvons remarquer que la plus grande valeur de l'aire A_{dis}, est directement liée à la différence entre b et x.

En effet, nous pouvons comprendre en les analysant, que lorsque la différence entre b et x est maximale, l'aire A_{dis} l'est aussi.

La valeur maximale que $b - x$ peut prendre est a, x va donc valoir $b - a$. L'aire A_{dis} vaut donc $(b - x)^2 + x^2 = a^2 + (b - a)^2$.

Voici à quoi ressemblerait donc A_{dis} :



A_{dis} lorsque $b < 2a$

2) Maintenant, le cas où le rectangle est de longueur b telle que $b > 2a$.
Dans cette situation, le plus grand carré possible est de côté a. Le rectangle de longueur $b > 2a$, nous pouvons donc en rentrer 2. L'aire maximale A_{dis}, vaut $2a^2$.

1.4.2 b) Dans un disque de rayon r

Dans cette question, nous allons modéliser l'aire A_{dis} en fonction des côtés des deux carrés.

On note a le côté du plus grand carré, et b le côté du petit carré.

Nous cherchons un encadrement pour ces valeurs. La plus grande diagonale du carré peut être égale au diamètre du cercle, autrement dit, $2r$.

Avec le théorème de Pythagore, nous trouvons que le côté mesure $r\sqrt{2}$. Celui-ci est donc une valeur majorant a. La plus petite valeur de a est la plus grande de b. C'est lorsque les deux carrés sont de côtés égaux, cela veut dire que nous pouvons simplement nous intéresser au cas du plus grand carré dans un demi-cercle.

La fonction $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ correspond à un demi-cercle, centré par rapport aux axes. Lorsque l'on ne s'intéresse qu'au premier quadrant, nous voulons trouver l'instant où $f(x) = 2x$. En effet, le premier quadrant coupant le carré en deux, il faut que la hauteur y soit deux fois plus grande que x pour que l'on puisse avoir un carré par symétrie axiale avec l'axe des ordonnées.

On cherche donc, $f(x) = 2x$ avec $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. On a, $2x = \sqrt{r^2 - x^2} \Leftrightarrow 4x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5}r^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{r\sqrt{5}}{5}$. Le côté du carré étant égal à $2x$, il vaut $\frac{2r\sqrt{5}}{5}$.

On cherche maintenant à trouver la plus petite valeur de b. Pour cela, nous devons utiliser la plus grande valeur de a mais aussi $f(x)$. En effet, lorsque a est maximale, cela va réduire l'espace pour b dans le demi-cercle. Nous allons soutraire la moitié de a à la fonction puisque l'on n'étudie que le demi-cercle. Nous allons résoudre l'équation $2x = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

En effet, de la même façon qu'au début, nous cherchons l'instant ou la hauteur est deux fois plus grande que la largeur, étant donné que la partie étudiée n'est maintenant que le premier quadrant.

On a, $2x = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{r\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4x = 2\sqrt{r^2 - x^2} - r\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{r^2 - x^2} = -r\sqrt{2} - 4x \Leftrightarrow 4(r^2 - x^2) = r^2 + 4r\sqrt{2}x + 8x^2 \Leftrightarrow 2r^2 - 2x^2 - r^2 - 4r\sqrt{2}x - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow -10x^2 - 4r\sqrt{2}x + r^2 = 0$.

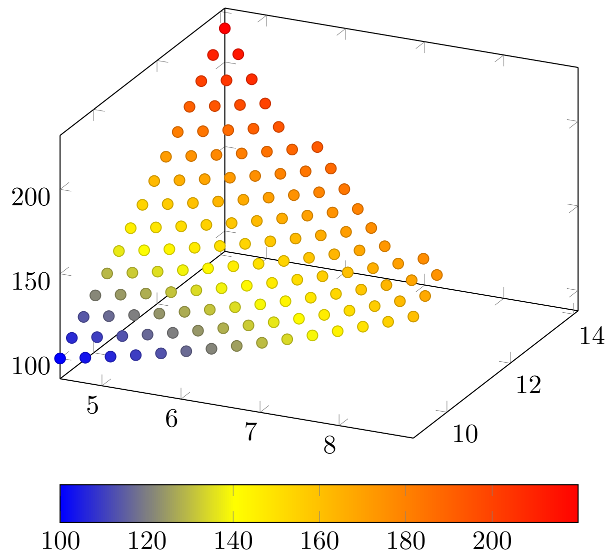
Ceci est un polynôme du second degré, nous cherchons donc les coefficients, on a : $A = 10$, $B = 4r\sqrt{2}$ et $C = -r^2$. Donc, $\Delta = B^2 - 4AC = (4r\sqrt{2})^2 - 4(10(-r^2))$.
Celui-ci étant strictement positif, nous pouvons calculer ses racines de la manière suivante :

$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4r\sqrt{2}\pm\sqrt{(4r\sqrt{2})^2-4(10(-r^2))}}{20} = \frac{-4r\sqrt{2}\pm\sqrt{32r^2+40r^2}}{20} = \frac{-4r\sqrt{2}\pm6r\sqrt{2}}{20}$. Les racines sont donc $x = \frac{r\sqrt{2}}{10}$, ou $x = -\frac{r\sqrt{2}}{10}$.

Cependant, nous étudions des distances, c'est donc la première racine que nous retenons puisqu'elle est positive. Nous avions mentionné que x ne représentait que la moitié du côté b, la valeur minimale de celui-ci est donc : $2 \times \frac{r\sqrt{2}}{10} = \frac{r\sqrt{2}}{5}$.

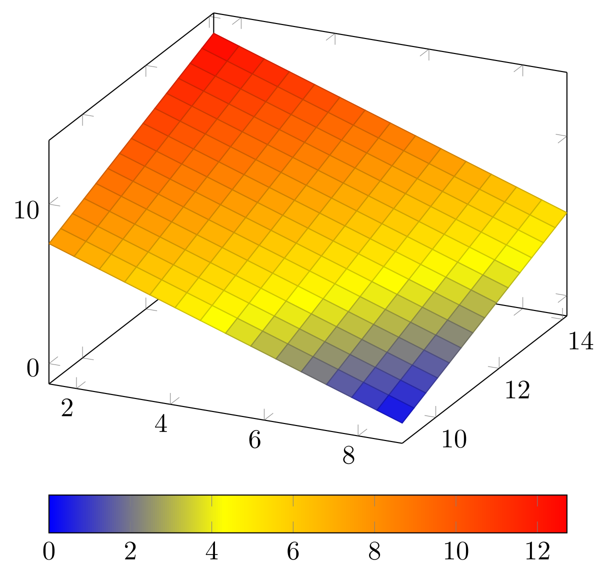
Pour récapituler, on a : $\frac{2r\sqrt{5}}{5} \leq a \leq r\sqrt{2}$ et $\frac{r\sqrt{2}}{5} \leq b \leq \frac{2r\sqrt{5}}{5}$.

Nous avons donc trouvé les encadrements de a et de b. Ci-dessous, les axes représentent les valeurs de a et b, lorsque $r = 10$.



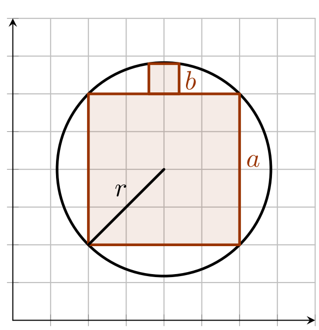
<u>A_{dis} en fonction de a et b lorsque $r = 10$</u>

Ensuite, nous voulons, pour donner plus de sens au premier graphique, en faire un deuxième représentant la différence entre a et b.



<u>Différence entre a et b</u>

Nous constatons que lorsque la différence entre a et b est maximale, l'aire que couvrent leurs carrés est elle aussi maximale. Donc, cela veut dire que la plus grande aire est $(r\sqrt{2})^2 + (\frac{r\sqrt{2}}{5})^2 = \frac{52r^2}{25}$
Voici à quoi va ressembler A_{dis} :



<u>A_{dis} dans un cercle</u>

1.4.3 c) Dans un triangle isocèle rectangle

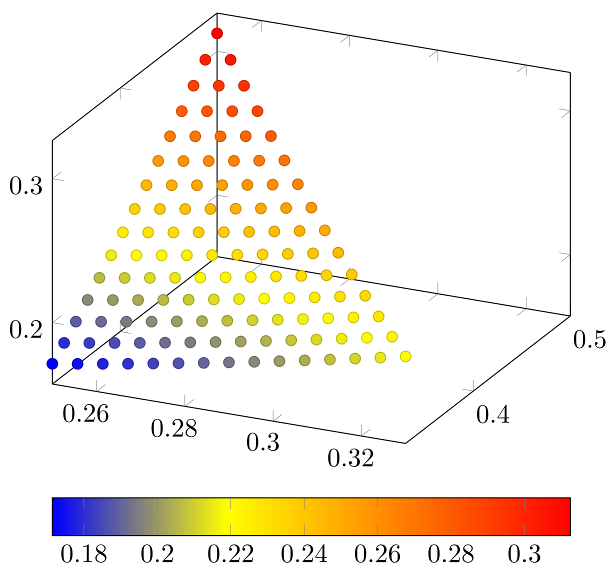
On note $f(x) = -x + h$, la fonction représentant la pente formé par l'hypoténuse du triangle. A l'instant où $x = f(x)$, (côtés égaux), on a $A = x \times f(x) = x(-x+h) = -x^2 + hx$. Et $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-h}{-2} = \frac{1}{2}h$.

Nous venons de montrer que lorsque l'on forme un carré partant de l'angle droit dans ce triangle, le côté du carré seras égal à la moitié du côté du triangle.

On note a_1 et a_2 les côtés du grand et du petit carré respectivement. Lorsque l'un d'entre eux sera plus grand que l'autre, cela va restreindre le petit carré dans un nouveau triangle rectangle isocèle.

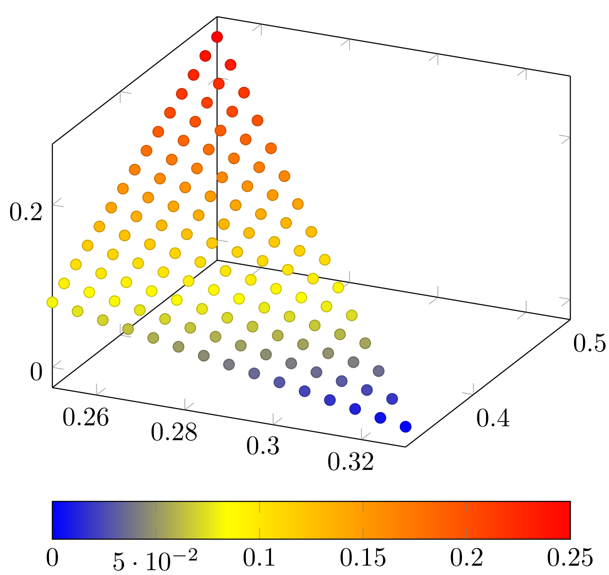
Nous avons donc $h = a_1 + 2a_2$. Ensuite, nous allons utiliser deux graphiques multidimmensionnels dans le but d'illustrer et de comprendre quelle est la plus grand aire couverte par ces deux carrés mais aussi pourquoi.

On a, $a_1 + 2a_2 = h$ et $A_{dis} = a_1^2 + a_2^2$. Les axes utilisent h comme unité :



A_{dis} en fonction de a_1 et a_2

Nous tenons à également analyser la différence entre a_1 et a_2, pour voir si cela impacte l'aire des deux carrés. Ci-dessous est donc représentée la différence entre a_1 et a_2, avec h pour unité.



Différence entre a_1 et a_2

Il est donc très clair que la plus grande aire couverte par les carrés de côtés a_1 et a_2 est lorsque la différence entre ceux-ci est maximale. Nous savons que le plus grand carré est de côtés $\frac{1}{2}h$, cela veut dire que le côté du petit vaut $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}h$.

Nous avons donc $A_{dis} = (\frac{h}{2})^2 + (\frac{h}{4})^2 = \frac{3}{4}h^2$.

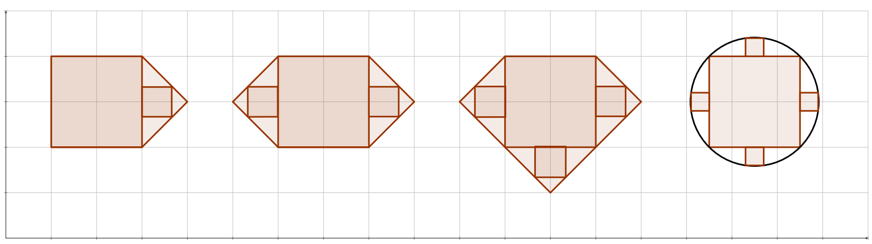
1.5 Cinquième question, le nombre de configurations de tampons qui atteignent A_{dis}

Nous allons, dans un premier temps, utiliser des formes telles que $A_{dis} = A_g$.

Afin de pouvoir placer un deuxième plus grand carré de plusieurs façons, il doit rester plusieurs espaces dans le polygône tels que les carrés les plus grands que l'on puisse rentrer dans chacun de ses espaces, soient identiques.

Si un espace peut contenir un deuxième carré plus grand que les autres, cela signifie qu'il n'y aura qu'une seule configuration possible. De la même façon, avec 2 espaces pouvant contenir des carrés plus grand que les autres, il y aura 2 configurations possibles, et ce, jusqu'à 4 inclus.

Il est donc impératif de pouvoir construire des deuxièmes carrés de même taille. Ci-dessous, sont montrés les différents polygônes convexes tels que l'on puisse, respectivement, construire 1, 2, 3, et 4 fois différentes A_{dis}.

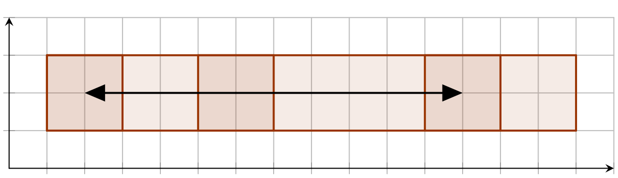


Configurations de A_{dis}

Dans d'autres cas, il existe une infinité de configurations possibles.

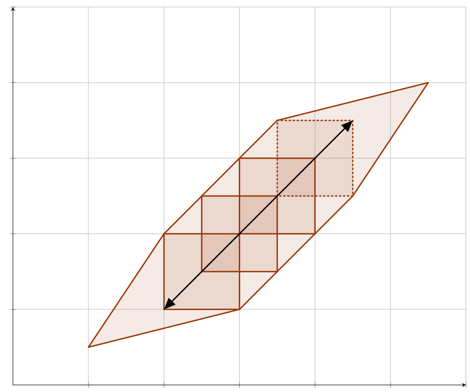
1) Le cas du rectangle : Les seules conditions étant que les longueurs du rectangle soient au minimum deux fois plus longues que les largeurs.

Effectivement, lorsque ces conditions sont remplies, de la même manière qu'à la deuxième question, le carré peut se "déplacer" de droite à gauche dans le rectangle. Il en est de même pour deux carrés lorsque $b > 2a$. En effet, ceux-ci auront assez d'espace pour être mis une infinité de façons différentes. Le rectangle ci-dessous en est l'illustration.



Configurations de A_{dis}

Mais ce n'est pas l'unique manière d'avoir une infinité de configurations différentes pour former A_{dis}. En effet, il existe même un nombre infini de polygônes convexes remplissant ces conditions. L'un d'eux se trouve ci-dessous.



Configurations de A_{dis}

Nous pouvons donc en conclure que le nombre de configurations différentes pour former A_{dis} peut être $1, 2, 3, 4$ ou l'infini.

1.6 Sixième question, la plus grande aire pour l'union de deux tampons de tailles quelconques superposables

1.6.1 a) Dans un rectangle de côtés a et b

Nous allons dans un premier temps traiter le cas $b < 2a$ et ensuite, celui où $b \geq 2a$

1) Le plus grand côté qu'un carré peut avoir a pour valeur le plus petit côté entre a et b.

Nous allons considérer que b ne peut être strictement inférieur à a, et que si cela se produisait, alors il serait lui même a et l'autre côté serait b. Cela veut donc dire que le plus grand carré est de côté a.

En revanche, b étant strictement inférieur au double de a, il va rester un espace de côtés a et $b - a$.

Dans cette question cependant, les carrés peuvent être superposés. Il n'y a qu'à poser un deuxième carré de côtés a sur l'espace restant, et le rectangle entier sera couvert. L'aire couverte aura donc pour valeur $a \times b$.

C'est bien entendu possible lorsque le premier carré est disposé de telle sorte que l'espace restant ne soit que d'un côté du carré. Si jamais le plus grand carré n'était pas placé le plus à droite ou le plus à gauche, il resterait un espace non couvert. En effet, le deuxième carré ayant a pour côté ne peut pas couvrir une distance plus grande que a.

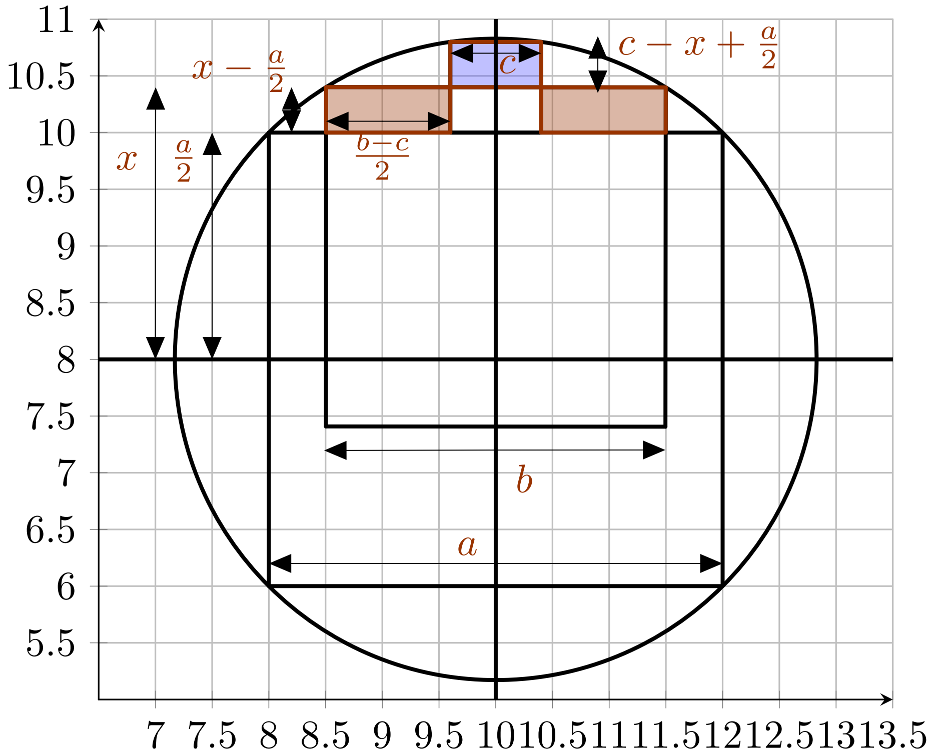
2) Ensuite, lorsque $b \geq 2a$: le côté du plus grand carré est encore une fois égal à a.

Ici, étant donné que $b \geq 2a$, il y a aussi la place pour un deuxième carré de taille égale, sans avoir à les superposer. Le fait de pouvoir ne pas les superposer lorsqu'ils sont de tailles égales, va nous permettre d'obtenir l'aire maximale.

Celle-ci valant donc $a^2 + a^2 = 2a^2$.

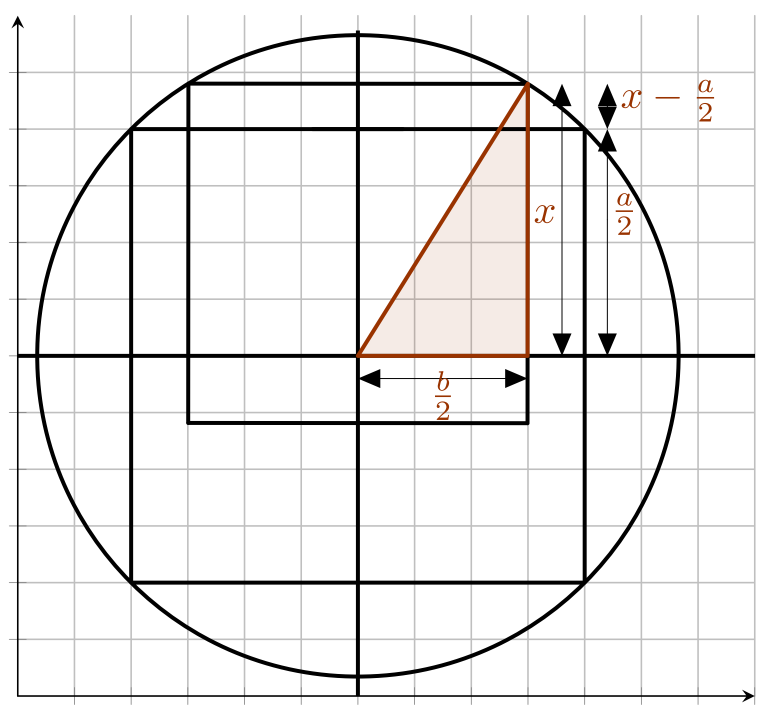
1.6.2 b) Dans un disque de rayon r

Voici une illustration de la situation, avec en bleu l'espace perdu, qui correspond a un rectangle de longueur et en rouge l'espace gagné en fonction du petit carré.



Les espaces gagnés et perdus selon le côté du petit carré

On a donc, espaces gagnés : $(\frac{b-c}{2})(x - \frac{a}{2})$ espaces perdus : $c(c - x + \frac{a}{2})$



Le triangle pour exprimer l'aire

D'après cette illustration, nous pouvons voir que l'aire couverte par les deux carrés est donc $A = (x - \frac{a}{2}) \times b + A_{GrandCarré}$.

Afin de trouver sa valeur maximale, on cherche x :

Dans le triangle, on a : $r^2 = (\frac{b}{2})^2 + x^2 \iff x^2 = r^2 - (\frac{b}{2})^2 = r^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4r^2-b^2}{4} \iff x = \pm\frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2}$.

Etant une distance, $x \geq 0$, donc $x = \frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2}$.

Maintenant, calculons l'aire gagnée et l'aire perdue.

Aire gagnée : $(\frac{b-c}{2})(x - \frac{a}{2}) = \frac{xb}{2} - \frac{ab}{4} - \frac{cx}{2} + \frac{ac}{4}$

Aire perdue : $c(c - x + \frac{a}{2}) = c^2 - cx + \frac{ca}{2}$

On cherche lorsque Aire gagnée > Aire perdue :

$$\frac{xb}{2} - \frac{ab}{4} - \frac{cx}{2} + \frac{ac}{4} > c^2 - cx + \frac{2ac}{4}$$

$$\iff \frac{xb}{2} - \frac{ab}{4} + \frac{cx}{2} > c^2 + \frac{ac}{4}$$

$$\iff \frac{xb+cx}{2} > c^2 + \frac{ac+ab}{4}$$

$$\iff x\frac{(b+c)}{2} > c^2 + \frac{a(b+c)}{4}$$

$$\iff x > \frac{2c^2}{b+c} + \frac{a}{2}$$

$$\iff x - \frac{a}{2} > \frac{2c^2}{b+c}$$

De plus, $2c^2 - c = c(2c-1)$, mais aussi $b + c > 2c^2$.

Or, $c = \frac{r\sqrt{2}}{5}$ donc $c^2 = \frac{2r^2}{25}$ et $2c^2 = \frac{4r^2}{25}$.

Ensuite, $b + c = b + \frac{r\sqrt{2}}{5} = \frac{5b+r\sqrt{2}}{5}$

Cela veut dire que Aire gagnée > Aire perdue lorsque :

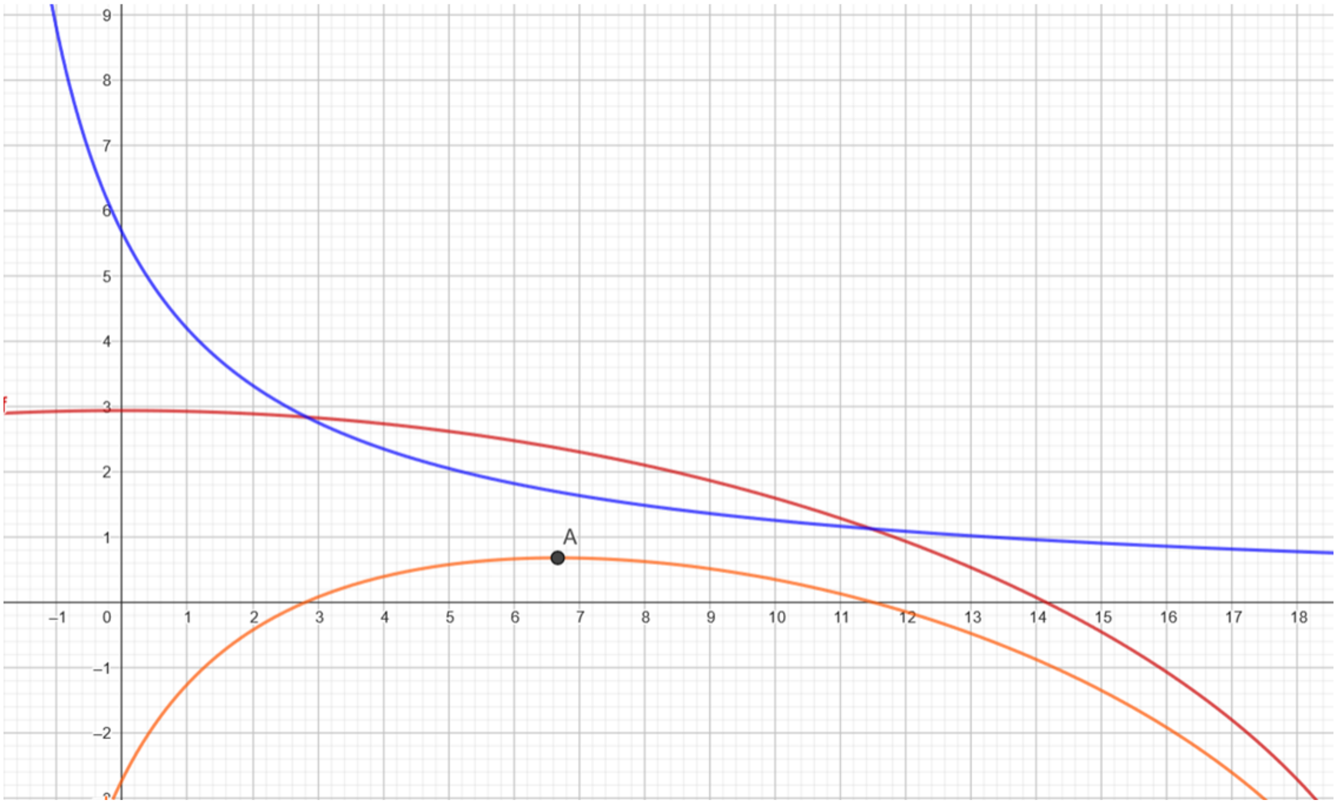
$$x - \frac{a}{2} > \frac{\frac{4r^2}{25}}{\frac{5b+r\sqrt{2}}{5}}$$

$$\iff x - \frac{a}{2} > \frac{20r^2}{25(5b+r\sqrt{2})}$$

$$\iff x - \frac{a}{2} > \frac{4r^2}{25b+5r\sqrt{2}}$$

$$\iff x - \frac{r\sqrt{2}}{2} > \frac{4r^2}{25b+5r\sqrt{2}}$$

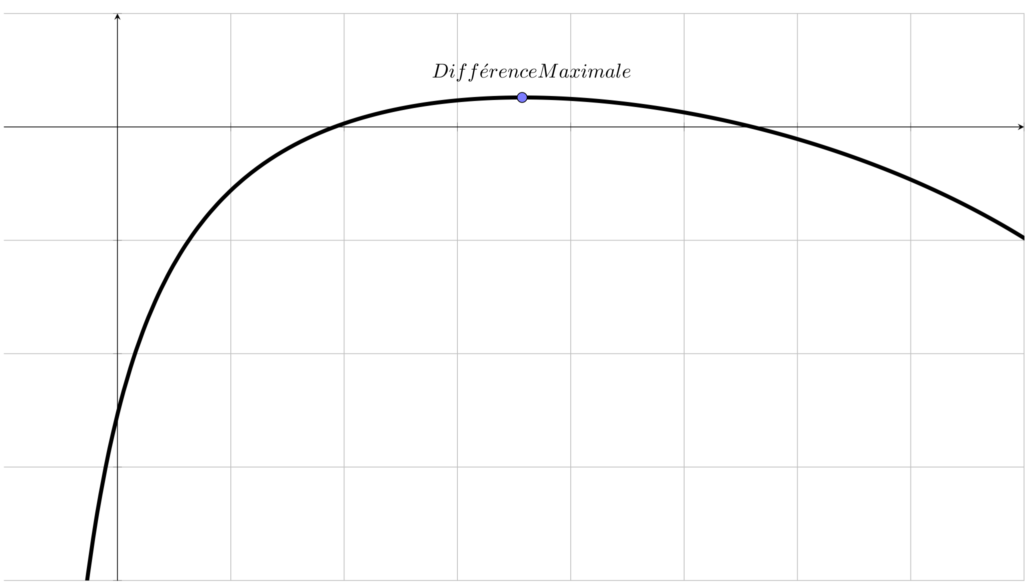
Ci-dessous : en rouge l'aire gagnée, en bleu l'aire perdue et en jaune la différence entre les deux.



Nous voulons trouver lorsque la différence entre les deux expressions est maximale.

Nous allons remplacer x : $x - \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2} - \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Ci-dessous, est représentée la différence entre les deux expressions, en fonction de b et lorsque $r = 10$:



Différence entre l'aire gagnée et perdue en fonction de b lorsque $r = 10$

Nous allons donc choisir cette valeure pour b.

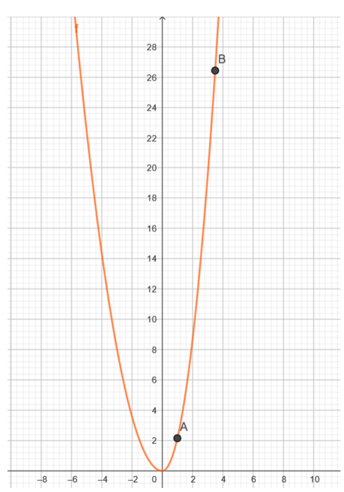
Nous voulons voir quelle est la relation entre b et r.

C'est pour cela que ci-dessous nous allons nous intéresser aux valeurs de b en fonction de r :

<u>b en fonction de r</u>

Nous pouvons donc assumer que $b = \frac{2r}{3}$.

Cela veut dire que nous avons $A_{lib} = a^2 + b(\frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2} - \frac{r\sqrt{2}}{2}) = 2r^2 + \frac{2r}{3}(\frac{\sqrt{4r^2-(\frac{2r}{3})^2}}{2} - \frac{r\sqrt{2}}{2})$.
Voici la valeur de A_{lib} en fonction de r :



1.6.3 c) Dans un triangle isocèle rectangle

On note $f(x) = -x + h$, la fonction représentant la pente formée par l'hypoténuse du triangle. h étant un côté du triangle (pas l'hypoténuse).

On sait qu'un angle du triangle doit être dans l'angle droit pour former la plus grande aire. On cherche à déterminer si cette forme est un carré ou un autre, pour savoir s'il va falloir superposer les deux triangles.

On a, $A = x \times f(x) = x(-x + h) = -x^2 + hx$.

Et $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-h}{-2} = \frac{h}{2}$. Aussi, $\beta = f(\alpha) = -\frac{h}{2} + h = \frac{h}{2}$.

On vient donc de prouver que la forme couvrant l'aire la plus grande, est un carré positionné dans l'angle droit. Cela veut dire, que l'aire maximale dans cette situation, est encore une fois de placer le plus grand carré et d'ensuite, placer le deuxième plus grand.

Il nous sera aussi utile pour la suite, de remarquer que le côté de ce carré est deux fois plus petit que celui du triangle (pas l'hypoténuse).

2 Deuxième Partie : les tampons peuvent ne pas être parallèles aux axes

2.1 Première question de la deuxième partie, étude du plus grand carré parallèle aux axes

2.1.1 a) Dans un rectangle de côtés a et b

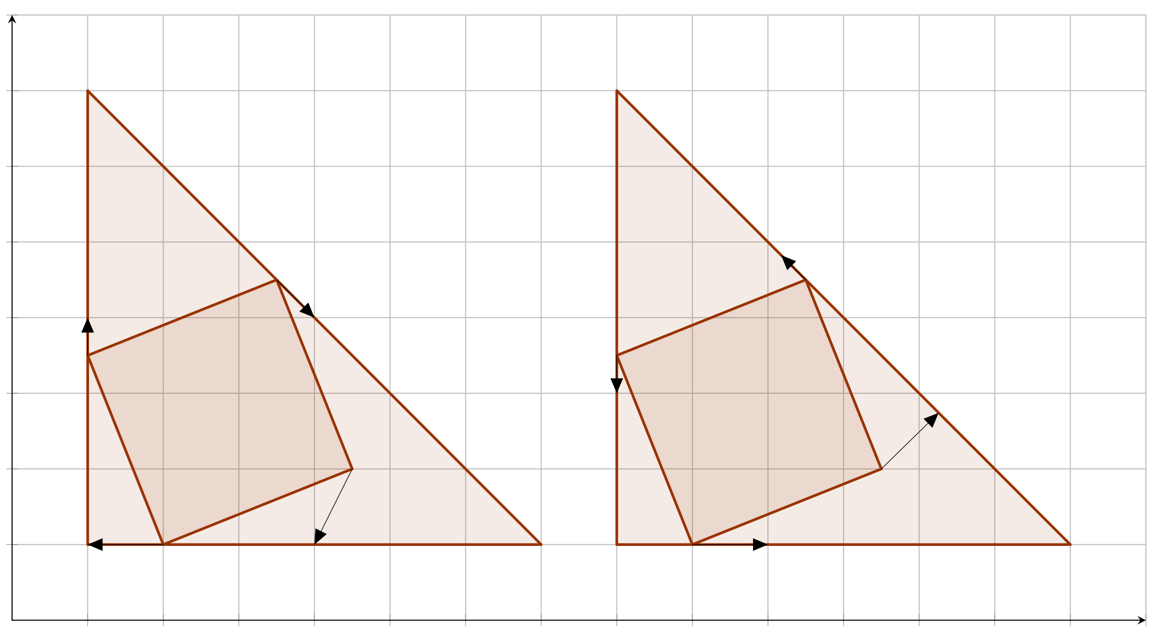
Ici, le rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes, la réponse est la même qu'à la première question de la première partie.

2.1.2 b) Dans un disque de rayon r

Lorsque le plus grand carré est placé dans le cercle, celui-ci a pour aire $2r^2$ (comme prouvé à la première question de la première partie). Celle-ci ne dépendant que du rayon et le cercle étant régulier, la réponse est donc la même qu'à la première question de la première partie.

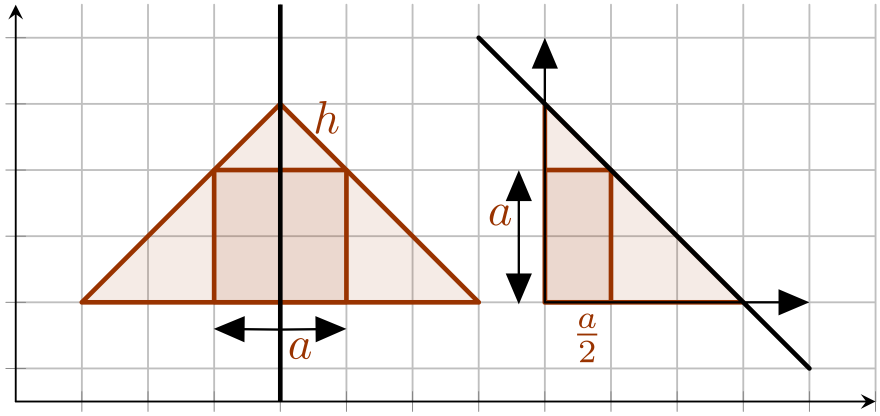
2.1.3 c) Dans un triangle isocèle rectangle

Le plus grand carré dans ce triangle, est soit parallèle aux axes, soit à l'hypoténuse. En utilisant une combinaison d'une rotation et d'une translation des points, tout en conservant les 4 angles droits et 4 côtés égaux, nous pouvons voir que plus le carré sera proche d'être parallèle à un coté, plus son aire sera importante. En effet, puisque les côtés seront plus grands, l'aire sera plus grande.



Le plus grand carré est parallèle à un côté du triangle isocèle rectangle

Nous allons donc, en premier lieu, nous intéresser aux côtés du plus grand carré parallèle à l'hypoténuse. Ci-dessous est représenter celui-ci, ainsi que la première étape de résolution de la question :



Le plus grand carré lorsqu'il est sur l'hypoténuse

Lorsque l'on coupe le carré en deux, nous obtenons un rectangle de longueur a et de largeur $\frac{a}{2}$. Nous voulons trouver la valeur de a en fonction de h (la hauteur).

On note $f(x)$, la fonction formée par l'hypoténuse du nouveau triangle rectangle isocèle. On a $f(0) = h$ et le coefficient directeur de la droite est -1.

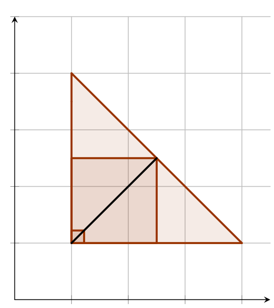
Donc, $f(x) = -x + h$.

Pour former le rectangle ci-dessus, nous devons résoudre une équation. La longueur du rectangle étant deux fois plus longue de la largeur, on a : $f(x) = 2x = -x + h. \Leftrightarrow 3x = h \Leftrightarrow x = \frac{h}{3}$.

Nous remplaçons donc dans l'équation, $2x = \frac{2h}{3} = (\frac{2}{3})h$. Ceci étant dit, $2x$ correspond au côté a dans la figure. Nous venons donc de trouver sa valeur en fonction de h.

L'aire maximale du carré dans cette situation est $a^2 = (\frac{2h}{3})^2 = \frac{4h^2}{9}$.

Nous allons maintenant vérifier que cette aire est plus petite que celle du carré lorsque celui-ci est placé dans l'angle droit.



Le plus grand carré parallèle aux axes

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$h^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{h^2}{2} \Leftrightarrow a = \frac{h}{\sqrt{2}}$. L'aire du carré étant a^2, on a $A = a^2 = \frac{h^2}{2}$. Nous pouvons multiplier à la fois le numérateur et le dénominateur par 4, dans le but d'avoir le même numérateur que dans le cas précédent.

On a, $A = \frac{4h^2}{8}$.

Conséquences immédiates :

Le dénominateur étant plus petit que dans le cas précédent, l'aire du carré est plus grande lorsqu'il est placé dans l'angle droit.

C'est donc la meilleure façon de faire rentrer le plus grand carré possible dans le triangle rectangle isocèle.

2.2 Seconde question de la deuxième partie, le nombre de façons d'inscrire un tampon de taille maximale dans un polygône convexe

Comme montré précédemment, nous pouvons inscrire le plus grand carré soit une fois, soit une infinité de fois.

Cependant, le fait que le carré puisse tourner, va nous permettre de pouvoir répondre à cette question d'une toute autre manière.

En effet, nous remarquons que lorsque le polygône est régulier, il existe un lien entre le nombre de sommets et de configurations possibles quant au placement du carré le plus grand.

Par exemple, un carré, possédant 4 sommets, peut contenir un seul plus grand carré, tandis qu'un octogone (8 sommets) peut en contenir 2.

Notions importantes :

1) n : nombre de sommets d'un polygône régulier.
2) m : nombre de configurations différentes.

Propriété :

1) Lorsque n est un multiple de 4, il y a $\frac{n}{4}$ configurations.

Démonstration : Dans un polygône régulier, tous les sommets appartiennent à un même cercle.

Ceux-ci étant à une distance égale les uns des autres, lorsqu'il y a seulement 4 sommets, cela forme un carré. On a donc $n = 4$, et $m = 1$.

En effet, lorsqu'il n'existe aucun sommet appartenant au cercle entre 2 sommets consécutifs du polygone, le carré ne peut tourner. Et pour cause, il ne ferait que simplement répéter le premier carré.

Cependant, dans un octogone, étant un polygône régulier à 8 sommets, il existe un unique sommet, appartenant au cercle et à l'ocotogone, entre chaque sommets formant un côté du carré. On a donc $n = 8$, et $m = 2$.

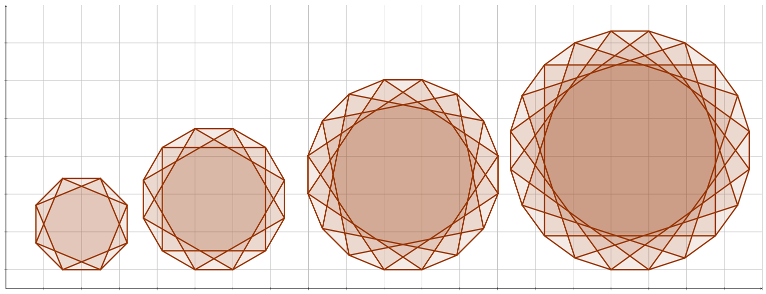
En effet, lorsque l'on étudie l'octogone dans le sens horaire par exemple, nous pouvons remarquer que chaque sommet du carré peut se déplacer au prochain sommet de l'octogone, sans répéter le premier carré. Cela étant possible, notamment, grâce au fait que la distance entre un sommet et le prochain reste identique dans tout le polygône.

Cette rotation ne peut en revanche s'effectuer qu'une seule fois. Et pour cause, s'ils recommencaient une deuxième fois, chaque sommet du carré retomberait sur un sommet utilisé pour former le premier carré.

Nous pouvons donc en déduire que lorsque l'on utilise un polygône régulier ayant un nombre de côtés divisible par 4, il suffit de rajouter un sommet entre chaque points du carré sur le cercle, pour augmenter le nombre de configurations de 1. Un carré, possédant 4 côtés, lorsque n est un multiple de 4, il y a donc $\frac{n}{4}$ configurations.

Effectivement, pouvons vérifier cette propriété intuitivement, un carré utilise 4 sommets différents du polygône régulier, cela signifie que chaque nouvelle configuration utilise 4 nouveaux sommets. On a donc : $m = \frac{n}{4}$.

Pour une compréhension plus approfondie, nous tenons à illustrer nos propos. Ci-dessous, nous répétons ce processus, en formant aussi un dodécagone, un hexadécagone et un icosagone (possédant respectivement 12, 16 et 20 sommets).



Configurations de A_g

2.3 Troisième question de la deuxième partie, les valeurs du ratio $\frac{A_{dis}}{A_g}$

Cette question ne présente aucune différence par rapport à celle de la première partie.

En effet, dans la première partie, nous avons utilisé un polygône tel que A_{dis} tendait à être égale à l'aire de celui-ci.

Le polygône était construit de telle sorte que le plus grand carré était obligé d'être positionné au centre de celui-ci. Cela résultait en un ratio $\frac{A_{dis}}{A_g}$ de 1.6 au maximum.

La nouvelle condition "si les tampons peuvent ne pas être parallèles aux axes" ne va pas nous permettre de pouvoir construire un polygône plus optimisé que le précédent.

Nous pouvons donc en conclure que les résultats restent inchangés entre la première et la deuxième partie de la troisième question.

2.4 Quatrième question de la deuxième partie, la plus grande aire qu'il peut obtenir s'il peut placer deux tampons disjoints comme il le souhaite

2.4.1 a) Dans un rectangle de côtés a et b

Le rectangle ayant des côtés parallèles aux axes, cette question ne présente aucune modification par rapport à celle de la première partie.

En effet, tourner un carré dans cette situation ne va pas lui permettre d'avoir une aire plus importante.

2.4.2 b) Dans un disque de rayon r

Tourner les carrés reviendrait à tourner le cercle, cependant, cela ne changerai en rien la réponse précédente. Cette question ne présente donc aucune modification par rapport à celle de la première partie.

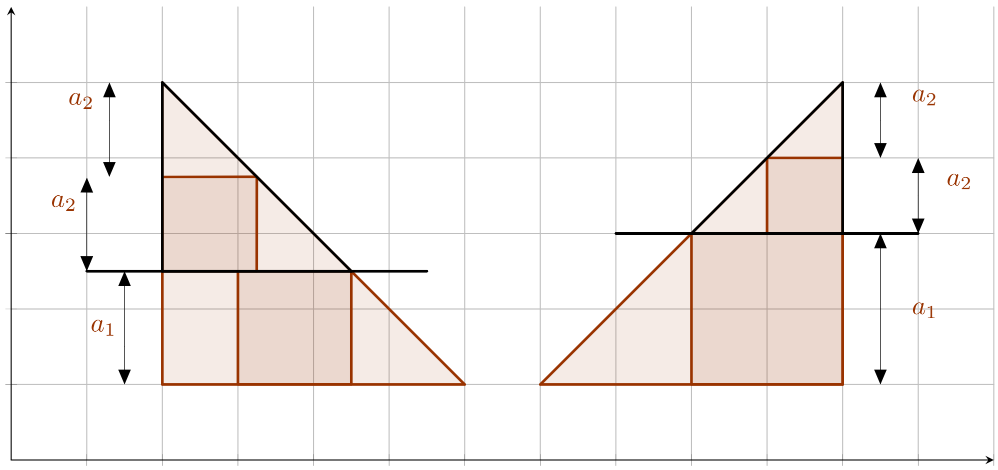
2.4.3 c) Dans un triangle isocèle rectangle

Nous allons dans un premier temps, déterminer A_{dis} lorsque les carrés sont parallèles aux axes et ensuite, lorsqu'ils le sont par rapport à l'hypoténuse. En effet, par la combinaison d'une rotation et d'une translation, l'aire des carrés la plus grande est lorsqu'ils sont parallèles à un côté du triangle, et même, qu'ils partagent une même droite.

1) Grâce à la question 6c, nous avons pu voir que le côté du plus grand carré dans un triangle rectangle isocèle, était deux fois plus petit que le côté du triangle.

Lorsque l'on observe les carré nous pouvons constater que le triangle du bas vient former un nouveau triangle rectangle isocèle dans lequel se trouve l'autre carré. Le côté du grand triangle est $a_1 + 2a_2$.

En effet, lorsqu'on met un carré le plus en bas possible, le triangle isocèle formé est de côté $2a_2$, le côté du triangle est donc bien $a_1 + 2a_2$.



Le côté du triangle en fonction des côtés des carrés

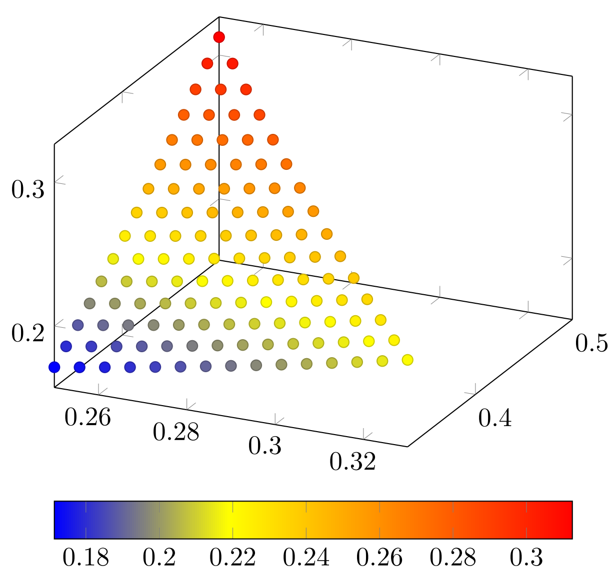
On a, $A_{dis} = a_1^2 + a_2^2$ et $h = a_1 + 2a_2$.

Donc, $A_{dis} = a_1^2 + (\frac{h-a1}{2})^2 = \frac{4a-1^2+h^2-2a_1h+a_1^2}{4} = \frac{5a_1^2-2a_1h+h^2}{4} = \frac{5a_1^2-2a_1^2-4a_1a_2+a^2+4a_1a_2+_2^2}{4} = \frac{4a_1^2+a_2^2}{4}$. Lorsque les deux carrés sont de même taille, leurs côtés mesurent $\frac{h}{3}$. C'est donc la valeur minimale du plus grand carré entre les deux, et la valeur maximale du petit.

Lorsque a_1 est le plus grand possible, il mesure $\frac{h}{2}$ et $a_2 = \frac{h}{4}$.

Pour augmenter notre compréhensibilité, nous tenons à illustrer l'aire A_{dis} en fonction de a_1 et a_2, nous assumons que x est une unité arbitraire qui seras utilisée pour les axes du graphique multidimensionnel.

Les valeurs impossibles ont été filtrées, à l'aide de cette simple inéquation : $a_1^2 + 2a_2^2 \leq 1$.

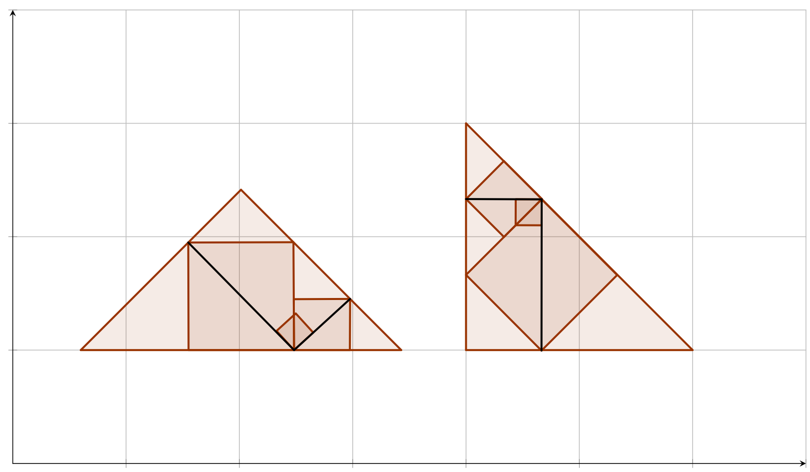


A_{dis} en fonction de a_1 et a_2

Nous remarquons que la plus grande aire est lorsque a_1 vaut $\frac{h}{2}$ et que a_2 vaut $\frac{h}{4}$. L'aire couverte vaut donc $(\frac{h}{2})^2 + (\frac{h}{4})^2 = \frac{5h^2}{16}$.

2) Maintenant, lorsque les carrés sont parallèles à l'hypoténuse.

Nous voulons montrer que la somme des diagonales des 2 carrés est constante. Celles-ci sont parallèles aux axes comme illustré ci-dessous. Lorsque nous remettons le triangle dans la même position que au début, on a :



Les diagonales parallèles aux axes

Soit $y = f(x) = -x + h$, la droite représentée par l'hypoténuse lorsque l'on considère les côtés de l'angle droit comme les axes.

Nous voulons montrer que la somme de x et y est constante.

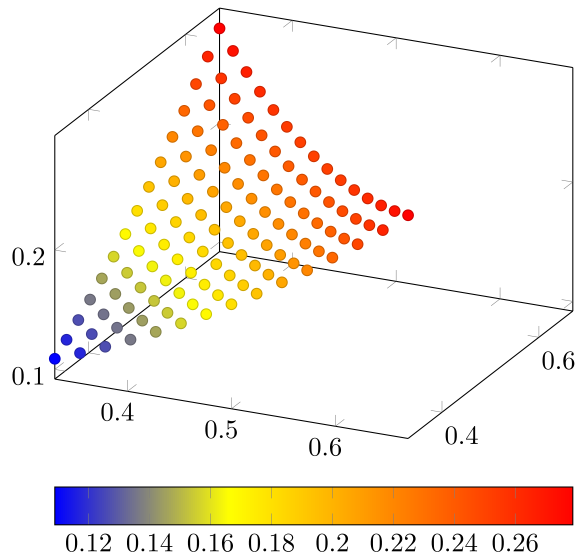
On a donc, $-x + h = y \Leftrightarrow x + y = h$. Etant donné que h est une constante, $x + y$ est bien constant.

La somme des diagonales est constante, donc la somme des côtés l'est aussi.

x et y correspondent aux diagonales des carrés, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $x^2 = a_2^2 + a_2^2$ et $y^2 = a_1^2 + a_1^2$. Cela veut dire que $a_1^2 = \frac{y^2}{2}$ et que $a_2^2 = \frac{x^2}{2}$.

Donc, $A_{dis} = a_1^2 + a_2^2 = \frac{x^2+y^2}{2}$.

Ci-dessous est représenter le graphique de l'aire A_{dis} en fonction de x et y,avec h comme unité et en éliminant les valeurs impossibles.



A_{dis} en fonction de x et y

Nous pouvons donc voir que l'aire couverte est maximale lorsque $y = \frac{2h}{3}$ et $x = \frac{h}{3}$ ou l'inverse. Donc, $A_{dis} = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{(\frac{h}{3})^2+(\frac{2h}{3})^2}{2} = \frac{\frac{5h^2}{9}}{2} = \frac{5h^2}{18}$.

Le dénominateur est plus grand que le précédent ($18 > 16$), donc l'aire la plus grand est lorsque l'on place le plus grand carré possible dans l'angle droit est ensuite un deuxième dans un des deux petits triangles formés.

2.5 Cinquième question de la deuxième partie, le nombre de configurations de tampons qui atteignent A_{dis}

Ici, il nous suffira d'utiliser les principes de la cinquième question de la première partie ainsi que les formes de la seconde question de la deuxième partie pour pouvoir avoir le nombre de configurations possibles n tel que $n \in [\![1; +\infty[\![$.

2.6 Sixième question, la plus grande aire pour l'union de deux tampons de tailles quelconques superposables

2.6.1 a) Dans un rectangle de côtés a et b

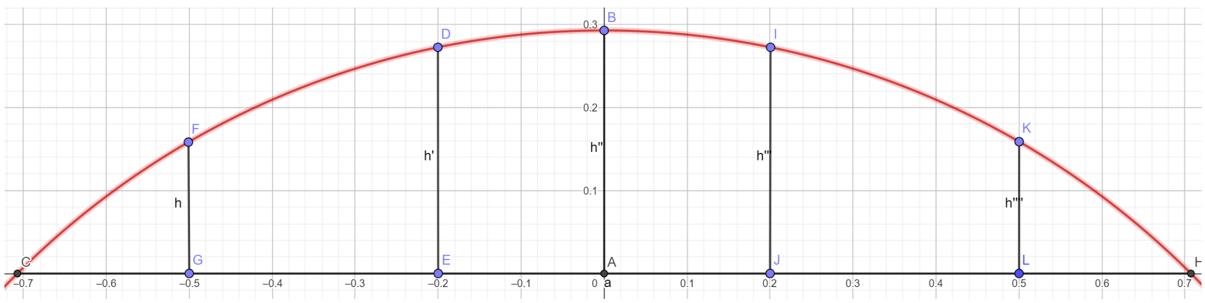
Le rectangle ayant des côtés parallèles aux axes, cette question ne présente aucune modificationauc par rapport à celle de la première partie.

En effet, tourner un carré dans cette situation ne va pas lui permettre d'avoir une aire plus importante.

2.6.2 b) Dans un disque de rayon r

Pour cette question nous n'avous que des pistes de recherches

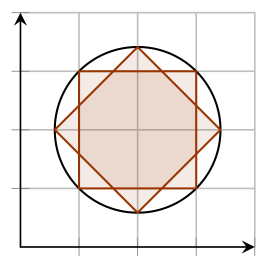
On conjecture que l'aire maximale placable dans le cercle est constituée de 2 carres d'aire maximal de côté $a = \sqrt{2}r$ (non demontrée). Démontrons à quel moment cette aire est maximale: On considere que la la variable b a moins d'impact sur l'aire produite que la hauteur du triangle car plus celle-ci grandit plus la hauteur devient petite. On a donc $A_{triangle} = \frac{b \times h}{2}$ ou b correspond a la base et h la hauteur.
Pour la suite de la question nous allons utiliser la fonction $f(x) = \sqrt{r - x^2} - \frac{r}{\sqrt{2}}$ qui correspond a la hauteur du triangle.



Sur ce graphique la Hauteur h varie en fonction de x et on a pris pour valeur de reference $r = 1$

On cherche donc lorsque $f(x)$ est maximale, donc lorsque $\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ est maximale.
On pose $f(x) = \sqrt{4-(x-2)^2} - \sqrt{2} = \sqrt{4-x^2+4x-4} - \sqrt{2} = \sqrt{-x^2+4x} - \sqrt{2}$.
Etudions le signe de $f(x)$ sur]-1,1[. On a : $f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{1-x^2}}$.
Pour que le dénominateur soit positif, il faut que $1 - x^2 > 0$ ⇔1¿x².
Les racines sont donc $x = -1$ et $x = 1$. Etant donné que le coefficient du $-x$ est négatif, le dénominateur est positif sur]-1;0[. Maintenant pour le numérateur : $-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.
Donc $f(x)$ est croissante sur]-1,0[puis décroissante sur]0;-1[. Le maximum est donc bien atteint quand x vaut 0.

La hauteur maximale étant atteinte lorsque $x = 0$ on peut donc conjecturer que l'aire maximale dans ce cas là correspond à cette figure :



$\underline{A_{lib}}$

2.6.3 c) Dans un triangle isocèle rectangle

Nous avons précédemment montré que le plus grand polygone qui rentrait dans le triangle isocèle rectangle était un carré placé dans l'angle droit.

Cela veut dire que l'espace qu'il va laisser non couvert, (les deux triangles isocèles rectangles), vont eux aussi pouvoir contenir un carré placé dans l'angle droit.

Encore une fois, un simple carré placé dans l'angle droit plutôt qu'un carré superposé sur le plus grand carré, sera la disposition la plus optimale.

2.7 Pistes de recherche

1) Tout d'abord, il serait intéressant de pouvoir tourner le carré dans les cas où les polygones ne sont pas parallèles aux axes. Par exemple, nous avons vu que dans le cas du rectangle, il fallait prendre un carré de côté a, avec $a < b$. Par conséquent, si le rectangle n'est pas parallèle aux axes, le fait de pouvoir tourner le carré permettrait de le positionner de telle sorte que les côtés du carré soient parallèles à ceux du rectangle, et donc, d'augmenter sa taille. C'est également le cas pour un triangle isocèle rectangle dont les côtés ne sont pas parallèles aux axes.

2) On peut aussi considérer des formes differentes, par exemple un polygone à n-cotés et reétudier le problème en prenant en compte cette variable.

3) Nous pouvons aussi envisager le problème avec des formes en 3 dimensions et donc utiliser les formules de géométrie dans l'espace.