Problème 2

Equipe $\pi z^2 a$

Lycée Saint-Marc, Nivolas-Vermelle

March 2023

Résumé du problème :

Dans ce problème traitant de la théorie des graphes, il nous est demandé d'étudier différents plans, dans lesquels sont modélisés des villages. Pour chaque village on attribue une hauteur entière, chacun des v villages a une hauteur, 1, 2, 3.., v. On cherche à connaître en fonction de certains plans le nombre d'orientations de ruisseaux différentes possibles en fontion d'un nombre k qui est le nombre de manière d'attribuer leurs hauteurs aux villages. Nous avons commencé par étudier les différentes orientations possibles des ruisseaux dans le cas où aucune puis une seule attribution des hauteurs a été possible.
Nous avons ensuite étduié des plans particuliers et révélé certaines de leurs propriétés, notament grâce à l'introduction du "théorème du fil".

Contents

1 Introduction

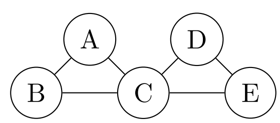
2 Première question, nombre d'orientations avec v villages et r ruisseaux

Choisir une orientation de ruisseau revient à choisir parmi deux orientations pour chaque ruisseau. Chaque ruisseau double donc le nombre total d'orientation de ruisseaux possibles. On a donc 2^r orientations possibles avec $r =$ le nombre de ruisseaux.

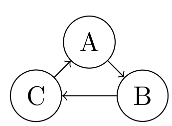
3 Seconde question, les plans tels que $n_o(P) = n$

3.1 a) Lorsque $n = 0$

Nous voulons être sûrs qu'il n'existe aucune orientation de ruisseaux tel qu'il n'y ait aucune possibilité d'attribuer des hauteurs aux villages.
Cela revient à trouver quels sont les plans tels que pour toute orientation de ruisseau, il existe au moins une manière d'attribuer des hauteurs aux sommets.
Plus généralement, les hauteurs ne peuvent pas être attribuées aux villages lorsqu'une contrainte d'inégalité imposée est impossible à satisfaire. Cela se produit lorsque $A > B$ et $B > A$ avec A et B des villages quelconques.
Pour faire apparaître cette inégalité, il faut que l'orientation d'un graphe parte d'un point et retombe dessus après un certain nombre d'étapes, c'est la définition-même d'un cycle.
A l'inverse, si un graphe n'admet pas de sous-graphe cyclique, cette contradiction dans l'inégalité ne peut pas apparaître, et donc il existe toujours au moins une manière d'attribuer les hauteurs aux villages.
Illustration :



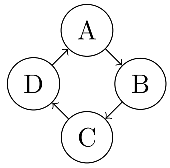
Ce plan admet le sous-graphe orienté :

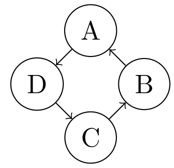


Pour lequel il n'existe aucune valeur de $A, B, C \in \mathbf{N}$ de manière à respecter la contrainte $A > B > C > A$.

3.2 b) Lorsque $n = 1$

Nous avons vu précédemment que pour qu'une orientation de ruisseau ne permette aucune attribution des hauteurs, il faut un sous graphe cyclique. Un sous graphe cyclique admet deux manières d'orienter ses ruisseaux de sorte qu'aucune attribution des hauteurs aux villages soit possible, une dans un sens et une dans l'autre (symétrie).

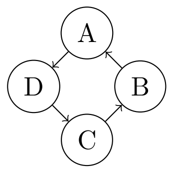


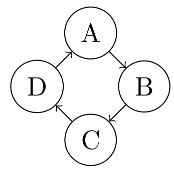


De cette manière, $n_o(P) = 1$ est impossible.

c) Lorsque $n = 2$

Un plan cycle donne : $n_0(C) = 2$
Dans le plan

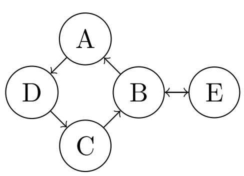


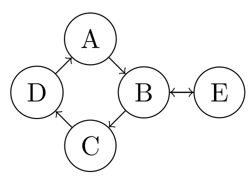


On a $A < B < C < D < A \Rightarrow A < A$ ou $A > B > C > D > A \Rightarrow A > A$ ce qui est absurde. Dans un plan cycle, il y a donc deux manières d'orienter les ruisseaux de sorte qu'on ne puisse attribuer les hauteurs aux villages.

d) Lorsque $n = 4$

Pour un plan cycle, on a vu que $n_o(P) = 2$
Si l'on ajoute un ruisseau au plan cycle, ce nombre double puisque pour chaque manière d'orienter le plan cycle, il y a deux manières d'orienter ce ruisseau E supplémentaire :

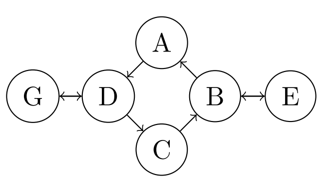




On a donc pour ce graphe, $n_o(P) = n_o(C) \times 2 = 4$ avec $n_o(C) = 2$, C étant un plan cycle quelconque.

3.3 e) Lorsque $n = 6$

Reprenons le graphe précédent. Si l'on ajoute un ruisseau hors du sous-graphe cyclique, pour chacun des quatre agencements de ruisseaux il y a deux manières d'orienter ce nouveau ruisseau :



le nombre total d'orientations est donc multiplié par deux au minimum, soit $n = 8 > 6$.
Il n'est donc pas possible d'avoir six manières d'orienter les ruisseaux de sorte qu'on ne puisse attribuer les hauteurs aux villages.

4 Troisième question, les entiers naturels tels que $n_0(P) = n$

Pour augmenter les manières d'orientations de ruisseaux tout en conservant l'impossibilité d'attribution des hauteurs aux villages, il faut augmenter le nombre de ruisseaux (hors cycle) tout en s'assurant de la présence d'un sous-graphe cyclique.
Or, à chaque fois que l'on rajoute un ruisseau (hors cycle), le nombre de possibilités d'orientations des ruisseaux est multiplié par deux ($n = 2^r$, voir question 1).
On a donc :

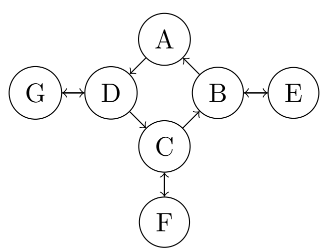
$$n = \sum_{i=0}^{j} 2^{k_i}, k_i \geq 3$$

Nous avons vu les cas où $n = 0, 2, 6$. Pour les autres cas, on peut reprendre la question $n_0(P) = 4$. Nous avions rajouté un ruisseau et un village de telle sorte que $n_0(p) = 2 \times n_0(C) = 4$. Il est possible cependant de rajouter des ruisseaux et de doubler à chaque fois $n_0(P)$. Il est donc possible d'avoir :

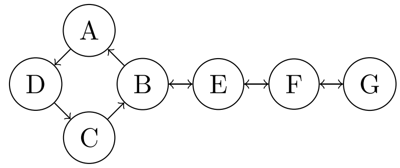
$$n_0(P) = 2^k \times n_0(C) = 2^{k+1}$$

avec k, le nombre de ruisseaux rajoutés.

Illustration pour k = 3:



Ici on a bien les 2 orientations de bases multipliée 3 fois par 2 avec les 3 ruisseaux ajoutés on a donc $n_0(P) = 2 \times 2^3 = 2^4$. On peut aussi d'ailleurs rajouter les villages à la suite et obtenir un plan de la sorte :



<u>A noter que nous n'avons pas considéré tous les cas ou plusieurs sous-graphes cycliques se combinent, auquel cas des résulta</u>

5 Quatrième question, calculs de $n_1(P)$ dans différentes situations

5.1 Théorème du fil

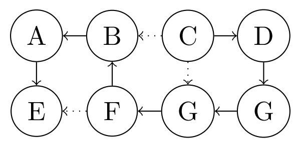
Soit $n_k(P)$ avec P un graphe complet

$$k = 1$$
$$\Leftrightarrow$$

Pr : Il existe une relation partant du sommet le plus haut vers le sommet le plus bas et passant par tous les sommets : $A_1 < A_2 < ... < A_{q-1} < A_q$ de sorte que tous les autres ruisseaux soient orientés tels que $\forall m < m+i$, $A_m < A_{m+i}$ avec m et $m+i \in [\![1;q]\!]$.

Nous appellerons cette relation descendante qui fait intervenir tous les sommets sans incohérence un "fil" partant de A_q vers A_1.

Visuellement, sur un graphe :



Avec en pointillés les ruisseaux conséquents, $F > E$, $C > G$ et $C > B$ car $k = 1$

Une des conséquences de ce théorème est que toute orientation de ruisseaux telle que k = 1 admet un fil. Et toute orientation de ruisseaux qui admet un fil implique k = 1.

5.2 Preuve du théorème du fil

On appelera incohérence toute orientation de ruisseaux tel que $A > B > C > ... > A$

- $Pr \Rightarrow k = 1$

  D'après la relation $A_1 < A_2 < ... < A_{q-1} < A_q$, le sommet Aq est le plus haut, suivi de A_{q-1}, et ainsi de suite jusqu'à A_1 qui est le sommet le plus bas.
  Il n'y a donc qu'une seule manière naturelle d'attribuer les hauteurs aux villages et, de plus, il n'y a pas d'incohérence car chaque sommet est différent, est que tous les autres ruisseaux s'accordent à cette relation donc $k = 1$

- $k = 1 \Rightarrow Pr$

  Par contraposée on montre $\overline{Pr} \Rightarrow k \neq 1$.
  $\overline{Pr}$: Il n'existe pas la relation $A_1 < A_2 < ... < A_{q-1} < A_q$ *ou* un des ruisseaux s'oriente à contre sens.

  - Si il n'y a pas la relation $A_1 < A_2 < ... < A_{q-1} < A_q$:
    Il existerait alors n et m tel qu'il n'y ait pas de contrainte, directe ou non entre A_m et $A_{m'}$. On pourrait ainsi changer les valeurs de A_m et $A_{m'}$ et avoir plusieurs attributions de hauteurs, donc $k \neq 1$

  - S'il y a un ruisseau orienté à "contre sens" alors il y a une incohérence dans l'inégalité donc : $k = 0 \neq 1$

  On a donc $\overline{Pr} \Rightarrow k \neq 1$ et par contraposée, $k = 1 \Rightarrow Pr$.

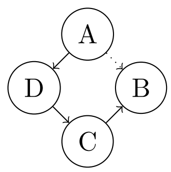
Ainsi $k = 1 \Longleftrightarrow Pr$

5.3 a) Plan cycle C_v

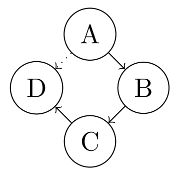
Dans un cycle avec $v \geq 3$, nous cherchons toutes les orientations de ruisseaux telle que k = 1. D'après le Théorème du fil cela revient à chercher tous les fils possibles dans ces plans.
Nous appellerons "sommet maître" un sommet supérieur à tous les autres, Un fil doit partir par définition de ce plus haut sommet. Dans un plan cycle et à partir d'un des v villages, un fil peut aller dans deux sens différents. Ainsi chaque sommet, peut faire partir deux fils.

On obtient ainsi $n_1(C_v) = 2 \times v$

Par exemple, dans C_4 dont le sommet maître est A, on a:

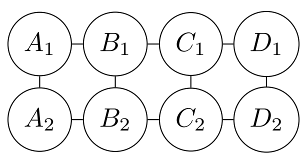


et



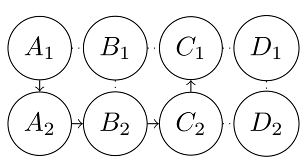
De plus, tous les sommets peuvent être maîtres chacun leur tour. Puisqu'un sommet maître permet d'orienter les ruisseaux de deux manières différentes, ainsi, le nombre total de manières d'orienter les orientations des ruisseaux de sorte qu'on ne puisse attribuer les hauteurs aux villages que d'une seule manière dans un plan cycle vaut $2v$.

5.4 b) Plan quadrillage Q_v



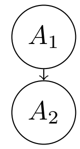
On cherche ici encore, à compter le nombre de fils possibles.

Intéressons nous d'abord au coin A_1.
Certains fils partant de A_1 ne sont pas constructibles, par exemple un fil ne peut pas commencer de cette manière :



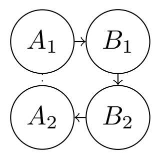
En effet puisque ce début de fil ne peut passer par B_1 et D_1, il ne passera pas par tous les points et n'est donc pas un fil valide.

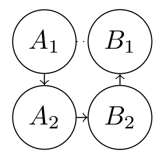
Pour trouver combien de fils sont valides, prenons d'abord le plan Q_2 :



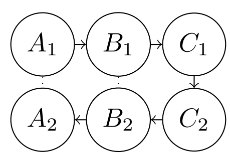
Ici on voit bien qu'il n'existe qu'un fil partant de A_1

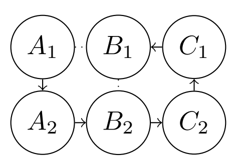
Voici maintenant le plan Q_4 et les deux fils partant de A_1 possibles :

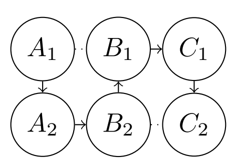




Pour finir, le plan Q_6 qui lui, admet 3 fils partant de A_1



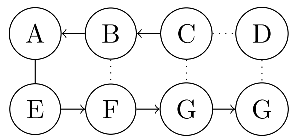




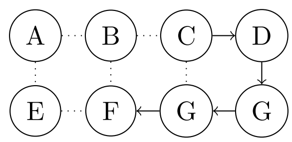
En fait, le nombre de fils partant de A_1 est $\frac{v}{2}$. Cela s'explique par le fait que quand on rajoute un couplet de points, un fil de plus peut apparaître.

Par symétrie, il y a $\frac{v}{2}$ fils partant de chaque coin du rectangle.

Pour les autres sommets, cela est un peu différent :
Pour simplifier un peu le comptge des fils on ne s'intéresse d'abord qu'aux fils partant vers la gauche.
Le début d'un fil partant vers la gauche est prédéterminé, il est obligé de faire le tour de la manière suivante (sous peine de ne pas passer par tous les points) :



On remarque que choisir des fils partant ici du point C et partant vers la gauche revient à choisir des fils sur un plan Q_2 à partir d'un coin. On peut s'intéresser maintenant aux fils partant à droite, on aurait :



Et cela revient à choisir des fils sur un plan Q_4 à partir d'un coin.

On notera aussi qu'un fil ne peut partir immédiatement vers le bas, sinon il ne passera pas par tous les points.

En fait, pour un plan Q_v le nombre de fils partant d'un point est la somme des nombres de fils partant vers la gauche et de celui des fils partant vers la droite. Autrement dit, en prenant a = le nombre de sommets sur la droite du sommet maître, on a :
Le nombre de fils partant d'un sommet non-coin pour un plan Q_v est la somme du nombre de fils partant d'un coin d'un plan Q_a et du nombre de fils partant d'un coin d'un plan Q_{v-2-a} ce qui est égal grâce à la relation vue précedemment à :

$$\frac{a}{2} + \frac{v-2-a}{2} = \frac{v-2}{2}$$

On compte en tout 4 points sommets et $v-4$ points non-sommets. La somme des fils partant de n'importe quel sommet est donc :

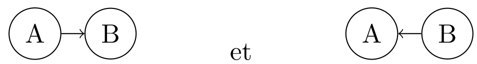
$$\begin{aligned} 4 \times \frac{v}{2} + (v-4) \times \frac{v-2}{2} \\ = 2v + \frac{v^2-6v+8}{2} \\ = \frac{v^2-2v+8}{2} \end{aligned}$$

Or d'après le théorème du fil le nombre de fils possibles est égal à $n_1(P)$, on a ainsi :

$$n_1(Q_v) = \frac{v^2-2v+8}{2}$$

6 Cinquième question, les entiers naturels tels que $n_1(P) = n$

Comme expliqué dans la question a) sur les cycles, on peut imaginer un plan cyclique à v villages de sorte que $n_1(P) = 2v$, avec $v \geq 3$ car le plus petit cycle admet trois villages. De plus, le plan ligne à deux villages admet $n_1(P) = 2$:

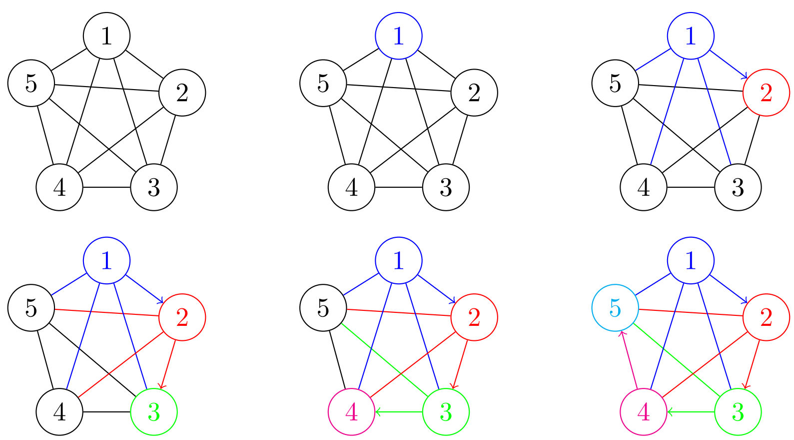


Ainsi, pour tout nombre de manières d'orienter les ruisseaux pair sauf 4, il existe un plan tel qu'on ne puisse attribuer les hauteurs aux villages que d'une seule manière.

7 Sixième question, calculs de $n_k(P)$ dans différentes situations

7.1 a) Plan complet K_v

D'après le théorème du fil, pour que $k = 1$, il faut créer une chaîne descendante complète. Cherchons le nombre de chaînes descendantes complètes. Par exemple, pour un graphe complet à cinq branches, nous pouvons établir les opérations suivantes en choisissant à chaque fois le plus petit sommet et en prenant garde à ne jamais revenir sur un sommet déjà choisi (sinon il y aurait une incohérence) :



Au départ, nous avons v choix possibles, puis v-1, etc. Ainsi, le nombre total de manière de créer une chaîne descendante complète vaut $v(v-1)(v-2)... \times 1 = v!$
-S'il n'y a pas de boucle ($k = 0$), une chaîne faisant intervenir tous les sommets est forcément fil. De cette manière, il n'existe qu'une seule manière naturelle d'attribuer les hauteurs aux villages et aucun doute n'est possible. Le nombre de manières d'orienter les ruisseaux ne peut donc pas être supérieur à 2. On a donc : Si $k \geq 2$, $n_k(P) = 0$

-Deus deux résultats précédents, on déduit que $n_k(P) = n_0(P) + n_1(P)$ soit $n_0(P) = n_k(P) - n_1(P)$. Or $n_1(P) = v!$ et $n_k(P) = 2^r$ (voir question 1). Cherchons r.
Le premier sommet donne lieu à $v - 1$ ruisseaux, le second à $v - 2$ etc jusqu'au dernier sommet qui ne donne lieu a aucun ruisseau.
On a donc : $r = (v - 1) + (v - 2) + ... + 1 + 0$ qui est une somme de Gauss et vaut $\frac{(v-1)(v-1+1)}{2} = \frac{(v-1)v}{2}$.
Ainsi,

$$n_0(P) = n_k(P) - n_1(P) = 2^{\frac{(v-1)(v)}{2}} - v!$$

Pour résumer :

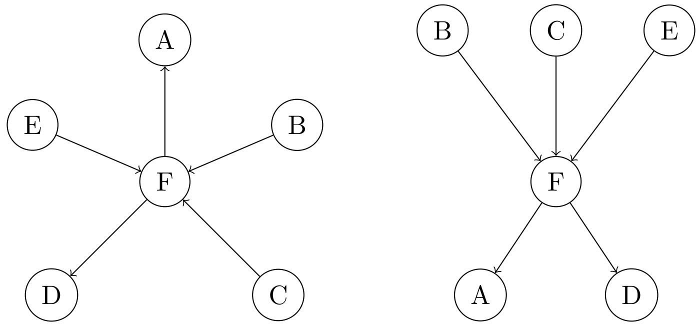
$$\text{Si } k \geq 2,\ n_k(P) = 0$$

$$n_1(P) = v!$$

$$n_0(P) = 2^{\frac{(v)(v-1)}{2}} - v!$$

7.2 b) Plan étoile E_v

Comme chaque sommet est seulement relié avec le sommet central et ce par une unique arête, soit cette dernière est orientée depuis le sommet vers le centre, soit depuis le centre vers le sommet. Il est donc possible de réorganiser le graphe en trois étages : au 1er étage les sommets plus hauts que le sommet central, au second étage le sommet central, et puis au troisième étage les sommets plus bas que le sommet central.
Illustration :



Notons "a" le nombre de sommets du premier étage. Il n'y a aucune contrainte relative, on peut donc les orienter de $a!$ manières différentes.
Au deuxième étage, le sommet central reste fixe.
Au troisième étage, il y a $v - a - 1$ villages. Il n'y a aucune contrainte relative, donc pour chaque attribution des hauteurs aux villages du premier étage, on peut orienter le troisième étage de $(v - a - 1)!$ manières différentes.
Au final,

$$k = (v - a - 1)! \times a!$$

Maintenant que l'on connait le nombre de possibiltés d'attribution des hauteurs aux villages en fonction du nombre de villages, il faut maintenant trouver, pour chacun de ces nombres, le nombre d'orientations de ruisseaux qui permettent de les obtenir.
Avec "a" le nombre de villages au premier étage et "$b = v - a - 1$" le nombre de villages au troisième étage, cela revient à trouver : parmi v-1 villages (pas le central qui est fixe), combien y a-t-il de configurations possibles pour avoir a villages au premier étage ou b villages au troisième étage.
On sait que $a + b = v - 1$, on a donc :

$C_{v-1}^{a} = \frac{v-1!}{(v-1-a)!a!} = \frac{v-1!}{b!a!}$

$C_{v-1}^{b} = \frac{v-1!}{(v-1-b)!b!} = \frac{v-1!}{a!b!}$

$C_{v-1}^{a} = C_{v-1}^{b}$

•Si $a \neq b$:
Soit on a a ruisseaux au premier étage et b ruisseaux au troisième étage, soit on a b ruisseaux au premier étage et a ruisseaux au troisième étage, ce ne sont pas exactement les mêmes cas donc on les compte "en double". On a donc :

$$n_{(v-a-1)!a!}(E) = C_{v-1}^{a} + C_{v-1}^{b} = 2 \times C_{v-1}^{a}$$

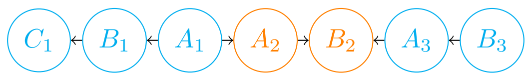
D'ailleurs si on ne veut qu'une variable, on a : $a \neq b \Longleftrightarrow a \neq \frac{v-1}{2}$
•Si $a = b$:
on ne peut pas compter deux fois ces cas car ils sont en fait les mêmes : avoir 3 ruisseaux au premier étage parmi un total de 6 ruisseaux, c'est exactement la mêle chose que choisir 3 ruisseaux au troisième étage parmi 6. On ne compte alors qu'une fois a ruisseaux parmi v-1 ce qui donne au final :

$$n_{(v-a-1)!a!}(E) = C_{v-1}^{a}$$

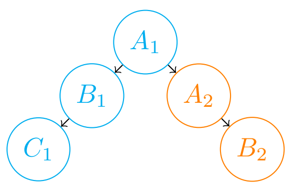
D'ailleurs si on ne veut qu'une variable, on a : $a = b \Longleftrightarrow a = \frac{v-1}{2}$

7.3 c) Plan ligne L_v

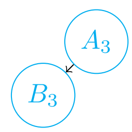
Un plan ligne peut toujours être décomposé en sous-graphes dans lesquels il y a des chaînes descendantes ou montantes partant d'un même sommet.
Par exemple :



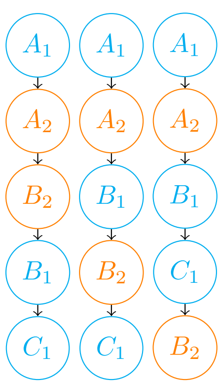
Se décompose en



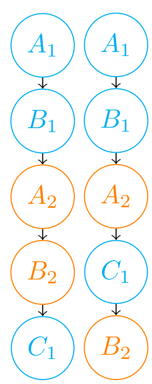
et



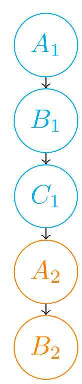
Il n'y a qu'une seule possiblité qui respecte les contraintes relatives du deuxième sous graphe.
Toutes les possiblités qui respectent les contraintes relatives pour le premier sous graphe sont les suivantes :



3 possibilités



2 possibilités



1 possibilité

Notons n_1 le nombre d'éléments de la branche A_1-B_1-C_1... et n_2 le nombre d'éléments de la branche A_2-B_2-C_2...
Dans notre exemple, on a donc $n_1 = 3$ et $n_2 = 2$. On a le schéma suivant qui montre l'évolution de k si on garde $n_1 = 3$ mais qu'on modifie n_2 :
• $n_1 = 3$, $n_2 = 0 \Rightarrow k = 1$
• $n_1 = 3$, $n_2 = 1 \Rightarrow k = 3$
• $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ (exemple du schéma) $\Rightarrow k = 3 + 2 + 1$

Et on en déduit la suite :
• $n_1 = 3,\ n_2 = 3 \Rightarrow k = 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1$
• $n_1 = 3,\ n_2 = 3 \Rightarrow k = 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1$
... A chaque fois que l'on ajoute un village à n_2, la contrainte relative entre ce nouveau village et le précédent est la même qu'entre le village d'avant et celui encore d'avant.
De plus, n_1 indique le nombre maximal de positions où peut se trouver un village.
On en déduit la description suivante :

$$k = \underbrace{\sum_{a_1=1}^{n_i+1} \sum_{a_2=1}^{a_1} \dots \sum_{a_{n_i-1}=1}^{a_{n_2-2}}}_{n_2-1 \text{ fois}} a_{n_2-1}$$

Or, le possibilités de chaque sous-graphe considéré se combienent. Dans notre exemple, $k_{n_2} = 1$, donc cela ne change pas le nombre de possibilités. Mais dans un cas plus général ou on a des montées et descentes de $n_1, n_2 ... n_s$ villages, les possibilités se multiplient, on a donc :

$$k = \prod_{i=1}^{s-1} \underbrace{\sum_{a_1=1}^{n_{i+1}} \sum_{a_2=1}^{a_1} \dots \sum_{a_{n_{i-1}}=1}^{a_{n_i-2}}}_{n_i-1 \text{ fois}} a_{n_i-1}$$

Remarquons qu'il est possible de former n'importe quel $k \in \mathbb{N}*$ avec $n_2 = 1$ et $n_1 =$ au nombre souhaité.
Remarquons également que nous avons seulement calculé le nombre d'orientations de villages possibles, mais dans chacun de ces cas, nous n'avons pas calculé le nombre de ruisseaux qui permettent cela.
Pour calculer le nombre de ruisseaux en fonction de k, il faut avoir toutes les possibilités d'écritures de k, pour des nombres de villages trop élevés il est quasiment impossible de lister toutes les possibilités d'écritures de k en fonction de v et de $n_1, n_2 ... n_s$. Il faut donc chercher une formulation plus simple pour trouver k en fonction de v.

8 Septième question, généralisation du couple (k, n) au plan P satisfaisant $n_k(P) = n$

8.1 (0,n)

Pour que k = 0, il faut la présence d'un sous graphe cyclique dans lequel, peu importe sa longueur, il y a deux manières de créer une contradiction

8.2 (1,n)

A la question **4.a)**, on a montré qu'un plan cycle pouvait satisfaire $k = 1$ pour tout n pair sauf 4.

8.3 (k,2)

On a trouvé pour un plan étoile une généralisation du couple (k, n) en fonction d'une variable 'a' introduite.
On peut noter que pour des plans E_v avec $v \geq 3$ et en prenant des cas particulier, ici a = 0 on a $n_{v-1}(E_v) = 2 \times C^0_{v-1} = 2$ donc pour tout $k \geq 2$, le couple $(k, 2)$ vérifie la condition.

9 Huitieme question, pistes de recherche