Problème n°4 : Musique déformée

Equipe $\pi z^2 a$

Lycée Saint-Marc, Nivolas-Vermelle

April 2, 2023

Résumé du problème :

Plusieurs rectangles (assimilés à notes de musique qui composent un fichier audio) sont alignés. La largeur de ces derniers ne nous importe pas. Leur longueur est considérée, et est directement déduite du nombre de rectangles de la longueur totale du morceau qui vaut toujours 1. Concrètement, dans le premier morceau où $n \geq 1$ notes distinctes sont jouées, la longueur de chaque note vaut $\frac{1}{n}$.
Pour éviter toute confusion, nommons "élément" tout rectangle (note ou silence). On comprendra donc la distinction faite entre une "note" et un "silence", qui sont pourtant tous deux des "éléments" du morceau. Nommons "rapport" le rapport entre la durée d'une nouvelle et une ancienne note, et "demi-rapport" le rapport entre la durée d'une nouvelle moitié et une ancienne note.

Pour ajouter de l'intérêt aux question 1.5, 2.5 et 3.5, imposons un changement de résolution à chaque opération.
Désignons le fait de prendre un morceau et de le transformer en un second comme une opération. Lorsque nous employons le terme "fichier de longueur n", cela signifie que le fichier comporte n notes.
Nous avons décidé de structurer notre démarche en trois parties : la compréhension des phénomènes de base, l'étude portée sur les silences, puis la reprise du problèe dans le cadre des rectangles.
La première question reposait sur l'étude de la possiblité de phénomènes de base, pour lesquels nous avons répondu par de simples exemples. La seconde question y était liée et nous demandait le nombre minimal d'opérations pour y aboutir. Nous avons répondu sous forme de disjonctions des cas par des explications très visuelles.
Il fallait ensuite, dans la troisième question, poursuivre sur cette voie mais avec une contrainte supplémentaire. Nous avons donc repris nos résultats en y appliquant la contrainte.
Dans la seconde partie, nous avons commencé par un introduire nos outils, dont le "rapport second". Cela nous a permis d'affirmer l'impossibilité d'apparition d'un silence dans le cadre des bandes sons de longueur impaire. Ce même outil nous a permis d'étudier la possibilité de différenciation d'un fichier (en y ajoutant la "structure en escalier") ainsi qu'une réflexion sur la possibilité d'aspect d'un fichier final.
Nous avons ensuite repris cette même recherche sans se limiter aux bandes son de longueur impaire tout en s'aidant du "rapport second". Nous avons pu définir les conditions d'apparition d'un silence, ainsi qu'une généralisation de leur nombre et de leur place dans le morceau.
Pour finir, la troisième partie consistait à étudier des rectangles. Nous avons initié cette recherche en reprenant nos résultats précédents et en prenant connaissance de l'élargissement des possibilités.

Contents

1 1ère Partie : les phénomènes de base

2 Première question, l'évènement peut-il arriver après un nombre fini d'opérations

Notons n le nombre de notes du premier morceau et m le nombre de notes du deuxième morceau.

2.1 a) Lorsqu'une note présente dans le fichier initial disparaît

Oui pour $n = 2$ et $m = 1$

2.2 b) Lorsque les notes ne sont plus deux à deux distinctes

Oui, comme dans l'exemple, pour $n = 4$ et $m = 7$, les notes, après transformation, pour $k = 6$ et $k = 7$ sont les mêmes.

2.3 c) Lorsqu'un silence apparaît

Oui, comme dans l'exemple, pour $n = 4$ et $m = 7$, après transformation, un silence apparît pour $k = 4$.

2.4 d) Lorsqu'un silence disparaît

Oui pour $n = 3$ avec un silence à la première note, si on transforme avec $m = 1$, le la note $k = 2$ reste, le silence disparaît donc.

2.5 e) Lorsque toutes les notes sont les mêmes

Oui pour $m = n$

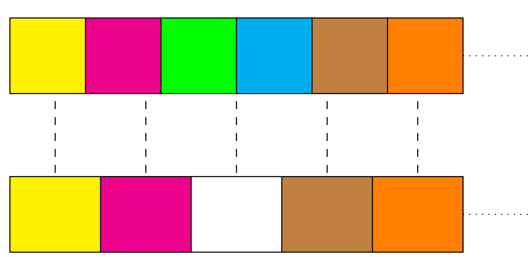
2.6 f) Lorsque la bande son ne contient que des silences

Oui pour $m = \frac{n}{2}$

3 Seconde question, le nombre minimal d'opérations qui donnent ces résultats, en fonction de n

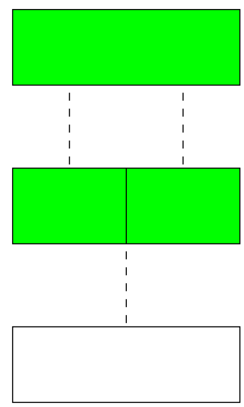
3.1 a) Une note disparaît

• Pour $n \neq 1$, on peut poser $m = n - 1$ une concession sur une note sera forcément faite, voire plusieurs si une nouvelle note tombe à l'intersection de deux anciennes. Sauf pour $n = 1$ aucun m plus petit n'est possible. Ainsi une note présente dans le fichier initiale peut disparaître en <u>une opération</u> pour n'importe quel n sauf 1.
Illustration :



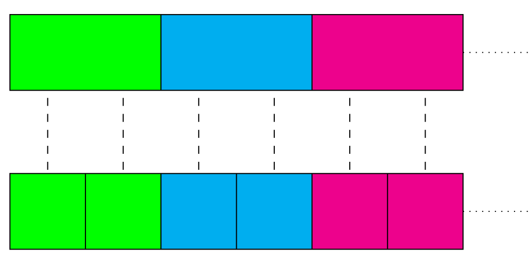
Ici, on a même deux notes qui disparaissent : verte et bleue (1 au minimum).

• Pour $n = 1$, il faut créer un fichier m à deux notes par exemple puis revenir à un fichier m' de longueur 1 pour lequel on est sûr de faire disparaître la note en 2 opérations.
Illustration :



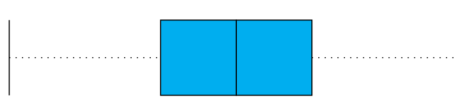
3.2 b) Lorsque les notes ne sont plus deux à deux distinctes

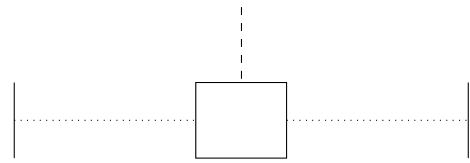
$\forall n \in \mathbb{N}*$, on pose $m = 2n$. En 1 opération, chaque ancienne note est remplie par 2 nouvelles notes, dont les deux milieu prennent l'identité de la même note. Ces deux nouvelles notes consécutives sont donc les mêmes et ne sont pas deux à deux distinctes, et ce sur tout le morceau.
Illustration :



3.3 c) Lorsqu'un silence apparaît

• Si n est pair : 1 opération, avec un second fichier composé d'un nombre de notes impair.
Intuitivement, si l'on place un note de longueur $\frac{1}{m}$ au milieu du morceau précédent, dont le milieu coïncide avec l'intersection des deux notes, cette nouvelle note devient un silence et de plus l'espace à droite et à gauche de cette nouvelle note sera le même et pourra être complété par les notes restantes qui sont en nombre pair (la moitié à gauche et l'autre moitié à droite).
Illustration :





$\frac{m-1}{2}$ notes (pair) $\frac{m-1}{2}$ notes (pair)

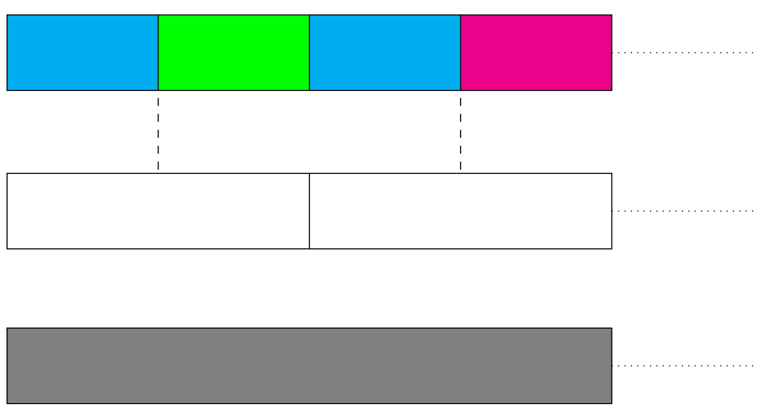
Remarquons que si $m = \frac{n}{2}$, alors il n'y aura pas un, mais que des silences.

• Si n est impair :
Il est impossible de faire apparaître un silence après une seule opération.
Cependant on peut faire passer le morceau en un m pair puis faireapparaitre un silence comme dans le cas au-dessus en2 opérations

3.4 d) Lorsqu'un silence disparaît

Dans l'énoncé, il est énoncé que le premier morceau possède n notes distinctes, dont la durée de chacune vaut $\frac{1}{n}$. Etant donné que l'on différencie une note d'un silence, on comprendra donc que le premier morceau ne contient aucun silence (sinon la durée de chaque note ne vaudrait pas $\frac{1}{n}$.
Pour être sûr de faire disparaître un silence, il faut aboutir à un morceau de sorte qu'il y ait au moins 2 silences (on pourrait travailler avec 1 silence mais cela ne réduit pas le nombre d'opérations dans ce cadre), puis revenir à un autre fichier très petit, disons avec 1 note. Ainsi, même si un des 2 silences est conservé, le deuxième (et autres s'il y en a) sera supprimé à coup sûr.

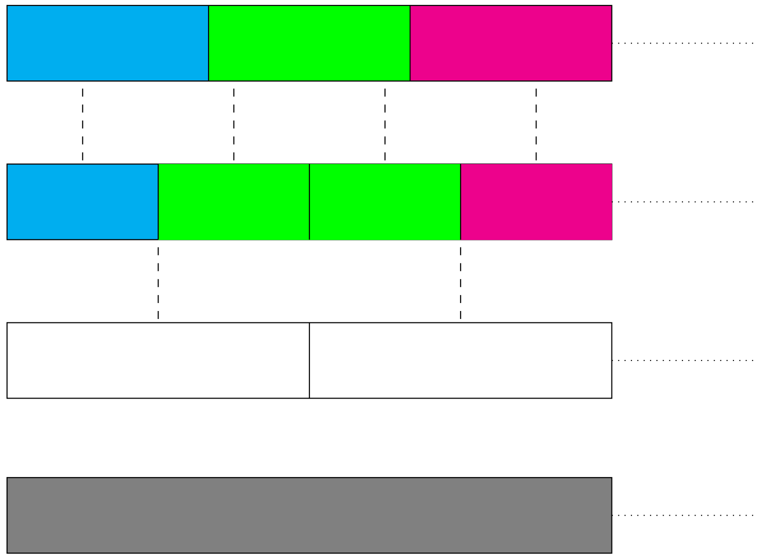
•Si n est pair tel que $n \geq 2$:
On pose $m = \frac{n}{2}$, de sorte que le milieu de chaque nouvelle note tombe entre deux anciennes notes. On se retrouve donc avec un morceau rempli de silences (au moins 2).
Il ne reste plus qu'à revenir à un morceau $m' = 1$, de sorte qu'il est certain qu'un moins 1 silence disparaisse en 2 opérations.
Illustration :



(Peu importe où le milieu de l'unique note du dernier morceau tombe, une concession sera forcément faite sur l'un des 2 silences de gauche).

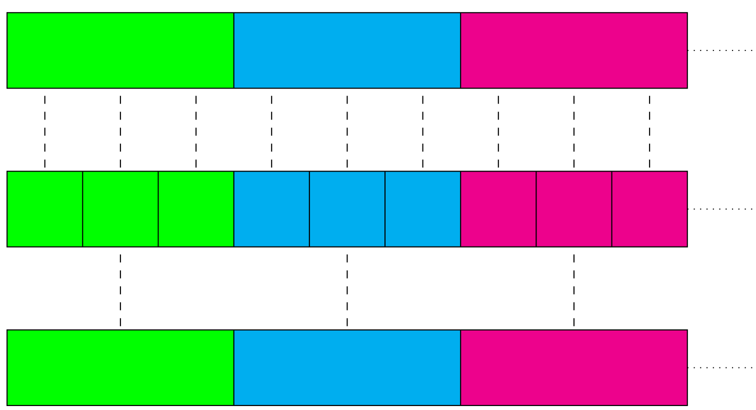
• Si $n = 2$ ou si n est impair :
On fabrique un nouveau morceau auqel on ajoute le nombre de notes nécéssaire à la construction d'un morceau à m notes de sorte que m est pair et est supérieur ou égal à 4. Ensuite, on réitère le schéma décrit juste avant, de sorte qu'un silence disparaît à coup sûr en 3 opérations.

Illustration :



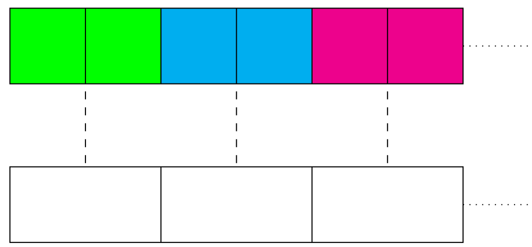
3.5 e) Lorsque toutes les notes sont les mêmes

Posons $m = 3n$. En revenant à n notes, ces dernières seront les mêmes, soient 2 opérations.
Illustration :

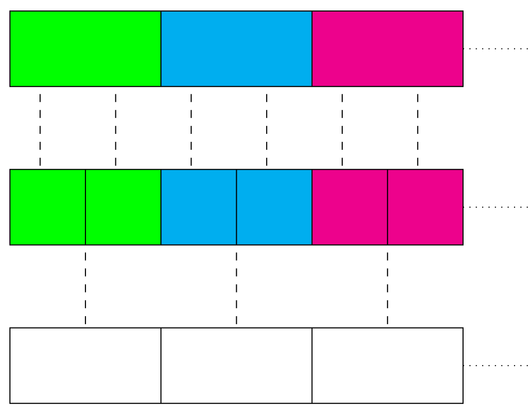


3.6 f) Lorsque la bande son ne contient que des silences

• Pour tout n pair :
si $m = \frac{n}{2}$ la bande son ne contient que des silences en 1 opération. En effet, chaque nouvelle note est deux fois plus grande qu'une ancienne, et donc la moitié de n'importe quelle nouvelle coïncide avec la fin d'une ancienne note et devient donc un silence.
Illustration :



• Si n est impair :
il faut créer un deuxième bande son m de longueur paire puis une troisième bande son m' de longueur $m' = \frac{m}{2}$, soient 2 opérations.
Illustration :



4 Troisième question, fichier à k notes

Dans cette partie, les fichiers intermédiaires ont un nombre de notes compris entre 1 et n.
Pour plus de facilités, on a regroupé les questions 1 et 2 en une seule, c'est-à-dire que pour chaque évènement, nous dirons s'il est possible ou non après un nombre fini d'opérations, et si oui, nous justifierons directement par le nombre minimal d'opérations qui permet sa réalisation.

4.1 a) Lorsqu'une note présente dans le fichier initial disparaît

• Si $n = 1$ ou $n = k$:
Il faut 2 opérations, on prend m = 2n puis m' = n, ce qui fait disparaitre toute les notes en respectant la contrainte.
• si $n \neq 1$ et $n \neq k$
On prend m = n - 1 , il y a forcément une note qui disparait et la contrainte est respectée.

4.2 b) Lorsque les notes ne sont plus deux à deux distinctes

De la même manière qu'à la question 2b, on prend m = 2n, on a donc toute les notes en double, elles ne sont plus distinctes.

4.3 c) Lorsqu'un silence apparaît

En partant d'un fichier qui ne contient aucun silence, il faut s'assurer qu'une nouvelle moité tombe entre deux anciennes notes.

•Si n est pair :
En se basant sur nos résultats de la question 3.3, on justifie que m doit être impair. En appliquant la contrainte, on déduit que $\forall m$ impair tel que $m \geq n$, un silence apparaît en 1 opération.

•Si n est impair :
Il est toujours impossible de faire apparaître un silence en une opération. Il faut donc passer à $m > n$ et pair, puis à $m' = n$, soient deux opérations.

4.4 d) Lorsqu'un silence disparaît

• Si $k \leq \frac{n}{2} - 1$ et n est pair :
D'après nos résultats à la question 3.4, on peut toujours choisir un m tel que $m = \frac{n}{2}$ puis revenir à un fichier m' tel que $= m - 1$. On a bien $m' \geq k$ donc on a besoin de 2 opérations.
• Si n est impair ou $k \geq \frac{n}{2}$:
On créé un fichier intermédiare tel que $m = 4n$. Il sera pair et supérieur à k. De là, on peut sélectioner un troisième fichier $m' = \frac{m}{2}$

On peut toujours enlever une note (car $m' = 2n$) avec une troisième opération de sorte à faire disparaitre un silence. Cela est mieux compréhensible en reprenant nos résultats de la question 3.4. Finalement, 3 opérations suffiront à faire disparaître un silence à coup sûr.

4.5 e) Lorsque toutes les notes sont les mêmes

En procèdant de la même manière qu'avant, on prend m = 3n puis m' = n, et toute les notes sont les mêmes à nouveau. Il faut 2 opérations.

4.6 f) Lorsque la bande son ne contient que des silences

•Pour tout n pair et si $k \leq \frac{m}{2}$:
D'après nos résultats de la question 2.6, on peut y aboutir pour $m = \frac{n}{2}$. Dans ce cadre, la contrainte est respectée, donc la bande son peut ne contenir que des silences en 1 opération.

•Si n est impair ou $k > \frac{m}{2}$:
On peut toujours doubler le nombre de notes de sorte à tomber sur un fichier pair, on peut ensuite prendre $m' = \frac{m}{2}$. En reprenant nos résultats de la question 2.6, 2 opérations suffiront à faire disparaître un silence à coup sûr.

5 2ème partie : étude des silences

Dans cette nouvelle partie, nous allons étudier les silences plus en profondeur en essayant de généraliser leurs apparitions.
Cette introduction va nous permettre de conjecturer certaines propriétés et introduire certains outils utiles pour la question 4.

Soit $l = \frac{1}{n}$ et $l' = \frac{1}{m}$ les longueurs d'une note du premier et deuxième fichiers respectivement.
Soit r le rapport entre la durée d'une nouvelle note et d'une ancienne note, on a :

$$r = \frac{l'}{l} = \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{m}$$

Dans l'exemple de la figure 5, on a $r = \frac{4}{7}$, c'est à dire qu'une nouvelle note occupe quatre septièmes d'une ancienne note.

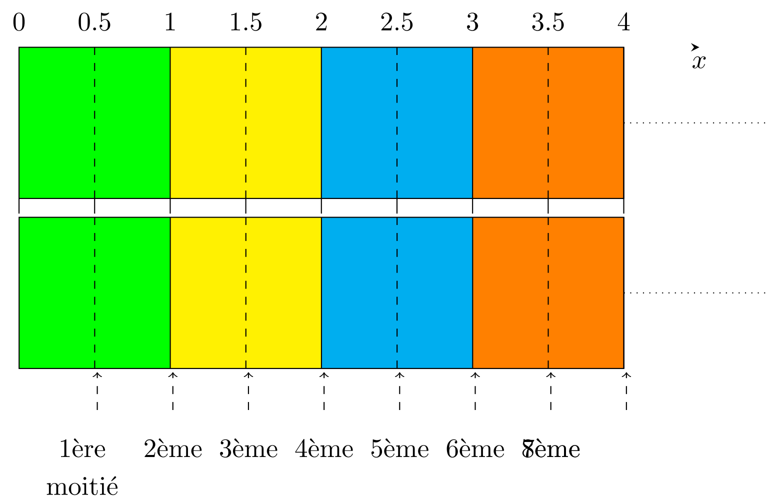
Intéressons-nous maintenant aux milieux des nouvelles notes qui permettent de déterminer la valeur qu'une nouvelle note va prendre.

L'espace occupé par la moitié d'une nouvelle note est donc la moitié du rapport calculé, soit : $r' = \frac{r}{2}$

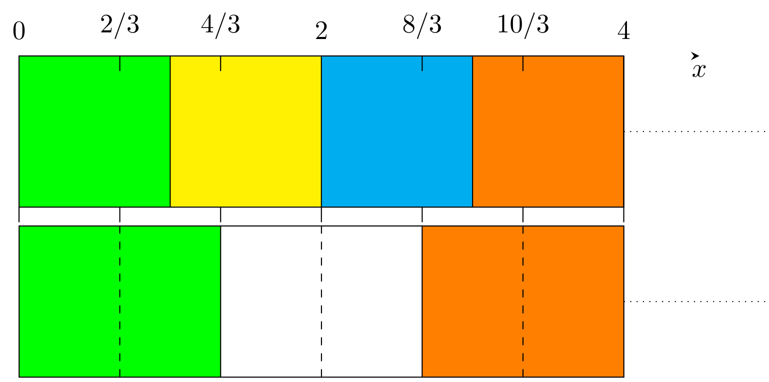
Si l'on établit une graduation telle que la fin ou le début de chaque ancienne note représente un entier de cette graduation, on peut analyser la disposition des milieux des nouvelles notes.
Par exemple, si le nombre de notes du nouveau morceau est le même que le nombre de notes de l'ancien morceau, on obtient la disposition suivante.

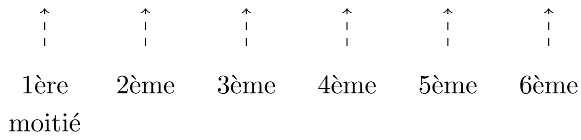
Pour que la moitié d'une nouvelle note tombe pile entre deux anciennes notes, il faut qu'on puisse multiplier r' par un entier inférieur ou égal à $2m$ (nombre total de moitiés de "demi-notes" du second morceau) et que cet entier soit impair.

En effet, sur notre graduation, l'arrivée d'une nouvelle note est un multiple d'un couple de moitiés. Donc si on peut attiendre la fin d'une ancienne note en combinant un nombre pair de moitiés de nouvelles notes, c'est qu'on peut l'atteindre avec un nombre entier de nouvelles notes entières (car un nouvelle note est composée de deux moitiés). Cela se produit par exemple lorsque les deux morceaux comprennent le même nombre de notes (avec $r = 1$ et $r' = \frac{1}{2}$.
Illustration :



En revanche, si on ne peut atteindre la fin d'une ancienne note que en combinant un nombre impair de moitiés de nouvelles notes, c'est qu'on peut l'atteindre avec un nombre entier de nouvelles notes entières plus une moitié, et donc ce milieu transforme la nouvelle note en silence. C'est ce qui se passe par exemple avec un premier morceau qui comporte un nombre pair de notes puis un second qui en possède un nombre impair.
Illustration :





6 Quatrième question, étude de bandes son de longueur impaire

6.1 a) Possibilité qu'un silence apparaisse

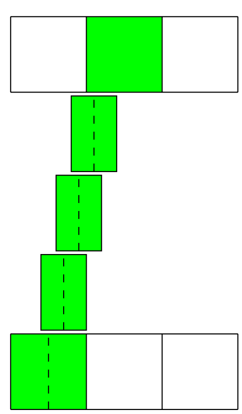
Puisque n et m sont des nombres impairs, on pose : $n = 2q+1$ et $m = 2q'+1$ avec $q, q' \in \mathbf{N}$.
On peut donc exprimer le rapport de cette manière :

$$r = \frac{2q+1}{2q'+1} \implies r' = \frac{2q+1}{4q'+2}$$

Même si cette fraction est réductible, le facteur premier 2 dans $4q'+2$ ne sera pas supprimé car $PGCD(2q+1, 4q'+2) \neq 2$ puisque $2q+1$ est un nombre impair et $4q'+2$ est un nombre pair.
Ainsi, $4q'+2$ restera pair même après réduction (s'il y en a une).
Cette opération pourra se répéter à l'infini, mais le dénominateur de r' sera toujours pair.
Pour que le milieu d'une nouvelle note tombe entre deux anciennes notes, il faut qu'un multiple de r' (inférieur à 2m) soit entier. Pour cela, on multiplie r' (après réduction) par son dénominateur.
Or nous avons montré que ce dernier est pair, donc il nous faut un nombre pair de moitiés pour tomber entre deux notes. Ainsi, comme expliqué en introduction de la partie 2, dans ces conditions aucun silence ne sera produit.

6.2 b) Possibilité que le fichier initial et le fichier final soient différents avec $n = 3$

1 est interdit et 2 est pair, on ne passe donc que par des fichiers supérieurs ou égaux à 3.
Avec des fichiers supérieurs au fichier initial, puisqu'aucun silence ne peut apparaître, le nombre de notes est au moins le même.
Regardons si une note du fichier initial peut être remplacée par une autre. Pour que cela fonctionne, on pourrait imaginer une sorte d'escalier qui décale la note du milieu de plus en plus vers la gauche, jusqu'à ce que son extrémité soit strictement inférieure à 0.5 (la valeur du milieu de la première note quand on revient à $n' = 3$.
Pour cela, il faut qu'un nombre entier de moitiés permette tout juste de récupérer la valeur de la note du milieu de sorte que le début de la note qui nous intéresse soit décalé vers la gauche, et ainsi de suite.
Illustraion :



Pour que cela soit réalisable, il faut réaliser les étapes suivantes :
-On choisit nombre entier de moitiés qui permet de tout juste de dépasser le premier début $d_1 = 1$.

-On regarde où se situe le début de cette nouvelle note et on le nomme d_2.
-On construit un autre nombre de moitiés qui permet d'atteindre tout juste d_2
Et ainsi de suite jusqu'à ce que $d_p < 0.5$.
Mathématiquement, on a :
$d_1 < r'_1 \times k_1 < f_1$
$d_2 = k_1 \times \frac{n_1}{2n_2} - \frac{n_1}{2n_2}$
$d_2 < r'_2 \times k_2 < f_2$
$d_3 = k_2 \times \frac{n_2}{2n_3} - \frac{n_2}{2n_3}$

Avec le début de la première note qui a la valeur qui nous intéresse noté $d_p = k \times n_p 2n_{p+1} - n_p 2n_{p+1}$
Avec la fin de cette même note notée $f_p = k \times n_p 2n_{p+1} + n_p 2n_{p+1}$
Et $n_p etr'_p$ respectivement le nombre de notes et les demi-rapports du p-ième morceau. On suppose donc qu'il est toujours possible de créer un tel morceau, et donc il est possible que les morceaux initiaux et finaux soient différents.

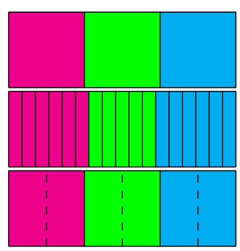
6.3 c) Fichier final en ayant toujours plus de n notes

6.3.1 Combien de notes peut-il y avoir ?

Sachant qu'aucun silence ne peut apparaître et que la longueur initiale et finale sont les mêmes, le nombre de notes est au moins aussi grand.

6.3.2 Quels sont les fichier finaux possibles ?

En une opération directe, il faut imaginer qu'un groupe de nouvelles notes forme un tout qui peut être vu comme une gross note.
Illustration :



Le seul moyen pour que deux fichiers soient différents est donc qu'une note soit remplacée par une autre, et pour cela il faudra employer plusieurs opérations. Comme expliqué à la question 6.2, on pourrait envisager un remplacement d'une note tout en ajoutant la contrainte de n'utiliser aucun morceau de longueur 1 ou 2. Dans ce cas là, on peut envisager tous les fichiers finaux dont une note initiale a été remplacée par une autre note déjà contenue dans le morceau initial.

7 Cinquième question, reprise de la quatrième sans se restreindre aux longueurs impaires

7.1 a) Possibilité qu'un silence apparaisse

Ici, n peut s'écrire $2q$ ou $2q + 1$ et m peut s'écrire $2q$ ou $2q + 1$ avec $q, q' \in \mathbf{N}$.

7.1.1 Algorithme

On peut savoir si un silence va apparaître avec cet algorithme :

-Calculer r' (son dénominateur est forcément pair)
-Réduire la fraction si cela est possible
-Multiplier r' par son dénominateur pour obtenir un nombre entier.
-Si le nombre par lequel on a multiplié est pair, le milieu ne tombe pas entre deux anciennes notes
-Sinon, le milieu tombe entre deux anciennes notes et un silence apparaît

En python :

```
import math
n = int(input("nombre␣notes␣inial"))
m = int(input("nombre␣notes␣suivant"))
denom_reduit = 0
num_reduit = 0
r=n/m
r_2=r/2
num = n
den = m*2
def reduc(n, m):
    pgcd = math.gcd(num, den)
    global num_reduit
    global denom_reduit
    num_reduit = num // pgcd
    denom_reduit = den // pgcd
    return (num_reduit, denom_reduit)
print(reduc(num, den))
def pair(denom_reduit):
    return denom_reduit%2 == 0
if pair(denom_reduit)==True:
    print("aucun␣silence␣n'appara t")
else:
    print("un␣silence␣appara t")
```

7.1.2

- Si le premier fichier a une longueur paire et le second une longueur impaire : un silence apparaît en 1 opération. En effet, on a :
$$r = \frac{2q}{2q'+1} \implies r' = \frac{2q}{4q'+2} = \frac{q}{2q'+1}$$
Par exemple, pour $n = 4$ et $m = 7$: $r = \frac{4}{7} \implies r' = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$ Ainsi, la 7ème moitié de note correspond donc à un milieu qui tombe pile entre 2 notes (le numérateur vaut 2 donc tombe à la fin de la 2ème note).

- Si les deux morceau ont une longueur paire :
$$r = \frac{2q}{2q'} \Rightarrow r' = \frac{2q}{4q'} = \frac{q}{2q'}$$
Il y a maintenant deux cas possibles :
  - Si q est pair et l'on peut encore simplifier la fraction par 2. Dans ce cas, il y a encore deux possibilités :
    * Si le q' restant au dénominateur est pair, la fraction n'est plus réductible, aucun silence ne peut apparaître.
    * Si le q' restant est impair, on peut multiplier la fraction par un nombre impair de moitiés pour aboutir à un entier, et donc un silence se créé.
  - Si q est imapair, la fraction n'est pas réductible, le dénominateur reste pair et l'on ne peut créer de silence en 1 opération.

- Si les deux morceaux ont un nombre de notes impair : déjà démontré à la question 4.1 (impossible en 1 opération.

- Si le premier morceau a une longueur impaire et le second une longueur paire :

$$r = \frac{2q+1}{2q'} \Rightarrow r' = \frac{2q+1}{4q'}$$

  On ne pourra pas réduire par le facteur 2, donc il faut multiplier la fraction par un nombre pair pour aboutir à un entier : aucun silence n'apparaît en 1 opération.

Cependant, on remarquera que dans tous les cas où "aucun silence ne peut apparaître en 1 opération", il toujours possible d'utiliser plusieurs opérations afin d'aboutir à un cas qui fonctionne.

7.2 b) Possibilité que le fichier initial et le fichier final soient différents avec $n = 3$

En suivant les différents cas exprimés à la question précédente, on a montré qu'il est toujours possible de faire apparaître un silence à une certaine étape.
Il reste à savoir si il existe encore un cas respectant les deux conditions suivantes : on ne passe jamais par un ficher de longueur 1 et on retombe sur un fichier de longueur 3.
La réponse est affirmative : en ajoutant un note pour obtenir un morceau $m = 4$, lorsqu'on revient à $m' = n = 3$ (pair puis impair), un silence apparaît et les fichiers de départ et d'arrivée ne sont plus les mêmes.

7.3 c) Fichier final en ayant toujours plus de n notes

On combinera les questions "Combien de notes peut-il y avoir ?" et "Quels sont les fichier finaux possibles ?" en une seule. Pour cela, pour chaque explication de cas, nous détaillerons nombre de notes et l'aspect du morceau final dans la même foulée.
• Avec des bandes son de longueur impaire, d'après la question 3.5, on peut avoir le même nombre de notes mais surtout le même fichier de départ et d'arrivée.
• Si le premier fichier a une longueur paire et le second une longueur impaire, un silence apparaît forcément au milieu du nouveau morceau.
En effet, on a : $r = \frac{2q}{2q'+1} \implies r' = \frac{2q}{4q'+2} = \frac{q}{2q'+1}$ avec $2q' + 1 = \frac{1}{2}(4q' + 2)$ sans réduction, au moins un silence se situe au milieu du nouveau morceau.
• Avec une première bande de longueur paire et une seconde de longueur impaire, on peut même obtenir plus d'un silence.
Supposons qu'après avoir réduit le fraction en enlevant au numérateur et au dénominateur le facteur 2, on on puisse encore la simplifier.
Comme tout nombre est décomposable en produit de facteurs premiers et que 2 est le seul nombre premier pair, la simplification par d'autres facteurs premiers (forcément impairs car le seul facteur 2 du dénominateur a été supprimé) conserve donc la parité de la première réduction par 2 de r' : numérateur pair ou impair et dénominateur impair.
Appelons "num" le numérateur de r' et "den" le dénominateur de r' non réduits. Il faut donc den moitiés de notes pour remplir le morceau.
Il faut donc den/2 moitiés pour espérer avoir un silence au milieu du morceau, den/6 moitiés pour espérer avoir un silence à un sixième du morceau et ainsi de suite. Le den de r', obtenu en multipliant un nombre impair par 2, ne peut être décomposé que de la manière suivante :

$$den = 2 \times \prod_{i=0}^{z} p_i^{\alpha}$$

Le premier silence peut donc apparaître par exemple à 1 demi (si l'on simplifie par 2), un sixième (si l'on simplifie par 2×3), un dixième (si l'on simplifie par 2×5), un quatorzième (si l'on simplifie par 2×7) un dix-huitième (si l'on simplifie par $2 \times 3 \times 3$)... du morceau.
Ce silence va pouvoir se répéter un certain nombre de fois en fonction de la longueur du morceau.
On sait qu'on a divisé le dénominateur PGCD fois pour aboutir au dénominateur réduit.

$$r'_{reduit} = \frac{\frac{num}{PGCD(num;den)}}{\frac{den}{PGCD(num;den)}}$$

Alors, à l'envers, si on multiplie le dénominateur réduit par le PGCD, on retombe sur le dénominateur de base. Or, dans ce PGCD, il y a forcément un facteur 2 (première réduction de fraction) donc la moitié de ce nombre de milieux supposés tomber entre notes ($\frac{PGCD(num_{r'};den_{r'})}{2}$) correspondent en réalité à un nombre pair de moitiés qui coïncident avec la fin d'une nouvelle note et ne peuvent donc pas créer de silence. Il y aura donc

$$1 - \frac{PGCD(num;den)}{2} = \frac{PGCD(num;den)}{2}$$

silences

On a donc :

$$Nbr_{sil} = \frac{PGCD(num;den)}{2} = \frac{2 \times \prod_{i=0}^{n} p_i^{\alpha}}{2} = \prod_{i=0}^{z} p_i^{\alpha}$$

Etant donné que plus il y a de notes, plus "den" est élevé. On pourra donc former tous ces nombres de silences en respectant la contrainte de ne pas descendre en-dessous de n notes.
Ainsi, si l'on retombe sur un fichier à n éléments, le nouveau nombre de notes n' s'écrit

$$n' = n - Nbr_{sil} = n - \prod_{i=0}^{z} p_i^{\alpha}$$

6

Troisième partie : image de 1 mètre par 1 mètre Nous travaillons maintenant en deux dimensions : ici, la longueur et la largeur de chaque note nous importe.
Dans le cadre d'une image de 1 mètre par 1 mètre, notons l le nombre de notes de la première image dans la largeur du carré, et l' le nombre de notes de la deuxième image dans la largeur du carré.
De même, notons L le nombre de notes de la première image dans la longueur du carré, et L' le nombre de notes de la deuxième image dans la longueur du carré.

Désignons le fait de prendre une image et de la transformer en une seconde comme une opération.
Dans ce nouveau cadre, on réunit les questions 1 et 2 en une seule question : on donne le nombre minimal d'opérations qui donnent le résultat et on en déduit donc si celui-ci peut arriver ou non après un nombre fini d'opérations.

7.4 2

7.4.1 a) Une image disparaît

-Si $l \neq 1$ et $\neq 1$ tels que $l' = l - 1$ ou $L' = L - 1$, une concession sur une image sera forcément faite, voire plusieurs si une nouvelle image tombe à l'intersection de deux anciennes, auquel cas une note peut donc apparaître en une opération.
-Si $l = 1$ et $L = 1$ aucun l et L plus petits ne sont possibles.

7.4.2 b) Les images ne sont plus deux à deux distinctes

$\forall l, L \in \mathbb{N}^*$ on peut prendre $l', L' \in \mathbb{N}^* \neq 1$ tels que $L' = 2L$ ou $l' = 2l$.

Ainsi, chaque longueur ou largeur d'une ancienne image est remplie par 2 longeurs ou largeurs de nouvelles images, dont les deux milieu prennent l'identité de la même image. Ces deux nouvelles images consécutives sont donc les mêmes et ne sont pas deux à deux distinctes, et ce sur tout le morceau.

7.4.3 c) Un rectangle noir apparaît

-Si l est pair : 1 opération, avec un fichier composé d'un nombre l' d'images impair. -Si L' est pair : 1 opération, avec un fichier composé d'un nombre L' d'images impair.
Intuitivement, si l'on place un note de longueur $\frac{1}{l'}$ au milieu de la largeur du carré, dont le milieu coïncide avec l'intersection des deux anciennes images, cette nouvelle note devient un silence et de plus l'espace à droite et à gauche de cette nouvelle note sera le même et pourra être complété par les notes restantes qui sont en nombre pair (car $2q + 1 - 1$ est un nombre pair, avec la moitié des notes restantes à gauche et l'autre moitié à droite).
Si l et L sont impairs, aucun silence ne peut apparaître.

7.4.4 d) Un rectangle noir disparaît

Pour être sûr de faire disparaître un rectangle noir, il faut aboutir à un morceau de sorte qu'il y ait au moins 2 rectangles noirs, puis revenir à un autre fichier très petit, disons avec 1 unique rectangle. Ainsi, même si un des 2 rectangles noirs est conservé, le deuxième (et autres s'il y en a) sera supprimé à coup sûr.

•Si l ou L est pair tel que $l, L \geq 2$:
On pose $l = \frac{n}{2}$ ou $L = \frac{n}{2}$, de sorte que le milieu de la longueur ou de la largeur de chaque nouveau rectangle est entre deux anciennes notes. On se retrouve donc avec un morceau rempli de silences (au moins 2).
Il ne reste plus qu'à revenir à un morceau $l' = 1$ ou $L' = 1$, de sorte qu'il est certain qu'un moins 1 rectangle disparaisse en <u>2 opérations</u>.

- Si $l = 2$ et $L = 2$ ou si l et L sont impairs :

On fabrique un nouveau morceau auquel on ajoute le nombre de rectangles nécéssaire à la construction d'une image à $l \times L$ rectangles de sorte que l ou L est pair et supérieur ou égal à 4. Ensuite, on réitère le schéma décrit juste avant, de sorte qu'un rectangle noir disparaît à coup sûr en <u>3 opérations</u>.

7.4.5 e) Tous les images sont les mêmes

Prendre $l' = 3l$ et $L' = 3L$ puis revenir aux longueurs et largeurs initiales.

7.4.6 f) L'image globale ne contient que des rectangles noirs

-Si l ou L est pair : une opération.
En effet, on peut prendre $l', L' \in \mathbb{N}*$ tels que $l' = \frac{l}{2}$ ou $L' = \frac{L}{2}$.

Ainsi, chaque milieu de chaque nouvelle longueur tombe pile entre deux anciennes longueurs, ou chaque milieu de chaque nouvelle largeur tombe pile entre deux anciennes largeures et le fichier final ne donne que des rectangles noirs
-Si l et L sont impairs : 2 opérations.

En effet, il faut créer une deuxième image avec soit un nombre pair de longueurs, soit un nombre pair de largeurs, puis une troisième image avec $l'', L'' \in \mathbb{N}*$ tels que $l'' = \frac{l'}{2}$ ou $L'' = \frac{L'}{2}$.

8 Dernière partie : réflexion et pistes de recherche

Ce problème reposait en réalité sur une clef essentielle : l'apparition des silences. En comprenant les conditions de leur apparition, nous pouvons étudier la plupart des cas.