Problème 3

Equipe $\pi z^2 a$

Lycée Saint-Marc, Nivolas-Vermelle

March 2023

Résumé du problème :

Dans ce problème d'aritméthique, on étudie des systèmes monétaires, on cherche à savoir quels appoints on aura forcément en convertissant notre argent noté x dans un de ces systèmes monétaires. Il arrive qu'il n'existe aucun de ces appoints, on cherche aussi quels sont les x qui vérifient cette affirmation, ils sont appelés S-primaires. On s'intéresse ensuite à des S-décompositions de ces x, des décompositions formées d'appoints de x mais aussi de prix S-primaires. Nous avons utilisé nos propriétés fondamentales ainsi que nos théorèmes pour parvenir à répondre à la grande majoritée des questions.

Contents

1 Introduction

1.1 Définitions

Définition d'un système monétaire

On note un système monétaire $S = \{a_1, a_2, ...a_n\}$
Par convention, $a_1 = 1$
Par convention chaque élément de S est unique et rangé dans l'ordre croissant, c'est à dire :
$a_k < a_{k+1}$

Définition d'un S-appoint

On définit l'ensemble $A_S(x)$ dit l'ensemble des S-appoints de x.

$$e \in A_S(x)$$

$$\iff$$

$$\text{Pour tout } u_1, u_2, ...u_n \in \mathbb{N} \text{ tels que } a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = x,$$
$$\exists v_1, v_2...v_n \in \mathbb{N} \text{ avec } v_i \leq u_i \text{ tel que } a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = e$$

Définition d'un S-primaire

On appelle P_S l'ensemble des nombres S-primaires

$$x \in P_S \iff x \in \mathbb{N}^* \text{ et } A_S(x) = \{0, x\}$$

1.2 Propriétés fondamentales

Propriété : $0 \in A_S(x)$

Preuve : On prend $v_1 = 0, v_2 = 0, ...v_n = 0$, pour tout $u_1, ..., u_n$ on a $v_i \leq u_i$, de plus : $0 \times a_1 + 0 \times a_2 + ... + 0 \times a_n = 0$ d'où $0 \in A_S(x)$

Propriété : $x \in A_S(x)$

Preuve : On prend $v_1 = u_1, v_2 = u_2, ..., v_n = u_n$, on a :
$a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = x = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ d'où $x \in A_S(x)$

Propriété : $A_S(x) \in [\![0; x]\!]$

Preuve : premièrement, $e = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$ avec $a_iv_i \geq 0$ donc $e \geq 0$ puis $v_i \leq u_i$ et $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$ donc $e \leq x$. Ainsi tout élément $e \in A_S(x)$ appartient aussi à $[\![0; x]\!]$ d'où $A_S(x) \in [\![0; x]\!]$

Propriété : Si $x \in S$ alors $x \in P_S$

Preuve : Soit $x \in S$. Alors il y a un $a_x = x$. On peut écrire $x = a_x \times 1$, les seuls éléments possibles de $A_S(x)$ sont donc $a_x \times 0$ et $a_x \times 1$ et d'après les propriétés, $0 \in A_S(x)$ et $x \in A_S(x)$ c'est à dire $A_S(x) = \{0, x\}$ donc $x \in P_S$

Propriété : Si $e \in A_S(x)$ alors $x - e = e' \in A_S(x)$

Preuve : Par hypothèse, $e \in A_S(x)$, alors on a $\forall u_1, u_2, ...u_n$:

$$e = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

On peut donc écrire :

$$x - e = a_1(u_1 - v_1) + a_2(u_2 - v_2) + ...a_n(u_n - v_n)$$

avec $v'_i = u_i - v_i$

$$e' = a_1 v'_1 + a_2 v'_2 + ... + a_n v'_n$$

on a aussi :

$$0 \leq v_i \leq u_i$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_i - v'_i \leq u_i$$

$$\Leftrightarrow -u_i \leq v'_i - u_i \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq v'_i \leq u_i$$

On a donc bien $v'_i \in \mathbb{N}$ et $v'_i \leq u_i$ pour tout $u_1, u_2, ...u_n$ et donc $e' \in A_S(x)$

2 Première question, les appoints du petit prince en fonction de x

a) Il possède des pièces d'une valeur totale de 10

Pour commencer, on a $S = \{1, 3, 10\}$ et $x = 10$

Nous pouvons affirmer que $x \in S \Leftrightarrow x \in P_S$ (voir propriétés), ainsi, $A_S(10) = \{0, 10\}$.

Théorème : Le PPCM d'éléments de S est S-primaire.

On prend une partie finie d'un ensemble S qu'on notera $S' = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ avec chaque élément unique et rangé dans l'ordre croissant.
On note m le plus petit multiple commun aux éléments de l'ensemble S'.
On note $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ les facteurs tels que $a_i \times \alpha_i = m$

$\forall\ y \in]\!]0; m[\![$: m étant le plus petit commun multiple, y ne peut être un multiple commun à tous les éléments de S'. Donc, $\exists a_q$ tel que $a_q \nmid y$.

On a donc $m = a_q \times \alpha_q$ et il n'existe pas $v_q \leq \alpha_q$ tel que $a_q \times v_q = y$ puisque $a_q \nmid y$.

Donc tout $y \in]\!]0; m[\![$ n'est pas un S'-Appoint de m.
Donc $A_{S'}(m) = \{0, m\}$

Donc $m \in P_S$

Théorème : $\forall x \in P_S, U \mid x$ et/ou $V \mid x$

Preuve :

Avec $S = \{1, U, V\}$

Soit x un S-Primaire.

Supposons que x, n'est ni un multiple de U ni un multiple de V. On considère une écriture de x, de la forme $x = Up + Vq$ avec p et q non nuls.

S'il n'existe aucune combinaison linéaire de U et V pour former x, alors le petit prince aura pour chaque décomposition de x au moins une pièce de 1, donc $1 \in A_S(x)$ et $x \notin P_S$.

Montrons que $Up \in A_S(x)$:
On introduit $\alpha \leq U$, $\beta \leq V$ et r des nombres entiers tels que $\alpha U = \beta V + r$ donc $-\alpha U + \beta V + r = 0$ On peut écrire toute les combinaisons linéaires $x = Uk + Vk' + k''$ en donnant certaines valeurs à α, β et r et en écrivant :

$$x = Vq + Up$$

$$\Leftrightarrow x = Vq + U(p - \alpha) + \beta V + r$$

On a donc $Up = V \times 0 + U(p - \alpha) + \beta V + r$
Avec $0 \leq q$, $p - \alpha \leq p - \alpha$, $\beta \leq \beta$ et $r \leq r$ donc d'après la définition du S-appoint, $Up \in A_S(x)$ et puisque $Up \neq 0$ et $Up \neq x$ $x \notin P_S$
ce qui et absurde car on a supposé que $x \in P_S$. Donc x doit être un multiple de U ou v pour être S-primaire.

2.1 b) Il possède des pièces de valeur totale de 100

Nous regardons ce qu'il se passe quand on prend x = 100.
Puisqu'on peut prendre 10 pièces de 10, chaque appoint est forcément multiple de 10.
On sait aussi qu'on peut prendre des pièces de 3 et une pièce de 1 Donc un appoint e = 3k ou e = 3k + 1.
On cherche donc tous les multiples de 10 qui ne sont pas congrus à 2 modulo 3 et compris entre 0 et 100.
$A_S(x) = (0, 30, 40, 60, 70, 90, 100)$

2.2 c) Il possède des pièces de valeur totale de 10^n

De la même manière qu'à la question b), tout les éléments $e \in A_S(x)$ sont multiples de 10 et congrus à 0 ou 1 modulo 3. $A_S(x) = \{\forall k \in [\![0; \frac{10^n - 10}{30}]\!] : 30k, 30k + 10\}$

3 Deuxième question, les prix S-Primaires en fonction de S

3.1 a) Il possède des pièces de 1 et U

On peut ici distinguer deux cas :

- $U \nmid x$: Si x n'est pas un multiple de U, il s'écrit sous la forme suivante :

  $$x = u_1 + u_2 U$$

  avec $u_1 > 0$.
  Cela veut dire qu'on peut écrire $e = 1 = 1 \times 1 + 0 \times V$
  Ainsi $1 \in A_S(x)$ donc $x = 1$ ou $x \notin P_S$
  Si $x = 1$, alors $x \in P_S$ (car $1 \in S$)

- $U \mid x$: On prend ici

  $$x = u_2 U$$

  Et on prend $u_2 = 1$
  On a ainsi $e = U = 1 \times U$
  Donc $U \in A_S(x)$ donc $x = U$ ou $x \notin P_S$
  Si $x = U$, alors $x \in P_S$ (car $U \in S$)

Par convention, 0 n'est jamais S-primaire.
1 et U sont donc les seuls prix S-primaires, c'est à dire : $P_S = \{1, U\}$

3.2 b) Il possède des pièces de valeurs impaires

D'après les propriétés fondamentales, tous les nombres impairs sont des prix S-primaires.

Maintenant pour les x pairs. On s'intéresse d'abord aux valeurs deux et quatre.

Pour $x = 2$: $1 \in A_S(2)$, donc $2 \notin P_S$
Pour $x = 4$: $1 \in A_S(4)$, donc $4 \notin P_S$

Pour tout $x \geq 6$, on peut écrire : $x = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$
On peut écrire x sous les formes : $x = 1 + (2k - 1)$ et $x = 3 + (2k - 3)$
avec 1, 3, 2k - 1 et 2k - 3 des éléments de S.
Il est évident qu'il n'existe aucun S-appoint $e < x$ puisque $1 \neq 2k - 3 \neq 3$ et $1 \neq 2k - 1 \neq 3$
Ainsi, tout x pair est supérieur à 6 est inclu dans P_S

Pour conclure, seuls les nombres 2 et 4 ne font pas partie des prix S-primaires dans cette situation.
C'est à dire, $P_S = \mathbb{N}^* - \{2, 4\}$

3.3 c) Il possède des pièces ayant l'ensemble des puissance de 2 pour valeurs

Nous allons procéder en deux étapes afin de répondre au mieux à cette question. Dans un premier temps, nous traiterons des x impairs, ensuite, des x pairs.

Toutes les puissances de 2 étant paires, 1 est donc le seul élément impair de l'ensemble S. Cela signifie donc que si x est impair, alors, $1 \in A_S(x)$ donc $x \notin P_S$

Ensuite, si x est pair et n'appartient pas à S, on a forcément l'appoint pour la plus grande puissance de 2 inférieure à x :

On considère par l'absurde qu'on ait pas l'appoint pour cette plus grande puissance de 2 qu'on notera 2^k

Soient, $u_0, u_1 ... u_k$ tels que $x = u_0 \times 1 + u_1 \times 2 + ... + u_k \times 2^k$. Puisqu'on considère qu'on a pas l'appoint pour 2^k, on a $u_k = 0$. Il faut aussi considérer le fait que $2 \times 2^{k-1} = 2^k$. Ainsi, $u_{k-1} \leq 1$.

On peut procéder de la même manière et dire que $u_{k-2} \leq 1$ (on considère que $u_{k-1} = 1$). On répète ainsi l'opération et $u_0, u_1 ... u_{k-1}$ sont tous inférieurs ou égaux à 1.

Rappelons que $2^k \leq x$. On peut factoriser 2^k en $(2-1)(1 + 2 + ... + 2^{k-1}) + 1$.
On a ainsi $x \geq (1 + 2 + ... + 2^{k-1}) + 1 \Leftrightarrow x > (1 + 2 + ... + 2^{k-1})$

Or cela est absurde puisque $x = u_0 \times 1 + u_1 \times 2 + ... + U_{k-1} \times 2^{k-1}$ avec $u_i \leq 1$

Donc par l'absurde, on sait que $2^k \in A_S(x)$ et donc que $x \notin P_S$

Finalement chaque $x \notin S$ n'est pas S-primaire. On a donc bien $S = P_S$

3.4 d) Il possède des pièces de 1, V et W

On a prouvé plus tôt que tout élément S-primaire dans un ensemble $S = \{1, U, V\}$ est aussi multiple de U ou V.
On traite ces deux cas :

- $V \mid x$
  On note r le reste de la division euclidienne de V par U et r' le reste de la division euclidienne de x par U
  On a : $V = kU + r$ et $x = k'U + r'$

Avec $x \geq V$, si $r' \geq r$, alors on peut écrire $x = k'U + r' - V + V = k'U + r' - kU - r + V = (k' - k)U + (r' - r) + V$ peu importe les valeurs de k' et r'. Donc V est un S-appoint de x et x n'est pas S-primaire (sauf si $x = V$).

- $U \mid x$
  On note r le reste de la division euclidienne de V par U et r' le reste de la division euclidienne de x par V.
  Et Uk est le plus petit multiple de U supérieur à V
  On a : $Uk = Vq + r$ et $x = Vk' + r'$
  Avec $x \geq Uk$, si $r' \geq r$, alors on peut écrire $x = Vk' + r' - Uk + Uk = Vk' + r' - Vq - r + Uk = V(k' - q) + Uk + (r' - r)$ peu importe les valeurs de k' et r'. Donc Uk est un S-appoint de x et x n'est pas S-primaire (sauf si $x = Uk$)

Cela veut dire que $\forall x \in P_S$, il doit impérativement respecter ces conditions.

3.5 e)

Notion importante :

On note $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, l'ensemble des nombres premiers ou égaux à 1.

Proposition :

$\forall x$ qui est un produit de facteurs premiers tous différents, $x \in P_S$.

Démonstration :

Les éléments de S étant tous des nombres premiers, nous pouvons affirmer qu'ils sont aussi premiers entre eux.

Cela veut dire que $\forall a_i, ..., a_q$ avec $a_i \neq ... \neq a_q$, leur plus petit multiple commun est $a_i \times ... \times a_q$.

Celui-ci, d'après notre théorème du PPCM, appartient donc à P_S.

Conséquences immédiates :

$\forall x$ qui est un produit de facteurs premiers tous différents, $x \in P_S$

4 Troisième question, la finitude de P_S en fonction de S

Notions importantes :

1) $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$
2) n : nombre d'éléments de l'ensemble S.
3) m : plus petit multiple commun aux éléments de l'ensemble S.
4) $\forall i \in [\![1; n]\!] : \alpha_i \times a_i = m$.

Propositions :

1) Lorsque $x \geq n \times m$, alors $m \in A_s(x)$.
2) Les ensembles S et P_s ont la même finitude.

Démonstration :

On cherche à majorer P_S. On veut montrer que $\forall x \geq n \times m$, $x \notin P_S$.

On a :

$$m = \alpha_1 \times a_1 = \alpha_2 \times a_2 = ... = \alpha_n \times a_n$$

Nous décidons maintenant d'ajouter toutes ces combinaisons :

$$n \times m = \alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + ... + \alpha_n \times a_n$$

Lorsque $x \geq n \times m$:
$\exists u_q \geq \alpha_q$ tel que $x = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n$

De cette manière, $m \in A_S$ car $m = a_1 \times 0 + ... + a_q\alpha_q + ... + a_n \times 0$
avec $\alpha_q \leq u_q$ et $0 \leq u_i$

De ce fait, $m \in A_S(x)$, donc, $x \notin P_S$.

Aussi, d'après nos propriétés fondamentales (page 3), $x \in S \Leftrightarrow A_S(x) = \{0, x\}$. Cela veut donc dire que lorsque S est possède une infinité d'éléments, P_S en possède également une infinité.

Conséquences immédiates :

Lorsque $x \geq n \times m$, alors $m \in A_s(x)$.

L'ensemble P_s est fini lorsque S est fini.
L'ensemble P_s est infini lorsque S est infini.

Nous pouvons donc en conclure que S et P_s ont la même finitude.

5 Quatrième question, l'encadrement du plus grand prix S-Primaire

D'après le premier théorème du PPCM, le PPCM est S-primaire donc le plus grand prix S-primaire est au moins le PPCM.

Nous allons, pour répondre à cette question, nous intéresser dans un premier temps, au cas de la question $2a$, à savoir que $S = \{1, U\}$.

Ici, pour tout $x > U$, on a $U \in A_S(x)$. En effet, Même sans utiliser des pièces de U, le petit prince va devoir payer avec au moins U pièces de 1.

Cela veut dire qu'aucun prix supérieur à U n'est S-primaire. D'après nos propriétés fondamentales, nous savons que $U \in S \Leftrightarrow U \in P_S$.

Ainsi, U est le plus grand prix S-primaire dans cette situation.

Ensuite, dans la question $2d$, on a $S = \{1, U, V\}$.

Ayant précédemment prouvé que le plus petit multiple commun faisait bien parti des prix S-Primaires, nous pouvons savoir que le plus grand prix S-Primaire seras au minimum, aussi grand que celui-ci.

A l'aide de la question 2.d, nous savons que le plus grand prix S-Primaire est PPCM(U;V)

Pour finir, nous allons étudier le cas de $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
On cherche une valeur à partir de laquelle nous sommes certains que x est plus grand que tous les prix S-Primaires.

Donc n représente le nombre d'éléments de l'ensemble S.
On note aussi $PPCM(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, le plus grand multiple commun à tous les éléments de l'ensemble S.

$$PPCM(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = \alpha_1 \times a_1 = \alpha_2 \times a_2 = ... = \alpha_n \times a_n.$$

Pour former la plus haute valeur possible sans jamais former $PPCM(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uniquement avec un $\alpha_q \times a_q$, nous devons soustraire 1 à chaque coefficient.
On se retrouve avec, $(\alpha_1 - 1)a_1 + (\alpha_2 - 1)a_2 + ... + (\alpha_n - 1)a_n$
Si x est S-Primaire :

On a, $(\alpha_1 - 1)a_1 + ... + (\alpha_n - 1)a_n = n \times PPCM(a_1, ..., a_n)$ - $\sum_{i=1}^{n} a_i$

On note G le plus grand élément de l'ensemble P_s, il ne peut-être plus grand que $n \times PPCM(a_1, ..., a_n)$ - $\sum_{i=1}^{n} a_i$.
Il existe donc bien un plus grand prix S-Primaire.

En effet, si x est plus grand que $n \times PPCM(a_1, ..., a_n)$ - $\sum_{i=1}^{n} a_i$, le petit prince aura forcément l'appoint pour $PPCM(a_1, ..., a_n)$.

Grâce à cette démonstration, nous pouvons voir que n'importe quel ensemble S fini possède un nombre fini de prix S-Primaires. De plus, tous les éléments appartenant à S, étant des prix S-Primaires, lorsque que cet ensemble est infini, il y a aussi une infinité de prix S-Primaires. En conclusion, lorsque l'ensemble S est fini, Ps est aussi fini et lorsqu'il est infini, Ps l'est également.

A l'aide de notre démonstration, nous pouvons directement affirmer que :

$$PPCM(1, a_1, a_2, ..., a_n) \leq G$$

Et que :

$$G < n \times PPCM(1, a_1, a_2, ..., a_n) - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

6 Cinquième question, conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que $S = P_S$

6.1 Conditions nécessaires :

Conditions nécessaire :

$S = P_S \Longrightarrow PPCM \in S$ ou S possède un nombre infini d'éléments.

Preuve :
D'après le premier théorème du PPCM, si S est fini, le PPCM est S-primaire, donc si le PPCM n'est pas

inclus dans S, $P_S \neq S$
Donc pour que $S = P_S$ il faut soit que le ppcm soit dans S soit que S ait un nombre infini d'éléments

6.2 Conditions suffisantes :

S = 1 et tous les multiples de d

Si S comprend pour éléments 1 et tous les multiples d'un nombre d strictement supérieur à 1 alors $S = P_S$

Preuve :
Soit S l'ensemble qui comprend 1 et tous les multiples strictements positifs de d.

On distingue deux cas pour tout x :
- Soit $x \in S$ donc $x \in P_S$.
- Soit $x \notin S$ donc $d \nmid x$ et $x \geq 2$. Dans ce cas là, on peut écrire :
$x = u_0 + u_1 d + u_2(2d)... + u_n(nd) \iff x = u_0 + d(u_1 + 2u_2 + ...nu_n)$
(On s'arrête à n éléments car on ne s'intéresse pas aux éléments supérieurs à x.)
Supposons par l'absurde que $u_0 = 0$ on aurait $d \mid x$ ce qui est absurde. Donc $u_0 \geq 1$.
On peut donc construire 1.
Ainsi $1 \in A_s(x)$ et $x \notin P_S$.

On a donc bien $S = P_S$

$S = \{1\}$

Ce cas là est assez simple, tout x strictement supérieur à 1 n'est pas S-primaire car 1 serait un S-appoint de x
De plus 1 est S-primaire donc $P_S = S$

$S = \{1, U\}$

Comme on l'a prouvé à la question 2a), $P_S = \{1, U\}$ donc $P_S = S$

Afin de répondre à cette question, nous avons besoin de faire appel à une démonstration similaire à celle que nous avons précédemment utilisé pour répondre à la question 2c :

Soit p_v, le nombre de pièces de valeur v. On peut "regrouper" R pièces de 1 en une pièce de R. De la même manière, on peut regrouper R pièces de valeur v en une pièce de valeur $R \times v$. Il est possible de le faire de telle manière que $\forall v$ on ait $p_v < R$. On considère donc que chaque pièce est au maximum en $R - 1$ exemplaire et on notera x_R la plus grande puissance de $R < x$.

Par l'absurde, on considère que l'on a pas p_{x_R}. Par ailleurs, $x_R = (R-1)(1 + R + R^2 + ... + \frac{x_R}{R}) + 1$. D'où $x_R > (R-1)(1 + R + R^2 + ... + \frac{x_R}{R})$, or $x > x_R$.

Donc, $x > (R-1)(1 + R + R^2 + ... + \frac{x_R}{R}) = \sum p_v \times v$ avec p_v maximal c'est à dire $R - 1$. Or, $x = \sum pv \times v$ ce qui est absurde. Donc, on peut rassembler des pièces en x_R, donc on a l'appoint pour x_R.

En effet, grâce à cette démonstration, nous pouvons nous apercevoir qu'aucun prix $x \notin S$ n'est S-Primaire. Tous les éléments de l'ensemble S étant des prix S-Primaires, nous pouvons donc en déduire que lorsque tous les éléments de S sont des puissances d'un même nombre, la condition $S = Ps$ est remplie.

7 Sixième question, les ensembles admettant au moins une S-Décomposition

Afin de répondre à cette question, nous devons trouver tous les ensembles tels qu'aucun $x \notin S$ ne soit S-Primaire. En effet, s'il était S-Primaire, alors il n'existerait aucun y qui serait S-Appoint de x.

Cela veut donc dire qu'il est impératif que $S = P_S$, autrement dit, tout les ensembles caractérisés dans la cinquième question admettent au moins une S-décomposition.

8 Septième question, étude de S-décomposition en fonction de S

8.1 a) S est fini et toute S-décomposition est unique

Nous n'avons pas réussi à trouver de bonnes pistes pour répondre à cette question.

8.2 b) S est infini et toute S-décomposition est unique

Pour répondre à cette partie de la septième question, nous allons utiliser $S = \{\mathbb{N}^*\}$, l'ensemble des entiers naturels strictements positifs.

Nous savons, d'après nos propriétés fondamentales, que tous les éléments de S appartiennent à P_s. Cela signifie que le seul S-Appoint de $x \in \mathbb{N}$, est x lui-même. La seule S-Décomposition de x possible est donc (x).

Nous pouvons donc en déduire que toute S-décomposition de x est unique lorsque S représente l'ensemble des entiers naturels strictements positifs.

8.3 c) S est de la forme $S = \{1, U, V\}$ et toute S-Décomposition est unique

Pour traiter cette partie de la question, nous allons utiliser une disjonction des cas.

1) Pour commencer, nous supposons que $V = Uk + r$ (avec $0 < r < U$). Dans cette situation, le plus petit multiple commun à U et V est un prix S-primaire. Cela signifie qu'il ne possède aucune S-Décomposition.

2) Ensuite, supposons que $V = Uk'$. On a donc $S = \{1, U, Uk'\}$. Lorsque x est supérieur à V (donc Uk') et qu'il n'est pas un multiple de U, les S-Appoints de x sont 1 et Uk'. En effet, x n'étant pas divisible par U, le petit prince est obligé d'utiliser au moins une pièce de 1 et s'il ne veut pas utiliser une pièce de V, il seras obligé de former un ensemble de pièces de 1 et U ayant pour valeur V.

Pour conclure, il n'éxiste pas d'ensemble tel qu'il soit de la forme $S = \{1, U, V\}$ avec $1 < U < V$ et que toutes les S-décompositions soient uniques.

8.4 d) Au moins un prix x admet au moins deux S-décompositions qui ne sont pas permutations des termes l'une de l'autre

Dans cette partie, nous allons reprendre l'ensemble S de la question $2c$, à savoir, $S = \{2^n, n \in N\}$, l'ensemble des puissances de 2.

On note p, le plus grand nombre entier tel que $2^p < x$. Notre démonstration stipule que $\forall x \notin S$, 2^p est S-appoint de x. Cela veut donc dire, d'après notre propriété fondamentale, que $(x - 2^p)$ est aussi S-Appoint de x.

De ce fait, il existe deux S-Décompositions pour x.

Illustration : $S = \{1, 2, 4, 8, 16...\}$, pour $x = 20$, ses S-Appoints sont 16 et 4. On a donc, deux S-Décompositions de x, à savoir, (16) et (4).

Pour conclure, il existe en effet des ensembles S tels qu'au moins un prix x admet au moins deux S-décompositions qui ne sont pas permutations des termes l'une de l'autre.

9 Neuvième question, pistes de recherche

Nous pouvons étudier les caractérisations des prix S-primaires dans des ensembles S et essayer d'en faire des généralités.