Оглавление

Введение

Данный курс лекций по главам математического анализа предназначен для студентов первого курса.

Глава 1.

1. Семестр 1

1.1. Основные теоремы о числовых множествах ...

1.1.1. Аксиома непрерывности (или полноты) действительных чисел

— это фундаментальное свойство, которое отличает множество $\mathbb{R}$ от множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Существует несколько эквивалентных формулировок этой аксиомы. Вот основные из них:

1. Принцип полноты по Дедекинду Любое непустое ограниченное сверху подмножество действительных чисел имеет точную верхнюю грань (супремум).

Пояснение: Это самая распространённая формулировка. Она утверждает, что для любого множества $A \subset \mathbb{R}$, которое ограничено сверху, существует число $\sup A \in \mathbb{R}$. В данном курсе это теорема. Также теоремами являются первые 5 формулировок аксиомы непрерывности.

Эквивалентная формулировка: Любое непустое ограниченное снизу подмножество действительных чисел имеет точную нижнюю грань (инфимум).

2. Принцип вложенных отрезков (Кантора) Для любой последовательности вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

длины которых стремятся к нулю ($\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$), существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

В множестве рациональных чисел это неверно — пересечение может быть пустым.

3. Принцип сходимости фундаментальных последовательностей (Критерий Коши) Всякая фундаментальная последовательность действительных чисел имеет предел, принадлежащий $\mathbb{R}$.

Пояснение (для будущего): Это означает, что множество действительных чисел полно в метрическом смысле (является полным метрическим пространством). Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N :\ |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

4. Принцип монотонной сходимости Всякая ограниченная сверху монотонно возрастающая последовательность имеет предел.

Пояснение (для будущего): Если $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots$ и существует M такое, что $x_n \le M$ для всех n, то существует $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.

5. Лемма о конечном покрытии (Принцип Бореля-Лебега) Из любого покрытия отрезка системой интервалов можно выбрать конечное подпокрытие.

Пояснение: Это топологическая формулировка непрерывности, эквивалентная другим. Она утверждает, что всякий отрезок $[a, b]$ является компактным множеством.

6. Теорема о сечениях (Дедекинд) $>$ Если множество всех действительных чисел разбито на два непустых класса A и B таких, что каждый элемент класса A меньше любого элемента класса B, то существует единственное число α, которое производит это сечение: все числа $x < \alpha$ попадают в A, а все числа $x > \alpha$ — в B (само число α может попасть в любой из классов).

Пояснение: Это первоначальная конструкция Дедекинда для определения действительных чисел с помощью "сечений". Именно ее будем использовать в данном курсе.

Все эти формулировки эквивалентны в теории действительных чисел. Это означает, что если принять одну из них за аксиому, то все остальные можно доказать как теоремы. Обычно за основу берётся сечение Дедекинду или принцип supremum.

1.1.2. Метод математической индукции

Метод математической индукции — это мощный и строгий метод доказательства утверждений, справедливых для всех натуральных чисел n (или для всех натуральных чисел, начиная с некоторого n_0). Он основан на аксиоме Архимеда.

Его суть заключается в том, чтобы доказать бесконечную серию утверждений $P(1), P(2), P(3), \ldots$, выполнив всего два шага.

Схема доказательства по индукции

Доказательство того, что утверждение $P(n)$ верно для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ (или для всех $n \geq n_0$), состоит из двух критически важных шагов:

1. База индукции.

Доказать, что утверждение $P(n)$ верно для первого допустимого значения n (чаще всего для $n = 1$).

2. Индукционный переход (шаг индукции).

Доказать, что если утверждение $P(n)$ верно для некоторого произвольного натурального $n = k$ (предположение индукции), то оно будет верно и для следующего значения $n = k + 1$, т.е. из справедливости $P(k)$ следует справедливость $P(k + 1)$.

Записывается это следующим образом:

1. $P(1)$ — истинно.
2. $\forall k \in \mathbb{N}: \quad P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ — истинно.

Если оба этих шага выполнены, то по принципу математической индукции утверждение $P(n)$ считается доказанным для всех натуральных n.

Образная аналогия

Метод индукции часто сравнивают с домино. Если вы:

1. Повалите первое костяшку домино (база индукции).
2. Убедитесь, что падение любой k-ой костяшки гарантированно повалит следующую, $(k + 1)$-ую (индукционный переход), то можно быть уверенным, что упадут все костяшки.

Пример. Утверждение: Сумма первых n нечётных чисел равна n^2.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Доказательство по индукции:

1. База индукции. Проверим для $n = 1$.

Левая часть: 1. Правая часть: $1^2 = 1$. $1 = 1$ — верно. База доказана.

2. Индукционный переход. Предположение индукции: Допустим, что формула верна для некоторого $n = k$, то есть

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2. \quad \text{(Это наше предположение)}$$

Требуется доказать, что тогда формула верна и для $n = k + 1$, то есть

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Упрощаем: $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$. Значит, нужно доказать:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Доказательство: Возьмём левую часть и воспользуемся нашим предположением индукции:

$$(1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Мы получили правую часть. Индукционный переход доказан.

Вывод: По принципу математической индукции, данная формула верна для всех натуральных n.

Вариации метода

Индукция с нееденичной базой. Утверждение доказывается не для всех $n \in \mathbb{N}$, а для всех $n \geq n_0$ (например, $n \geq 5$). В этом случае база индукции проверяется для $n = n_0$.

Полная (сильная) индукция. В индукционном переходе предполагается, что утверждение P верно не только для $n = k$, но и для всех предыдущих значений $n = 1, 2, \ldots, k$, и из этого доказывается справедливость $P(k + 1)$.

1.1.2.1. Доказательство методом математической индукции обобщенного неравенства Бернулли.

Обобщённое неравенство Бернулли утверждает, что для любого действительного числа $x \geq 0$, $x \neq 0$, и любого натурального числа $n \geq 2$ выполняется неравенство:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n - 1)}{2}x^2.$$

База индукции. Проверим для $n = 2$:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Сравним с правой частью:

$$1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x + \frac{2 \cdot 1}{2}x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Получаем равенство $1 + 2x + x^2 = 1 + 2x + x^2$, значит, неравенство выполняется (более того, обращается в равенство). База индукции доказана.

Предположение индукции. Предположим, что неравенство верно для некоторого натурального $n = k \geq 2$:

$$(1+x)^k \geq 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2. \tag{1}$$

Индукционный переход. Требуется доказать, что неравенство верно для $n = k + 1$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2. \tag{2}$$

Умножим обе части предположения индукции (1) на $(1+x)$ (это положительное число, так как $x > -1$, поэтому знак неравенства сохраняется):

$$(1+x)^{k+1} \geq \left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x).$$

Раскроем скобки в правой части:

$$\left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x) = 1 \cdot (1+x) + kx \cdot (1+x) + \frac{k(k-1)}{2}x^2 \cdot (1+x).$$

Раскроем каждое слагаемое:

$$= 1 + x + kx + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Сгруппируем подобные члены:

$$= 1 + (1+k)x + \left(k + \frac{k(k-1)}{2}\right)x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Упростим коэффициент при x^2:

$$k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k + k(k-1)}{2} = \frac{2k + k^2 - k}{2} = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Таким образом, правая часть принимает вид:

$$1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Итак, мы получили:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3. \tag{3}$$

Сравним правую часть неравенства (3) с требуемой правой частью в (2):

$$1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3 \quad \text{и} \quad 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2.$$

Они отличаются на слагаемое $\frac{k(k-1)}{2}x^3$. По условию $x \geq 0$, т.е. данное слагаемое неотрицательно, что и доказывает утверждение индукционного шага. Таким образом, по принципу математической индукции обобщённое неравенство Бернулли доказано для всех натуральных $n \geq 2$ и для всех $x \geq -1$.

1.1.2.2. Бином Ньютона

Формула бинома Ньютона утверждает, что для любых действительных (или комплексных) чисел a и b и для любого натурального числа n выполняется равенство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

Доказательство методом математической индукции.

1. База индукции. Проверим для $n = 1$:

$$(a+b)^1 = a + b.$$

Правая часть:

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a + b.$$

База индукции верна.

2. Предположение индукции. Предположим, что формула верна для некоторого натурального $n = m$:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k. \tag{1}$$

3. Индукционный переход. Требуется доказать, что формула верна для $n = m + 1$:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k. \tag{2}$$

Для доказательства умножим обе части предположения (1) на $(a + b)$:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Раскроем скобки:

$$(a+b)^{m+1} = a \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Преобразуем каждое слагаемое:

Первая сумма:

$$a \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k.$$

Сделаем замену индекса: пусть $j = k$. Тогда это сумма:

$$\sum_{j=0}^{m} C_m^j a^{m+1-j} b^j. \tag{3}$$

Вторая сумма:

$$b \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}.$$

Сделаем замену индекса: пусть $j = k + 1$, тогда $k = j - 1$, и при $k = 0$ $j = 1$, при $k = m$ $j = m + 1$. Получим:

$$\sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m-(j-1)} b^j = \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j. \tag{4}$$

Теперь сложим (3) и (4):

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j a^{m+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j.$$

Выделим отдельно слагаемые при $j = 0$ из первой суммы и при $j = m + 1$ из второй суммы:
При $j = 0$: первая сумма даёт $C_m^0 a^{m+1} b^0 = a^{m+1}$. При $j = m+1$: вторая сумма даёт $C_m^m a^0 b^{m+1} = b^{m+1}$.
Остальные слагаемые (для $j = 1$ до $j = m$) можно объединить в одну сумму:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} \left(C_m^j + C_m^{j-1}\right) a^{m+1-j} b^j.$$

Вспомним свойство биномиальных коэффициентов (формула Паскаля):

$$C_m^j + C_m^{j-1} = C_{m+1}^j.$$

Подставим это:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Заметим, что: $a^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} b^0$, $b^{m+1} = C_{m+1}^{m+1} a^0 b^{m+1}$.
Тогда всю сумму можно записать как единую сумму от $j = 0$ до $j = m + 1$:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Это в точности совпадает с требуемой формулой (2) для $n = m + 1$ (индекс j можно заменить на k).
4. Вывод. По принципу математической индукции формула бинома Ньютона доказана для всех натуральных n.

1.1.3. Множество Кантора

Множество Кантора (также известное как канторово множество или канторов совершенный набор) — это один из самых известных фракталов, который строится путём последовательного удаления частей из единичного отрезка. Несмотря на то, что в процессе построения удаляется бесконечно много интервалов, множество Кантора остаётся несчётным и имеет нулевую меру Лебега.

Построение множества Кантора.
1. Шаг 0: Возьмём единичный отрезок $C_0 = [0, 1]$.
2. Шаг 1: Удалим из него среднюю треть — открытый интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Останутся два отрезка:

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

3. Шаг 2: Удалим среднюю треть из каждого из оставшихся отрезков. То есть удалим интервалы $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Останутся четыре отрезка:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

4. Шаг n: Продолжаем процесс бесконечно: на каждом шаге из всех оставшихся отрезков удаляем их среднюю треть. После n шагов получаем множество C_n, состоящее из 2^n замкнутых отрезков, каждый длиной $\frac{1}{3^n}$.
5. Множество Кантора определяется как пересечение всех множеств C_n:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Свойства множества Кантора
1. Мощность (несчётность). Множество Кантора имеет мощность континуума, то есть оно несчётно. Это можно доказать, установив взаимно однозначное соответствие между точками множества C и числами из отрезка $[0, 1]$, записанными в троичной системе счисления: - При построении C удаляются все точки, которые в троичной записи содержат цифру 1 (кроме случая, когда бесконечное количество 1 стоит в конце, что эквивалентно ...200... . . .). - Таким образом, C состоит из точек, которые можно записать в троичной системе только с цифрами 0 и 2. - Таких последовательностей столько же, сколько последовательностей из 0 и 1 (в двоичной системе), то есть мощность континуума.

2. Мера Лебега. На каждом шаге удаляется часть отрезка: - На первом шаге удаляется интервал длины $\frac{1}{3}$. - На втором шаге удаляется 2 интервала общей длины $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$. - На n-ом шаге удаляется 2^{n-1} интервалов общей длины $\frac{2^{n-1}}{3^n}$.

Общая длина удалённых интервалов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом, мера множества Кантора:

$$\mu(C) = \mu([0,1]) - 1 = 0.$$

3. Нигде не плотность. Множество Кантора нигде не плотно в $[0,1]$: в любом интервале $(a,b) \subset [0,1]$ найдётся подынтервал, не содержащий точек из C. Это следует из того, что на каждом шаге удаляются целые интервалы.

4. Фрактальная структура. Множество Кантора самоподобно: любая его часть (например, пересечение C с $[0, \frac{1}{3}]$) гомеоморфна всему множеству C с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$.

Множество Кантора выглядит как бесконечно много точек, равномерно распределённых на отрезке, но при этом не образующих никаких интервалов. Это классический пример множества, которое одновременно: - несчётно,
- имеет нулевую меру,
- нигде не плотно.

Оно широко используется в анализе, теории меры и динамических системах как контринтуитивный пример.

1.1.4. Лемма Кантора о вложенных отрезках

формулируется следующим образом:

Теорема 1. *(Лемма Кантора). Пусть дана последовательность отрезков*

$$I_1 = [a_1, b_1] \supseteq I_2 = [a_2, b_2] \supseteq I_3 = [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Тогда пересечение всех этих отрезков состоит ровно из одной точки:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}.$$

$\triangleright$

1. Существование общей точки. Рассмотрим множества левых концов отрезков $\{a_n\}$ и правых концов $\{b_n\}$. В силу вложенности отрезков для любых $n, m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$a_n \leq b_m.$$

Это следует из того, что если $n \leq m$, то $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$, а если $n > m$, то $a_n \leq b_n \leq b_m$. Таким образом, множество $\{a_n\}$ ограничено сверху (например, любым b_m), а множество $\{b_n\}$ ограничено снизу (например, любым a_n). Из аксиомы непрерывности вытекает, что существует число c, такое, что $a_n \leq c \leq b_k, \forall n, k \in \mathbb{N}$.

В частности, $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, а значит $c \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$, то есть

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

.

2. Единственность точки. Предположим, существует другая точка $c' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, $c' \neq c$. Пусть, для определённости, $c' > c$. Тогда для любого n выполняется:

$$c' - c \leq b_n - a_n.$$

Но так как разность $(b_n - a_n)$ стремится к 0, то для достаточно больших n будет выполняться $b_n - a_n < c' - c$, что приводит к противоречию. Аналогичное противоречие возникает при $c' < c$. Следовательно, точка c единственна.

Таким образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$. $\triangleleft$

1.1.5. Теорема Бореля-Лебега

Определение понятия покрытия.

Говорят, что система интервалов $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}, \alpha \in A$ покрывает отрезок [a,b], если

$$\forall x \in [a,b] \exists U_{\alpha 0} : x \in U_{\alpha 0}.$$

Любой отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ является компактным множеством. То есть из любого открытого покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 2. *Бореля-Лебега. Всякое открытое покрытие отрезка* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *содержит конечное подпокрытие.*

Теорема означает, что любой отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ является компактным множеством. То есть из любого открытого покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие.

$\triangleright$ Доказательство основано на использовании леммы Кантора о вложенных отрезках.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}, \alpha \in A$ — произвольное открытое покрытие отрезка $[a,b]$, где A – некоторое множество индексов. Требуется доказать, что существует конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$ такой, что

$$[a,b] \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}.$$

Доказательство теоремы от противного:

1. Предположим, что существует открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отрезка $[a,b]$, которое не содержит конечного подпокрытия.

2. Построение последовательности вложенных отрезков:
Разделим отрезок $[a,b]$ пополам: $[a,c]$ и $[c,b]$, где $c = \frac{a+b}{2}$.
Хотя бы один из этих двух отрезков не допускает конечного подпокрытия из $\mathcal{U}$ (иначе всё покрытие $[a,b]$ было бы конечным). Обозначим этот отрезок через $I_1 = [a_1, b_1]$.
Повторим процесс: разделим I_1 пополам и выберем ту половину, которая не допускает конечного покрытия. Обозначим её $I_2 = [a_2, b_2]$.
Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных отрезков:

$$I_n = [a_n, b_n] \quad \text{таких, что} \quad I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots,$$

каждый из которых не покрывается конечным числом элементов из $\mathcal{U}$.

3. Применение леммы Кантора: Длина отрезка I_n равна $\frac{b-a}{2^n} \to 0$.
По лемме Кантора существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам I_n:

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

4. Получение противоречия.
Так как $c \in [a,b]$, а $\mathcal{U}$ – открытое покрытие, существует множество $U_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ такое, что $c \in U_{\alpha_0}$.
Поскольку U_{α_0} открыто, найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$.
Так как длины отрезков I_n стремятся к нулю, существует номер N такой, что длина I_N меньше ε: $|I_N| < \varepsilon$.
Тогда, поскольку $c \in I_N$, весь отрезок I_N содержится в интервале $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, а значит, и в U_{α_0}:

$$I_N \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}.$$

Но это означает, что отрезок I_N покрывается всего одним множеством U_{α_0} из покрытия $\mathcal{U}$, что противоречит построению I_N (который не должен покрываться конечным подпокрытием).

5. Вывод: Предположение о том, что покрытие $\mathcal{U}$ не содержит конечного подпокрытия, неверно. Следовательно, любое открытое покрытие отрезка $[a,b]$ содержит конечное подпокрытие (отрезок $[a,b]$ является компактным множеством в $\mathbb{R}$). $\triangleleft$

Замечание Это доказательство использует:
Лемму Кантора (которая сама опирается на аксиому полноты $\mathbb{R}$).
Метод деления отрезка пополам (метод Больцано-Вейерштрасса).
Ключевую идею о том, что точка c (общая для всех вложенных отрезков) должна лежать в некотором элементе покрытия, который "захватывает"целиком один из маленьких отрезков. Таким образом, теорема справедлива и в более общих пространствах, удовлетворяющих аксиоме полноты.

1.1.6. Мощность множеств

Если в каждом из двух множеств лишь конечное число элементов, то эти множества можно сравнить по количеству этих самых элементов. Логично считать, что то множество оказывается «мощнее», в котором количество элементов больше. Если же количество элементов в двух множествах одинаково, то множества разумно считать «равномощными».

Часто бывает важным выяснить, «одинаково» ли количество элементов в двух разных множествах. В случае конечных множеств этот вопрос может быть решен весьма просто: достаточно пересчитать элементы каждого множества. Проблема заключается в том, что описанный подход не применим к бесконечным множествам.

В то же время, если два конечных множества A и B имеют одинаковое количество элементов, то между элементами этих множеств можно установить биекцию . Такой подход «сравнения» двух множеств уже прекрасно применим и к бесконечным множествам. Множества называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Класс эквивалентности по отношению равномощности, к которому принадлежит множество A, называется мощностью A, кардиналом или кардинальным числом множества A, и обозначается $|A|$ или $\operatorname{card} A$. В этом разделе рассмотрим 2 теоремы. Первая – про равномощность множеств рациональных и натуральных чисел. Вторая – про несчетность множества действительных чисел.

1.1.6.1. Счетность множества рациональных чисел

Теорема 3. *Теорема: Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счётным.*

$\triangleright$

Для доказательства счётности $\mathbb{Q}$ достаточно построить явную биекцию (взаимно однозначное соответствие) между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или хотя бы показать, что такое соответствие существует, доказав, что $\mathbb{Q}$ можно представить в виде последовательности.

Основная идея

Ключевая идея заключается в том, что любое рациональное число можно единственным образом представить в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$ (целое), $q \in \mathbb{N}$ (натуральное), и что таких пар (p, q) "не больше чем натуральных чисел.

Метод I: Канторовская нумерация (таблица дробей)

Это самый наглядный и известный метод.

1. Расположим дроби в таблицу. Рассмотрим бесконечную таблицу, в которой строка соответствует знаменателю q, а столбец — числителю p. В ячейке на пересечении p-го столбца и q-й строки запишем дробь $\frac{p}{q}$. Важно учесть все целые числа (дроби со знаменателем 1) и отрицательные числа. Для простоты сначала докажем счётность множества *положительных* рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$. Таблица для $\mathbb{Q}^+$ будет иметь вид:
p=1: 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...
p=2: 2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5, ...
p=3: 3/1, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5, ...
p=4: 4/1, 4/2, 4/3, 4/4, 4/5, ...
...

В этой таблице встречаются все положительные рациональные числа (и даже повторяются, например, $1/1 = 2/2 = 3/3$).

2. Пронумеруем элементы таблицы. Чтобы перенумеровать все элементы бесконечной таблицы, нельзя обходить её построчно или постолбцово (это займёт бесконечное время на первой же строке). Вместо этого будем обходить таблицу по диагоналям.
Диагональ 1: $\frac{1}{1}$
Диагональ 2: $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$
Диагональ 3: $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$
Диагональ 4: $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$
и т.д.

Обходя диагонали сверху вниз (или снизу вверх), мы получаем последовательность:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

3. Удалим повторения. В полученной последовательности каждое положительное рациональное число встречается бесконечно много раз (все несократимые и сократимые дроби, ему равные). Чтобы получить биекцию с $\mathbb{N}$, мы должны пропускать повторяющиеся числа. Проходя по последовательности, мы будем включать в нумерацию только те дроби, которые появляются в несократимом виде впервые. $\frac{1}{1}$ -> номер

1
$\frac{2}{1}$ -> номер 2
$\frac{1}{2}$ -> номер 3
$\frac{3}{1}$ -> номер 4
$\frac{2}{2}$ — сократима (равна $\frac{1}{1}$), уже была -> пропускаем.
$\frac{1}{3}$ -> номер 5
$\frac{4}{1}$ -> номер 6
$\frac{3}{2}$ -> номер 7
$\frac{2}{3}$ -> номер 8
$\frac{1}{4}$ -> номер 9
и т.д.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и положительными рациональными числами: $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}^+$. Следовательно, $\mathbb{Q}^+$ — счётно.

4. Учтём отрицательные числа и ноль. Чтобы доказать счётность всего $\mathbb{Q}$, можно аналогичным образом перенумеровать все дроби вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Ещё проще — использовать уже доказанную счётность $\mathbb{Q}^+$. Множество отрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}^-$ находится в биекции с $\mathbb{Q}^+$ (отображение $x \mapsto -x$). Множество $\{0\}$ очевидно счётно.
Объединение трёх счётных множеств счётно. Можно записать всю последовательность, чередуя элементы:

$$0,\ r_1,\ -r_1,\ r_2,\ -r_2,\ r_3,\ -r_3,\ \ldots$$

где $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ — нумерация $\mathbb{Q}^+$.

Вывод: Поскольку существует сюръекция (отображение "на") из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$ (наша нумерация, даже с повторениями), а $\mathbb{N}$ — бесконечно, то по определению $\mathbb{Q}$ является счётным множеством.

Метод II : Использование теоремы о счётности объединения

Это более формальное доказательство.

1. Для каждого натурального $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество:

$$A_q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Каждое такое множество A_q очевидно счётно, так как находится в биекции с $\mathbb{Z}$ (счётным): $p \leftrightarrow \frac{p}{q}$.

2. Заметим, что множество всех рациональных чисел можно представить как объединение всех этих множеств:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q.$$

Это объединение счётного числа счётных множеств.

3. По теореме теории множеств объединение счётного семейства счётных множеств является счётным множеством. Следовательно, $\mathbb{Q}$ — счётно. Отметим, что данное свойство множеств доказывается аналогично доказательству I, т.е. в основе лежит метод суммирования по диагоналям.

В результате получаем, что между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, то есть $\mathbb{Q}$ является счётным.

1.1.6.2. Несчетность множества действительных чисел на отрезке [0, 1].

Доказательство 1: Канторовский диагональный метод

Это самое известное и прямое доказательство, предложенное Георгом Кантором. Использует запись действительных чисел в виде конечных или бесконечных десятичных дробей.

Предположение: Допустим, что множество всех действительных чисел на отрезке [0, 1] счётно. Это значит, что все числа из этого множества можно перенумеровать, то есть представить в виде бесконечной последовательности: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$

Цель: Показать, что при таком предположении мы всегда сможем построить число y из отрезка [0, 1], которого нет в этой последовательности. Это приведет к противоречию, значит, наше исходное предположение было неверным.

Шаги доказательства:

1. Запишем числа в виде бесконечных десятичных дробей. Чтобы избежать двусмысленности с числами, имеющими два представления (например, 0.1999... = 0.2000...), договоримся, что для каждого числа мы будем использовать только один из вариантов (например, всегда запретим бесконечные последовательности из 9).

2. Выпишем нашу гипотетическую последовательность:
$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}, a_{14}, ...$

$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}, a_{24}, ...$
$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}, a_{34}, ...$
... $x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}, a_{n4}, ...$
...
Здесь каждый символ a_{nm} — это цифра от 0 до 9 на n-м знаке после запятой у m-го числа.

3. Построим новое число y:
$y = 0, b_1b_2b_3b_4...$
Цифры b_n этого числа выберем по следующему правилу, чтобы оно отличалось от каждого x_n:
b_1 выберем любой цифрой, не равной a_{11} (первой цифре первого числа). b_2 выберем любой цифрой, не равной a_{22} (второй цифре второго числа). b_3 выберем любой цифрой, не равной a_{33}‘ (третьей цифре третьего числа). ... b_n выберем любой цифрой, не равной a_{nn} (n-ой цифре n-го числа). ...

4. Анализ построенного числа y:
y является бесконечной десятичной дробью в интервале [0, 1].
$y \neq x_1$, потому что у них различается хотя бы первая цифра после запятой ($b_1 \neq a_{11}$).
$y \neq x_2$, потому что у них различается вторая цифра ($b_2 \neq a_{22}$).
... $y \neq x_n$, потому что у них различается n-ая цифра ($b_n \neq a_{nn}$). ...

5. Противоречие. Мы построили число $y \in [0, 1]$, которого нет в исходной последовательности $x_1, x_2, x_3, ...$ Но мы предполагали, что в этой последовательности есть ВСЕ числа из [0, 1].

Вывод: Наше исходное предположение о счётности множества [0, 1] ложно. Значит, множество действительных чисел на отрезке [0, 1] несчётно.

Доказательство II: Метод вложенных отрезков (лемма Кантора о вложенных отрезках)

Это доказательство опирается на свойство полноты действительных чисел.

Идея: Предположить, что мы можем пронумеровать все числа отрезка [0, 1]. Затем построить последовательность вложенных отрезков, каждый из которых целенаправленно исключает одно из пронумерованных чисел. Пересечение всех этих отрезков будет непустым (содержать хотя бы одно число), но это число по построению не будет совпадать ни с одним из чисел нашей нумерации.

Шаги доказательства:

1. Снова предположим, что множество [0, 1] счётно. Запишем все его элементы в последовательность: $r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ...$

2. Построим последовательность вложенных отрезков $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$:
Шаг 1: Разобьём отрезок [0, 1] на три равные непересекающиеся части. Число r_1 не может находиться сразу во всех трёх частях. Выберем в качестве I_1 любую из этих трёх частей, которая НЕ содержит r_1.

Например, если r_1 = 0,4, то он лежит в [0,333..., 0,666...). Мы можем выбрать $I_1 = [0, 1/3]$.
Шаг 2: Теперь возьмём отрезок I_1 и снова разобьём его на три равные части. Среди них выберем ту часть I_2, которая НЕ содержит r_2.
...
Шаг n: Имея отрезок I_{n-1}, разобьём его на три части и выберем I_n так, чтобы он НЕ содержал r_n.

3. Рассмотрим построенную последовательность отрезков:
Это последовательность замкнутых вложенных отрезков ($I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$).
Длина отрезка I_n равна $(1/3)^n$ и стремится к нулю при $n \to \infty$.

4. Применим Лемму Кантора о вложенных отрезках: Эта лемма (следствие из аксиомы полноты) утверждает, что пересечение любой системы вложенных замкнутых отрезков, длины которых стремятся к нулю, состоит ровно из одной точки. Пусть $y \in [0, 1]$ — это единственная точка, такая что $y = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

5. Покажем, что y не было в исходной последовательности:
Для любого n мы строили отрезок I_n так, чтобы он не содержал число r_n. При этом точка y лежит во ВСЕХ отрезках I_n.
Следовательно, y не может быть равно ни одному r_n (т.к. если бы $y = r_n$, то оно не могло бы лежать в I_n, но оно лежит). Значит, $y \notin r_1, r_2, r_3, ...$

6. Противоречие: Мы нашли число $y \in [0, 1]$, которого нет в заведомо полной последовательности всех чисел этого отрезка. ◁

Вывод: Предположение о счётности множества [0, 1] снова приводит к противоречию. Следовательно, оно несчётно.

Итог: Оба доказательства используют метод «от противного», но применяют принципиально разные конструкции для получения противоречия: первое — алгебраическую («диагональную»), второе — геометрическую (теоретико-множественную и топологическую, опирающуюся на свойства непрерывности действительных чисел).

1.1.7. Инфимум и супремум

Инфимум и супремум — это обобщения понятий минимума и максимума для множеств, которые могут не достигать своих границ.

Определения

1. Супремум (supremum) или точная верхняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$: Это наименьшее число $M \in \mathbb{R}$, которое является верхней границей для A. Обозначение: $\sup A$. Формализованное определение: $\forall x \in A : x \leq M$ (M — верхняя граница). $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : x > M - \varepsilon$ (M — наименьшая из таких границ).

2. Инфимум (infimum) или точная нижняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$: Это наибольшее число $m \in \mathbb{R}$, которое является нижней границей для A. Обозначение: $\inf A$. Формально: $\forall x \in A : x \geq m$ (m — нижняя граница). $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : x < m + \varepsilon$ (m — наибольшая из таких границ).

Доказательство существования супремума у ограниченного сверху множества

Это доказательство опирается на аксиому полноты (непрерывности) действительных чисел.

Доказательство (методом Дедекинда)

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое множество, ограниченное сверху. Это значит: $A \neq \emptyset$. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M$.

Разобьём все действительные числа на два класса: Класс L (нижний класс): Все числа $a \in \mathbb{R}$, которые меньше или равны некоторому элементу из A. Формально:

$$L = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A : a \leq x\}.$$

Класс R (верхний класс): Все числа $b \in \mathbb{R}$, которые являются верхними границами для A. Формально:

$$R = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A : x \leq b\}.$$

Проверим, что это сечение:

1. Классы не пусты: $L \neq \emptyset$, так как A непусто. Если $x_0 \in A$, то $x_0 - 1 \in L$. $R \neq \emptyset$, так как A ограничено сверху (по условию).
2. Любое число попадает в один из классов: По построению.
3. Всякое число из L меньше всякого числа из R: Пусть $a \in L$ и $b \in R$. По определению, существует $x \in A$ такой, что $a \leq x$. Но так как $b \in R$, то $x \leq b$. Следовательно, $a \leq b$.

По аксиоме Дедекинда существует единственное число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти классы: $\forall a \in L : a \leq c$, $\forall b \in R : c \leq b$.

Покажем, что $c = \sup A$:

1. c — верхняя граница: Предположим, что это не так. Тогда существует $x \in A$ такой, что $x > c$. Но тогда $c < x \leq b$ для любого $b \in R$. Это противоречит тому, что c разделяет классы (число c должно быть больше или равно любого $a \in R$). Следовательно, $\forall x \in A : x \leq c$.
2. c — наименьшая верхняя граница: Предположим, что существует меньшая верхняя граница $c' < c$. Тогда $c' \in R$ (по определению R) является новой верхней границей. Противоречие. Иначе говоря, выбрав из двух верхних границ наименьшую, получим, что большая граница не является наименьшей.

Оба условия выполнены, поэтому $c = \sup A$.

Замечание

Аналогично доказывается существование инфимума у ограниченного снизу множества (можно рассмотреть множество $-A = \{-x \mid x \in A\}$ и использовать связь $\inf A = -\sup(-A)$). В рациональных числах $\mathbb{Q}$ супремум может не существовать даже у ограниченного множества (например, $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ не имеет супремума в $\mathbb{Q}$), что показывает существенное отличие $\mathbb{R}$ от $\mathbb{Q}$.

Для неограниченных множеств в качестве супремума и инфимума берут$\pm\infty$.

1.1.8. Приближение иррациональных чисел рациональными

Тропический год определяется как период между двумя прохождениями центра Солнца через точку весеннего равноденствия, представляющую собой одну из двух точек пересечения эклиптики и небесного экватора. По современным подсчетам 1 год= 365,24220 суток. Обозначим дробную часть этого выражения через X. Это число рациональное, но оно является приближением к некоторому числу, которое может и не быть рациональным. С древних времен люди пытались найти приближение для этого числа. Точнее, задача заключается подобрать чередование простых и високосных лет так, чтобы средняя продолжительность года была как можно ближе к истинной. При этом полный период такого календаря должен быть по возможности меньше.

Одним из самых первых календарей является юлианский, который введен Юлием Цезарем в 46 г. до н.э. Некоторые изменения внес Октавиан Август в 8 г. до н.э.. В их честь названы месяцы июль и август. Календарь использовался в Европе до конца 16 века, а православной церковью используется до сих пор. Для этого календаря X=1/4. Погрешность составляет 11 мин 14 с.

Мы живем по григорианскому календарю, который ввел папа Григорий 13 в 1582 г. для католических стран. Протестанты говорили: “ Лучше разойтись с Солнцем, чем сойтись с папой”. Из-за этого в протестантских странах календарь ввели на 50-150 лет позднее. Для этого календаря X=97/400, а погрешность 26 с.

В отличие от юлианского календаря григорианский основан не на подходящих дробях, а на десятичных. Огромный период приводит к тому, что сдвигается дата весеннего равноденствия (21-22 марта).

Более точный (и математически правильный календарь) был предложен Омаром Хайямом и 8 веков использовался в Иране с некоторыми изменениями. Для него X= 8/33, а погрешность составляет 19 с. (в использовавшемся в Иране более сложном варианте варианте X=55/227, а погрешность составляла 4с.)

Наиболее точным календарем является календарь немецкого астронома И.Медлера 1864г. Для него X=31/128 и погрешность 1с. Этот календарь нигде не использовался.

Отметим, что наихудщее приближение имеет место для числа, называемого “золотым сечением” $\sigma = (-1+\sqrt{5})/2$. Для π известны два приближения – 22/7 и 355/113, причем второе отличается от π только в седьмом знаке после запятой и было известно в Китае в 5в.

1.1.9. Теорема Больцано — Вейерштрасса

Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества $E \subset \mathbb{R}$, если для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 множество $U(x_0) \cap E$ бесконечно.

Теорема 4. *Всякое бесконечное ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет хотя бы одну предельную точку.*

$\triangleright$ Пусть E — бесконечное ограниченное множество. Тогда существует отрезок $[a, b]$, содержащий E.

1. Метод деления отрезка пополам Предположим, что E не имеет предельных точек. Тогда каждая точка $x \in [a, b]$ не является предельной для E, то есть существует окрестность $U(x)$, содержащая не более конечного числа точек из E (возможно, только саму точку x, если $x \in E$).

2. Построение открытого покрытия Для каждой точки $x \in [a, b]$ выберем открытую окрестность $U(x)$ такую, что она содержит не более конечного числа точек из E. Совокупность $\{U(x)\}_{x\in[a,b]}$ образует открытое покрытие отрезка $[a, b]$.

3. Применение теоремы Бореля — Лебега По теореме Бореля — Лебега (отрезок компактен) из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие:

$$[a, b] \subset U(x_1) \cup U(x_2) \cup \ldots \cup U(x_n).$$

4. Анализ конечного покрытия Каждое $U(x_i)$ содержит не более конечного числа точек из E. Тогда и всё множество E (содержащееся в объединении этих окрестностей) состоит из конечного числа точек. Это противоречит условию бесконечности E.

5. Вывод Предположение о том, что E не имеет предельных точек, привело к противоречию. Следовательно, E имеет хотя бы одну предельную точку.

Альтернативное доказательство (с помощью леммы Кантора)

1. Вложение в отрезок. Пусть $E \subset [a, b]$. Разделим $[a, b]$ пополам. Хотя бы одна из половин содержит бесконечно много точек E (иначе E конечно). Выберем эту половину и обозначим её I_1.

2. Построение последовательности вложенных отрезков Повторим процесс: разделим I_1 пополам и выберем ту половину I_2, которая содержит бесконечно много точек E. Продолжая, получим последовательность вложенных отрезков:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots,$$

каждый из которых содержит бесконечно много точек E, и длина $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$.

3. Применение леммы Кантора По лемме Кантора существует единственная точка $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

4. Доказательство, что c — предельная точка Покажем, что в любой окрестности $U(c)$ содержится бесконечно много точек из E. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем n так, что $|I_n| < \varepsilon$. Тогда $I_n \subset U(c)$, и так как I_n содержит бесконечно много точек E, то и $U(c)$ содержит бесконечно много точек E. Следовательно, c — предельная точка E. $\triangleleft$

Оба доказательства используют полноту $\mathbb{R}$ (через компактность отрезка или лемму Кантора) и показывают, что существование предельной точки следует из ограниченности и бесконечности множества.

1.2. Последовательности и их свойства

1.2.1. Основные определения и свойства

Последовательность — это упорядоченный счётный набор элементов некоторого множества, занумерованный натуральными числами. Формально, последовательность элементов множества X — это функция $a : \mathbb{N} \to X$, где значение $a(n)$ обозначается как a_n и называется n-м членом последовательности.

Обозначения: $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Способы задания последовательностей

1. Аналитический способ (формулой общего члена). Последовательность задаётся формулой, выражающей n-й член a_n непосредственно через номер n.

Примеры:
$a_n = \frac{1}{n} \to 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
$a_n = (-1)^n \to -1, 1, -1, 1, \ldots$
$a_n = n^2 \to 1, 4, 9, 16, \ldots$

2. Рекуррентный способ (рекуррентной формулой). Первый член (или несколько первых членов) задаётся явно, а каждый последующий выражается через предыдущие.

Примеры:
Арифметическая прогрессия:
$a_1 = d, \quad a_{n+1} = a_n + d$
Геометрическая прогрессия:
$a_1 = b, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q$
Последовательность Фибоначчи:
$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

3. Описательный способ (словесным описанием). Правило формирования последовательности описывается словами.

Примеры:
Последовательность простых чисел: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$
Последовательность десятичных приближений числа π: $3, 3.1, 3.14, 3.141, \ldots$

4. Графический способ. Последовательность можно задать графиком — множеством точек на плоскости с координатами (n, a_n).

5. Алгоритмический способ. Последовательность задаётся алгоритмом, который позволяет вычислить любой её член.

Пример: Последовательность a_n — n-я цифра в десятичной записи числа e.

Классификация последовательностей

Ограниченные/неограниченные (например, $a_n = \frac{1}{n}$ — ограничена, $a_n = n^2$ — неограничена)

Монотонные (возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие) (например, $a_n = n$ — возрастающая, $a_n = \frac{1}{n}$ — убывающая)

Сходящиеся/расходящиеся (например, $a_n = \frac{1}{n}$ — сходится к 0, $a_n = (-1)^n$ — расходится)

Периодические (например, $a_n = (-1)^n$ — период 2; a_n – цифры числа 1/7, период 7)

Важность последовательностей

Последовательности являются основой для определения многих важных понятий в математике: Предел функции.
Ряды (суммы последовательностей).
Рекурсивные алгоритмы.
Динамические системы.

Таким образом, последовательности — это фундаментальный объект в анализе, дискретной математике и информатике.

1.2.2. Предел последовательности и его свойства

1.2.2.1. Определение предела

Предел последовательности — это фундаментальное понятие математического анализа, описывающее поведение членов последовательности при неограниченном возрастании номера n.

1. Сходящаяся последовательность (конечный предел)

Определение 1. Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Геометрический смысл:
Начиная с некоторого номера N, все члены последовательности попадают в ε-окрестность точки a:

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Примеры:
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$
2. Расходящаяся последовательность (предела нет)

Если последовательность не имеет конечного предела, она называется расходящейся. Это может происходить по-разному.

а) Бесконечный предел (определённая расходимость)

Стремление к $+\infty$:

Определение 2. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если для любого $E > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется $a_n > E$.

Пример: $a_n = n^2$.

Стремление к $-\infty$:

Определение 3. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если для любого $E > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется $a_n < -E$.

Пример: $a_n = 7 - 2n$.

б) Неопределённая расходимость (предел не существует)

Последовательность не стремится ни к конечному числу, ни к бесконечности.

Примеры:
$a_n = (-1)^n$ — колеблется между -1 и 1.
$a_n = \sin n$ — непериодические колебания.
$a_n = n\cdot(-1)^n$ — неограниченные колебания.

3*. Частичные пределы

Если последовательность расходится, она может иметь частичные пределы — пределы её сходящихся подпоследовательностей.

Пример:
Для $a_n = (-1)^n$: Подпоследовательность чётных членов: $a_{2k} = 1 \to 1$.
Подпоследовательность нечётных членов: $a_{2k-1} = -1 \to -1$.

Частичные пределы: -1 и 1.

4*. Верхний и нижний пределы

Верхний предел ($\overline{\lim}\, a_n$) — наибольший частичный предел.
Нижний предел ($\underline{\lim}\, a_n$) — наименьший частичный предел.

Пример: Для $a_n = (-1)^n$:
$\overline{\lim}\, a_n = 1$,
$\underline{\lim}\, a_n = -1$. Таким образом, понятие предела позволяет классифицировать последовательности по их поведению на бесконечности и является основой для определения производной, интеграла и рядов.

1.2.2.2. Основные теоремы о пределах последовательностей

Доказательства основаны на строгом определении предела. Эти теоремы позволяют вычислять пределы, не опираясь каждый раз на определение.

1. Теорема о единственности предела

Теорема 5. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то он единственный.*

$\triangleright$ Доказательство (от противного). Предположим, что последовательность имеет два различных предела: $\lim a_n = a$ и $\lim a_n = b$, где $a \neq b$. Пусть $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$.

По определению предела:
Существует N_1 такое, что для всех $n > N_1$: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Существует N_2 такое, что для всех $n > N_2$: $|a_n - b| < \varepsilon$.

Возьмём $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n > N$ выполняются оба неравенства. Оценим разность $|a - b|$:

$$|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \le |a-a_n| + |a_n-b| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|.$$

Получили противоречие: $|a-b| < |a-b|$. Следовательно, предположение неверно, и предел единственный. $\triangleleft$

2. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности

Теорема 6. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

$\triangleright$ Пусть $\lim a_n = a$. Возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда существует N такое, что для всех $n > N$:

$$|a_n - a| < 1 \quad \Rightarrow \quad a - 1 < a_n < a + 1.$$

Рассмотрим конечное множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Оно ограничено. Пусть $M_1 = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|\}$, $M_2 = \max\{|a-1|, |a+1|\}$. Тогда для всех n:

$$|a_n| \leq \max\{M_1, M_2\},$$

то есть последовательность ограничена.$\triangleleft$

3. Теорема о предельном переходе в неравенствах

Теорема 7. *Если $a_n \leq b_n$ для всех n, и $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, то $a \leq b$.*

$\triangleright$ Доказательство (от противного): Предположим, что $a > b$. Выберем $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Тогда:
Существует N_1: для $n > N_1$: $|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n > a - \varepsilon$.
-Существует N_2: для $n > N_2$: $|b_n - b| < \varepsilon \Rightarrow b_n < b + \varepsilon$.

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n > N$:

$$a_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Следовательно, $a_n > \frac{a+b}{2} > b_n$, что противоречит условию $a_n \leq b_n$. Значит, $a \leq b$.$\triangleleft$

4. Теорема о сжатой последовательности (теорема о двух милиционерах)

Теорема 8. *Если $a_n \leq b_n \leq c_n$ для всех n, и $\lim a_n = \lim c_n = L$, то $\lim b_n = L$.*

$\triangleright$ Пусть $\lim a_n = \lim c_n = L$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$:
Существует N_1: для $n > N_1$: $|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < a_n$.
Существует N_2: для $n > N_2$: $|c_n - L| < \varepsilon \Rightarrow c_n < L + \varepsilon$.

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n > N$:

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |b_n - L| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim b_n = L$.$\triangleleft$

5. Теорема о сохранении знака

Теорема 9. *Если $\lim a_n = a$ и $a > 0$, то существует N такое, что для всех $n > N$: $a_n > 0$.*

$\triangleright$ Возьмём $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$. Тогда существует N такое, что для $n > N$:

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

$\triangleleft$

1.2.3. Арифметические свойства пределов

Формулировки теорем

Теорема 10. *Пусть даны две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Тогда:

1. Предел суммы:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

2. Предел разности:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b.$$

3. Предел произведения:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

4. Предел частного: Если $b \neq 0$ и $b_n \neq 0$ для всех n, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

$\triangleright\triangleright$

1. Предел суммы

$\triangleright$ По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$:
Существует N_1 такое, что для всех $n > N_1$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Существует N_2 такое, что для всех $n > N_2$: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim(a_n + b_n) = a + b$.$\triangleleft$

2. Предел разности

$\triangleright$ Аналогично пределу суммы. Для любого $\varepsilon > 0$:
Существует N_1: для $n > N_1$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Существует N_2: для $n > N_2$: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Для $n > \max(N_1, N_2)$:

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim(a_n - b_n) = a - b$.$\triangleright$

3. Предел произведения

$\triangleright$ Оценим разность:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Так как сходящаяся последовательность ограничена, существует $M > 0$ такое, что $|b_n| \leq M$ для всех n.

Для любого $\varepsilon > 0$: Существует N_1: для $n > N_1$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Существует N_2: для $n > N_2$: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ (если $a = 0$, то вместо $|a|$ используем 1).

Тогда для $n > \max(N_1, N_2)$:

$$|a_n b_n - ab| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.$\triangleleft$

4. Предел частного

$\triangleright$ Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Если* $\lim b_n = b \neq 0$ *и* $b_n \neq 0$ *для всех* n, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

$\triangleright$ Оценим разность:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|}.$$

Так как $\lim b_n = b \neq 0$, существует N_0 такое, что для $n > N_0$:

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \Rightarrow \quad |b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

Тогда для $n > N_0$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{|b_n - b|}{(|b|/2) \cdot |b|} = \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует N_1 такое, что для $n > N_1$: $|b_n - b| < \frac{|b|^2\varepsilon}{2}$.

Пусть $N = \max(N_0, N_1)$. Тогда для $n > N$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.$\triangleleft$

Теперь докажем теорему о пределе частного. Запишем:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}.$$

По лемме: $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. По теореме о пределе произведения:

$$\lim \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Следовательно, $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.$\lhd$

$\lhd\lhd$

Замечания.

1. Все доказательства опираются на определение предела и ограниченность сходящейся последовательности.
2. Для частного важно, чтобы $b \neq 0$ и $b_n \neq 0$, чтобы избежать деления на ноль.
3. Эти свойства обобщаются на любое конечное число последовательностей (по индукции).

Эти теоремы являются основой для вычисления пределов и анализа поведения последовательностей. Они показывают, что арифметические операции и неравенства согласованы с предельным переходом.

1.2.4. Теорема Вейерштрасса

Теорема 11. *Вейерштрасса. Всякая ограниченная сверху и монотонно возрастающая последовательность имеет предел. Аналогично, всякая ограниченная снизу и монотонно убывающая последовательность имеет предел.*

$\rhd$ Доказательство для монотонно возрастающей последовательности.

Пусть $\{a_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху: 1. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ (монотонное возрастание), 2. $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M$ для всех n (ограниченность сверху).

Требуется доказать, что существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Шаг 1: Рассмотрим множество значений последовательности. Обозначим множество всех элементов последовательности:

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Это множество непусто и ограничено сверху (по условию). По следствию из аксиомы непрерывности действительных чисел (которая утверждает, что всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань), существует супремум:

$$L = \sup A.$$

Шаг 2: Покажем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ По определению супремума:

1. $a_n \leq L$ для всех n (так как L — верхняя граница),
2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a_N \in A$ такой, что

$$a_N > L - \varepsilon.$$

(Иначе $L - \varepsilon$ была бы верхней границей, что противоречит тому, что L — наименьшая верхняя граница.)

Так как последовательность монотонно возрастает, для всех $n \geq N$ выполняется:

$$a_n \geq a_N > L - \varepsilon.$$

Кроме того, поскольку L — верхняя граница, $a_n \leq L < L + \varepsilon$. Таким образом, для всех $n \geq N$:

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n \geq N$ выполняется $|a_n - L| < \varepsilon$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Доказательство для монотонно убывающей последовательности.

Пусть $\{a_n\}$ — монотонно убывающая последовательность, ограниченная снизу:

1. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ (монотонное убывание),
2. $\exists m \in \mathbb{R} : a_n \geq m$ для всех n (ограниченность снизу).

Рассмотрим последовательность $\{b_n\} = \{-a_n\}$. Тогда:

$\{b_n\}$ монотонно возрастает (так как a_n убывает, то $-a_n$ возрастает),

$\{b_n\}$ ограничена сверху (так как $a_n \geq m$, то $-a_n \leq -m$).

По доказанному выше, существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sup\{-a_n\} = -\inf\{a_n\}.$$

Но тогда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{a_n\}.$$

Таким образом, монотонно убывающая последовательность сходится к своей точной нижней грани. ◁

Замечания

1. Важность аксиомы непрерывности (полноты). Доказательство существенно опирается на существование супремума у ограниченного сверху множества. В рациональных числах $\mathbb{Q}$ эта теорема неверна (например, последовательность десятичных приближений $\sqrt{2}$ монотонна и ограничена, но не сходится в $\mathbb{Q}$).

2. Геометрический смысл: Монотонная ограниченная последовательность подходит к своей границе (супремуму или инфимуму) сколь угодно близко.

3. Примеры:
Последовательность $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ возрастает и ограничена сверху числом 1. Её предел равен 1.
Последовательность $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ возрастает и ограничена сверху числом 1. Её предел равен 1.

Таким образом, монотонность и ограниченность гарантируют существование предела, который совпадает с супремумом (для возрастающей) или инфимумом (для убывающей) множества значений последовательности.
Теорема Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности является мощным инструментом для анализа сходимости последовательностей, заданных рекуррентно. Рассмотрим как она применяется на практике:

1.2.4.1. Применение теоремы Вейерштрасса.

Общая схема применения

1. Доказательство ограниченности (сверху для возрастающей, снизу для убывающей).
2. Доказательство монотонности (возрастания или убывания).
3. Вычисление предела путём перехода к пределу в рекуррентной формуле.

Пример 1: Последовательность $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $x_1 > 0$, $a > 0$

Эта последовательность сходится к $\sqrt{a}$.

Шаг 1: Доказательство ограниченности снизу.
По неравенству о среднем арифметическом и геометрическом:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}.$$

Значит, $x_n \geq \sqrt{a}$ для $n \geq 2$.

Шаг 2: Доказательство монотонности (убывания).
Рассмотрим разность:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{a - x_n^2}{x_n} \leq 0,$$

так как $x_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow x_n^2 \geq a$. Значит, последовательность убывает при $n \geq 2$.

Шаг 3: Вычисление предела. Последовательность убывает и ограничена снизу ($x_n \geq \sqrt{a}$), поэтому имеет предел L. Перейдём к пределу:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad 2L = L + \frac{a}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{a}{L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = a.$$

Так как $x_n > 0$, то $L = \sqrt{a}$.

Пример 2: Последовательность $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$

Шаг 1: Ограниченность. Можно показать, что $1 \leq x_n \leq 2$.
Шаг 2: Монотонность. Не является монотонной, но можно рассмотреть две подпоследовательности: чётных и нечётных членов. Каждая из них монотонна и ограничена, поэтому сходится. Далее показать, что их пределы совпадают.
Шаг 3: Предел. Если предел существует, то

$$L = 1 + \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Важные замечания

1. Не всегда монотонность очевидна: Иногда последовательность не является монотонной, но можно выделить монотонные подпоследовательности (как в примере 2).
2. Проверка начальных условий: Монотонность может устанавливаться не с первого члена, а с некоторого

номера.
3. Альтернатива: Если не удаётся доказать монотонность, можно использовать критерий Коши или другие методы.

Таким образом, теорема Вейерштрасса есть стандартный метод анализа рекуррентных последовательностей: установить ограниченность и монотонность, затем перейти к пределу в рекуррентном соотношении.

1.2.5. Второй замечательный предел

Второй замечательный предел утверждает, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

1.2.5.1. Доказательство через бином Ньютона

является классическим и наглядным.
Доказательство существования предела через бином является классическим и наглядным.
▷ Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Разложим x_n по формуле бинома Ньютона:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.
Запишем это разложение подробно:

$$x_n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Упростим каждое слагаемое:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Шаг 1: Доказательство монотонного возрастания x_n
Сравним x_n и x_{n+1}. Запишем x_{n+1}:

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

Заметим, что: - Количество слагаемых в x_{n+1} больше, чем в x_n. - Каждое слагаемое в x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в x_n, так как

$$1-\frac{m}{n+1} > 1-\frac{m}{n} \quad \text{для любого } m.$$

Следовательно, $x_{n+1} > x_n$, то есть последовательность $\{x_n\}$ строго возрастает.
Шаг 2: Доказательство ограниченности сверху.
Оценим x_n сверху. Заметим, что для любого $k \geq 2$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1,$$

а также $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ (так как $k! \geq 2^{k-1}$ для $k \geq 2$).
Тогда:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Сумма геометрической прогрессии:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2} < 2 + 1 = 3.$$

Таким образом, $x_n < 3$ для всех n, то есть последовательность ограничена сверху.

Шаг 3: Существование предела

По теореме Вейерштрасса, монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел. Обозначим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$\lhd$

Шаг 4: Связь с числом e

Из разложения видно, что

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$

При $n\to\infty$ каждая скобка стремится к 1, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e.$$

Итог.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Замечание.

Это доказательство не только устанавливает существование предела, но и показывает, что число e можно представить как сумму ряда:

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

Биномиальное разложение позволяет наглядно увидеть монотонность и ограниченность последовательности, что и приводит к доказательству.

1.2.5.2. Альтернативноне доказательство второго замечательного предела

Доказательство ведется с использованием монотонно убывающей и ограниченной последовательности.

$\rhd$ Рассмотрим последовательность:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Покажем, что $\{y_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу, а её предел также равен e.

Шаг 1: Доказательство монотонного убывания y_n

Сравним y_n и y_{n+1}:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}.$$

Упростим это отношение. Заметим, что:

$$1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},\quad 1+\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}.$$

Тогда:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Перепишем:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}.$$

Заметим, что:

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1+\frac{1}{n^2+2n}.$$

Таким образом:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Используем неравенство Бернулли: $(1+x)^r \geq 1 + rx$ для $x > -1$, $r \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n}.$$

Тогда:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Но $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$. Следовательно, $\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1$, то есть $y_n > y_{n+1}$. Таким образом, $\{y_n\}$ строго убывает.

Шаг 2: Доказательство ограниченности снизу.

Заметим, что:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} > 0.$$

Кроме того, поскольку $\{y_n\}$ убывает, то все её члены меньше первого:

$$y_n \leq y_1 = (1+1)^2 = 4.$$

Таким образом, $0 < y_n \leq 4$, то есть последовательность ограничена снизу (например, числом 0).

Шаг 3: Существование предела.

По теореме Вейерштрасса, монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел. Обозначим:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = L.$$

Теперь заметим, что:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Но $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, поэтому:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot 1 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Таким образом, предел последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ также существует и равен L. Обозначим его через e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Шаг 4: Связь с числом e

Из равенства

$$y_n = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

и того, что $\lim y_n = \lim x_n = e$, следует, что

$$e = e \cdot 1,$$

что согласуется с определением.

$\lhd$.

Итог.

Таким образом, используя монотонно убывающую и ограниченную последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, мы доказали существование предела:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Замечание.

Это доказательство дополняет первое (с монотонно возрастающей последовательностью) и показывает, что последовательность x_n "зажата"между двумя последовательностями с общим пределом e:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n.$$

При этом x_n возрастает, а y_n убывает, и оба предела равны e.

1.2.6. Подпоследовательности

Предел подпоследовательности — это предел последовательности, полученной из исходной выборкой элементов с сохранением порядка.

1. Формальное определение

Пусть $\{x_n\}$ — исходная последовательность, и пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью $\{x_n\}$.

Число L называется пределом подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, если

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L.$$

2. Связь с пределом исходной последовательности

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, то любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ также сходится к L.
Обратное неверно: если некоторая подпоследовательность сходится, исходная последовательность может расходиться.

3. Примеры

Пример 1: $x_n = (-1)^n$.
Исходная последовательность: $-1, 1, -1, 1, \ldots$ (расходится)
Подпоследовательность чётных членов: $x_{2k} = 1 \to 1$.
Подпоследовательность нечётных членов: $x_{2k-1} = -1 \to -1$.
Частичные пределы: -1 и 1.

Пример 2: $x_n = \frac{1}{n}$.
Исходная последовательность: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \to 0$.
Любая подпоследовательность сходится к 0.

Пример 3: $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.
Члены: $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$.
Подпоследовательность $x_{4k+1} = 1 \to 1$.
Подпоследовательность $x_{4k+3} = -1 \to -1$.
Подпоследовательность $x_{2k} = 0 \to 0$

Следствие: Из любой ограниченной последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к $\underline{\lim}$ или $\overline{\lim}$ исходной последовательности.

5. Свойства

1. Замыкание множества пределов:
Множество всех частичных пределов последовательности всегда замкнуто.

2. Верхний и нижний пределы:
$\overline{\lim}\, x_n =$ наибольший частичный предел.
$\underline{\lim}\, x_n =$ наименьший частичный предел.

3. Критерий сходимости:
Последовательность сходится $\Leftrightarrow$ все её подпоследовательности сходятся к одному пределу.

6. Построение подпоследовательностей

Можно целенаправленно строить подпоследовательности:
Сходящиеся к $\overline{\lim}$: на каждом шаге выбираем элемент, близкий к верхней грани «хвоста» Сходящиеся к $\underline{\lim}$: аналогично, но к нижней грани

Понятие предела подпоследовательности позволяет анализировать «предельное поведение» последовательности даже когда сама последовательность расходится, что делает его мощным инструментом в математическом анализе.

1.2.6.1. Выбор подпоследовательности у синуса

Утверждение: Если число α иррационально, то из последовательности

$$x_n = \sin(\alpha\pi n)$$

можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к любому числу $L \in [-1, 1]$.

$\triangleright$

Шаг 1. Основная идея Мы используем тот факт, что при иррациональном α последовательность дробных долей

$$\{n\alpha\} = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ (теорема Вейля).
Поскольку $\sin(\alpha\pi n) = \sin(\pi \cdot n\alpha)$, а синус — непрерывная (пока этого не знаем, но запоминаем) функция, достаточно показать, что множество значений $\{n\alpha\}$ плотно в $[0, 1]$, тогда множество $\{\sin(\pi \cdot n\alpha)\}$ будет плотно в $[-1, 1]$.

Шаг 2. Плотность дробных долей $\{n\alpha\}$.
Докажем, что для иррационального α последовательность $\{n\alpha\}$ плотна в $[0, 1]$.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ на m равных частей длины $1/m$.
По принципу Дирихле (или из равномерной распределённости) среди первых $m + 1$ дробных долей $\{0 \cdot \alpha\}, \{1 \cdot \alpha\}, \dots, \{m \cdot \alpha\}$ найдутся две, попадающие в один интервал разбиения.
Пусть $\{k\alpha\}$ и $\{l\alpha\}$ $(0 \le k < l \le m)$ лежат в одном подинтервале. Тогда

$$0 < |\{l\alpha\} - \{k\alpha\}| < \frac{1}{m}.$$

Но $\{l\alpha\} - \{k\alpha\} = \{(l - k)\alpha\}$ (с точностью до целого числа, и разность по модулю меньше 1, так что это именно дробная часть разности). - Обозначим $d = l - k$, $1 \le d \le m$. Тогда

$$\|\{d\alpha\}\| = \min(\{d\alpha\}, 1 - \{d\alpha\}) < \frac{1}{m}.$$

Здесь $\|t\|$ — расстояние от t до ближайшего целого.

Теперь рассмотрим числа $\{qd\alpha\}$ для $q \in \mathbb{N}$. Они образуют арифметическую прогрессию на окружности длины 1 с шагом $\{d\alpha\}$, который очень мал (меньше $1/m$).
Поэтому, взяв m достаточно большим, мы можем приблизить любое число на $[0, 1]$ с точностью ε некоторым $\{qd\alpha\}$.

Таким образом, множество $\{n\alpha\}$ плотно в $[0, 1]$.

Шаг 3. Переход к синусу.
Функция $f(t) = \sin(\pi t)$ непрерывна и отображает $[0, 1]$ на $[-1, 1]$. Поскольку $x_n = f(\{n\alpha\})$, а $\{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{N}\}$ плотно в $[0, 1]$, то $\{x_n\}$ плотно в $[-1, 1]$.

Шаг 4. Построение подпоследовательности. Пусть $L \in [-1, 1]$. Найдётся $t_0 \in [0, 1]$ такой, что $\sin(\pi t_0) = L$. Из плотности $\{n\alpha\}$ в $[0, 1]$ следует, что существует последовательность индексов n_k такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \{n_k\alpha\} = t_0.$$

В силу непрерывности синуса:

$$\lim_{k\to\infty} \sin(\alpha\pi n_k) = \sin(\pi t_0) = L.$$

Замечания.
1. Для рационального α последовательность x_n периодична и принимает лишь конечное число значений, поэтому утверждение неверно.
2. Фактически здесь доказано даже больше: множество предельных точек последовательности x_n совпадает со всем отрезком $[-1, 1]$.
3. Это частный случай эргодичности иррационального поворота окружности.

Вывод: Для иррационального α из $\sin(\alpha\pi n)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к любому наперёд заданному $L \in [-1, 1]$.

1.2.7. Теорема Штольца

Упрощённая версия теоремы (достаточная для многих применений).

Теорема 12. *Штольца.*
Пусть $\{b_n\}$ строго возрастает и $b_n \to +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0$.
Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

▷ Доказательство (для предела $L = 0$)

1. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По условию, существует номер N такой, что для всех $n \ge N$:

$$\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right| < \varepsilon.$$

Так как $b_{n+1} > b_n$ (строгое возрастание), то:

$$|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon(b_{n+1} - b_n). \tag{1}$$

2. Оценим разность $a_n - a_N$ для $n > N$. Запишем телескопическую сумму:

$$a_n - a_N = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_{N+1} - a_N).$$

Применяя неравенство (1) к каждому слагаемому, получаем:

$$|a_n - a_N| \le |a_n - a_{n-1}| + \ldots + |a_{N+1} - a_N| < \varepsilon\left((b_n - b_{n-1}) + \ldots + (b_{N+1} - b_N)\right).$$

Сумма в скобках телескопируется:

$$(b_n - b_{n-1}) + \ldots + (b_{N+1} - b_N) = b_n - b_N.$$

Таким образом:

$$|a_n - a_N| < \varepsilon(b_n - b_N). \tag{2}$$

3. Оценим $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|$. Запишем:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{a_N + (a_n - a_N)}{b_n}\right| \le \frac{|a_N|}{b_n} + \frac{|a_n - a_N|}{b_n}.$$

Используем (2):

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{|a_N|}{b_n} + \varepsilon\left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right). \tag{3}$$

4. Устремляем $n \to \infty$. Так как $b_n \to +\infty$, то $\dfrac{|a_N|}{b_n} \to 0$, $1 - \dfrac{b_N}{b_n} \to 1$.

Поэтому для достаточно больших n:

$$\frac{|a_N|}{b_n} < \varepsilon, \quad \text{и} \quad \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) < 1.$$

Подставляя в (3), получаем:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon + \varepsilon \cdot 1 = 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, это означает:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

$\lhd$

Случай произвольного предела L

$\rhd$ Если $\lim \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \neq 0$, рассмотрим новую последовательность:

$$a'_n = a_n - Lb_n.$$

Тогда:

$$\frac{a'_{n+1} - a'_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(a_{n+1} - Lb_{n+1}) - (a_n - Lb_n)}{b_{n+1} - b_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - L \to 0.$$

По доказанному выше:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a'_n}{b_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n} - L\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

$\lhd$

Пример 1.

Пусть $a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $b_n = n^2$. Тогда:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}.$$

По теореме Штольца:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.

$$\lim \frac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\ln n} = \lim \frac{1/(n+1)}{\ln(n+1) - \ln n} = 1$$

При получении числового ответа использовали эквивалентность $\ln \frac{n+1}{n} \sim \frac{1}{n}$ (второй замечательный предел).