Оглавление

Введение

Данный курс лекций по главам математического анализа предназначен для студентов первого курса.

Глава 1.

1.

1.0.1. Метод математической индукции

Метод математической индукции — это мощный и строгий метод доказательства утверждений, справедливых для всех натуральных чисел n (или для всех натуральных чисел, начиная с некоторого n_0). Он основан на аксиоме Архимеда.

Его суть заключается в том, чтобы доказать бесконечную серию утверждений $P(1), P(2), P(3), \ldots$, выполнив всего два шага.

Схема доказательства по индукции

Доказательство того, что утверждение $P(n)$ верно для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ (или для всех $n \geq n_0$), состоит из двух критически важных шагов:

1. База индукции.

Доказать, что утверждение $P(n)$ верно для первого допустимого значения n (чаще всего для $n = 1$).

2. Индукционный переход (шаг индукции).

Доказать, что если утверждение $P(n)$ верно для некоторого произвольного натурального $n = k$ (предположение индукции), то оно будет верно и для следующего значения $n = k + 1$, то есть что из справедливости $P(k)$ следует справедливость $P(k + 1)$.

Записывается это следующим образом:

1. $P(1)$ — истинно.
2. $\forall k \in \mathbb{N}: \quad P(k) \Rightarrow P(k+1)$ — истинно.

Если оба этих шага выполнены, то по принципу математической индукции утверждение $P(n)$ считается доказанным для всех натуральных n.

Образная аналогия

Метод индукции часто сравнивают с домино. Если вы:

1. Повалите первое костяшку домино (база индукции).
2. Убедитесь, что падение любой k-ой костяшки гарантированно повалит следующую, $(k+1)$-ую (индукционный переход), то можно быть уверенным, что упадут все костяшки.

Пример. Утверждение: Сумма первых n нечётных чисел равна n^2.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Доказательство по индукции:

1. База индукции. Проверим для $n = 1$.

Левая часть: 1. Правая часть: $1^2 = 1$. $1 = 1$ — верно. База доказана.

2. Индукционный переход. Предположение индукции: Допустим, что формула верна для некоторого $n = k$, то есть

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2. \quad \text{(Это наше предположение)}$$

Требуется доказать, что тогда формула верна и для $n = k + 1$, то есть

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Упрощаем: $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$. Значит, нужно доказать:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Доказательство: Возьмём левую часть и воспользуемся нашим предположением индукции:

$$(1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Мы получили правую часть. Индукционный переход доказан.

Вывод: По принципу математической индукции, данная формула верна для всех натуральных n.

Вариации метода

Индукция с неединичной базой. Утверждение доказывается не для всех $n \in \mathbb{N}$, а для всех $n \geq n_0$ (например, $n \geq 5$). В этом случае база индукции проверяется для $n = n_0$.

Полная (сильная) индукция. В индукционном переходе предполагается, что утверждение P верно не только для $n = k$, но и для всех предыдущих значений $n = 1, 2, \ldots, k$, и из этого доказывается справедливость $P(k+1)$.

1.0.1.1. Доказательство методом математической индукции обобщенного неравенства Бернулли.

Обобщённое неравенство Бернулли утверждает, что для любого действительного числа $x \geq 0$, $x \neq 0$, и любого натурального числа $n \geq 2$ выполняется неравенство:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

База индукции. Проверим для $n = 2$:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Сравним с правой частью:

$$1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x + \frac{2 \cdot 1}{2}x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Получаем равенство $1 + 2x + x^2 = 1 + 2x + x^2$, значит, неравенство выполняется (более того, обращается в равенство). База индукции доказана.

Предположение индукции. Предположим, что неравенство верно для некоторого натурального $n = k \geq 2$:

$$(1+x)^k \geq 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2. \tag{1}$$

Индукционный переход. Требуется доказать, что неравенство верно для $n = k+1$:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2. \tag{2}$$

Умножим обе части предположения индукции (1) на $(1+x)$ (это положительное число, так как $x > -1$, поэтому знак неравенства сохраняется):

$$(1+x)^{k+1} \geq \left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x).$$

Раскроем скобки в правой части:

$$\left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x) = 1 \cdot (1+x) + kx \cdot (1+x) + \frac{k(k-1)}{2}x^2 \cdot (1+x).$$

Раскроем каждое слагаемое:

$$= 1 + x + kx + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Сгруппируем подобные члены:

$$= 1 + (1+k)x + \left(k + \frac{k(k-1)}{2}\right)x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Упростим коэффициент при x^2:

$$k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k + k(k-1)}{2} = \frac{2k + k^2 - k}{2} = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Таким образом, правая часть принимает вид:

$$1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Итак, мы получили:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+\frac{k(k+1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)}{2}x^3. \tag{3}$$

Сравним правую часть неравенства (3) с требуемой правой частью в (2):

$$1+(k+1)x+\frac{k(k+1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)}{2}x^3 \quad \text{и} \quad 1+(k+1)x+\frac{(k+1)k}{2}x^2.$$

Они отличаются на слагаемое $\frac{k(k-1)}{2}x^3$. По условию $x \geq 0$, т.е. данное слагаемое неотрицательно, что и доказывает утверждение индукционного шага. Таким образом, по принципу математической индукции обобщённое неравенство Бернулли доказано для всех натуральных $n \geq 2$ и для всех $x \geq -1$.

1.0.1.2. Бином Ньютона

Формула бинома Ньютона утверждает, что для любых действительных (или комплексных) чисел a и b и для любого натурального числа n выполняется равенство:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

Доказательство методом математической индукции.

1. База индукции. Проверим для $n=1$:

$$(a+b)^1=a+b.$$

Правая часть:

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k=C_1^0 a^1 b^0+C_1^1 a^0 b^1=1\cdot a\cdot 1+1\cdot 1\cdot b=a+b.$$

База индукции верна.

2. Предположение индукции. Предположим, что формула верна для некоторого натурального $n=m$:

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k. \tag{1}$$

3. Индукционный переход. Требуется доказать, что формула верна для $n=m+1$:

$$(a+b)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k. \tag{2}$$

Для доказательства умножим обе части предположения (1) на $(a+b)$:

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)\cdot\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Раскроем скобки:

$$(a+b)^{m+1}=a\cdot\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k+b\cdot\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Преобразуем каждое слагаемое:

Первая сумма:

$$a\cdot\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k.$$

Сделаем замену индекса: пусть $j=k$. Тогда это сумма:

$$\sum_{j=0}^{m} C_m^j a^{m+1-j} b^j. \tag{3}$$

Вторая сумма:

$$b \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}.$$

Сделаем замену индекса: пусть $j = k+1$, тогда $k = j-1$, и при $k=0$ $j=1$, при $k=m$ $j=m+1$. Получим:

$$\sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m-(j-1)} b^j = \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j. \tag{4}$$

Теперь сложим (3) и (4):

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j a^{m+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j.$$

Выделим отдельно слагаемые при $j=0$ из первой суммы и при $j=m+1$ из второй суммы:
При $j=0$: первая сумма даёт $C_m^0 a^{m+1} b^0 = a^{m+1}$. При $j=m+1$: вторая сумма даёт $C_m^m a^0 b^{m+1} = b^{m+1}$.
Остальные слагаемые (для $j=1$ до $j=m$) можно объединить в одну сумму:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} \left(C_m^j + C_m^{j-1}\right) a^{m+1-j} b^j.$$

Вспомним свойство биномиальных коэффициентов (формула Паскаля):

$$C_m^j + C_m^{j-1} = C_{m+1}^j.$$

Подставим это:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Заметим, что: $a^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} b^0$, $b^{m+1} = C_{m+1}^{m+1} a^0 b^{m+1}$.
Тогда всю сумму можно записать как единую сумму от $j=0$ до $j=m+1$:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Это в точности совпадает с требуемой формулой (2) для $n = m+1$ (индекс j можно заменить на k).

4. Вывод. По принципу математической индукции формула бинома Ньютона доказана для всех натуральных n.