

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1. 1.</b>	<b>5</b>
1.1. Основные положения ...	5
1.1.1. Аксиома непрерывности (или полноты) действительных чисел . . . . .	5
1.1.2. Существование точной верхней (нижней) грани . . . . .	6
1.1.3. Метод математической индукции . . . . .	6
1.1.4. Множество Кантора . . . . .	9
1.1.5. Лемма Кантора о вложенных отрезках . . . . .	10
1.1.6. Теорема Бореля-Лебега . . . . .	10
1.1.7. Мощность множеств . . . . .	11



# Введение

Данный курс лекций по главам математического анализа предназначен для студентов первого курса.



# Глава 1.

## 1.

### 1.1. Основные положения ...

#### 1.1.1. Аксиома непрерывности (или полноты) действительных чисел

— это фундаментальное свойство, которое отличает множество  $\mathbb{R}$  от множества рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . Существует несколько эквивалентных формулировок этой аксиомы. Вот основные из них:

**1. Принцип полноты по Дедекинду** > Любое непустое ограниченное сверху подмножество действительных чисел имеет точную верхнюю грань (супремум).

Пояснение: Это самая распространённая формулировка. Она утверждает, что для любого множества  $A \subset \mathbb{R}$ , которое ограничено сверху, существует число  $\sup A \in \mathbb{R}$ . В данном курсе это теорема. Также теоремами являются первые 5 формулировок аксиомы непрерывности.

Эквивалентная формулировка: Любое непустое ограниченное снизу подмножество действительных чисел имеет точную нижнюю грань (инфимум).

**2. Принцип вложенных отрезков (Кантора)** > Для любой последовательности вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

длины которых стремятся к нулю ( $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ ), существует единственная точка  $c$ , принадлежащая всем этим отрезкам.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

В множестве рациональных чисел это неверно — пересечение может быть пустым.

**3. Принцип сходимости фундаментальных последовательностей (Критерий Коши)** > Всякая фундаментальная последовательность действительных чисел имеет предел, принадлежащий  $\mathbb{R}$ .

Пояснение (для будущего): Это означает, что множество действительных чисел полно в метрическом смысле (является полным метрическим пространством). Последовательность  $\{x_n\}$  называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

**4. Принцип монотонной сходимости** > Всякая ограниченная сверху монотонно возрастающая последовательность имеет предел.

Пояснение (для будущего): Если  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$  и существует  $M$  такое, что  $x_n \leq M$  для всех  $n$ , то существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ .

**5. Лемма о конечном покрытии (Принцип Бореля-Лебега)** > Из любого покрытия отрезка системой интервалов можно выбрать конечное подпокрытие.

Пояснение: Это топологическая формулировка непрерывности, эквивалентная другим. Она утверждает, что всякий отрезок  $[a, b]$  является компактным множеством.

**6. Теорема о сечениях (Дедекинд)** > Если множество всех действительных чисел разбито на два непустых класса  $A$  и  $B$  таких, что каждый элемент класса  $A$  меньше любого элемента класса  $B$ , то существует единственное число  $\alpha$ , которое производит это сечение: все числа  $x < \alpha$  попадают в  $A$ , а все числа  $x > \alpha$  — в  $B$  (само число  $\alpha$  может попасть в любой из классов).

Пояснение: Это первоначальная конструкция Дедекинда для определения действительных чисел с помощью "сечений". Именно ее будем использовать в данном курсе.

Все эти формулировки эквивалентны в теории действительных чисел. Это означает, что если принять одну из них за аксиому, то все остальные можно доказать как теоремы. Обычно за основу берётся сечение Дедекинду или принцип supremum.

### 1.1.2. Существование точной верхней (нижней) грани

### 1.1.3. Метод математической индукции

Метод математической индукции — это мощный и строгий метод доказательства утверждений, справедливых для всех натуральных чисел  $n$  (или для всех натуральных чисел, начиная с некоторого  $n_0$ ). Он основан на аксиоме Архимеда.

Его суть заключается в том, чтобы доказать бесконечную серию утверждений  $P(1), P(2), P(3), \dots$ , выполнив всего два шага.

Схема доказательства по индукции

Доказательство того, что утверждение  $P(n)$  верно для любого натурального  $n \in \mathbb{N}$  (или для всех  $n \geq n_0$ ), состоит из двух критически важных шагов:

1. База индукции.

Доказать, что утверждение  $P(n)$  верно для первого допустимого значения  $n$  (чаще всего для  $n = 1$ ).

2. Индукционный переход (шаг индукции).

Доказать, что если утверждение  $P(n)$  верно для некоторого произвольного натурального  $n = k$  (предположение индукции), то оно будет верно и для следующего значения  $n = k + 1$ , т.е. из справедливости  $P(k)$  следует справедливость  $P(k + 1)$ .

Записывается это следующим образом:

1.  $P(1)$  — истинно.
2.  $\forall k \in \mathbb{N} : P(k) \Rightarrow P(k + 1)$  — истинно.

Если оба этих шага выполнены, то по принципу математической индукции утверждение  $P(n)$  считается доказанным для всех натуральных  $n$ .

Образная аналогия

Метод индукции часто сравнивают с домино. Если вы:

1. Повалите первое костяшку домино (база индукции).
2. Убедитесь, что падение любой  $k$ -ой костяшки гарантированно повалит следующую,  $(k + 1)$ -ую (индукционный переход), то можно быть уверенным, что упадут все костяшки.

*Пример.* Утверждение: Сумма первых  $n$  нечётных чисел равна  $n^2$ .

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Доказательство по индукции:

1. База индукции. Проверим для  $n = 1$ .

Левая часть: 1. Правая часть:  $1^2 = 1$ .  $1 = 1$  — верно. База доказана.

2. Индукционный переход. Предположение индукции: Допустим, что формула верна для некоторого  $n = k$ , то есть

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2. \quad (\text{Это наше предположение})$$

Требуется доказать, что тогда формула верна и для  $n = k + 1$ , то есть

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Упрощаем:  $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ . Значит, нужно доказать:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Доказательство: Возьмём левую часть и воспользуемся нашим предположением индукции:

$$(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Мы получили правую часть. Индукционный переход доказан.

Вывод: По принципу математической индукции, данная формула верна для всех натуральных  $n$ .

Вариации метода

Индукция с неединичной базой. Утверждение доказывается не для всех  $n \in \mathbb{N}$ , а для всех  $n \geq n_0$  (например,  $n \geq 5$ ). В этом случае база индукции проверяется для  $n = n_0$ .

Полная (сильная) индукция. В индукционном переходе предполагается, что утверждение  $P$  верно не только для  $n = k$ , но и для всех предыдущих значений  $n = 1, 2, \dots, k$ , и из этого доказывается справедливость  $P(k + 1)$ .

### 1.1.3.1. Доказательство методом математической индукции обобщенного неравенства Бернулли.

Обобщённое неравенство Бернулли утверждает, что для любого действительного числа  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , и любого натурального числа  $n \geq 2$  выполняется неравенство:

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

База индукции. Проверим для  $n = 2$ :

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2.$$

Сравним с правой частью:

$$1+2x+x^2 \geq 1+2x + \frac{2 \cdot 1}{2}x^2 = 1+2x+x^2.$$

Получаем равенство  $1+2x+x^2 = 1+2x+x^2$ , значит, неравенство выполняется (более того, обращается в равенство). База индукции доказана.

Предположение индукции. Предположим, что неравенство верно для некоторого натурального  $n = k \geq 2$ :

$$(1+x)^k \geq 1+kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2. \quad (1)$$

Индукционный переход. Требуется доказать, что неравенство верно для  $n = k+1$ :

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2. \quad (2)$$

Умножим обе части предположения индукции (1) на  $(1+x)$  (это положительное число, так как  $x > -1$ , поэтому знак неравенства сохраняется):

$$(1+x)^{k+1} \geq \left(1+kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x).$$

Раскроем скобки в правой части:

$$\left(1+kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x) = 1 \cdot (1+x) + kx \cdot (1+x) + \frac{k(k-1)}{2}x^2 \cdot (1+x).$$

Раскроем каждое слагаемое:

$$= 1+x+kx+kx^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Сгруппируем подобные члены:

$$= 1+(1+k)x + \left(k + \frac{k(k-1)}{2}\right)x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Упростим коэффициент при  $x^2$ :

$$k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k+k(k-1)}{2} = \frac{2k+k^2-k}{2} = \frac{k^2+k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Таким образом, правая часть принимает вид:

$$1+(k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Итак, мы получили:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3. \quad (3)$$

Сравним правую часть неравенства (3) с требуемой правой частью в (2):

$$1+(k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3 \quad \text{и} \quad 1+(k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2.$$

Они отличаются на слагаемое  $\frac{k(k-1)}{2}x^3$ . По условию  $x \geq 0$ , т.е. данное слагаемое неотрицательно, что и доказывает утверждение индукционного шага. Таким образом, по принципу математической индукции обобщённое неравенство Бернулли доказано для всех натуральных  $n \geq 2$  и для всех  $x \geq -1$ .

### 1.1.3.2. Бином Ньютона

Формула бинома Ньютона утверждает, что для любых действительных (или комплексных) чисел  $a$  и  $b$  и для любого натурального числа  $n$  выполняется равенство:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  — биномиальный коэффициент.

Доказательство методом математической индукции.

1. База индукции. Проверим для  $n = 1$ :

$$(a + b)^1 = a + b.$$

Правая часть:

$$\sum_{k=0}^1 C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a + b.$$

База индукции верна.

2. Предположение индукции. Предположим, что формула верна для некоторого натурального  $n = m$ :

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k. \quad (1)$$

3. Индукционный переход. Требуется доказать, что формула верна для  $n = m + 1$ :

$$(a + b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k. \quad (2)$$

Для доказательства умножим обе части предположения (1) на  $(a + b)$ :

$$(a + b)^{m+1} = (a + b) \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Раскроем скобки:

$$(a + b)^{m+1} = a \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Преобразуем каждое слагаемое:

Первая сумма:

$$a \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m+1-k} b^k.$$

Сделаем замену индекса: пусть  $j = k$ . Тогда это сумма:

$$\sum_{j=0}^m C_m^j a^{m+1-j} b^j. \quad (3)$$

Вторая сумма:

$$b \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^{k+1}.$$

Сделаем замену индекса: пусть  $j = k + 1$ , тогда  $k = j - 1$ , и при  $k = 0$   $j = 1$ , при  $k = m$   $j = m + 1$ . Получим:

$$\sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m-(j-1)} b^j = \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j. \quad (4)$$

Теперь сложим (3) и (4):

$$(a + b)^{m+1} = \sum_{j=0}^m C_m^j a^{m+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j.$$



Выделим отдельно слагаемые при  $j = 0$  из первой суммы и при  $j = m + 1$  из второй суммы:  
 При  $j = 0$ : первая сумма даёт  $C_m^0 a^{m+1} b^0 = a^{m+1}$ . При  $j = m + 1$ : вторая сумма даёт  $C_m^m a^0 b^{m+1} = b^{m+1}$ .  
 Остальные слагаемые (для  $j = 1$  до  $j = m$ ) можно объединить в одну сумму:

$$(a + b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^m (C_m^j + C_m^{j-1}) a^{m+1-j} b^j.$$

Вспомним свойство биномиальных коэффициентов (формула Паскаля):

$$C_m^j + C_m^{j-1} = C_{m+1}^j.$$

Подставим это:

$$(a + b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^m C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Заметим, что:  $a^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} b^0$ ,  $b^{m+1} = C_{m+1}^{m+1} a^0 b^{m+1}$ .

Тогда всю сумму можно записать как единую сумму от  $j = 0$  до  $j = m + 1$ :

$$(a + b)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Это в точности совпадает с требуемой формулой (2) для  $n = m + 1$  (индекс  $j$  можно заменить на  $k$ ).

4. Вывод. По принципу математической индукции формула бинома Ньютона доказана для всех натуральных  $n$ .

#### 1.1.4. Множество Кантора

Множество Кантора (также известное как канторово множество или канторов совершенный набор) — это один из самых известных фракталов, который строится путём последовательного удаления частей из единичного отрезка. Несмотря на то, что в процессе построения удаляется бесконечно много интервалов, множество Кантора остаётся несчётным и имеет нулевую меру Лебега.

Построение множества Кантора

1. Шаг 0: Возьмём единичный отрезок  $C_0 = [0, 1]$ .

2. Шаг 1: Удалим из него среднюю треть — открытый интервал  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . Останутся два отрезка:

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

3. Шаг 2: Удалим среднюю треть из каждого из оставшихся отрезков. То есть удалим интервалы  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$  и  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ . Останутся четыре отрезка:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

4. Шаг  $n$ : Продолжаем процесс бесконечно: на каждом шаге из всех оставшихся отрезков удаляем их среднюю треть. После  $n$  шагов получаем множество  $C_n$ , состоящее из  $2^n$  замкнутых отрезков, каждый длиной  $\frac{1}{3^n}$ .

5. Множество Кантора определяется как пересечение всех множеств  $C_n$ :

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Свойства множества Кантора

1. Мощность (несчётность) Множество Кантора имеет мощность континуума, то есть оно несчётно. Это можно доказать, установив взаимно однозначное соответствие между точками множества  $C$  и числами из отрезка  $[0, 1]$ , записанными в троичной системе счисления: - При построении  $C$  удаляются все точки, которые в троичной записи содержат цифру 1 (кроме случая, когда бесконечное количество 1 стоит в конце, что эквивалентно ...200....). - Таким образом,  $C$  состоит из точек, которые можно записать в троичной системе только с цифрами 0 и 2. - Таких последовательностей столько же, сколько последовательностей из 0 и 1 (в двоичной системе), то есть мощность континуума.

2. Мера Лебега На каждом шаге удаляется часть отрезка: - На первом шаге удаляется интервал длины  $\frac{1}{3}$ . - На втором шаге удаляется 2 интервала общей длины  $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ . - На  $n$ -ом шаге удаляется  $2^{n-1}$  интервалов общей длины  $\frac{2^{n-1}}{3^n}$ .

Общая длина удалённых интервалов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом, мера множества Кантора:

$$\mu(C) = \mu([0, 1]) - 1 = 0.$$

3. Нигде не плотность Множество Кантора нигде не плотно в  $[0, 1]$ : в любом интервале  $(a, b) \subset [0, 1]$  найдётся подынтервал, не содержащий точек из  $C$ . Это следует из того, что на каждом шаге удаляются целые интервалы.

4. Фрактальная структура Множество Кантора самоподобно: любая его часть (например, пересечение  $C$  с  $[0, \frac{1}{3}]$ ) гомеоморфна всему множеству  $C$  с коэффициентом подобия  $\frac{1}{3}$ .

Множество Кантора выглядит как бесконечно много точек, равномерно распределённых на отрезке, но при этом не образующих никаких интервалов. Это классический пример множества, которое одновременно: - несчётно,

- имеет нулевую меру,

- нигде не плотно.

Оно широко используется в анализе, теории меры и динамических системах как контринтуитивный пример.

### 1.1.5. Лемма Кантора о вложенных отрезках

формулируется следующим образом:

**Теорема 1.** (Лемма Кантора). Пусть дана последовательность отрезков

$$I_1 = [a_1, b_1] \supseteq I_2 = [a_2, b_2] \supseteq I_3 = [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Тогда пересечение всех этих отрезков состоит ровно из одной точки:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}.$$

▷

1. Существование общей точки. Рассмотрим множества левых концов отрезков  $\{a_n\}$  и правых концов  $\{b_n\}$ . В силу вложенности отрезков для любых  $n, m \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство:

$$a_n \leq b_m.$$

Это следует из того, что если  $n \leq m$ , то  $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ , а если  $n > m$ , то  $a_n \leq b_n \leq b_m \leq a_m$ . Таким образом, множество  $\{a_n\}$  ограничено сверху (например, любым  $b_m$ ), а множество  $\{b_n\}$  ограничено снизу (например, любым  $a_n$ ).

### 1.1.6. Теорема Бореля-Лебега

*Определение понятия покрытия.*

Говорят, что система интервалов  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}, \alpha \in A$  покрывает отрезок  $[a, b]$ , если

$$\forall x \in [a, b] \exists U_{\alpha_0} : x \in U_{\alpha_0}.$$

Любой отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  является компактным множеством. То есть из любого открытого покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие.

**Теорема 2.** Бореля-Лебега. Всякое открытое покрытие отрезка  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  содержит конечное подпокрытие.

Теорема означает, что любой отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  является компактным множеством. То есть из любого открытого покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие.

▷ Доказательство основано на использовании леммы Кантора о вложенных отрезках.

Пусть  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}, \alpha \in A$  — произвольное открытое покрытие отрезка  $[a, b]$ , где  $A$  — некоторое множество индексов. Требуется доказать, что существует конечный набор индексов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in A$  такой, что

$$[a, b] \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}.$$

Доказательство теоремы от противного:

1. Предположим, что существует открытое покрытие  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  отрезка  $[a, b]$ , которое не содержит конечного подпокрытия.

2. Построение последовательности вложенных отрезков:

Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам:  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , где  $c = \frac{a+b}{2}$ .

Хотя бы один из этих двух отрезков не допускает конечного подпокрытия из  $\mathcal{U}$  (иначе всё покрытие  $[a, b]$  было бы конечным). Обозначим этот отрезок через  $I_1 = [a_1, b_1]$ .

Повторим процесс: разделим  $I_1$  пополам и выберем ту половину, которая не допускает конечного покрытия. Обозначим её  $I_2 = [a_2, b_2]$ .

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных отрезков:

$$I_n = [a_n, b_n] \quad \text{таких, что} \quad I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots,$$

каждый из которых не покрывается конечным числом элементов из  $\mathcal{U}$ .

3. Применение леммы Кантора: Длина отрезка  $I_n$  равна  $\frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$ .

По лемме Кантора существует единственная точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам  $I_n$ :

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

4. Получение противоречия.

Так как  $c \in [a, b]$ , а  $\mathcal{U}$  — открытое покрытие, существует множество  $U_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$  такое, что  $c \in U_{\alpha_0}$ .

Поскольку  $U_{\alpha_0}$  открыто, найдётся  $\varepsilon > 0$  такое, что интервал  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$ .

Так как длины отрезков  $I_n$  стремятся к нулю, существует номер  $N$  такой, что длина  $I_N$  меньше  $\varepsilon$ :  $|I_N| < \varepsilon$ . Тогда, поскольку  $c \in I_N$ , весь отрезок  $I_N$  содержится в интервале  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , а значит, и в  $U_{\alpha_0}$ :

$$I_N \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}.$$

Но это означает, что отрезок  $I_N$  покрывается всего одним множеством  $U_{\alpha_0}$  из покрытия  $\mathcal{U}$ , что противоречит построению  $I_N$  (который не должен покрываться конечным подпокрытием).

5. Вывод: Предположение о том, что покрытие  $\mathcal{U}$  не содержит конечного подпокрытия, неверно. Следовательно, любое открытое покрытие отрезка  $[a, b]$  содержит конечное подпокрытие (отрезок  $[a, b]$  является компактным множеством в  $\mathbb{R}$ ). <

Замечание Это доказательство использует:

Лемму Кантора (которая сама опирается на аксиому полноты  $\mathbb{R}$ ).

Метод деления отрезка пополам (метод Больцано-Вейерштрасса).

Ключевую идею о том, что точка  $c$  (общая для всех вложенных отрезков) должна лежать в некотором элементе покрытия, который "захватывает" целиком один из маленьких отрезков.

Это доказательство использует свойство полноты действительных чисел (существование супремума у ограниченного множества). Таким образом, теорема справедлива и в более общих пространствах, удовлетворяющих аксиоме полноты.

### 1.1.7. Мощность множеств

Если в каждом из двух множеств лишь конечное число элементов, то эти множества можно сравнить по количеству этих самых элементов. Логично считать, что то множество оказывается «мощнее», в котором количество элементов больше. Если же количество элементов в двух множествах одинаково, то множества разумно считать «равномощными».

Часто бывает важным выяснить, «одинаково» ли количество элементов в двух разных множествах. В случае конечных множеств этот вопрос может быть решен весьма просто: достаточно пересчитать элементы каждого множества. Проблема заключается в том, что описанный подход не применим к бесконечным множествам.

В то же время, если два конечных множества  $A$  и  $B$  имеют одинаковое количество элементов, то между элементами этих множеств можно установить биекцию. Такой подход «сравнения» двух множеств уже

прекрасно применим и к бесконечным множествам. Множества называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Класс эквивалентности по отношению равномощности, к которому принадлежит множество  $A$ , называется мощностью  $A$ , кардиналом или кардинальным числом множества  $A$ , и обозначается  $|A|$  или  $\text{card } A$ . В этом разделе рассмотрим 2 теоремы. Первая – про равномощность множеств рациональных и натуральных чисел. Вторая – про несчетность множества действительных чисел.

### 1.1.7.1. Счетность множества рациональных чисел

**Теорема 3.** *Теорема: Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  является счётным.*

▷

Для доказательства счётности  $\mathbb{Q}$  достаточно построить явную биекцию (взаимно однозначное соответствие) между множеством натуральных чисел  $\mathbb{N}$  и множеством рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  или хотя бы показать, что такое соответствие существует, доказав, что  $\mathbb{Q}$  можно представить в виде последовательности.

Основная идея

Ключевая идея заключается в том, что любое рациональное число можно единственным образом представить в виде несократимой дроби  $\frac{p}{q}$ , где  $p \in \mathbb{Z}$  (целое),  $q \in \mathbb{N}$  (натуральное), и что таких пар  $(p, q)$  "не больше чем натуральных чисел.

Метод I: Канторовская нумерация (таблица дробей)

Это самый наглядный и известный метод.

1. Расположим дроби в таблицу. Рассмотрим бесконечную таблицу, в которой строка соответствует знаменателю  $q$ , а столбец — числителю  $p$ . В ячейке на пересечении  $p$ -го столбца и  $q$ -й строки запишем дробь  $\frac{p}{q}$ . Важно учесть все целые числа (дроби со знаменателем 1) и отрицательные числа. Для простоты сначала докажем счётность множества \*положительных\* рациональных чисел  $\mathbb{Q}^+$ . Таблица для  $\mathbb{Q}^+$  будет иметь вид:

$p=1$ :  $1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$

$p=2$ :  $2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5, \dots$

$p=3$ :  $3/1, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5, \dots$

$p=4$ :  $4/1, 4/2, 4/3, 4/4, 4/5, \dots$

...

В этой таблице встречаются все положительные рациональные числа (и даже повторяются, например,  $1/1 = 2/2 = 3/3$ ).

2. Пронумеруем элементы таблицы. Чтобы перенумеровать все элементы бесконечной таблицы, нельзя обходить её построчно или по столбцово (это займёт бесконечное время на первой же строке). Вместо этого будем обходить таблицу по диагоналям.

Диагональ 1:  $\frac{1}{1}$

Диагональ 2:  $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$

Диагональ 3:  $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$

Диагональ 4:  $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$

и т.д.

Обходя диагонали сверху вниз (или снизу вверх), мы получаем последовательность:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

3. Удалим повторения. В полученной последовательности каждое положительное рациональное число встречается бесконечно много раз (все несократимые и сократимые дроби, ему равные). Чтобы получить биекцию с  $\mathbb{N}$ , мы должны пропускать повторяющиеся числа. Проходя по последовательности, мы будем включать в нумерацию только те дроби, которые появляются в несократимом виде впервые.  $\frac{1}{1} \rightarrow$  номер

1

$\frac{2}{1} \rightarrow$  номер 2

$\frac{1}{2} \rightarrow$  номер 3

$\frac{3}{1} \rightarrow$  номер 4

$\frac{2}{2}$  — сократима (равна  $\frac{1}{1}$ ), уже была  $\rightarrow$  пропускаем.

$\frac{1}{3} \rightarrow$  номер 5

$\frac{4}{1} \rightarrow$  номер 6

$\frac{3}{2} \rightarrow$  номер 7

$\frac{2}{3} \rightarrow$  номер 8

$\frac{1}{4} \rightarrow$  номер 9

и т.д.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и положительными рациональными числами:  $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}^+$ . Следовательно,  $\mathbb{Q}^+$  — счётно.

4. Учтём отрицательные числа и ноль. Чтобы доказать счётность всего  $\mathbb{Q}$ , можно аналогичным образом перенумеровать все дроби вида  $\frac{p}{q}$ , где  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Ещё проще — использовать уже доказанную счётность  $\mathbb{Q}^+$ . Множество отрицательных рациональных чисел  $\mathbb{Q}^-$  находится в биекции с  $\mathbb{Q}^+$  (отображение  $x \mapsto -x$ ). Множество  $\{0\}$  очевидно счётно.

Объединение трёх счётных множеств счётно. Можно записать всю последовательность, чередуя элементы:

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \dots$$

где  $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$  — нумерация  $\mathbb{Q}^+$ .

Вывод: Поскольку существует сюръекция (отображение "на") из  $\mathbb{N}$  на  $\mathbb{Q}$  (наша нумерация, даже с повторениями), а  $\mathbb{N}$  — бесконечно, то по определению  $\mathbb{Q}$  является счётным множеством.

Метод II : Использование теоремы о счётности объединения

Это более формальное доказательство.

1. Для каждого натурального  $q \in \mathbb{N}$  рассмотрим множество:

$$A_q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Каждое такое множество  $A_q$  очевидно счётно, так как находится в биекции с  $\mathbb{Z}$  (счётным):  $p \leftrightarrow \frac{p}{q}$ .

2. Заметим, что множество всех рациональных чисел можно представить как объединение всех этих множеств:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q.$$

Это объединение счётного числа счётных множеств.

3. По теореме теории множеств объединение счётного семейства счётных множеств является счётным множеством. Следовательно,  $\mathbb{Q}$  — счётно. Отметим, что данное свойство множеств доказывается аналогично доказательству I, т.е. в основе лежит метод суммирования по диагоналям.

В результате получаем, что между множеством натуральных чисел  $\mathbb{N}$  и множеством рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  можно установить взаимно однозначное соответствие, то есть  $\mathbb{Q}$  является счётным.