Оглавление

Введение

Данный курс лекций по главам математического анализа предназначен для студентов первого курса.

Глава 1.

1.

1.1. Основные положения ...

1.1.1. Аксиома непрерывности (или полноты) действительных чисел

— это фундаментальное свойство, которое отличает множество $\mathbb{R}$ от множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Существует несколько эквивалентных формулировок этой аксиомы. Вот основные из них:

1. Принцип полноты по Дедекинду Любое непустое ограниченное сверху подмножество действительных чисел имеет точную верхнюю грань (супремум).

Пояснение: Это самая распространённая формулировка. Она утверждает, что для любого множества $A \subset \mathbb{R}$, которое ограничено сверху, существует число $\sup A \in \mathbb{R}$. В данном курсе это теорема. Также теоремами являются первые 5 формулировок аксиомы непрерывности.

Эквивалентная формулировка: Любое непустое ограниченное снизу подмножество действительных чисел имеет точную нижнюю грань (инфимум).

2. Принцип вложенных отрезков (Кантора) Для любой последовательности вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

длины которых стремятся к нулю ($\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$), существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

В множестве рациональных чисел это неверно — пересечение может быть пустым.

3. Принцип сходимости фундаментальных последовательностей (Критерий Коши) Всякая фундаментальная последовательность действительных чисел имеет предел, принадлежащий $\mathbb{R}$.

Пояснение (для будущего): Это означает, что множество действительных чисел полно в метрическом смысле (является полным метрическим пространством). Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n > N : \ |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

4. Принцип монотонной сходимости Всякая ограниченная сверху монотонно возрастающая последовательность имеет предел.

Пояснение (для будущего): Если $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots$ и существует M такое, что $x_n \le M$ для всех n, то существует $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$.

5. Лемма о конечном покрытии (Принцип Бореля-Лебега) Из любого покрытия отрезка системой интервалов можно выбрать конечное подпокрытие.

Пояснение: Это топологическая формулировка непрерывности, эквивалентная другим. Она утверждает, что всякий отрезок $[a, b]$ является компактным множеством.

6. Теорема о сечениях (Дедекинд) $>$ Если множество всех действительных чисел разбито на два непустых класса A и B таких, что каждый элемент класса A меньше любого элемента класса B, то существует единственное число α, которое производит это сечение: все числа $x < \alpha$ попадают в A, а все числа $x > \alpha$ — в B (само число α может попасть в любой из классов).

Пояснение: Это первоначальная конструкция Дедекинда для определения действительных чисел с помощью "сечений". Именно ее будем использовать в данном курсе.

Все эти формулировки эквивалентны в теории действительных чисел. Это означает, что если принять одну из них за аксиому, то все остальные можно доказать как теоремы. Обычно за основу берётся сечение Дедекинду или принцип supremum.

1.1.2. Метод математической индукции

Метод математической индукции — это мощный и строгий метод доказательства утверждений, справедливых для всех натуральных чисел n (или для всех натуральных чисел, начиная с некоторого n_0). Он основан на аксиоме Архимеда.

Его суть заключается в том, чтобы доказать бесконечную серию утверждений $P(1), P(2), P(3), \ldots$, выполнив всего два шага.

Схема доказательства по индукции

Доказательство того, что утверждение $P(n)$ верно для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ (или для всех $n \geq n_0$), состоит из двух критически важных шагов:

1. База индукции.

Доказать, что утверждение $P(n)$ верно для первого допустимого значения n (чаще всего для $n = 1$).

2. Индукционный переход (шаг индукции).

Доказать, что если утверждение $P(n)$ верно для некоторого произвольного натурального $n = k$ (предположение индукции), то оно будет верно и для следующего значения $n = k + 1$, т.е. из справедливости $P(k)$ следует справедливость $P(k + 1)$.

Записывается это следующим образом:

1. $P(1)$ — истинно.
2. $\forall k \in \mathbb{N} : \quad P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ — истинно.

Если оба этих шага выполнены, то по принципу математической индукции утверждение $P(n)$ считается доказанным для всех натуральных n.

Образная аналогия

Метод индукции часто сравнивают с домино. Если вы:

1. Повалите первое костяшку домино (база индукции).
2. Убедитесь, что падение любой k-ой костяшки гарантированно повалит следующую, $(k + 1)$-ую (индукционный переход), то можно быть уверенным, что упадут все костяшки.

Пример. Утверждение: Сумма первых n нечётных чисел равна n^2.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Доказательство по индукции:

1. База индукции. Проверим для $n = 1$.

Левая часть: 1. Правая часть: $1^2 = 1$. $1 = 1$ — верно. База доказана.

2. Индукционный переход. Предположение индукции: Допустим, что формула верна для некоторого $n = k$, то есть

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2. \quad \text{(Это наше предположение)}$$

Требуется доказать, что тогда формула верна и для $n = k + 1$, то есть

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2.$$

Упрощаем: $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$. Значит, нужно доказать:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Доказательство: Возьмём левую часть и воспользуемся нашим предположением индукции:

$$(1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Мы получили правую часть. Индукционный переход доказан.

Вывод: По принципу математической индукции, данная формула верна для всех натуральных n.

Вариации метода

Индукция с неединичной базой. Утверждение доказывается не для всех $n \in \mathbb{N}$, а для всех $n \geq n_0$ (например, $n \geq 5$). В этом случае база индукции проверяется для $n = n_0$.

Полная (сильная) индукция. В индукционном переходе предполагается, что утверждение P верно не только для $n = k$, но и для всех предыдущих значений $n = 1, 2, \ldots, k$, и из этого доказывается справедливость $P(k + 1)$.

1.1.2.1. Доказательство методом математической индукции обобщенного неравенства Бернулли.

Обобщённое неравенство Бернулли утверждает, что для любого действительного числа $x \geq 0$, $x \neq 0$, и любого натурального числа $n \geq 2$ выполняется неравенство:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n - 1)}{2}x^2.$$

База индукции. Проверим для $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Сравним с правой частью:

$$1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x + \frac{2 \cdot 1}{2}x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Получаем равенство $1 + 2x + x^2 = 1 + 2x + x^2$, значит, неравенство выполняется (более того, обращается в равенство). База индукции доказана.

Предположение индукции. Предположим, что неравенство верно для некоторого натурального $n = k \geq 2$:

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2. \tag{1}$$

Индукционный переход. Требуется доказать, что неравенство верно для $n = k + 1$:

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2. \tag{2}$$

Умножим обе части предположения индукции (1) на $(1+x)$ (это положительное число, так как $x > -1$, поэтому знак неравенства сохраняется):

$$(1 + x)^{k+1} \geq \left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1 + x).$$

Раскроем скобки в правой части:

$$\left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1 + x) = 1 \cdot (1 + x) + kx \cdot (1 + x) + \frac{k(k-1)}{2}x^2 \cdot (1 + x).$$

Раскроем каждое слагаемое:

$$= 1 + x + kx + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Сгруппируем подобные члены:

$$= 1 + (1 + k)x + \left(k + \frac{k(k-1)}{2}\right)x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Упростим коэффициент при x^2:

$$k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{2k + k(k-1)}{2} = \frac{2k + k^2 - k}{2} = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Таким образом, правая часть принимает вид:

$$1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Итак, мы получили:

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3. \tag{3}$$

Сравним правую часть неравенства (3) с требуемой правой частью в (2):

$$1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3 \quad \text{и} \quad 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)k}{2}x^2.$$

Они отличаются на слагаемое $\frac{k(k-1)}{2}x^3$. По условию $x \geq 0$, т.е. данное слагаемое неотрицательно, что и доказывает утверждение индукционного шага. Таким образом, по принципу математической индукции обобщённое неравенство Бернулли доказано для всех натуральных $n \geq 2$ и для всех $x \geq -1$.

1.1.2.2. Бином Ньютона

Формула бинома Ньютона утверждает, что для любых действительных (или комплексных) чисел a и b и для любого натурального числа n выполняется равенство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

Доказательство методом математической индукции.

1. База индукции. Проверим для $n = 1$:

$$(a+b)^1 = a + b.$$

Правая часть:

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a + b.$$

База индукции верна.

2. Предположение индукции. Предположим, что формула верна для некоторого натурального $n = m$:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k. \tag{1}$$

3. Индукционный переход. Требуется доказать, что формула верна для $n = m + 1$:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k. \tag{2}$$

Для доказательства умножим обе части предположения (1) на $(a + b)$:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Раскроем скобки:

$$(a+b)^{m+1} = a \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Преобразуем каждое слагаемое:

Первая сумма:

$$a \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k.$$

Сделаем замену индекса: пусть $j = k$. Тогда это сумма:

$$\sum_{j=0}^{m} C_m^j a^{m+1-j} b^j. \tag{3}$$

Вторая сумма:

$$b \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}.$$

Сделаем замену индекса: пусть $j = k + 1$, тогда $k = j - 1$, и при $k = 0$ $j = 1$, при $k = m$ $j = m + 1$. Получим:

$$\sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m-(j-1)} b^j = \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j. \tag{4}$$

Теперь сложим (3) и (4):

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j a^{m+1-j} b^j + \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j.$$

Выделим отдельно слагаемые при $j = 0$ из первой суммы и при $j = m + 1$ из второй суммы:
При $j = 0$: первая сумма даёт $C_m^0 a^{m+1} b^0 = a^{m+1}$. При $j = m+1$: вторая сумма даёт $C_m^m a^0 b^{m+1} = b^{m+1}$.
Остальные слагаемые (для $j = 1$ до $j = m$) можно объединить в одну сумму:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} \left(C_m^j + C_m^{j-1}\right) a^{m+1-j} b^j.$$

Вспомним свойство биномиальных коэффициентов (формула Паскаля):

$$C_m^j + C_m^{j-1} = C_{m+1}^j.$$

Подставим это:

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Заметим, что: $a^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} b^0$, $b^{m+1} = C_{m+1}^{m+1} a^0 b^{m+1}$.
Тогда всю сумму можно записать как единую сумму от $j = 0$ до $j = m + 1$:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j a^{m+1-j} b^j.$$

Это в точности совпадает с требуемой формулой (2) для $n = m + 1$ (индекс j можно заменить на k).
4. Вывод. По принципу математической индукции формула бинома Ньютона доказана для всех натуральных n.

1.1.3. Множество Кантора

Множество Кантора (также известное как канторово множество или канторов совершенный набор) — это один из самых известных фракталов, который строится путём последовательного удаления частей из единичного отрезка. Несмотря на то, что в процессе построения удаляется бесконечно много интервалов, множество Кантора остаётся несчётным и имеет нулевую меру Лебега.

Построение множества Кантора.
1. Шаг 0: Возьмём единичный отрезок $C_0 = [0, 1]$.
2. Шаг 1: Удалим из него среднюю треть — открытый интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Останутся два отрезка:

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

3. Шаг 2: Удалим среднюю треть из каждого из оставшихся отрезков. То есть удалим интервалы $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Останутся четыре отрезка:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

4. Шаг n: Продолжаем процесс бесконечно: на каждом шаге из всех оставшихся отрезков удаляем их среднюю треть. После n шагов получаем множество C_n, состоящее из 2^n замкнутых отрезков, каждый длиной $\frac{1}{3^n}$.
5. Множество Кантора определяется как пересечение всех множеств C_n:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Свойства множества Кантора
1. Мощность (несчётность). Множество Кантора имеет мощность континуума, то есть оно несчётно. Это можно доказать, установив взаимно однозначное соответствие между точками множества C и числами из отрезка $[0, 1]$, записанными в троичной системе счисления: - При построении C удаляются все точки, которые в троичной записи содержат цифру 1 (кроме случая, когда бесконечное количество 1 стоит в конце, что эквивалентно ...200... . . .). - Таким образом, C состоит из точек, которые можно записать в троичной системе только с цифрами 0 и 2. - Таких последовательностей столько же, сколько последовательностей из 0 и 1 (в двоичной системе), то есть мощность континуума.

2. Мера Лебега. На каждом шаге удаляется часть отрезка: - На первом шаге удаляется интервал длины $\frac{1}{3}$. - На втором шаге удаляется 2 интервала общей длины $2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$. - На n-ом шаге удаляется 2^{n-1} интервалов общей длины $\frac{2^{n-1}}{3^n}$.

Общая длина удалённых интервалов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом, мера множества Кантора:

$$\mu(C) = \mu([0,1]) - 1 = 0.$$

3. Нигде не плотность. Множество Кантора нигде не плотно в $[0,1]$: в любом интервале $(a,b) \subset [0,1]$ найдётся подынтервал, не содержащий точек из C. Это следует из того, что на каждом шаге удаляются целые интервалы.

4. Фрактальная структура. Множество Кантора самоподобно: любая его часть (например, пересечение C с $[0,\frac{1}{3}]$) гомеоморфна всему множеству C с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$.

Множество Кантора выглядит как бесконечно много точек, равномерно распределённых на отрезке, но при этом не образующих никаких интервалов. Это классический пример множества, которое одновременно: - несчётно,
- имеет нулевую меру,
- нигде не плотно.

Оно широко используется в анализе, теории меры и динамических системах как контринтуитивный пример.

1.1.4. Лемма Кантора о вложенных отрезках

формулируется следующим образом:

Теорема 1. *(Лемма Кантора). Пусть дана последовательность отрезков*

$$I_1 = [a_1, b_1] \supseteq I_2 = [a_2, b_2] \supseteq I_3 = [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Тогда пересечение всех этих отрезков состоит ровно из одной точки:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}.$$

$\triangleright$

1. Существование общей точки. Рассмотрим множества левых концов отрезков $\{a_n\}$ и правых концов $\{b_n\}$. В силу вложенности отрезков для любых $n, m \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$a_n \le b_m.$$

Это следует из того, что если $n \le m$, то $a_n \le a_m \le b_m \le b_n$, а если $n > m$, то $a_n \le b_n \le b_m$. Таким образом, множество $\{a_n\}$ ограничено сверху (например, любым b_m), а множество $\{b_n\}$ ограничено снизу (например, любым a_n). Из аксиомы непрерывности вытекает, что существует число c, такое, что $a_n \le c \le b_k, \forall n, k \in \mathbb{N}$.

В частности, $a_n \le c \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, а значит $c \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$, то есть

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \emptyset$$

.

2. Единственность точки. Предположим, существует другая точка $c' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, $c' \ne c$. Пусть, для определённости, $c' > c$. Тогда для любого n выполняется:

$$c' - c \le b_n - a_n.$$

Но так как разность $(b_n - a_n)$ стремится к 0, то для достаточно больших n будет выполняться $b_n - a_n < c' - c$, что приводит к противоречию. Аналогичное противоречие возникает при $c' < c$. Следовательно, точка c единственна.

Таким образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$. $\triangleleft$

1.1.5. Теорема Бореля-Лебега

Определение понятия покрытия.

Говорят, что система интервалов $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}, \alpha \in A$ покрывает отрезок [a,b], если

$$\forall x \in [a,b] \exists U_{\alpha 0} : x \in U_{\alpha 0}.$$

Любой отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ является компактным множеством. То есть из любого открытого покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 2. *Бореля-Лебега. Всякое открытое покрытие отрезка* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *содержит конечное подпокрытие.*

Теорема означает, что любой отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ является компактным множеством. То есть из любого открытого покрытия отрезка можно выбрать конечное подпокрытие.

$\triangleright$ Доказательство основано на использовании леммы Кантора о вложенных отрезках.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}, \alpha \in A$ — произвольное открытое покрытие отрезка $[a,b]$, где A – некоторое множество индексов. Требуется доказать, что существует конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$ такой, что

$$[a,b] \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}.$$

Доказательство теоремы от противного:

1. Предположим, что существует открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отрезка $[a,b]$, которое не содержит конечного подпокрытия.

2. Построение последовательности вложенных отрезков:
Разделим отрезок $[a,b]$ пополам: $[a,c]$ и $[c,b]$, где $c = \frac{a+b}{2}$.
Хотя бы один из этих двух отрезков не допускает конечного подпокрытия из $\mathcal{U}$ (иначе всё покрытие $[a,b]$ было бы конечным). Обозначим этот отрезок через $I_1 = [a_1, b_1]$.
Повторим процесс: разделим I_1 пополам и выберем ту половину, которая не допускает конечного покрытия. Обозначим её $I_2 = [a_2, b_2]$.
Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных отрезков:

$$I_n = [a_n, b_n] \quad \text{таких, что} \quad I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots,$$

каждый из которых не покрывается конечным числом элементов из $\mathcal{U}$.

3. Применение леммы Кантора: Длина отрезка I_n равна $\frac{b-a}{2^n} \to 0$.
По лемме Кантора существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам I_n:

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

4. Получение противоречия.
Так как $c \in [a,b]$, а $\mathcal{U}$ – открытое покрытие, существует множество $U_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ такое, что $c \in U_{\alpha_0}$.
Поскольку U_{α_0} открыто, найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что интервал $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$.
Так как длины отрезков I_n стремятся к нулю, существует номер N такой, что длина I_N меньше ε: $|I_N| < \varepsilon$.
Тогда, поскольку $c \in I_N$, весь отрезок I_N содержится в интервале $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, а значит, и в U_{α_0}:

$$I_N \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}.$$

Но это означает, что отрезок I_N покрывается всего одним множеством U_{α_0} из покрытия $\mathcal{U}$, что противоречит построению I_N (который не должен покрываться конечным подпокрытием).

5. Вывод: Предположение о том, что покрытие $\mathcal{U}$ не содержит конечного подпокрытия, неверно. Следовательно, любое открытое покрытие отрезка $[a,b]$ содержит конечное подпокрытие (отрезок $[a,b]$ является компактным множеством в $\mathbb{R}$). $\triangleleft$

Замечание Это доказательство использует:
Лемму Кантора (которая сама опирается на аксиому полноты $\mathbb{R}$).
Метод деления отрезка пополам (метод Больцано-Вейерштрасса).
Ключевую идею о том, что точка c (общая для всех вложенных отрезков) должна лежать в некотором элементе покрытия, который "захватывает"целиком один из маленьких отрезков. Таким образом, теорема справедлива и в более общих пространствах, удовлетворяющих аксиоме полноты.

1.1.6. Мощность множеств

Если в каждом из двух множеств лишь конечное число элементов, то эти множества можно сравнить по количеству этих самых элементов. Логично считать, что то множество оказывается «мощнее», в котором количество элементов больше. Если же количество элементов в двух множествах одинаково, то множества разумно считать «равномощными».

Часто бывает важным выяснить, «одинаково» ли количество элементов в двух разных множествах. В случае конечных множеств этот вопрос может быть решен весьма просто: достаточно пересчитать элементы каждого множества. Проблема заключается в том, что описанный подход не применим к бесконечным множествам.

В то же время, если два конечных множества A и B имеют одинаковое количество элементов, то между элементами этих множеств можно установить биекцию . Такой подход «сравнения» двух множеств уже прекрасно применим и к бесконечным множествам. Множества называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Класс эквивалентности по отношению равномощности, к которому принадлежит множество A, называется мощностью A, кардиналом или кардинальным числом множества A, и обозначается $|A|$ или $\operatorname{card} A$. В этом разделе рассмотрим 2 теоремы. Первая – про равномощность множеств рациональных и натуральных чисел. Вторая – про несчетность множества действительных чисел.

1.1.6.1. Счетность множества рациональных чисел

Теорема 3. *Теорема: Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является счётным.*

$\triangleright$

Для доказательства счётности $\mathbb{Q}$ достаточно построить явную биекцию (взаимно однозначное соответствие) между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или хотя бы показать, что такое соответствие существует, доказав, что $\mathbb{Q}$ можно представить в виде последовательности.

Основная идея

Ключевая идея заключается в том, что любое рациональное число можно единственным образом представить в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$ (целое), $q \in \mathbb{N}$ (натуральное), и что таких пар (p, q) "не больше чем натуральных чисел.

Метод I: Канторовская нумерация (таблица дробей)

Это самый наглядный и известный метод.

1. Расположим дроби в таблицу. Рассмотрим бесконечную таблицу, в которой строка соответствует знаменателю q, а столбец — числителю p. В ячейке на пересечении p-го столбца и q-й строки запишем дробь $\frac{p}{q}$. Важно учесть все целые числа (дроби со знаменателем 1) и отрицательные числа. Для простоты сначала докажем счётность множества *положительных* рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$. Таблица для $\mathbb{Q}^+$ будет иметь вид:
p=1: 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...
p=2: 2/1, 2/2, 2/3, 2/4, 2/5, ...
p=3: 3/1, 3/2, 3/3, 3/4, 3/5, ...
p=4: 4/1, 4/2, 4/3, 4/4, 4/5, ...
...

В этой таблице встречаются все положительные рациональные числа (и даже повторяются, например, $1/1 = 2/2 = 3/3$).

2. Пронумеруем элементы таблицы. Чтобы перенумеровать все элементы бесконечной таблицы, нельзя обходить её построчно или постолбцово (это займёт бесконечное время на первой же строке). Вместо этого будем обходить таблицу по диагоналям.
Диагональ 1: $\frac{1}{1}$
Диагональ 2: $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$
Диагональ 3: $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$
Диагональ 4: $\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$
и т.д.

Обходя диагонали сверху вниз (или снизу вверх), мы получаем последовательность:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

3. Удалим повторения. В полученной последовательности каждое положительное рациональное число встречается бесконечно много раз (все несократимые и сократимые дроби, ему равные). Чтобы получить биекцию с $\mathbb{N}$, мы должны пропускать повторяющиеся числа. Проходя по последовательности, мы будем включать в нумерацию только те дроби, которые появляются в несократимом виде впервые. $\frac{1}{1}$ -> номер

1
$\frac{2}{1}$ -> номер 2
$\frac{1}{2}$ -> номер 3
$\frac{3}{1}$ -> номер 4
$\frac{2}{2}$ — сократима (равна $\frac{1}{1}$), уже была -> пропускаем.
$\frac{1}{3}$ -> номер 5
$\frac{4}{1}$ -> номер 6
$\frac{3}{2}$ -> номер 7
$\frac{2}{3}$ -> номер 8
$\frac{1}{4}$ -> номер 9
и т.д.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и положительными рациональными числами: $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}^+$. Следовательно, $\mathbb{Q}^+$ — счётно.

4. Учтём отрицательные числа и ноль. Чтобы доказать счётность всего $\mathbb{Q}$, можно аналогичным образом перенумеровать все дроби вида $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Ещё проще — использовать уже доказанную счётность $\mathbb{Q}^+$. Множество отрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}^-$ находится в биекции с $\mathbb{Q}^+$ (отображение $x \mapsto -x$). Множество $\{0\}$ очевидно счётно.
Объединение трёх счётных множеств счётно. Можно записать всю последовательность, чередуя элементы:

$$0,\ r_1,\ -r_1,\ r_2,\ -r_2,\ r_3,\ -r_3,\ \ldots$$

где $\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ — нумерация $\mathbb{Q}^+$.

Вывод: Поскольку существует сюръекция (отображение "на") из $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$ (наша нумерация, даже с повторениями), а $\mathbb{N}$ — бесконечно, то по определению $\mathbb{Q}$ является счётным множеством.

Метод II : Использование теоремы о счётности объединения

Это более формальное доказательство.

1. Для каждого натурального $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество:

$$A_q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Каждое такое множество A_q очевидно счётно, так как находится в биекции с $\mathbb{Z}$ (счётным): $p \leftrightarrow \frac{p}{q}$.

2. Заметим, что множество всех рациональных чисел можно представить как объединение всех этих множеств:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q.$$

Это объединение счётного числа счётных множеств.

3. По теореме теории множеств объединение счётного семейства счётных множеств является счётным множеством. Следовательно, $\mathbb{Q}$ — счётно. Отметим, что данное свойство множеств доказывается аналогично доказательству I, т.е. в основе лежит метод суммирования по диагоналям.

В результате получаем, что между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, то есть $\mathbb{Q}$ является счётным.

1.1.6.2. Несчетность множества действительных чисел на отрезке [0, 1].

Доказательство 1: Канторовский диагональный метод

Это самое известное и прямое доказательство, предложенное Георгом Кантором. Использует запись действительных чисел в виде конечных или бесконечных десятичных дробей.

Предположение: Допустим, что множество всех действительных чисел на отрезке [0, 1] счётно. Это значит, что все числа из этого множества можно перенумеровать, то есть представить в виде бесконечной последовательности: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$

Цель: Показать, что при таком предположении мы всегда сможем построить число y из отрезка [0, 1], которого нет в этой последовательности. Это приведет к противоречию, значит, наше исходное предположение было неверным.

Шаги доказательства:

1. Запишем числа в виде бесконечных десятичных дробей. Чтобы избежать двусмысленности с числами, имеющими два представления (например, 0.1999... = 0.2000...), договоримся, что для каждого числа мы будем использовать только один из вариантов (например, всегда запретим бесконечные последовательности из 9).

2. Выпишем нашу гипотетическую последовательность:
$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}, a_{14}, ...$

$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}, a_{24}, ...$
$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}, a_{34}, ...$
... $x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}, a_{n4}, ...$
...
Здесь каждый символ a_{nm} — это цифра от 0 до 9 на n-м знаке после запятой у m-го числа.

3. Построим новое число y:
$y = 0, b_1b_2b_3b_4...$
Цифры b_n этого числа выберем по следующему правилу, чтобы оно отличалось от каждого x_n:
b_1 выберем любой цифрой, не равной a_{11} (первой цифре первого числа). b_2 выберем любой цифрой, не равной a_{22} (второй цифре второго числа). b_3 выберем любой цифрой, не равной a_{33}‘ (третьей цифре третьего числа). ... b_n выберем любой цифрой, не равной a_{nn} (n-ой цифре n-го числа). ...

4. Анализ построенного числа y:
y является бесконечной десятичной дробью в интервале [0, 1].
$y \neq x_1$, потому что у них различается хотя бы первая цифра после запятой ($b_1 \neq a_{11}$).
$y \neq x_2$, потому что у них различается вторая цифра ($b_2 \neq a_{22}$).
... $y \neq x_n$, потому что у них различается n-ая цифра ($b_n \neq a_{nn}$). ...

5. Противоречие. Мы построили число $y \in [0, 1]$, которого нет в исходной последовательности $x_1, x_2, x_3, ...$ Но мы предполагали, что в этой последовательности есть ВСЕ числа из [0, 1].

Вывод: Наше исходное предположение о счётности множества [0, 1] ложно. Значит, множество действительных чисел на отрезке [0, 1] несчётно.

Доказательство II: Метод вложенных отрезков (лемма Кантора о вложенных отрезках)

Это доказательство опирается на свойство полноты действительных чисел.

Идея: Предположить, что мы можем пронумеровать все числа отрезка [0, 1]. Затем построить последовательность вложенных отрезков, каждый из которых целенаправленно исключает одно из пронумерованных чисел. Пересечение всех этих отрезков будет непустым (содержать хотя бы одно число), но это число по построению не будет совпадать ни с одним из чисел нашей нумерации.

Шаги доказательства:

1. Снова предположим, что множество [0, 1] счётно. Запишем все его элементы в последовательность: $r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ...$

2. Построим последовательность вложенных отрезков $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$:
Шаг 1: Разобьём отрезок [0, 1] на три равные непересекающиеся части. Число r_1 не может находиться сразу во всех трёх частях. Выберем в качестве I_1 любую из этих трёх частей, которая НЕ содержит r_1.

Например, если $r_1 = 0{,}4$, то он лежит в [0,333..., 0,666...). Мы можем выбрать $I_1 = [0, 1/3]$.
Шаг 2: Теперь возьмём отрезок I_1 и снова разобьём его на три равные части. Среди них выберем ту часть I_2, которая НЕ содержит r_2.
...
Шаг n: Имея отрезок I_{n-1}, разобьём его на три части и выберем I_n так, чтобы он НЕ содержал r_n.

3. Рассмотрим построенную последовательность отрезков:
Это последовательность замкнутых вложенных отрезков ($I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$).
Длина отрезка I_n равна $(1/3)^n$ и стремится к нулю при $n \to \infty$.

4. Применим Лемму Кантора о вложенных отрезках: Эта лемма (следствие из аксиомы полноты) утверждает, что пересечение любой системы вложенных замкнутых отрезков, длины которых стремятся к нулю, состоит ровно из одной точки. Пусть $y \in [0, 1]$ — это единственная точка, такая что $y = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

5. Покажем, что y не было в исходной последовательности:
Для любого n мы строили отрезок I_n так, чтобы он не содержал число r_n. При этом точка y лежит во ВСЕХ отрезках I_n.
Следовательно, y не может быть равно ни одному r_n (т.к. если бы $y = r_n$, то оно не могло бы лежать в I_n, но оно лежит). Значит, $y \notin r_1, r_2, r_3, ...$

6. Противоречие: Мы нашли число $y \in [0, 1]$, которого нет в заведомо полной последовательности всех чисел этого отрезка. ◁

Вывод: Предположение о счётности множества [0, 1] снова приводит к противоречию. Следовательно, оно несчётно.

Итог: Оба доказательства используют метод «от противного», но применяют принципиально разные конструкции для получения противоречия: первое — алгебраическую («диагональную»), второе — геометрическую (теоретико-множественную и топологическую, опирающуюся на свойства непрерывности действительных чисел).

1.1.7. Инфимум и супремум

Инфимум и супремум — это обобщения понятий минимума и максимума для множеств, которые могут не достигать своих границ.

Определения

1. Супремум (supremum) или точная верхняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$: Это наименьшее число $M \in \mathbb{R}$, которое является верхней границей для A. Обозначение: $\sup A$. Формализованное определение: $\forall x \in A : x \leq M$ (M — верхняя граница). $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : x > M - \varepsilon$ (M — наименьшая из таких границ).

2. Инфимум (infimum) или точная нижняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$: Это наибольшее число $m \in \mathbb{R}$, которое является нижней границей для A. Обозначение: $\inf A$. Формально: $\forall x \in A : x \geq m$ (m — нижняя граница). $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : x < m + \varepsilon$ (m — наибольшая из таких границ).

Доказательство существования супремума у ограниченного сверху множества

Это доказательство опирается на аксиому полноты (непрерывности) действительных чисел.

Доказательство (методом Дедекинда)

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое множество, ограниченное сверху. Это значит: $A \neq \emptyset$. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq M$.

Разобьём все действительные числа на два класса: Класс L (нижний класс): Все числа $a \in \mathbb{R}$, которые меньше или равны некоторому элементу из A. Формально:

$$L = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A : a \leq x\}.$$

Класс R (верхний класс): Все числа $b \in \mathbb{R}$, которые являются верхними границами для A. Формально:

$$R = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A : x \leq b\}.$$

Проверим, что это сечение:
1. Классы не пусты: $L \neq \emptyset$, так как A непусто. Если $x_0 \in A$, то $x_0 - 1 \in L$. $R \neq \emptyset$, так как A ограничено сверху (по условию).
2. Любое число попадает в один из классов: По построению.
3. Всякое число из L меньше всякого числа из R: Пусть $a \in L$ и $b \in R$. По определению, существует $x \in A$ такой, что $a \leq x$. Но так как $b \in R$, то $x \leq b$. Следовательно, $a \leq b$.

По аксиоме Дедекинда существует единственное число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти классы: $\forall a \in L : a \leq c$, $\forall b \in R : c \leq b$.

Покажем, что $c = \sup A$:
1. c — верхняя граница: Предположим, что это не так. Тогда существует $x \in A$ такой, что $x > c$. Но тогда $c < x \leq b$ для любого $b \in R$. Это противоречит тому, что c разделяет классы (число c должно быть больше или равно любого $a \in R$). Следовательно, $\forall x \in A : x \leq c$.
2. c — наименьшая верхняя граница: Предположим, что существует меньшая верхняя граница $c' < c$. Тогда $c' \in R$ (по определению R) является новой верхней границей. Противоречие. Иначе говоря, выбрав из двух верхних границ наименьшую, получим, что большая граница не является наименьшей.

Оба условия выполнены, поэтому $c = \sup A$.

Замечание

Аналогично доказывается существование инфимума у ограниченного снизу множества (можно рассмотреть множество $-A = \{-x \mid x \in A\}$ и использовать связь $\inf A = -\sup(-A)$). В рациональных числах $\mathbb{Q}$ супремум может не существовать даже у ограниченного множества (например, $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ не имеет супремума в $\mathbb{Q}$), что показывает существенное отличие $\mathbb{R}$ от $\mathbb{Q}$.

Для неограниченных множеств в качестве супремума и инфимума берут$\pm\infty$.

1.1.8. Приближение иррациональных чисел рациональными

Тропический год определяется как период между двумя прохождениями центра Солнца через точку весеннего равноденствия, представляющую собой одну из двух точек пересечения эклиптики и небесного экватора. По современным подсчетам 1 год= 365,24220 суток. Обозначим дробную часть этого выражения через X. Это число рациональное, но оно является приближением к некоторому числу, которое может и не быть рациональным. С древних времен люди пытались найти приближение для этого числа. Точнее, задача заключается подобрать чередование простых и високосных лет так, чтобы средняя продолжительность года была как можно ближе к истинной. При этом полный период такого календаря должен быть по возможности меньше.

Одним из самых первых календарей является юлианский, который введен Юлием Цезарем в 46 г. до н.э. Некоторые изменения внес Октавиан Август в 8 г. до н.э.. В их честь названы месяцы июль и август. Календарь использовался в Европе до конца 16 века, а православной церковью используется до сих пор. Для этого календаря X=1/4. Погрешность составляет 11 мин 14 с.

Мы живем по григорианскому календарю, который ввел папа Григорий 13 в 1582 г. для католических стран. Протестанты говорили: “ Лучше разойтись с Солнцем, чем сойтись с папой”. Из-за этого в протестантских странах календарь ввели на 50-150 лет позднее. Для этого календаря X=97/400, а погрешность 26 с.

В отличие от юлианского календаря григорианский основан не на подходящих дробях, а на десятичных. Огромный период приводит к тому, что сдвигается дата весеннего равноденствия (21-22 марта).

Более точный (и математически правильный календарь) был предложен Омаром Хайямом и 8 веков использовался в Иране с некоторыми изменениями. Для него X= 8/33, а погрешность составляет 19 с. (в использовавшемся в Иране более сложном варианте варианте X=55/227, а погрешность составляла 4с.)

Наиболее точным календарем является календарь немецкого астронома И.Медлера 1864г. Для него X=31/128 и погрешность 1с. Этот календарь нигде не использовался.

Отметим, что наихудшее приближение имеет место для числа, называемого “золотым сечением” $\sigma = (1+\sqrt{5})/2$. Для π известны два приближения – 22/7 и 355/113, причем второе отличается от π только в седьмом знаке после запятой и было известно в Китае в 5в.