Option-Pricing

Stefan Daniel Grunmach und Roman Haak
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

den 20. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Binomialmodell

1.1 Derivate

Ein Derivat ist ein gegenseitiger Vertrag, dessen Wert sich vom Zeitwert des Underlying (Basiswert) ableitet. Basiswerte können Wertpapiere (Aktien, Anleihen), finanzielle Kennzahlen (Zinssätze,Wechselkurse usw.) oder Handelsgegenstände (Rohstoffe, Devisen usw.) sein.

1.2 Optionen

Optionen zählen zu der Gruppe der Derivate und statten ihren Besitzer mit dem Recht aus, den Basiswert an oder bis zu einem bestimmten Zeitpunkt zu einem festgelegten Kurs zu kaufen oder verkaufen.

Es gibt grundsätzlich zwei Arten von Optionen. Zum einen gibt es die Kaufoption (im Englischen auch als Call bekannt) und zum anderen die Verkaufsoption (Put).

Mit der Kaufoption verfügt der Besitzer über das Recht, den Basiswert zu kaufen und mit der Verkaufsoption über das Recht, den Basiswert zu verkaufen. Diese Handlungen müssen allerdings nicht zwingend ausgeführt werden, was Optionen von Futures oder Forward Geschäften unterscheidet. Der bei Vertragsabschluss festgelegte Kurs wird auch als Ausübungspreis beziehungsweise Basispreis bezeichnet.

Für jede der zwei Optionsarten bestehen zwei Parteien. Daraus ergeben sich vier verschiedene Markttypen:

1. Käufer von Calls

2. Verkäufer von Calls

3. Käufer von Puts

4. Verkäufer von Puts

Die Kaufposition wird als Long, die Verkaufsposition als Short bezeichnet. Die Short-Position erhält immer im Voraus, bei Abschluss des Kontrakts, eine Prämie. Aus ihr entstehen aber im Nachhinein eventuelle Verbindlichkeiten. Was den Ausübungszeitpunkt angeht, gibt es zwei verschiedene Optionsvarianten. Als amerikanisch werden Optionskontrakte bezeichnet, bei denen die Ausübung jederzeit ausgeführt werden kann. Bei europäischen Optionen ist die Ausübung der Option nur zu einem im Voraus festgelegten Verfallstag möglich.

1.3 Pay-off

Da sowohl ein Call als auch Put nur dann ausgeübt werden, wenn der Spotkurs $S_i = S(t_i, G)$ des Basiswertes G zum Ausübungszeitpunkt t_i, über bzw. unter dem Strike K liegt, ergeben sich für Optionen folgende Auszahlungen(Pay-off):

$CF(t_i, C) = \max(S_i - K, 0)$ Long Call C

$CF(t_i, -C) = -\max(S_i - K, 0)$ Short Call -C

$CF(t_i, P) = \max(K - S_i, 0)$ Long Put P

$CF(t_i, -P) = -\max(K - S_i, 0)$ Long Put -P

1.4 Risikoneutrale Bewertung

1.4.1 Einführung

Nötige Annahmen zur Risikoneutralen Bewertung:

1. Vollständiger Kapitalmarkt (Dadurch lassen sich Derivate durch andere Finanzinstrumente replizieren)

2. Keine Arbitragmöglichkeit (Risikolos Gewinn machen)

Um den heutigen Wert eines Derivats, in einer nicht risikoneutralen Welt, zu bestimmen, ist es notwendig, zukünftige Zahlungsströme mit einem Zinssatz zu diskontieren, der vom risikofreien Zinssatz r abweicht, weil er eine Risikoprämie beinhaltet. Dies ist schwer durchzuführen, da die korrekte Risikoprämie, von der der faire Preis abhängt, in der Realität oft schwer zu bestimmen ist. In einer risikoneutralen Welt können beliebige zukünftige Zahlungsströme jedoch durch den risikofreien Zinssatz diskontiert werden.

Diese Eigenschaft wird genutzt um den Erwartungswert von Detivaten unter Annahme der Risikoneutralität zu berechnen und dann mit dem risikofreien Zinssatz auf den heutigen wert zu diskontieren. Damit erhält man einen fairen Preis für das

Derivat, der auch in nicht risikoneutralen Welten gelten muss.

1.4.2 Motivation

Ökonomisch lässt sich die Gültigkeit der risikoneutralen Bewertung dadurch begründen, dass es unter der Annahme eines vollständigen Kapitalmarkts möglich ist, für das zu bewertende Derivat ein dynamisches Hedgegeschäft zu konstruieren, durch welches das Risiko vollständig eliminiert wird. Wenn der faire Preis eines Derivats in diesem Fall von Risikoprämien abhängen würde, ließen sich Arbitragemöglichkeiten konstruieren, da ein Hedger die Prämien einstreichen könnte, ohne einem Risiko ausgesetzt zu sein. Anders ausgedrückt ist risikoneutrales Bewerten von Derivaten möglich aufgrund der perfekten Korrelation zwischen der zeitlichen Entwicklung des Basiswerts und des Derivatwerts. Im Gegensatz hierzu ist der faire Preis von Nichtderivaten, wie beispielsweise der des Basiswerts selbst, abhängig von der Risikoaffinität der Marktteilnehmer und daher nicht risikoneutral bewertbar. Auch wenn der zugrunde liegende Basiswert nicht direkt gehandelt wird, wie dies beispielsweise für die Short-Rate-Modellen für die Zinsstruktur der Fall ist, ist ein Hedge nicht durchführbar, so dass der Preis von entsprechend bewerteten Zinsderivaten vom Marktpreis des Risikos abhängt und nicht risikoneutral bewertbar ist.

1.4.3 Beispiel

Zur Verdeutlichung soll das folgende, stark vereinfachte Modell des Finanzmarktes betrachtet werden:

Es existiere lediglich eine einzige Aktie und es gebe nur zwei Handelszeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$ (sog. Einperiodenmodell mit einem Wertpapier).Der Aktuelle Aktienkurs von $S_0 = 4$ ist bekannt.Für den zukünftigen Kurs zum Zeitpunkt $t = 1$ wird angenommen, dass die Aktie entweder auf $s_u = 8$ ansteigt oder auf $s_d = 2$ absinkt.Der Wert der Aktie zur Zeit $t = 1$ wird also als Zufallsvariable S_1 angesehen, wobei aber die Wahrscheinlichkeit $p = P(S_1 = s_u)$ eines steigenden Aktienkurses unbekannt ist als auch keine Rolle spielt. Um das Beispiel noch einfacher zu halten, wird ein risikoloser Zinssatz von 0 Prozent angenommen. Das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß P^* wird dadurch bestimmt, dass der Erwartungswert des zukünftigen Aktienkurses $E^*(S_1)$ bezüglich dieses Maßes gleich dem aktuellen Aktienkurs S_0 ist:

$$E^*(S_1) = s_u \cdot p^* + s_d \cdot (1 - p^*) = S_0$$

$p^* = P^*(S_1 = s_u) \in (0,1)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit eines steigenden Kurses unter dem risikoneutralen Maß. (Bei einem von null verschiedenen Zinssatz müsste der Kurs S_1 zusätzlich diskontiert werden.) Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt:

$$8p^* + 2(1 - p^*) = 4$$

also $p^* = \frac{1}{3}$ als eindeutig bestimmte risikoneutrale Wahrscheinlichkeit eines steigenden Aktienkurses.

Es werde nun ein weiteres Wertpapier in diesen Markt eingeführt: eine Call-Option mit Ausübungspreis $K = 5$ auf die Aktie als Basiswert. Die Auszahlung einer solchen Option zum Zeitpunkt t=1 berechnet sich als $C = \max(S_1 - K, 0)$, d. h. der Käufer des Calls erhält $s_u - K = 8 - 5 = 3$ Euro, wenn die Aktie steigt, aber 0 Euro, wenn die Aktie fällt. Mit der risikoneutralen Bewertung ist der faire Preis der Option gegeben durch den Erwartungswert ihrer (diskontierten) Auszahlung bezüglich des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes:

$$E^*(C) = (s_u - K) \cdot p^* + 0 \cdot (1 - p^*) = \tfrac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

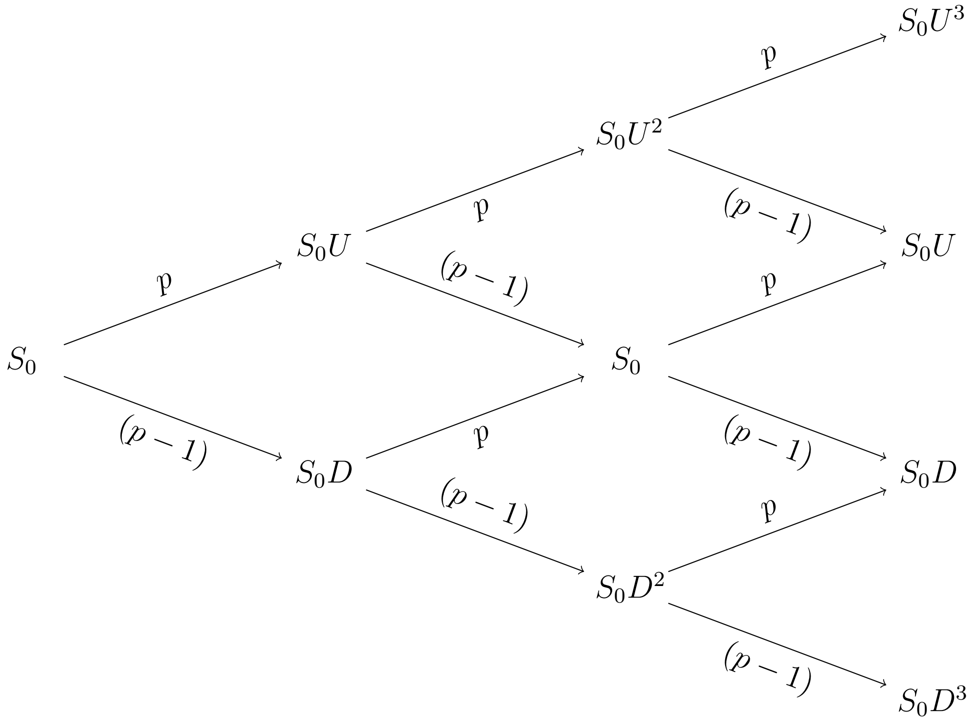
Der faire Preis der Call-Option auf die Aktie beträgt somit 1 Euro.

Dass es sich hierbei tatsächlich um den fairen Preis handelt, zeigt auch die Betrachtung des folgenden Hedgegeschäfts, für das ebenfalls eine Investition von 1 Euro nötig ist. Man nimmt zusätzlich einen Kredit von 1 weiteren Euro auf und kauft mit den 2 Euro eine halbe Aktie. Wenn der Kurs steigt, erhält man 4 Euro und bei fallendem Kurs 1 Euro, muss aber in jedem Fall noch 1 Euro Kredit zurückzahlen (Zinssatz 0 Prozent). Mit dieser Strategie ergibt sich also in beiden Fällen die gleiche Auszahlung von 3 Euro bzw. 0 Euro wie beim Kauf einer Call-Option.

1.5 Mehrstufiges Binomialmodell für europäische Optionen

In diesem Modell wird nun mit einbezogen, dass sich die Aktienkurse mehr als nur einmal ändern können. Das mehrstufige Binomialmodell ist die Diskretisierung des Black-Scholes-Modells.

Hier nun eine Grafik für den 3 Periodigen Fall des Binomialmodells wie im Beispiel oben:


S_0U^3
p
S_0U^2
p
$(p-1)$
S_0U
p
$(p-1)$
S_0U
p
S_0
S_0
$(p-1)$
p
$(p-1)$
S_0D
S_0D
$(p-1)$
p
S_0D^2
$(p-1)$
S_0D^3

2 Black-Scholes-Modell

2.1 Formeln

Zur Bewertung von europäischen Call-Optionen nutzt man heutzutage das sogenannte **Black-Scholes-Modell**, um einen möglichst *fairen* Optionspreis zu bestimmen. Dazu löst man die **Black-Scholes-Differentialgleichung**

$$rK = \frac{\partial K}{\partial t} + rS\frac{\partial K}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 K}{\partial S^2}$$

Dabei sind:

- S : Preis der Aktie
- K: Preis des Derivats (auch Strike-Preis)
- r : Risikoloser, konstanter Zinssatz
- σ : Volatilität
- t : Zeit

Für die europäische Call- bzw. Put-Option ergeben sich so folgende Preisformeln:

$$C = S \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-rt} \cdot \Phi(d_2)$$
$$P = K \cdot e^{-rt} \cdot \Phi(-d_2) - S \cdot \Phi(-d_1)$$

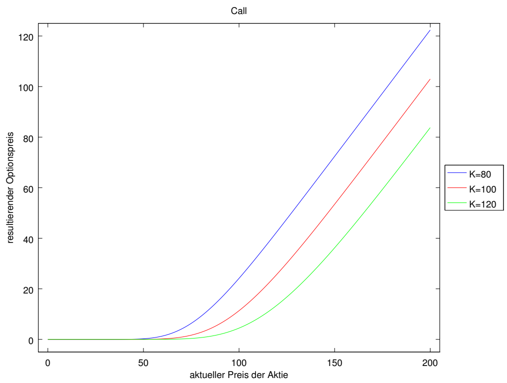
wobei

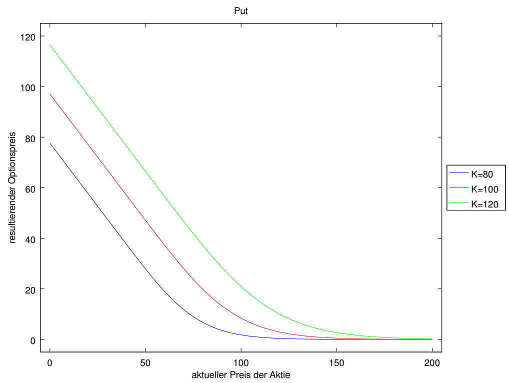
- e : Eulersche Zahl
- Φ : Standard-Normalverteilung
- t : Restlaufzeit der Option
- d_1 : $\frac{ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$
- d_2 : $d_1 - \sigma\sqrt{t}$

2.2 Änderung der Parameter

Wir wollen nun die Abhängigkeit des Options-Preises von den verschiedenen Parametern verdeutlichen, indem wir jeweils eine Variable verändern wollen. Zusätzlich wollen wir die Unterschiede und Gemeinsamkeiten für verschiedene Strike-Preise betrachten; einen unter, einen über und einen gleich dem aktuellen Aktien-Preis. Dabei wollen wir uns lediglich mit europäischen Call-Optionen beschäftigen; der Vollständigkeit halber zeigen wir die Abhängigkeiten auch für Put-Optionen an, jedoch werden wir nicht weiter darauf eingehen.
Sei dazu $S = 100$ €; $K = 80, 100, 120$ €; $r = 3\%$; $\sigma = 25\%$; $t = 1$ Jahr:

2.2.1 Aktienkurs

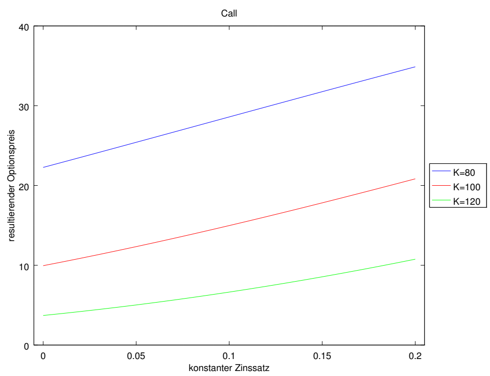


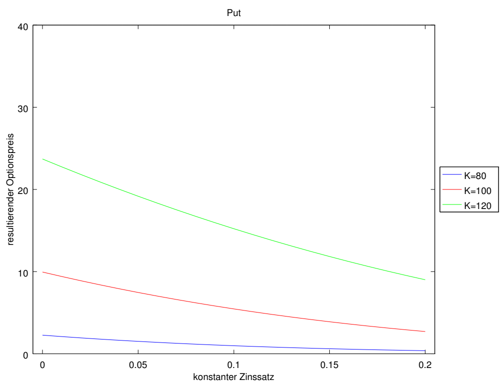


Der Verlauf der Kurven sollte nicht verwunderlich sein: Anfangs ist der Aktien-Preis so gering, dass sich eine Ausübung nicht lohnt, daher ist der Options-Preis zu Beginn Null. Erst bei einem höheren momentanen Aktienkurs ist eine Optionsausübung sinvoll; der Options-Preis steigt.

Vergleicht man die Kurven untereinander, so bemerkt man, dass sich bei einem niedrigeren Strike-Preis die Ausübung eher lohnt, sodass die Kurve früher beginnt zu steigen und der Options-Preis höher ist als bei einem höheren Strike-Preis.

2.2.2 Zins



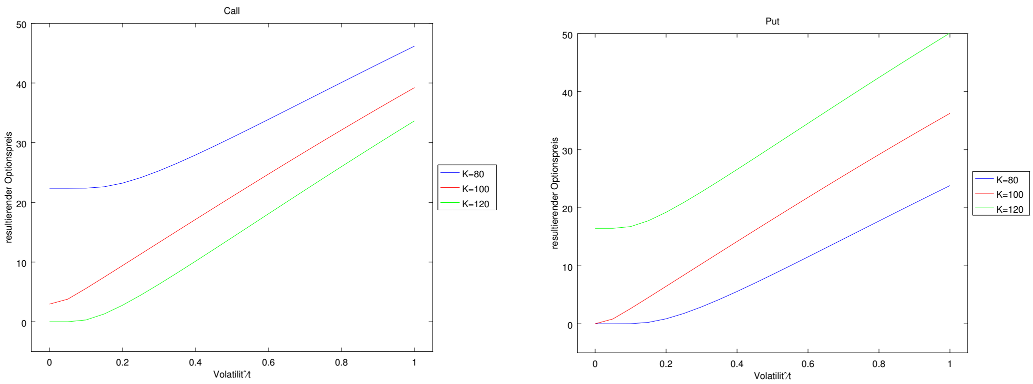


Für realistische Zinswerte steigt der Optionswert näherungsweise linear, da

$$-e^{-t} \sim t - 1$$

für $0 < t << 1$. Dass die Kurve eines niedrigeren Strike-Preises über der eines höheren Preises liegt, ist aus der Formel für den Optionspreis ersichtlich.

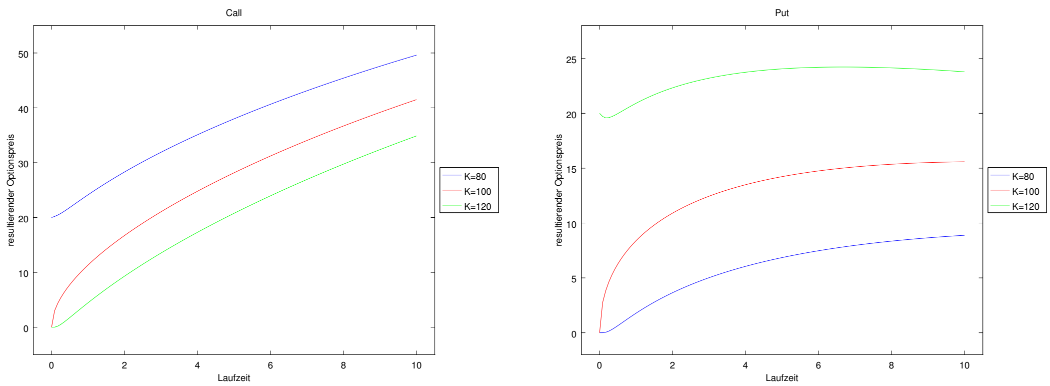
2.2.3 Volatilität



Bei einer steigenden Volatilität breitet sich die Wahrscheinlichkeitsmasse nach außen hin aus, sodass Extremfälle wahrscheinlicher werden. Dadurch erhöht sich die Chance auf Ausübung der Option sowie die erwartete Auszahlung; das lässt sich an dem ansteigenden Options-Preis ablesen.

Auffällig sind die konstanten Options-Preise der blauen bzw. grünen Kurve bei niedrigen Volatilitäten: diese entstehen dadurch, dass das Ausüben bzw. das Verfallen der Option fast sicher sind. Erst bei höheren Volatilitäten steigt auch der Options-Preis. Im Gegensatz dazu steigt die rote Kurve vom Beginn an, da sowohl eine Ausübung als auch ein Verfall der Option wahrscheinlich ist. Das liegt daran, dass der Strike-Preis dem momentanen Aktienkurs entspricht.

2.2.4 Restlaufzeit



Klar ist, dass bei einer Laufzeit von $t = 0$ der Options-Preis der roten und grünen Kurve Null ist, da ein Ausüben der Option sinnlos ist. Für die blaue Kurve ergibt sich für $t = 0$ ein Options-Preis von $100 - 80 = 20$. Von dem Exponentialterm

$-e^{-rt}$ kommt die steigende aber abflachende Form der Kurven.

Interessant ist vor allem das Verhalten der Kurven nahe der Null: die blaue bzw. grüne Kurve entsprechen dort in etwa dem Wert bei $t = 0$, weil eine Ausübung bzw. ein Verfall der Option fast sicher sind. Die rote Kurve dagegen steigt nahe der Null extrem schnell an. Das kommt daher, dass bis zum Schluss die Ausübung unsicher ist und kleine Veränderungen des Aktienkurses entscheiden, ob die Option letztendlich ausgeübt wird oder nicht.

2.3 Kritik am Black-Scholes-Modell

Das Black-Scholes-Modell erleichtert das Bewerten von Derivaten ungemein, da es ein einfach zu handhabendes Modell ist, in dem es lediglich eine Unbekannte gibt; die Volatilität σ.

Jedoch unterliegt diese Bewertung einigen Annahmen, die in der Realität nicht auftreten: Zum einen werden der Zins und die Volatilität als zeitlich konstant angenommen. Heutzutage weiß man aber, dass σ nicht nur zeit-, sondern auch Aktienkursabhängig ist. Es gibt zwar auch Modelle, in denen diese Abhängigkeit berücksichtigt und die Volatilität selbst als Lösung einer weiteren Differentialgleichung behandelt wird, das erschwert aber die Bewertung von Optionen. Zusätzlich führt die Unbekanntheit von σ zu Fehlern.

Eine zweite, nicht unwichtige Fehlerquelle ist die Annahme, dass Aktienkurse sich wie Wiener-Prozesse verhalten. Wie die Erfahrung uns lehrt, treten starke Schwankungen von Aktienkursen häufiger auf, als es die zugrunde liegende Normalverteilung wiedergibt, da sie Extremfälle zu gering gewichtet. Oder mit anderen Worten: Risiken werden unterschätzt!

Hinzukommt die Annahme der Arbitrage-Freiheit, also der Abwesenheit eines risikolosen Gewinns.

Weitere vereinfachende Annahmen sind die Abwesenheit von Transaktionskosten, Steuern, Dividendenauszahlungen und politischen Gegebenheiten; letzteres erlaubt ein uneingeschränktes Handeln der Aktie.

3 Konvergenz des Binomialmodells gegen das Black-Scholes-Modell

Wir legen einen Endzeitpunkt $T > 0$ fest und erhöhen die Periodenanzahl n des Binomialmodells. Nun lässt sich zeigen, dass unter bestimmten Annahmen die Verteilung von S_n^1 gegen eine logarithmische Normalverteilung konvergiert.

Definition 3.1

- $r > -1$ der Zinssatz
- $\sigma > 0$ die Volatilität
- $r^{(n)} := (1+r)^{\frac{T}{n}} - 1$
- $u^{(n)} := e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$
- $d^{(n)} := e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$
- $q^{(n)} := \frac{1+r^{(n)}-d^{(n)}}{u^{(n)}-d^{(n)}}$

Die dazugehörigen Preisprozesse werden als $S^{(n)0}$ und $S^{(n)1}$ bezeichnet.

Lemma 3.2

Für eine Folge konvergierender Binomialmodelle gemäß Definition 3.1 gilt:

1. $S_n^{(n)0} = (1+r)^T$ für alle $n \in \mathbb{N}$,d.h, die Diskontierungsprozesse besitzen in allen betrachteten Binomialmodellen zum Endzeitpunkt den selben Wert.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist jedes Binomialmodell $(n, d^{(n)}, u^{(n)}, r^{(n)}, s_0)$ arbitragefrei.

Lemma 3.3

Es gilt:

1. $\lim_{n\to\infty} q^{(n)} = \frac{1}{2}$
2. $\lim_{n\to\infty} E^{q^{(n)}}[ln(S_n^{(n)1})] = ln(S_0) + T \cdot (ln(1+r) - \frac{\sigma^2}{2})$
3. $\lim_{n\to\infty} Var^{q^{(n)}}[ln(S_n^{(n)1})] = \sigma^2 \cdot T$

Satz 3.4

Die Verteilungen von $ln(S_n^{(n)1})$ konvergiert unter dem zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaß für $n \to \infty$ schwach gegen eine Normalverteilung mit den Parametern $ln(S_0) + T \cdot (ln(1+r) - \frac{\sigma^2}{2})$ und $\sigma^2 \cdot T$,d.h. die Verteilungen von $S_n^{(n)1}$ konvergieren gegen die logarithmische Normalverteilung, also gegen die Verteilung von

$$S_0 \cdot e^{\sigma W_T + T \cdot (ln(1+r) - \frac{\sigma^2}{2})}$$

wobei W_T ein Wiener-Prozess mit Normalverteilung mit Parametern 0 und $\sqrt{T}$ besitzt.

<u>Beweis</u>

Der Beweis ergibt sich aus den vorherigen Lemmata und dem zentralen Grenzwertsatz. $\square$

4 Quellen

1. http://digdok.bib.thm.de/volltexte/2008/3900/pdf/Diplomarbeit_SS _2008_DigDoc_Sergio_Abadesso.pdf
2. https://de.wikipedia.org/wiki/Risikoneutrale_Bewertung
3. http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/ doerner/kap3.pdf
4. https://tu-dresden.de/Members/jan.rudl/teaching/Skript_Finanzmathe_Rudl.pdf