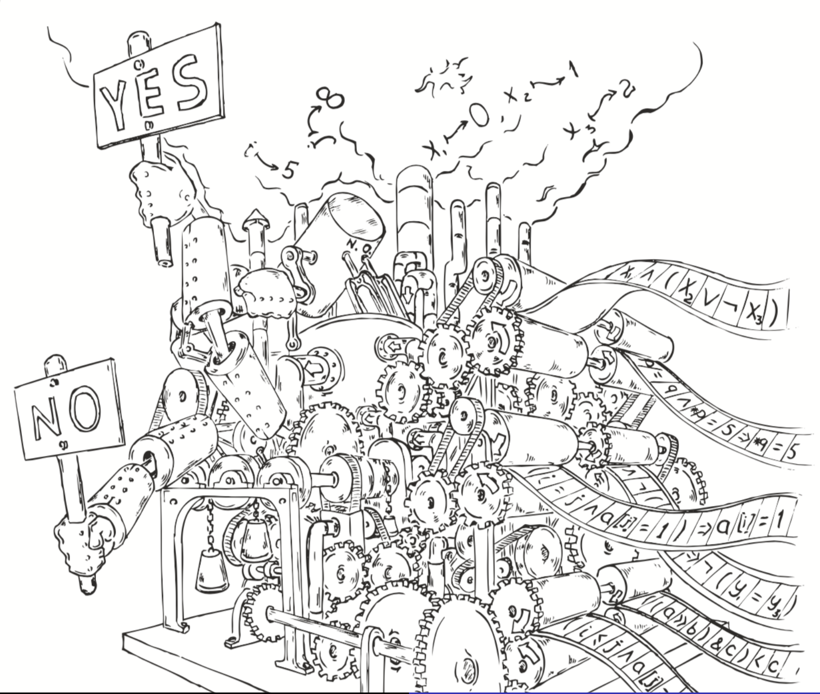

YES
NO
N.O.
i → 5
x1 → 0
x2 → 1
x3 → 2
x ∧ (x2 ∨ ¬x3)
= 5 ⇒ *q = 5
a[i] = 1) ⇒ a[i] = 1
¬(y1 = y3)
((a>>b)&c)<c

Задачи разрешимости логических формул и приложения
Лекция 3. Алгоритм Conflict-Driven Clause Learning

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2022

Элементарный алгоритм

- Брутфорс
- $O(2^n)$

Определения

- α - некоторая (возможно, частичная) оценка формулы ϕ
- $\alpha = \{v_1 \rightarrow \mathit{FALSE}, v_2 \rightarrow \mathit{TRUE}\}$

Определения

Пусть произведена частичная оценка.
Дизъюнкт:

- Выполнимый - если хотя бы один литерал истинен при это частичной оценке
- Противоречивый - если все литералы дизъюнкта оценены ложны
- Единичный - если все литералы дизъюнкта, кроме одного, оценены и ложны
- Неразрешенный - иначе

Правило единичного дизъюнкта

- В единичном дизъюнкте не оцененный литерал должен быть истиным
- Единичный дизъюнкт называют предпосылкой для переменной v, если она была оценена после применения правила единичного дизъюнкта для него

Conflict-driven clause learning

```
function CDCL
    while (TRUE) do
        while (BCP() = "conflict") do
            backtrack-level := Analyze-Conflict();
            if backtrack-level < 0 then return "Unsatisfiable";
            BackTrack(backtrack-level);
        if ¬Decide() then return "Satisfiable";
```

Описание функций

- Decide() - ложь, тогда и только тогда, когда все переменные оценены. Оценивает переменную
- BCP() - "conflict тогда и только тогда, когда есть конфликтный дизъюнкт
- Analyze-Conflict() - на какой уровень принятия решений нужно вернуться. Если "conflict то добавляет блокирующий дизъюнкт
- BackTrack(dl) - устанавливает уровень принятия решений dl и убирает из оценки переменные, которые были вычислены после dl

Граф следствий

- Будем писать $x_i@dl$, если на уровне принятия решений dl мы присвоили переменной x_i значение истина и $\neg x_i@dl$ - если присволи ложь
- Вершины графа - переменные, определенные частичной оценкой
- Из v_i идет ребро v_j, если v_j оценена в результате BCP() и v_i входит в дизъюнкт-предпосылку c. Эти ребра помечаются меткой c
- Если есть "конфликт то ему соответствует вершина. Пусть c - конфликтный дизъюнкт. Тогда к вершине "конфликт"идут ребра от переменных, входящих в c и они помечаются меткой c

$$
\begin{aligned}
c_1 &= (\neg x_1 \vee x_2)\\
c_2 &= (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)\\
c_3 &= (\neg x_2 \vee x_4)\\
c_4 &= (\neg x_3 \vee \neg x_4)\\
c_5 &= (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)\\
c_6 &= (x_2 \vee x_3)\\
c_7 &= (x_2 \vee \neg x_3)\\
c_8 &= (x_6 \vee \neg x_5)
\end{aligned}
$$

Пример

$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$
$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$
$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$
$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$
$c_5 = (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)$
$c_6 = (x_2 \vee x_3)$
$c_7 = (x_2 \vee \neg x_3)$
$c_8 = (x_6 \vee \neg x_5)$
Пусть x_1@6 и $\neg x_5$@3

Пример

$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$
$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$
$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$
$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$
$c_5 = (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)$
$c_6 = (x_2 \vee x_3)$
$c_7 = (x_2 \vee \neg x_3)$
$c_8 = (x_6 \vee \neg x_5)$
Пусть x_1@6 и $\neg x_5$@3
$c_9 = (x_5 \vee \neg x_1)$

Пример

$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$
$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$
$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$
$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$
$c_5 = (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)$
$c_6 = (x_2 \vee x_3)$
$c_7 = (x_2 \vee \neg x_3)$
$c_8 = (x_6 \vee \neg x_5)$
Пусть x_1@6 и $\neg x_5$@3
$c_9 = (x_5 \vee \neg x_1)$
Откатимся до 3 уровня принятия решений

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?
- Эмпирические исследования показывают, что так быстрее

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?
- Эмпирические исследования показывают, что так быстрее
- Почему останавливаемся?

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?
- Эмпирические исследования показывают, что так быстрее
- Почему останавливаемся?
- Докажем от противного

Бинарная резолюция

$$\frac{(a_1 \vee \ldots a_n \vee c)(b_1 \ldots b_m \vee \neg c)}{(a_1 \vee \ldots a_n \vee b_1 \ldots b_m)}$$

Бинарная резолюция

$$\frac{(a_1 \vee \ldots a_n \vee c)(b_1 \ldots b_m \vee \neg c)}{(a_1 \vee \ldots a_n \vee b_1 \ldots b_m)}$$

Известен результат, что КНФ не выполнима тогда и только тогда, когда существует конечное число бинарных резолюций, приводящих к пустому дизъюнкту

Пример

$$c_1 = (\neg x_4 \vee x_2 \vee x_5)$$
$$c_2 = (\neg x_4 \vee x_{10} \vee x_6)$$
$$c_3 = (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7)$$
$$c_4 = (\neg x_6 \vee x_7)$$

Пример

$$c_1 = (\neg x_4 \vee x_2 \vee x_5)$$
$$c_2 = (\neg x_4 \vee x_{10} \vee x_6)$$
$$c_3 = (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7)$$
$$c_4 = (\neg x_6 \vee x_7)$$

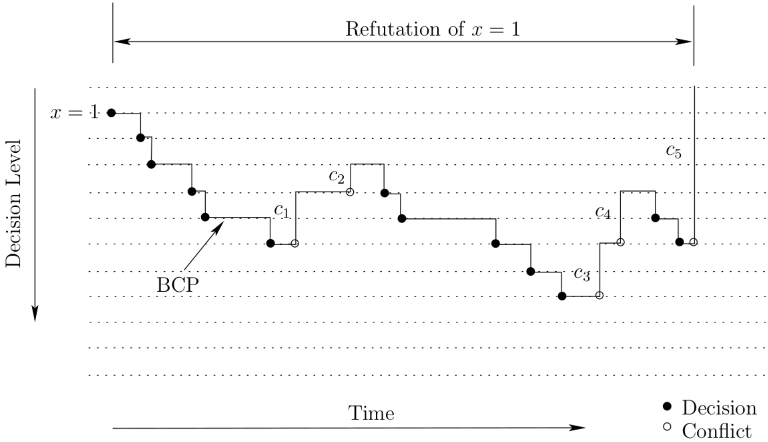
- Выберем последний оцененый литерал
- Выберем дизъюнкт предпосылку данного литерала
- Применим бинарную резолюцию к конфликтному дизъюнкту и дизъюнкту предпосылке через переменную, соответствующей литералу

Пример

$$c_1 = (\neg x_4 \vee x_2 \vee x_5)$$
$$c_2 = (\neg x_4 \vee x_{10} \vee x_6)$$
$$c_3 = (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7)$$
$$c_4 = (\neg x_6 \vee x_7)$$

- Выберем последний оцененый литерал
- Выберем дизъюнкт предпосылку данного литерала
- Применим бинарную резолюцию к конфликтному дизъюнкту и дизъюнкту предпосылке через переменную, соответствующей литералу

Когда остановиться?


Refutation of $x = 1$
Decision Level
$x = 1$
BCP
c_1
c_2
c_3
c_4
c_5
Time
Decision
Conflict

Уникальная точка импликации

- Уникальная точка импликации - любая вершина импликационного графа, которая не является вершиной «конфликт» и которая находится на каждом пути, ведущему от конкретной корневой вершины к вершине конкретной вершине «конфликт» (в теории графов так же называется доминатором вершины)

- Уникальная точка импликации - любая вершина импликационного графа, которая не является вершиной «конфликт» и которая находится на каждом пути, ведущему от конкретной корневой вершины к вершине конкретной вершине «конфликт» (в теории графов так же называется доминатором вершины)
- Первая УТИ - ближайшая к конфликтной вершине уникальная точка импликации

Уникальная точка импликации

- Уникальная точка импликации - любая вершина импликационного графа, которая не является вершиной «конфликт» и которая находится на каждом пути, ведущему от конкретной корневой вершины к вершине конкретной вершине «конфликт» (в теории графов так же называется доминатором вершины)
- Первая УТИ - ближайшая к конфликтной вершине уникальная точка импликации
- Эмпирические исследования показывают, что нужно остановится, когда будет добавлена отрицание первой УТИ текущего уровня принятия решений

Анализ конфликта

if *current-decision-level* $= 0$ **then return** -1;
cl $:=$ *current-conflicting-clause*;
while $(\neg$STOP-CRITERION-MET$(cl))$ **do**
    lit $:=$ LAST-ASSIGNED-LITERAL(cl);
    var $:=$ VARIABLE-OF-LITERAL(lit);
    ante $:=$ ANTECEDENT(lit);
    cl $:=$ RESOLVE$(cl, ante, var)$;
add-clause-to-database(cl);
return clause-asserting-level(cl);   ▷ 2nd high

Conflict-driven clause learning

```
function CDCL
    while (TRUE) do
        while (BCP() = "conflict") do
            backtrack-level := ANALYZE-CONFLICT();
            if backtrack-level < 0 then return "Unsatisfiable";
            BackTrack(backtrack-level);
        if ¬DECIDE() then return "Satisfiable";
```

Эвристика Jeroslow–Wang

- Для каждого литерала посчитаем $J(l) = \Sigma_{w \in B, l \in w} 2^{|w|}$

Dynamic Largest Individual Sum (DLIS)

- Для каждого литерала посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится

Dynamic Largest Individual Sum (DLIS)

- Для каждого литерала посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится
- Очень дорого

Variable State Independent Decaying Sum (VSIDS)

- Для каждого литерала посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится
- Иногда всё делим на 2
- При каждом конфликте, увеличиваем на 1 балл литерала

Variable State Independent Decaying Sum (VSIDS) в MiniSAT

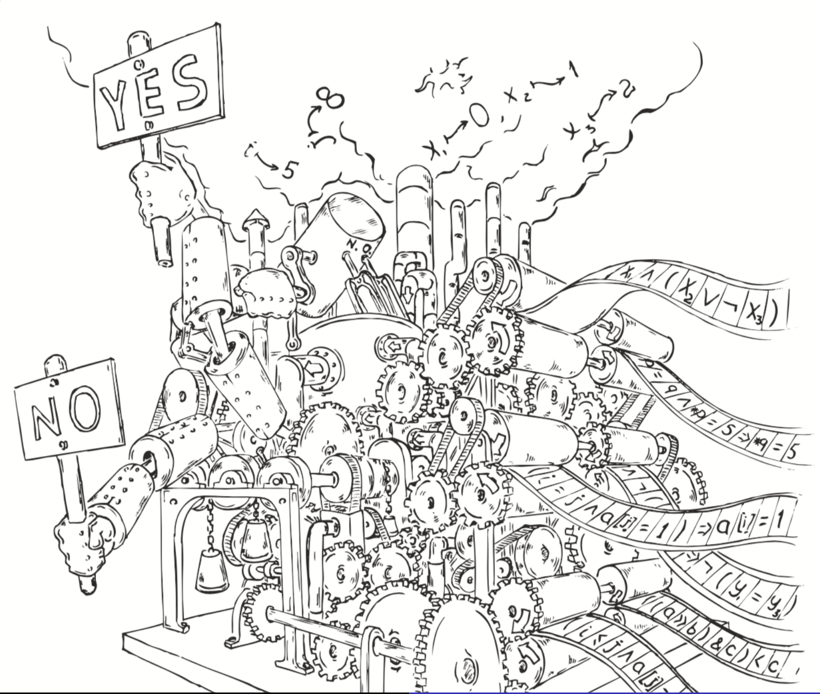
- При каждом конфликте, увеличиваем на балл литерала на Inc
- Inc сначала 1, затем увеличивается на 1.5 после каждого конфликта
- Всё делится на 10^{-100}, если есть балл, выше 10^{100}

Эвристики, основанные на дизъюнктах (Berkmin)

- Для каждого литерала и переменной посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится
- Иногда оценки переменной делим на 2
- При каждом конфликте, увеличиваем на 1 балл литерала
- Каждый конфликтный дизъюнкт помещаем в стек
- Когда нужно выбрать, какую перпеменную оценить, находим в стеке самый верхний дизъюнкт, который неразрешен, а в нём выбираем переменную с самой большой оценкой, а затем литерал с самой большой оценкой

Эвристики, основанные на дизъюнктах (Clause-Move-To-Front)

- То же самое, что и Berkmin
- Перед новым дизъюнктом кладем k дизъюнктов, которые участвовали в процессе получения нового дизъюнкта в процессе бинарных резолюций


YES
NO
N.O.