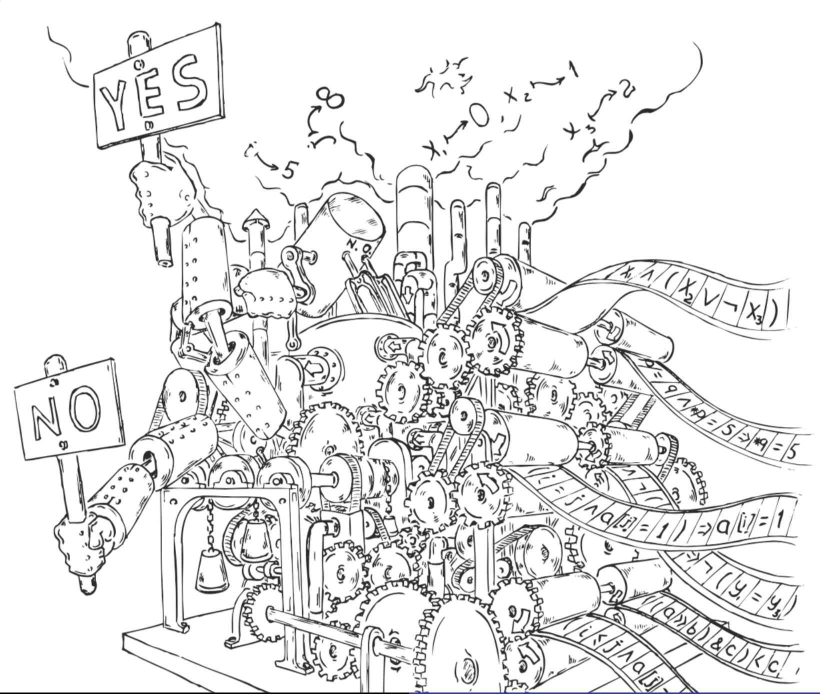

YES
NO
N.O.

Задачи разрешимости логических формул и приложения
Лекция 9. Комбинирование логик

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2022

Зачему нужно комбинировать теории?

1. Комбинации линейной арифметики и неинтрепретируемых функций:
   $(x_2 \geq x_1) \wedge (x_1 - x_3 \geq x2) \wedge (x_3 \geq 0) \wedge f(f(x_1) - f(x_2)) \neq f(x_3)$
2. Комбинации битовых векторов и неинтрепретируемых функций:
   $f(a[32], b[1]) = f(b[32], a[1]) \wedge a[32] = b[32]$
3. Комбинации массивов и неинтрепретируемых функций:
   $x = v\{i \leftarrow e\}[j] \wedge y = v[j] \wedge x > e \wedge x > y$

Теория первого порядка

- Переменные
- Логические символы: $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \forall, \exists$
- Нелогические символы (сигнатура Σ): предикатные и функциональные символы
- Синтаксис

Знак равенства часто рассматривают как логический символ, а не как предикатный, т.к. теории без такого символа встречаются редко

Теория первого порядка

- Теория Т - множество «предложений» (формулы первого порядка над сигнатурой Σ, где все переменные связаны с квантором). Эти «предложения» называют аксиомами
- Формула Т-выполнима (Т $\models \phi$), если существует интерпретация, при которой она и теория T верна
- Формула Т-тавтология, если для любой интерпретации, при которой верна T, она так же верна

Комбинация теорий

Пусть T_1, T_2 - теории над сигнатруами Σ_1, Σ_2 соответственно. Тогда комбинацией теорий $T_1 \oplus T_2$ назовём теорию над сигнатурой $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ над множеством аксиом $T_1 \cup T_2$

Выпуклые(convex) теории

Σ теория T назовём выпуклой, если для любой Σ формулы ϕ:
$(\phi \implies \vee_{i=1}^{n}(x_i = y_i))$ - T тавтология для некоторого
$n > 1 \implies$
$(\phi \implies (x_i = y_i))$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$

Примеры

$$x \leq 3 \land x \geq 3 \implies x = 3$$

Примеры

$$x \le 3 \land x \ge 3 \implies x = 3$$

$$x_1 = 1 \land x_2 = 2 \land 1 \le x_3 \land x_3 \le 2 \implies (x_3 = x_1 \lor x_3 = x_2)$$

Ограничения Нельсона-Оппена

1. $T_1, \ldots T_n$ - безкванторные теории с равенством
2. Для каждой теории есть разрешающая процедура
3. Пересечение каждой пары сигнатур - пустое множество
4. Теории интерпретируются над бесконечным доменом

Очистка формулы(purification)

Пусть $\phi' := \phi$

1. Каждое "чуждое"подвыражения φ заменим на a_φ
2. Добавим в формулу ограничение $a_\varphi = \varphi$

Очистка формулы(purification)

После данной процедуры мы получим множество «чистых» формул $F_1, \ldots, F_n$, таких, что:

1. Каждая F_i принадлежит теории T_i и является конъюкцией T_i-литералов
2. Общие переменные возможны
3. Исходная формула выполнима тогда и только тогда, когда выполнима $\bigwedge_{i=1}^{n} F_i$

Пример

$$\varphi := \; x_1 \leq f(x_1)$$

Алгоритм Нельсона-Оппена для выпуклых теорий

1. Очистить формулу ϕ и получить $F_1, \ldots, F_n$
2. Если хотя бы одна из теорий невыполнима, то вернуть UNSAT
3. Если существуют такие i и j, что из F_i следует равенство i и j, а из F_j такого следствия нет, то добавить к F_j такое равенство и вернутся на шаг 2
4. Вернуть SAT

Алгоритм Нельсона-Оппена для выпуклых теорий

Если хотя бы одна из теорий не выпуклая, то алгоритм будет ложно возвращать *SAT*

Пример

$$
\begin{gathered}
(f(x_1,0) \geq x_3) \wedge (f(x_2,0) \leq x_3) \wedge \\
(x_1 \geq x_2) \wedge (x_2 \geq x_1) \wedge \\
(x_3 - f(x_1,0) \geq 1)\ ,
\end{gathered}
$$

Пример

$$(x_2 \geq x_1) \wedge (x_1 - x_3 \geq x_2) \wedge (x_3 \geq 0) \wedge (f(f(x_1) - f(x_2)) \neq f(x_3))$$

Пример

$$(1 \leq x) \wedge (x \leq 2) \wedge p(x) \wedge \neg p(1) \wedge \neg p(2)$$

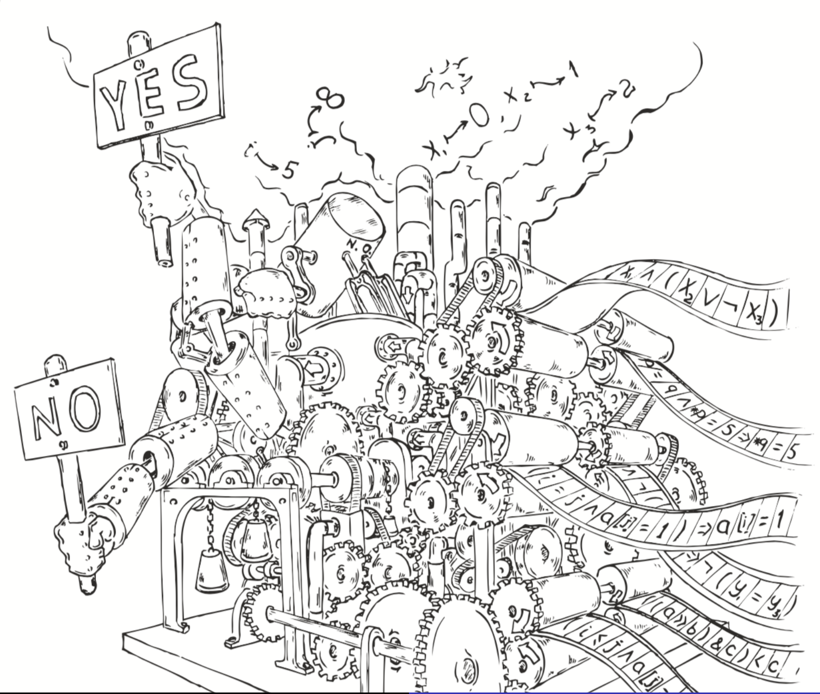
Алгоритм Нельсона-Оппена

1. Очистить формулу ϕ и получить $F_1, \ldots, F_n$
2. Если хотя бы одна из теорий невыполнима, то вернуть UNSAT
3. Если существуют такие i и j, что из F_i следует равенство i и j, а из F_j такого следствия нет, то добавить к F_j такое равенство и вернутся на шаг 2
4. Если существует i, так что
   - $F_i \implies (x_1 = y_1 \vee \cdots \vee x_k = y_k)$
   - $\forall \in \{1, \ldots, k\}. F_i \not\Longrightarrow x_j = y_j$

   то рекурсивно применим Алгоритм Нельсона-Оппена для $\phi \wedge x_1 = y_1, \ldots, \phi \wedge x_k = y_k$
   Если хотя бы одино из выражений выполимо, то возращаем SAT. Иначе UNSAT.
5. Вернуть SAT

Пример

$$(1 \leq x) \wedge (x \leq 2) \wedge p(x) \wedge \neg p(1) \wedge \neg p(2)$$


YES
NO