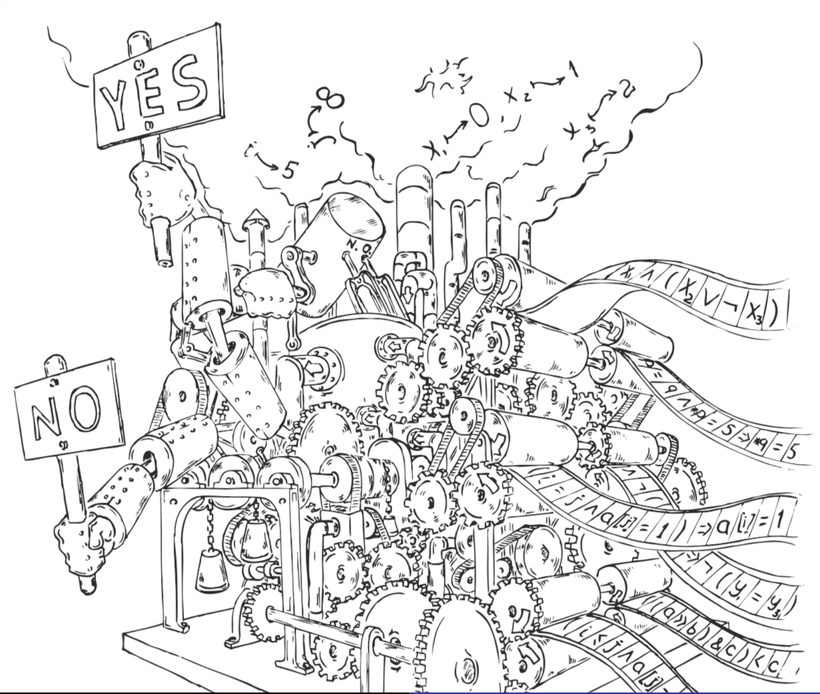

YES
NO

Задачи разрешимости логических формул и приложения
Лекция 9. Логика массивов

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2021

$a\{i \leftarrow x\}$ - присвоить x элементу массива с индексом i

$a\{i \leftarrow x\}$

$a\{i \leftarrow x\}$ - присвоить x элементу массива с индексом i

$(\forall x \in \mathbb{N}_0 . x < i \implies a[x] = 0) \wedge a' = a\{i \leftarrow 0\} \implies$
$(\forall x \in \mathbb{N}_0 . x \leq i \implies a'[x] = 0)$

Обозначения

T_I - тип индекса
T_E - тип элемента
T_A - тип массива, сокращение от $T_I \to T_E$ - т.е. множество функций из индексы в элементы

Обозначения

T_I - тип индекса
T_E - тип элемента
T_A - тип массива, сокращение от $T_I \rightarrow T_E$ - т.е. множество функций из индексы в элементы
Теория массивов параметризирована теориями индексов и элементов.

Обозначения

term A : array-identifier | $\text{term}_A\{\text{term}_I \leftarrow \text{term}_E\}$
term E : $\text{term}_A[\text{term}_I]$ | (previous rules)
formula : $\text{term}_A = \text{term}_A$ | (previous rules)

Аксиомы

Аксиома чтения:

$\forall a_1 \in T_A . \forall a_2 \in T_A . \forall i \in T_I . \forall j \in T_I . (a_1 = a_2 \wedge i = j) \implies$
$a_1[i] = a_2[j]$

Аксиома записи:

$\forall a \in T_A . \forall e \in T_E . \forall i \in T_I . \forall j \in T_I . a\{i \leftarrow e\}[j] = (i = j) ? e : a[j]$

Экзистенциальная аксиома:

$\forall a_1 \in T_A . \forall a_2 \in T_A . (\forall i \in T_I . a_1[i] = a_2[i]) \implies$
$a_1 = a_2$

Пример элиминация термов

$$(i = j \wedge a[j] =' z') \implies a[i] =' z'$$

Пример элиминация термов

$$(i = j \wedge a[j] =' z') \implies a[i] =' z'$$
$$(i = j \wedge F_a(i) =' z') \implies F_a(i) =' z'$$

Перепишем формулу:
для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a', т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i . a'[j] = a[j]$

Правило записи

Перепишем формулу:

для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a', т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i . a'[j] = a[j]$

$a[0] = 10 \implies a\{1 \leftarrow 20\}[0] = 10$

Правило записи

Перепишем формулу:

для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a', т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i . a'[j] = a[j]$

$a[0] = 10 \implies a\{1 \leftarrow 20\}[0] = 10$

$(a[0] = 10 \wedge a'[1] = 20 \wedge (\forall j \neq 1 . a'[j] = a[j])) \implies a_0[0] = 10$

$(F_a(0) = 10 \wedge F_{a'}(1) = 20 \wedge (\forall j \neq 1 . F_{a'}(j) = F_a(j))) \implies$
$F_{a'}(0) = 10$

Правило записи

Перепишем формулу:

для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a', т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i.a'[j] = a[j]$

$a[0] = 10 \implies a\{1 \leftarrow 20\}[0] = 10$

$(a[0] = 10 \wedge a'[1] = 20 \wedge (\forall j \neq 1.a'[j] = a[j])) \implies a_0[0] = 10$

Свойство массива

$\forall i_1 \ldots \forall i_k \in T_I . \phi_I(i_1, \ldots, i_k) \implies \phi_V(i_1, \ldots, i_k)$
1) Грамматика для ϕ_I:
iguard : iguard $\wedge$ iguard | iguard $\vee$ iguard | iterm $\leq$ iterm | iterm $=$ iterm
iterm : i_1 | $\ldots$ | i_k | term
term : integer-constant | integer-constant $\times$ index-identifier | term $+$ term
index-identifier и term не могут быть $i_1, \ldots, i_k$
2) $i_1, \ldots, i_k$ могут быть только частью выражения чтения вида $a[i_j]$

Пример

$$a' = a\{i \leftarrow 0\}$$

Пример

$$a' = a\{i \leftarrow 0\}$$
$$\forall j \neq i . a'[j] = a[j]$$

Пример

$$a' = a\{i \leftarrow 0\}$$
$$\forall j \neq i . a'[j] = a[j]$$
$$\forall j . (j \leq i - 1 \land i + 1 \leq j) \implies a'[j] = a[j]$$

$\iota(\phi)$ - множество элементов, которые могут быть равны какому-нибудь индексу, т.е.:
1) Все выражения, которые используются как индекс массива и которые не связаны квантором
2) Все выражения, которые используются внутри ограничений на индексы и которые не связаны квантором
3) Если ϕ ничего такого не содержит, то $\iota(\phi) = \{0\}$, чтобы оно не было пусто

Редукция массивов

1) Применим правило записи в ϕ_A, чтобы удалить везде запись в исходной формуле
2) Заменить везде квантор существования вида $\exists i \in T_I.P(i)$ на $P(j)$, где j - новая переменная
3) Заменить везде квантор всеобщности вида $\forall i \in T_I.P(i)$ на $\bigwedge_{i \in \iota(\phi)} P(i)$
4) Заменить везде чтение из массива на неинтерпритируемые функции

Пример

$$(\forall x \in \mathbb{N}_0 . x < i \implies a[x] = 0) \wedge a' = a\{i \leftarrow 0\} \implies$$
$$(\forall x \in \mathbb{N}_0 . x \leq i \implies a'[x] = 0)$$

Пример

$$(\forall x \in \mathbb{N}_0 . x < i \implies a[x] = 0) \wedge a' = a\{i \leftarrow 0\} \implies$$
$$(\exists x \in \mathbb{N}_0 . x \leq i \wedge a'[x] \neq 0)$$

Пример

$$(\forall x \in \mathbb{N}_0 . x < i \implies a[x] = 0) \wedge a'[i] = 0 \wedge \forall j \neq i . a'[j] = a[j] \implies (\exists x \in \mathbb{N}_0 . x \leq i \wedge a'[x] \neq 0)$$

Пример

$$(\forall x \in \mathbb{N}_0 . x < i \implies a[x] = 0) \wedge a'[i] = 0 \wedge \forall j \neq i . a'[j] = a[j] \implies (z \leq i \wedge a'[z] \neq 0)$$

Пример

$$\iota(\phi) = \{i, z\}$$

Пример

$$\iota(\phi) = \{i, z\}$$
$$(i < i \implies a[i] = 0) \land (z < i \implies a[z] = 0) \land$$
$$a'[i] = 0 \land \forall j \neq i . a'[j] = a[j] \implies$$
$$(z \leq i \land a'[z] \neq 0)$$

Пример

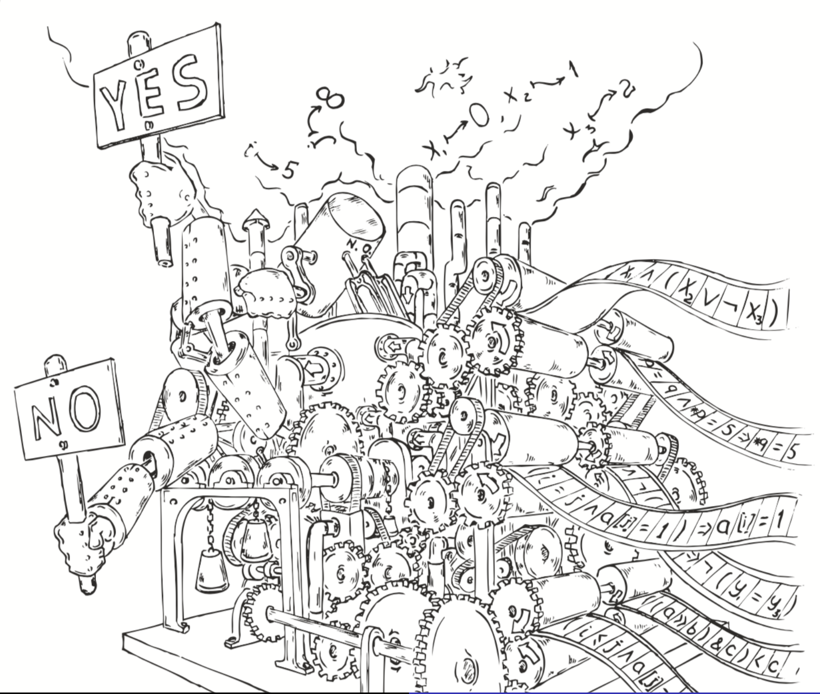
$$\iota(\phi) = \{i, z\}$$
$$(i < i \implies a[i] = 0) \wedge (z < i \implies a[z] = 0) \wedge$$
$$a'[i] = 0 \wedge (i \neq i \implies a'[i] = a[i]) \wedge (z \neq i \implies a'[z] = a[z]) \implies$$
$$(z \leq i \wedge a'[z] \neq 0)$$

Пример

$$(z < i \implies a[z] = 0) \wedge$$
$$a'[i] = 0 \wedge (z \neq i \implies a'[z] = a[z]) \implies$$
$$(z \leq i \wedge a'[z] \neq 0)$$

Пример

$$
(z < i \implies F_a(z) = 0) \wedge
$$
$$
F_{a'}(i) = 0 \wedge (z \neq i \implies F_{a'}(z) = F_a(z)) \implies
$$
$$
(z \leq i \wedge F_{a'}(z) \neq 0)
$$


YES
NO
N.O.