



Задачи разрешимости логических формул и приложения

Лекция 6. Оптимизации алгоритма Conflict-Driven Clause Learning

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2021

Conflict-driven clause learning

```
function CDCL
  while true do
    while BCP() = "conflict" do
      backtrack-level := Analyze-Conflict()
      if backtrack-level < 0 then
        return "Unsatisfiable"
      end if
      BackTrack(backtrack-level)
      if  $\neg$  Decide() then
        return "Satisfiable"
      end if
    end while
  end while
end function
```

- Будем писать $x_i @ dl$, если на уровне принятия решений dl мы присвоили переменной x_i значение истина и $\neg x_i @ dl$ - если присвоили ложь
- Вершины графа - переменные, определенные частичной оценкой
- Из v_i идет ребро v_j , если v_j оценена в результате ВСП() и v_i входит в дизъюнкт-предпосылку s . Эти ребра помечаются меткой s
- Если есть "конфликт" то ему соответствует вершина. Пусть s - конфликтный дизъюнкт. Тогда к вершине "конфликт" идут ребра от переменных, входящих в s и они помечаются меткой s

$$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$$

$$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$$

$$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$$

$$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$$

$$c_5 = (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)$$

$$c_6 = (x_2 \vee x_3)$$

$$c_7 = (x_2 \vee \neg x_3)$$

$$c_8 = (x_6 \vee \neg x_5)$$

$$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$$

$$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$$

$$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$$

$$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$$

$$c_5 = (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)$$

$$c_6 = (x_2 \vee x_3)$$

$$c_7 = (x_2 \vee \neg x_3)$$

$$c_8 = (x_6 \vee \neg x_5)$$

Пусть $x_1 @ 6$ и $\neg x_5 @ 3$

$$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$$

$$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$$

$$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$$

$$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$$

$$c_5 = (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)$$

$$c_6 = (x_2 \vee x_3)$$

$$c_7 = (x_2 \vee \neg x_3)$$

$$c_8 = (x_6 \vee \neg x_5)$$

Пусть $x_1 @ 6$ и $\neg x_5 @ 3$

$$c_9 = (x_5 \vee \neg x_1)$$

$$c_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$$

$$c_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5)$$

$$c_3 = (\neg x_2 \vee x_4)$$

$$c_4 = (\neg x_3 \vee \neg x_4)$$

$$c_5 = (x_1 \vee x_5 \vee \neg x_2)$$

$$c_6 = (x_2 \vee x_3)$$

$$c_7 = (x_2 \vee \neg x_3)$$

$$c_8 = (x_6 \vee \neg x_5)$$

Пусть $x_1 @ 6$ и $\neg x_5 @ 3$

$$c_9 = (x_5 \vee \neg x_1)$$

Откатимся до 3 уровня принятия решений

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?
- Эмпирические исследования показывают, что так быстрее

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?
- Эмпирические исследования показывают, что так быстрее
- Почему останавливаемся?

- Почему откатились на 3 уровень, а не на 5?
- Эмпирические исследования показывают, что так быстрее
- Почему останавливаемся?
- Докажем от противного

$$\frac{(a_1 \vee \dots a_n \vee c)(b_1 \dots b_m \vee \neg c)}{(a_1 \vee \dots a_n \vee b_1 \dots b_m)}$$

$$\frac{(a_1 \vee \dots a_n \vee c)(b_1 \dots b_m \vee \neg c)}{(a_1 \vee \dots a_n \vee b_1 \dots b_m)}$$

Известен результат, что КНФ не выполнима тогда и только тогда, когда существует конечное число бинарных резолюций, приводящих к пустому дизъюнкту

$$c_1 = (\neg x_4 \vee x_2 \vee x_5)$$

$$c_2 = (\neg x_4 \vee x_{10} \vee x_6)$$

$$c_3 = (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7)$$

$$c_4 = (\neg x_6 \vee x_7)$$

$$c_1 = (\neg x_4 \vee x_2 \vee x_5)$$

$$c_2 = (\neg x_4 \vee x_{10} \vee x_6)$$

$$c_3 = (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7)$$

$$c_4 = (\neg x_6 \vee x_7)$$

- Выберем последний оцененый литерал
- Выберем дизъюнкт предпосылку данного литерала
- Применим бинарную резолюцию к конфликтному дизъюнкту и дизъюнкту предпосылке через переменную, соответствующей литералу

$$c_1 = (\neg x_4 \vee x_2 \vee x_5)$$

$$c_2 = (\neg x_4 \vee x_{10} \vee x_6)$$

$$c_3 = (\neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7)$$

$$c_4 = (\neg x_6 \vee x_7)$$

- Выберем последний оцененный литерал
- Выберем дизъюнкт предпосылку данного литерала
- Применим бинарную резолюцию к конфликтному дизъюнкту и дизъюнкту предпосылке через переменную, соответствующей литералу

Когда остановиться?

- Уникальная точка импликации - любая вершина импликационного графа, которая не является вершиной «конфликт» и которая находится на каждом пути, ведущему от конкретной корневой вершины к вершине конкретной вершине «конфликт» (в теории графов так же называется доминатором вершины)

- Уникальная точка импликации - любая вершина импликационного графа, которая не является вершиной «конфликт» и которая находится на каждом пути, ведущему от конкретной корневой вершины к вершине конкретной вершине «конфликт» (в теории графов так же называется доминатором вершины)
- Первая УТИ - ближайшая к конфликтной вершине уникальная точка импликации

- Уникальная точка импликации - любая вершина импликационного графа, которая не является вершиной «конфликт» и которая находится на каждом пути, ведущему от конкретной корневой вершины к вершине конкретной вершине «конфликт» (в теории графов так же называется доминатором вершины)
- Первая УТИ - ближайшая к конфликтной вершине уникальная точка импликации
- Эмпирические исследования показывают, что нужно остановится, когда будет добавлена отрицание первой УТИ текущего уровня принятия решений

```
if current-decision-level = 0 then
    return -1
end if
cl := current-conflicting-clause
while  $\neg$  Stop-criterion-met(cl) do
    lit := Last-assigned-literal(cl)
    var := Variable-of-literal(lit)
    ante := Antecedent(lit)
    cl := Resolve(cl, ante, var)
end while
add-clause-to-database(cl)
return clause-asserting-level(cl)
```

Conflict-driven clause learning

```
function CDCL
  while true do
    while BCP() = "conflict" do
      backtrack-level := Analyze-Conflict()
      if backtrack-level < 0 then
        return "Unsatisfiable"
      end if
      BackTrack(backtrack-level)
      if  $\neg$  Decide() then
        return "Satisfiable"
      end if
    end while
  end while
end function
```

- Для каждого литерала посчитаем
 $J(l) = \sum_{w \in B, l \in w} 2^{|w|}$

Dynamic Largest Individual Sum (DLIS)

- Для каждого литерала посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится

Dynamic Largest Individual Sum (DLIS)

- Для каждого литерала посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится
- Очень дорого

Variable State Independent Decaying Sum (VSIDS)

- Для каждого литерала посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится
- Иногда всё делим на 2
- При каждом конфликте, увеличиваем на 1 балл литерала

Variable State Independent Decaying Sum (VSIDS) в MiniSAT

- При каждом конфликте, увеличиваем на балл литерала на Inc
- Inc сначала 1, затем увеличивается на 1.5 после каждого конфликта
- Всё делится на 10^{-100} , если есть балл, выше 10^{100}

Эвристики, основанные на дизъюнктах (Berkmin)

- Для каждого литерала и переменной посчитаем в скольких неразрешенных дизъюнктах он находится
- Иногда оценки переменной делим на 2
- При каждом конфликте, увеличиваем на 1 балл литерала
- Каждый конфликтный дизъюнкт помещаем в стек
- Когда нужно выбрать, какую переменную оценить, находим в стеке самый верхний дизъюнкт, который неразрешен, а в нём выбираем переменную с самой большой оценкой, а затем литерал с самой большой оценкой

Эвристики, основанные на дизъюнктах (Clause-Move-To-Front)

- То же самое, что и Berkmin
- Перед новым дизъюнктом кладем k дизъюнктов, которые участвовали в процессе получения нового дизъюнкта в процессе бинарных резолюций

- Противоречивое ядро противоречивой формулы f - подформула формулы f , которое является противоречивой.
- Минимальное противоречивое ядро противоречивой формулы f - противоречивое ядро, такое, что удаление любых дизъюнктов из этой формулы делает её выполнимой подформулу выполнимой.

- Вершины - дизъюнкты
- Корни - первоначальные дизъюнкты
- Есть ребро - если вершина, к которой было проведено ребро, получена в процессе бинарной резолюции через вершину, от которой было проведено ребро

