

# Задачи разрешимости логических формул и приложения

## Лекция 3. Сведение задачи к SAT задаче. Логика первого порядка

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2021

- Выполнимость:  $\phi$  - выполняма, если существуют такие значения переменных, входящих в  $\phi$ , что  $\phi$  - истина.
- Равновыполнимость: формулы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  равновыполнимы, если  $\phi_1$  выполняма тогда и только тогда, когда  $\phi_2$  выполняма.

- На прошлой лекции мы разобрали функцию `AtMostOne`

- На прошлой лекции мы разобрали функцию `AtMostOne`
- Как получить функцию `AtMostK`?

- На прошлой лекции мы разобрали функцию AtMostOne
- Унарное представление чисел:

$x_n$  - истина, тогда и только тогда, когда число равно или больше  $n$

$$x_i \rightarrow x_{i+1} : \bigwedge_{i < j} (\neg x_i \vee x_j)$$

- На прошлой лекции мы разобрали функцию AtMostOne
- Унарное представление чисел:  
 $x_n$  - истина, тогда и только тогда, когда число равно или больше  $n$   
$$x_i \rightarrow x_{i+1} : \bigwedge_{i < j} (\neg x_i \vee x_j)$$
- Бинарное представление: Используя  $O(\log(n))$  битов можно представить число в бинарном виде

- Что такое  $\sum_j x_{ij} = 1$ ?

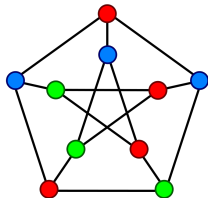


- Что такое  $\sum_j x_{ij} = 1$ ?
- $AtMostOne(x_1, \dots, x_n) \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n)$

- Что такое  $\sum_j x_{ij} = 1$ ?
- $AtMostOne(x_1, \dots, x_n) \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n)$
- А  $\sum_{ij \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$ ?

- Что такое  $\sum_j x_{ij} = 1$ ?
- $AtMostOne(x_1, \dots, x_n) \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n)$
- А  $\sum_{ij \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$ ?
- $AtMost(s - 1)(x_1, \dots, x_n)$

# Раскраска графа



Имеется граф  $G = (V, E)$ . Можно ли его вершины раскрасить в  $k$  цветов так, чтобы никакие соседние вершины не были раскрашены в один и тот же цвет?

- Введем следующие переменные:  
 $x_{v,i}$  - вершина  $v$  имеет цвет  $c$

- Введем следующие переменные:

$x_{v,i}$  - вершина  $v$  имеет цвет  $c$

- Уравнения:

$(x_{v,1} \vee \dots \vee x_{v,c})$  -  $v$  покрашена

$(\neg x_{v,s} \vee \neg x_{v,t}), 1 \leq s \leq c-1, s+1 \leq t \leq c$  -  $v$  имеет не более одного цвета

$(\neg x_{v,i} \vee \neg x_{w,i})$  -  $v$  и  $w$  имеют разный цвет

- Поставить на доску со сторонами  $n \times n$  ферзей в количестве  $n$  штук так, чтобы они не били друг друга.

- Поставить на доску со сторонами  $n \times n$  ферзей в количестве  $n$  штук так, чтобы они не били друг друга.
- Уравнения:  
 $ExactlyOne(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$  - ровно одна клетка в строке занята  
 $ExactlyOne(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$  - ровно одна клетка в столбце занята  
 $AtLeastOne(x_{i,j})$  для всех  $i, j : i + j = k$  - ровно одна клетка на диагонали занята  
 $AtLeastOne(x_{i,j})$  для всех  $i, j : |i - j| = k$  - ровно одна клетка на диагонали занята



- Сигнатура  $\Sigma = (R, F, C, \rho)$ 
  - $R$  - множество символов для отношений (предикатов)
  - $F$  - множество функциональных символов
  - $C$  - множество констант
  - Функция  $\rho$ , сопоставляющая элементам  $R$  и  $F$  их арность
- Переменные
- Логические операции:  $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$
- Кванторы:  $\forall, \exists$
- Скобки, запятые

- Терм - функциональный символ, либо  $f(t_1, \dots, t_{\rho(f)})$ , где  $f$  - символ арности  $\rho(f)$ ,  $t_i$  - термы
- Атом -  $p(t_1, \dots, t_{\rho(p)})$ , где  $p$  - предикатный символ арности  $\rho(p)$ ,  $t_i$  - термы
- Формула - либо атом, либо  $\neg f_1$ ,  $f_1 \vee f_2$ ,  $f_1 \wedge f_2$ ,  $f_1 \rightarrow f_2$ ,  $\forall x f_1$ ,  $\exists x f_1$ , где  $f_1$  и  $f_2$  - формулы

- Задать модель:  
    задать множество  $D$  - домен  
    задать функцию  $\sigma$ , т.ч. каждому предикатному символу  
    сопоставляет предикат, функциональному символу  
    сопоставляет функцию, а константам сопоставляет элемент  
    из  $D$

- Задать модель:  
    задать множество  $D$  - домен  
    задать функцию  $\sigma$ , т.ч. каждому предикатному и функциональному символу сопоставить предикат и функцию
- Пусть  $s$  - функция, которая сопоставляет каждой переменной некоторое значение из  $D$
- Интерпретация формул относительно функции  $s$  - индуктивно вычислить формулу.

