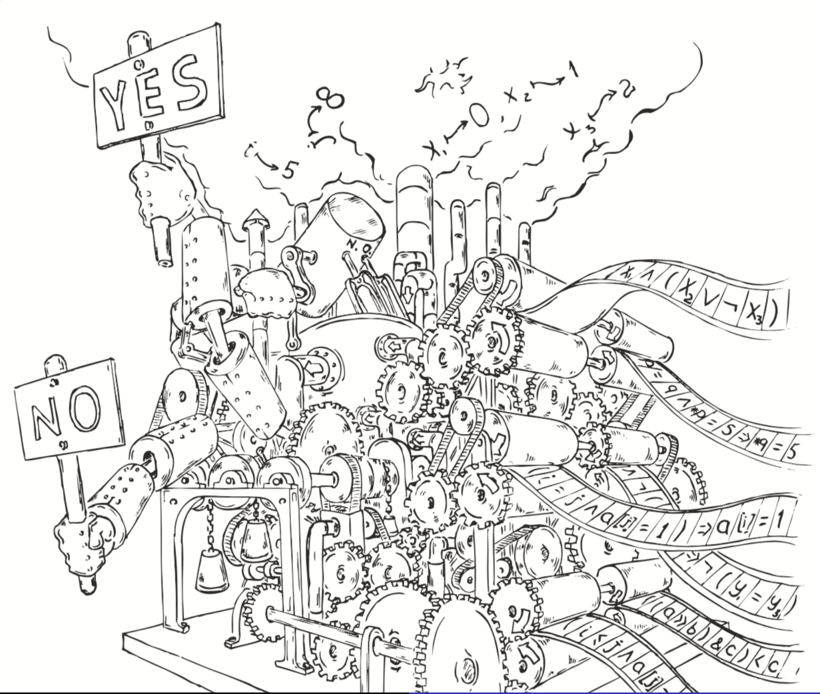

YES
NO
$x_1 \mapsto 0$
$x_2 \mapsto 1$
$x_3 \mapsto 2$
$i \mapsto 5$

Задачи разрешимости логических формул и приложения
Лекция 2. SAT задача. Сведение задачи к SAT задаче

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2021

Дополнительные материалы

- Decision Procedures An Algorithmic Point of View, Daniel Kroening, Ofer Strichman
- Handbook of satisfiability, Edmund Clarke
- The art of Computer Programming, volume 4, part 6, Donald Knuth

Дополнительные материалы

- cse290q
- cse507
- 15816-f19

Преобразование булевой формулы в КНФ

- Какова сложность преобразование формулы в КНФ?

Преобразование булевой формулы в КНФ

- Какова сложность преобразование формулы в КНФ?
- В худшем случае экспонента

Преобразование булевой формулы в КНФ

- Какова сложность преобразование формулы в КНФ?
- В худшем случае экспонента
- Например $(x_1 \wedge y_1) \vee \cdots \vee (x_n \wedge y_n)$, преобразовывая с помощью законов Де Моргана и закона дистрибутивности к формуле $(x_1 \vee \cdots \vee x_n) \wedge (y_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n) \wedge (y_1 \vee \cdots \vee y_n)$ - получаем 2^n дизъюнктов.

AtLeastOne

- Рассмотрим функцию $AtLeastOne(x_1, \ldots, x_n)$ - истина ли хотя бы одна из переменных

AtLeastOne

- Рассмотрим функцию $AtLeastOne(x_1, \ldots, x_n)$ - истина ли хотя бы одна из переменных
- Как её выразить в КНФ?

AtLeastOne

- Рассмотрим функцию $AtLeastOne(x_1, \dots, x_n)$ - истина ли хотя бы одна из переменных
- Как её выразить в КНФ?
- $(x_1 \vee \dots \vee x_n)$

XOR

- Аналогичный вопрос про $XOR(x_1, \ldots, x_n)$

XOR

- Аналогичный вопрос про $XOR(x_1, \ldots, x_n)$
- Пусть $x^\alpha = (x \leftrightarrow \alpha)$
- $XOR = \bigwedge(x_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n})$, т.е. $\wedge$ по всем наборам α, таким, $\Sigma_i(\alpha_i)$ - четное число.

XOR

- Аналогичный вопрос про $XOR(x_1, \dots, x_n)$
- Пусть $x^\alpha = (x \leftrightarrow \alpha)$
- $XOR = \bigwedge(x_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n})$, т.е. $\wedge$ по всем наборам α, таким, $\Sigma_i(\alpha_i)$ - четное число.
- Сколько дизъюнктов в такой формуле? Можно ли сделать меньше?

XOR

- Аналогичный вопрос про $XOR(x_1, \ldots, x_n)$
- Пусть $x^\alpha = (x \leftrightarrow \alpha)$
- $XOR = \bigwedge(x_1^{\alpha_1} \vee \cdots \vee x_n^{\alpha_n})$, т.е. $\wedge$ по всем наборам α, таким, $\Sigma_i(\alpha_i)$ - четное число.
- Сколько дизъюнктов в такой формуле? Можно ли сделать меньше?
- $XOR(x_1, x_2, y) \wedge XOR(\neg y, x_3, \ldots, x_n)$

- $AtMostOne(x_1, \ldots, x_n)$ - истина, если среди $x_1, \ldots, x_n$ не более одной истиной переменной.

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, \ldots, x_n)$ - истина, если среди $x_1, \ldots, x_n$ не более одной истиной переменной.
-
$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (\neg x_i \vee \neg x_j)$$

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, \ldots, x_n)$ - истина, если среди $x_1, \ldots, x_n$ не более одной истиной переменной.
- $$\bigwedge_{1 \le i < j \le n} (\neg x_i \vee \neg x_j)$$
- Сколько дизъюнктов в такой формуле? Можно ли сделать меньше?

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, \ldots, x_n)$ - истина, если среди $x_1, \ldots, x_n$ не более одной истиной переменной.
- $$\bigwedge_{1 \le i < j \le n} (\neg x_i \vee \neg x_j)$$
- Сколько дизъюнктов в такой формуле? Можно ли сделать меньше?
- $AtMostOne(x_1, x_2, x_3, y) \vee AtMostOne(\neg y, x_4, \ldots, x_n)$

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, x_2)$:

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, x_2)$:
  $\phi_1 = \neg x_1 \vee \neg x_2$
  $\phi_2 = (\neg x_1 \vee y) \wedge (y \neg x_2)$

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, x_2)$:
  $\phi_1 = \neg x_1 \vee \neg x_2$
  $\phi_2 = (\neg x_1 \vee y) \wedge (y \neg x_2)$
- Они эквивалентны?

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, x_2)$:
  $\phi_1 = \neg x_1 \vee \neg x_2$
  $\phi_2 = (\neg x_1 \vee y) \wedge (y \neg x_2)$

- Они эквивалентны?
- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ - тавтология, если и $\neg\phi_1 \wedge \phi_2$ и $\phi_1 \wedge \neg\phi_2$ - невыполнима.

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, x_2)$:
  $\phi_1 = \neg x_1 \vee \neg x_2$
  $\phi_2 = (\neg x_1 \vee y) \wedge (y \neg x_2)$
- Они эквивалентны?
- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ - тавтология, если и $\neg\phi_1 \wedge \phi_2$ и $\phi_1 \wedge \neg\phi_2$ - невыполнима.
- Выполнима ли $\neg\phi_1 \wedge \phi_2$?

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, x_2)$:
  $\phi_1 = \neg x_1 \vee \neg x_2$
  $\phi_2 = (\neg x_1 \vee y) \wedge (y \neg x_2)$

- Они эквивалентны?
- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ - тавтология, если и $\neg\phi_1 \wedge \phi_2$ и $\phi_1 \wedge \neg\phi_2$ - невыполнима.
- Выполнима ли $\neg\phi_1 \wedge \phi_2$?
- Выполнима ли $\phi_1 \wedge \neg\phi_2$?

AtMostOne

- $AtMostOne(x_1, x_2)$:
  $\phi_1 = \neg x_1 \vee \neg x_2$
  $\phi_2 = (\neg x_1 \vee y) \wedge (y \neg x_2)$
- Они эквивалентны?
- $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ - тавтология, если и $\neg\phi_1 \wedge \phi_2$ и $\phi_1 \wedge \neg\phi_2$ - невыполнима.
- Выполнима ли $\neg\phi_1 \wedge \phi_2$?
- Выполнима ли $\phi_1 \wedge \neg\phi_2$?
- Формулы не эквивалентны, но равносильны, т.е. ϕ_1 - выполнима, тогда и только тогда, когда ϕ_2 - выполнима.

Преобразование Цейтина (Tseytin transformation)

- $P \to (Q \wedge R)$

Преобразование Цейтина (Tseytin transformation)

- $P \rightarrow (Q \wedge R)$
- Введем переменные для всех неатомарных подформул:
  $T_1 \leftrightarrow P \rightarrow T_2$
  $T_2 \leftrightarrow (Q \wedge R)$

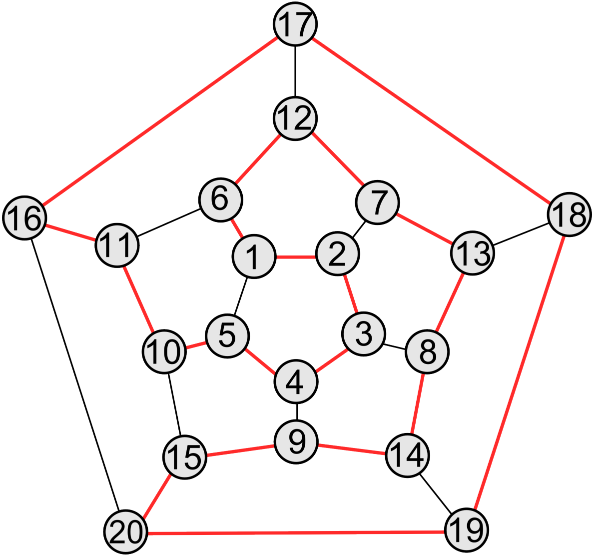
Преобразование Цейтина (Tseytin transformation)

- $P \rightarrow (Q \wedge R)$
- Введем переменные для всех неатомарных подформул:
  $T_1 \leftrightarrow P \rightarrow T_2$
  $T_2 \leftrightarrow (Q \wedge R)$
- Каждую преобразуем в КНФ:
  $F_1 = (T_1 \vee P) \wedge (T_1 \vee \neg T_2) \wedge (\neg T_1 \vee \neg P \vee T_2)$
  $F_2 = (\neg T_2 \vee Q) \wedge (\neg T_2 \vee R) \wedge (T_2 \vee \neg Q \vee \neg R)$

Преобразование Цейтина (Tseytin transformation)

- $P \to (Q \wedge R)$
- Введем переменные для всех неатомарных подформул:
  $T_1 \leftrightarrow P \to T_2$
  $T_2 \leftrightarrow (Q \wedge R)$
- Каждую преобразуем в КНФ:
  $F_1 = (T_1 \vee P) \wedge (T_1 \vee \neg T_2) \wedge (\neg T_1 \vee \neg P \vee T_2)$
  $F_2 = (\neg T_2 \vee Q) \wedge (\neg T_2 \vee R) \wedge (T_2 \vee \neg Q \vee \neg R)$
- $T_1 \wedge F_1 \wedge F_2$

Гамильтонов цикл



Гамильтонов цикл

- $\Sigma_j x_{ij} = 1$ - для каждого i (т.е. для всех исходящих ребер)

Гамильтонов цикл

- $\Sigma_j x_{ij} = 1$ - для каждого i (т.е. для всех исходящих ребер)
- $\Sigma_i x_{ij} = 1$ - для каждого j (т.е. для всех входящих ребер)

Гамильтонов цикл

- $\Sigma_j x_{ij} = 1$ - для каждого i (т.е. для всех исходящих ребер)
- $\Sigma_i x_{ij} = 1$ - для каждого j (т.е. для всех входящих ребер)
- $\Sigma_{ij \in S} x_{ij} \leq |S| - 1$, где S - подмножество V и $2 \leq |S| \leq n - 2$ - связность графа

Гамильтонов цикл

- Проблема - очень много ограничений.
- Только добавление всех троек дает $O(n^3)$ уравнений.

Гамильтонов цикл

- Проблема - очень много ограничений.
- Только добавление всех троек дает $O(n^3)$ уравнений.
- Давайте поступать лениво!
- Пусть сначала в нашей системе уравнений нет ограничений на связанность
- Попросим солвер решить нашу систему. Если в ответе получился путь, в котором не все ребра есть в графе, то добавим в систему уравнений ограничение на текущий путь.

Гамильтонов цикл

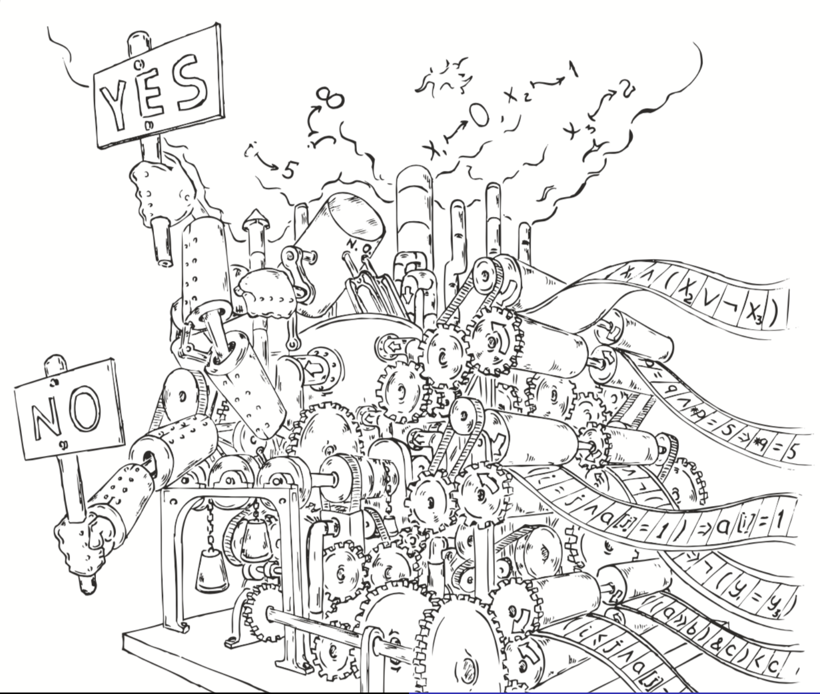
- Проблема - очень много ограничений.
- Только добавление всех троек дает $O(n^3)$ уравнений.
- Давайте поступать лениво!
- Пусть сначала в нашей системе уравнений нет ограничений на связанность
- Попросим солвер решить нашу систему. Если в ответе получился путь, в котором не все ребра есть в графе, то добавим в систему уравнений ограничение на текущий путь.
- Практика показывает, что хватит $O(n^3)$ дополнительных уравнений.

DIMACS формат

- Комментарий c comment
- Заголовок p cnf n m: n - количество переменных в дизюнкте, m - количество дизюнктов
- Дизъюнкт - описание дизъюнкта: номера переменных, который в него входят, «-» - если переменная ложная, в конце всегда 0

DIMACS формат

- Комментарий c comment
- Заголовок p cnf n m: n - количество переменных в дизюнкте, m - количество дизюнктов
- Дизъюнкт - описание дизъюнкта: номера переменных, который в него входят, «-» - если переменная ложная, в конце всегда 0
- $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (b \vee c \vee \neg d)$
- c example
  p cnf 4 7
  1 2 -3 0
  -1 -2 3 0
  2 3 -4 0


YES
NO
N.O.
i → 5
x1 → 0
x2 → 1
x3 → 2
∧ (x2 ∨ ¬x3)