Лабораторная работа №2
ИССЛЕДОАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

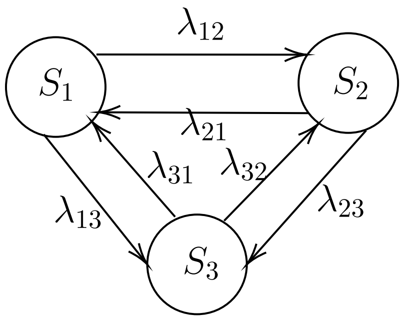
Цель работы

Провести аналитическое и численное исследование цепи маркова.

Методические указания

Одним из примеров стохастической модели являются сети Маркова. А.А. Марков (1856 - 1922) – основоположник теории сетей Маркова, также оставил труды в области теории вероятностей и случайных процессов, математическом анализе и теории чисел.

Модель Марковского процесса представляет собой граф, где узлы обозначают состояние моделируемого объекта, а дуги – вероятность перехода из одного состояния в другое.



Марковские процессы делятся на два вида:

1. Дискретные цепи Маркова, где система меняет свое состояние в определенные такты времени (P-схема)
2. Непрерывные цепи Маркова, где система меняет свое состояние в произвольный момент времени (q-схема)

Свойство марковости:

В Марковской сети вероятность события зависит только от текущего состояния сети, т.е.

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

где $\{X_n\}$ – пространство состояний цепи, i – номер шага.

Тогда вероятность попасть из состояние i в состояние j за m шагов равно:

$$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n-1} = j | X_n = i]$$

Это выражение можно переписать в виде рекуррентной формулы:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{\left(m^{-1}\right)} p_{ik}$$

т.е. для того, чтобы попасть в состояние E_j, необходимо сначала за $m - l$ шагов попасть в множество состояний E_k, а затем уже из них перейти в состояние E_j.

Цепи Маркова бывают разложимыми, неразложимыми, периодическими и эргодическими.

Разложимая цепь содержит невозвратные (поглощающие) состояния (множества состояний). Из таких вершин не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме вероятность пребывания в таком состоянии равна 1. Необходимым условием того, что состояние i является поглощающим является:$p_{ii} = l$

Неразложимая цепь не содержит поглощающих состояний или поглощающих подмножеств узлов. Такие цепи описываются сильно связным графом.

Периодической цепью называется такая цепь, последовательность смены состояний которой меняются периодически. В случае периодической цепи все состояний имеют один и тот же период.

Эргодической называется неразложимая и нециклическая марковская система. Для такой системы имеется возможность определить стационарные вероятности (т.е. вероятности событий при времени, стремящимся к бесконечности (или числе шагов моделирования, стремящимся к бесконечности)). Вероятности этих состояний не зависят от вероятностей системы в начальный момент.

Если цепь является неразложимой и непериодической (эргодической), то для нее существует предельное распределение вероятностей при $n \to \infty$, где n - число шагов моделирования. Т.е.

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \pi_j^{(n)}$$

где j– номер состояния цепи Маркова, π_j – вероятность того, что система находится в j-м состоянии. π_j не зависит от начального состояния, с которого начинается имитационное π моделирование (финальные вероятности).

Порядок выполнения

В данной лабораторной работе будет моделироваться дискретная эргодическая сеть Маркова (P-схема).

Начальный вектор состояний можно выбрать произвольным образом. Точность и количество шагов являются изменяемыми параметрами для задачи.

Требуется найти:

1. распределение по состояниям при $m \to \infty$ **численно**, моделируя преобразование вектора вероятностей состояний (умножение начального вектора на матрицу перехода нужное количество раз). Вычисления продолжаются до тех пор, пока среднеквадратичное отклонение между векторами не будет меньше заданного значения $\varepsilon : (||\pi^{(n-1)} - \pi^{(n)}||) < \varepsilon$. Точность опциональна

2. распределение по состояниям при $m \to \infty$ **аналитически**, решив систему уравнений на финальные вероятности: $\pi = P_r * \pi$ (здесь запись в матричном виде). К системе необходимо добавить условие нормировки (сумма вероятностей в финальном векторе вероятностей должна равняться единице). Решение системы оформить программно.

N.B. В данном случае, возможно, появляются некие сомнения по поводу логичности происходящего - почему аналитическое решение нужно оформлять программно? Дело в том, что под "аналитичностью"подразумевается именно нахождение решения через систему, а под "численностью через моделирование переходов с некоторой точностью.

Для выполнение лабораторной работы необходимо выполнить следующие пункты:

1. Придумать эргодическую марковскую цепь, состоящую из 8 состояний (не забудьте, что всегда должны быть вероятности перехода из состояния i в состояние i - то есть вероятности остаться в текущем состоянии);

2. Записать матрицу переходных вероятностей и задать начальный вектор состояний, точность и количество шагов;

3. Промоделировать марковскую цепь пошагово в с двумя разными начальными векторами вероятностей состояний и получить два конечных вектора (к которому привело моделирования), а также графики изменения среднеквадратического отклонения на каждом шагу моделирования для обоих начальных векторов;

4. Решить задачу аналитически, и получить вектор;
5. Проверить, что два вектора из пункта 2 и вектор из пункта 3 схожи между собой.

Контрольные вопросы

1. Определение случайной величины.
2. Определение цепи Маркова.
3. Классификация цепей Маркова.
4. Вероятность перехода.
5. Стохастическая матрица
6. Достаточное условие эргодичности.