Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО **УЧЕБНЫЙ ЦЕНТР ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ФТФ**

Группа: М32101

Студент: Косовец Роман / Дмитрий Надеждин

Преподаватель: Дорофеева Юлия Александровна

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе № 2
«Численное дифференцирование и интегрирование»

1. Цель работы:

Реализовать перечисленные ниже методы нахождения производной при фиксированном значении шага:

- Правая разностная производная
- Левая разностная производная
- Центральная разностная производная
- Формула прямоугольников
- Формула трапеций
- Формула Симпсона

2. Задачи, решаемые при выполнении работы:

1. Сравнить методы на двух произвольных функциях выявить преимущества и недостатки каждого алгоритма.
2. Найти среднеквадратичные отклонения численных от истинных значений производной.
3. Проанализировать зависимость среднеквадратичного отклонения от величины шага.

3. Условие задачи:

Постановка задачи

1. Реализуйте перечисленные выше методы нахождения производной при фиксированном значении шага.

2. Возьмите 2 произвольные функции. Вычислите аналитически производные этих функций. Постройте их графики, а также вычисленные значения численной производной в узлах сетки.

3. Найдите среднеквадратичные отклонения численных от истинных значений производной.

4. Выполните предыдущий пункт при уменьшении шага (увеличения количества узлов) в 2, 4, 8 и 16. Как изменяется среднеквадратичное отклонение при изменении шага? Постройте график зависимости среднеквадратичного отклонения от величины шага.

5. Реализуйте методы численного интегрирования.

6. Выберите 2 функции и вычислите для них определенный интеграл на отрезке. Сравните полученное значение с ответом, полученным аналитически.

7. Проанализируйте зависимость отклонения численного ответа от аналитического в зависимости от шага при уменьшении его в 2, 4, 8 и 16 раз. Постройте график зависимости отклонения от величины шага.

4. Решение задачи:

Для дальнейшего решения задачи и описания математических методов зададим две произвольных функции:

- $y = x^2$ (func1)
- $y = \sin(x) * x^3$ (func2)

Также найдем аналитически значения производных этих функций для дальнейшего анализа зависимости отклонения от величины шага:

- func(1) = 333333.33
- func(2) = -876989.41

Найдем значения среднеквадратичного отклонения численных от истинных значений производных при фиксированном значение шага (h = 0.01):

- Правая разностная производная (func1) = 0.01000000
- Левая разностная производная (func1) = 0.00999999
- Центральная разностная производная (func1) = 0.0100010

- Правая разностная производная (func2) = 1359.9057
- Левая разностная производная (func2) = 1359.7178
- Центральная разностная производная (func2) = 1359.4294

Код всех методов (Python)
https://github.com/RomanKosovets/PriMat/blob/main/Lab_2/6Methods.py

5. Методы левой, правой, центральной разностных производных:

Метод правой разностной производной – Правая разностная производная используется для аппроксимации производной в точке, используя разность между значением функции в этой точке и значением функции в следующей точке.
Формула правой разностной производной первого порядка выглядит следующим образом:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Метод левой разностной производной – левая разностная производная используется для аппроксимации производной в точке, используя разность между значением функции в этой точке и значением функции в предыдущей точке. Формула левой разностной производной первого порядка выглядит следующим образом:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Преимущества методов левой и правой разностных производных:

- Простата вычисления
- Меньшая чувствительность к шуму, поскольку используется только одно значение

Недостатки методов левой и правой разностных производных:

- Меньшая точность по сравнению с центральной разностной производной
- Меньшая точность на концах области определения функции, поскольку в этих точках нет предыдущей точки

Метод центральной разностной производной – центральная разностная производная используется для аппроксимации производной в точке, исходя из разностей между значениями функции на точке и ее близлежащих соседних точках. Формула центральной разностной производной первого порядка выглядит следующим образом:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

где ***h*** – шаг между соседними точками

Преимущества метода:

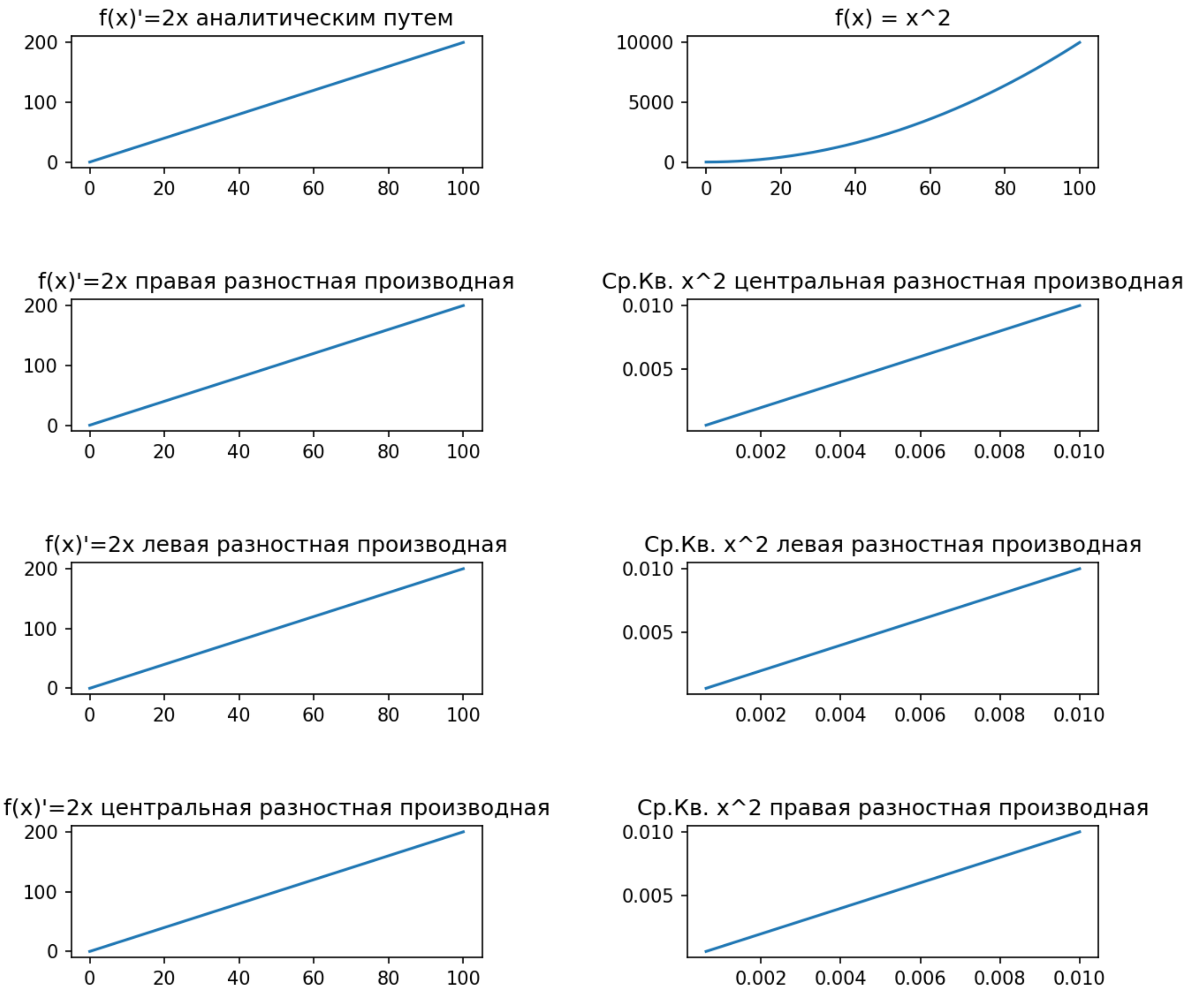
- Более точная аппроксимация производной по сравнению с левой или правой разностной производной
- Более точная аппроксимация производной в центре области определения функции

Недостатки метода:

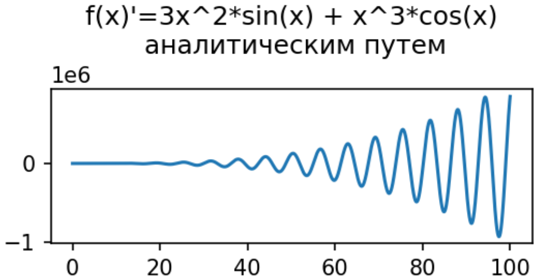
- Более сложный расчет, поскольку требуется вычисление значений функции в двух точках
- Большая чувствительность к шуму, поскольку используются два значения функции, которые могут содержать ошибки

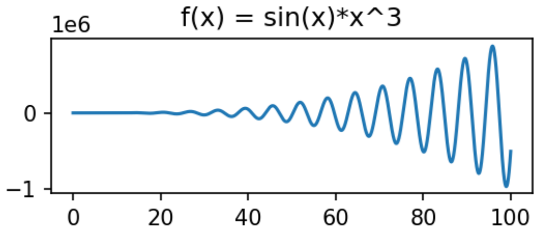
Графики производных и зависимости отклонения от длины шага

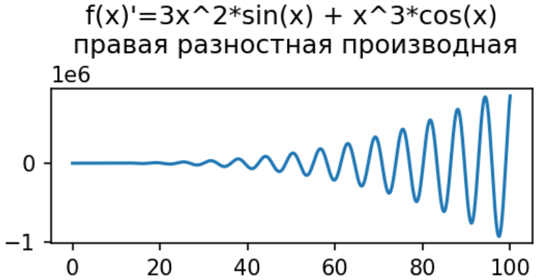
функция $y = x^2$:

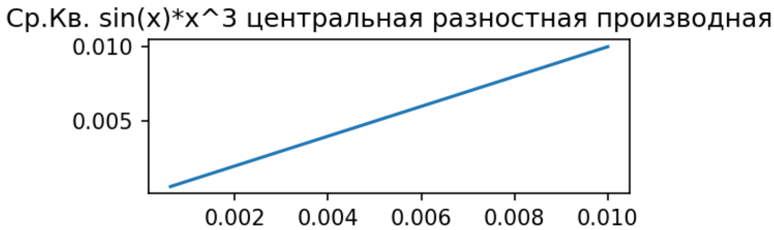


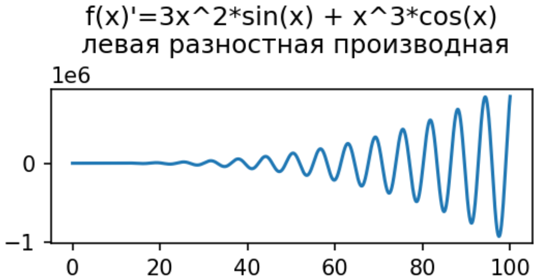
функция $y = \sin(x) * x^3$:

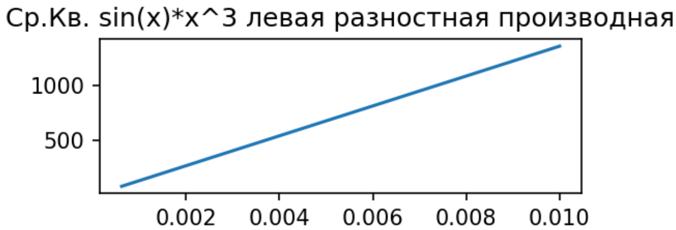


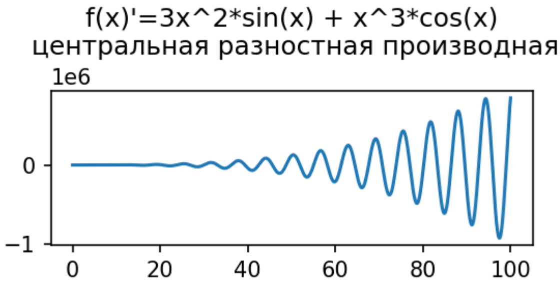


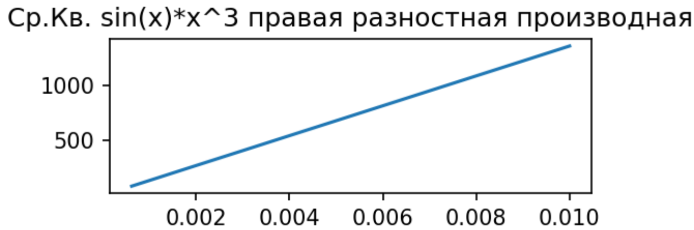












6. Методы прямоугольников:

Методы левых, правых и средних прямоугольников используются для численного интегрирования функции на отрезке.

Метод левых прямоугольников – метод левых прямоугольников оценивает площадь под графиком функции на отрезке, используя значение функции в левой границе каждого прямоугольника. Преимущество этого метода заключается в его простоте и быстроте вычислений. Однако, он даёт грубую оценку интеграла и требует большего количества прямоугольников для достижения точности.

$$I_i \approx h * f_{i-1}$$

Метод правых прямоугольников – метод правых прямоугольников оценивает площадь под графиком функции на отрезке, используя значение функции в правой границе каждого прямоугольника. Этот метод также прост в использовании и даёт быстрый результат, но он также требует большего количества прямоугольников для достижения точности.

$$I_i \approx h * f_i$$

Преимущества методов левых и правых прямоугольников:

- Простата вычисления
- Низкая вычислительная погрешность при вычислении интегралов от гладких функций

Недостатки методов левых и правых прямоугольников:

- Большая аппроксимационная ошибка при вычислении интегралов от не очень гладких функций
- Медленная сходимость при уменьшении шага разбивания

Метод средних прямоугольников – метод центральных прямоугольников оценивает площадь под графиком функции на отрезке, используя значение функции в середине каждого прямоугольника. Этот метод даёт более точную оценку интеграла, чем методы левых и правых прямоугольников, но требует большего количества вычислений**.**

$$I_i \approx h * f_{i-1/2}$$

Преимущества методов средних прямоугольников:

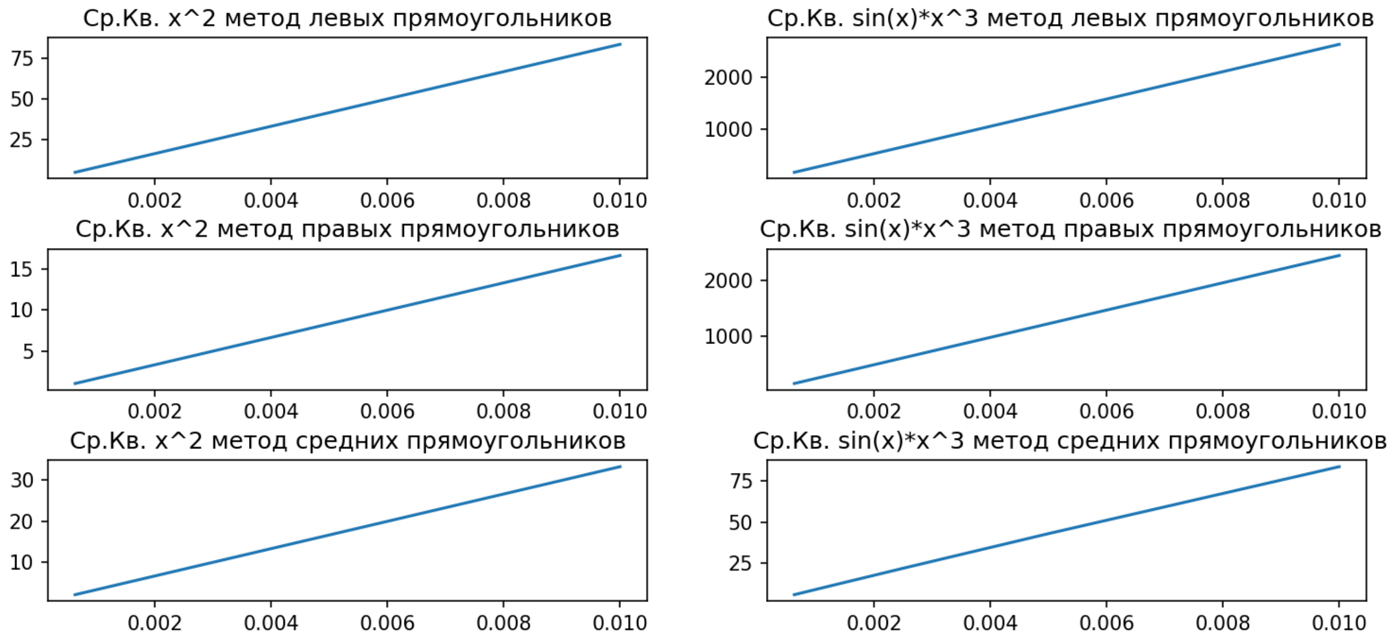
- Сходимость быстрее, чем у метода левых и правых прямоугольников
- Низкая аппроксимационная ошибка при вычислении интегралов от гладких функций

Недостатки методов средних прямоугольников:

- Большая аппроксимационная ошибка при вычислении интегралов от не очень гладких функций
- Медленная сходимость при уменьшении шага разбивания

Графики зависимости отклонения от длины шага

функция $y = x^2$ и функция $y = \sin(x) * x^3$:



7. Метод трапеций:

Метод трапеций – метод центральных прямоугольников оценивает площадь под графиком функции на отрезке, используя значение функции в середине каждого прямоугольника. Этот метод даёт более точную оценку интеграла, чем методы левых и правых прямоугольников, но требует большего количества вычислений.

$$I_i \approx \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)$$

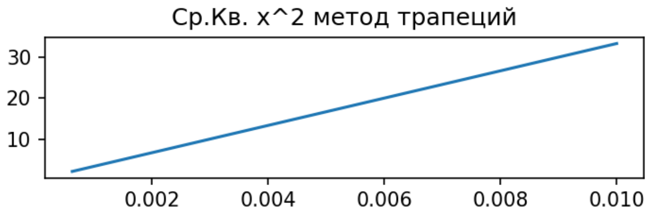
Преимущества метода трапеций:

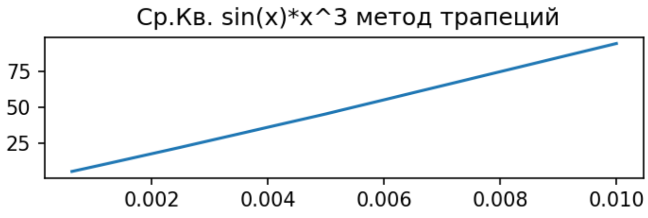
- Высокая точность при вычислении интегралов от гладких функций
- Простота в использовании

Недостатки метода трапеций:

- Большая аппроксимационная ошибка при вычислении интегралов от не очень гладких функций
- Медленная сходимость при уменьшении шага разбивания

Графики зависимости отклонения от длины шага
функция $y = x^2$ и функция $y = \sin(x) * x^3$:





8. Метод Симпсона:

Метод Симпсона — это численный метод вычисления определенного интеграла от функции на заданном интервале. Он основан на аппроксимации функции на каждом интервале параболой, проходящей через три точки: левый конец интервала, правый конец интервала и серединную точку интервала. Формула для вычисления интеграла методом Симпсона имеет следующий вид:

$$I_i = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i)$$

Преимущества метода Симпсона:

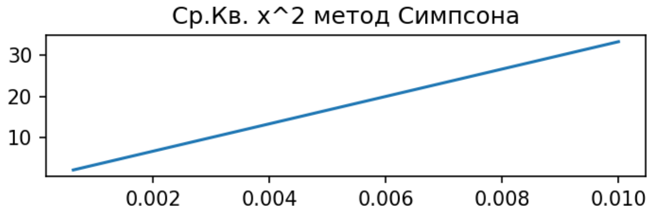
- Высокая точность при вычислении интегралов от гладких функций
- Более быстрая сходимость по сравнению с методом трапеций
- Меньшая аппроксимационная ошибка по сравнению с методом трапеций

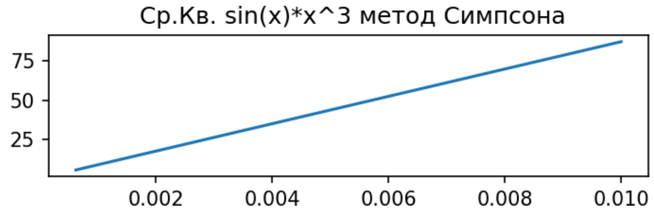
Недостатки метода Симпсона:

- медленная сходимость при вычислении интегралов от функций с разрывами

Общее преимущество метода Симпсона перед методами прямоугольников и трапеций заключается в том, что он более точен и более быстро сходится при вычислении интегралов от гладких функций. Однако, при вычислении интегралов от функций с разрывами или других не очень гладких функций, метод Симпсона может оказаться менее эффективным.

Графики зависимости отклонения от длины шага
функция $y = x^2$ и функция $y = \sin(x) * x^3$:





9. Вывод:

В данной лабораторной работе были реализовали методы численного нахождения производной, благодаря средней квадратичной ошибки методы с аналитическим решением. Получили достаточно точный результат.
Также продемонстрировали, как меняется точность численных методов в зависимости от величины шага. Можно сделать вывод, что чем меньше шаг, тем точнее вычисление.

Выбор метода зависит от конкретной задачи и особенностей функции. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки, которые необходимо учитывать при выборе метода. Например, если функция достаточно гладкая и имеет примерно постоянную скорость изменения на отрезке, то метод центральных прямоугольников или формула Симпсона могут дать более точную оценку интеграла. Если же функция имеет резкие скачки или явные экстремумы на отрезке, то может быть более эффективным использование метода трапеций.