Міністерство освіти та науки України

Львівський національний університет імені Івана Франка

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра обчислюваьної математики

Курсова робота на тему:

«Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь першого роду генетичними алгоритмами»

Науковий керівник:	ас. Борачок І. В.
Студент:	Куновський Р. Л.
Група:	ПМПм-11

Львів 2022

Зміст

Вступ

В даній роботі за допомогою генетичних алгоритмів буде наведено алгоритм для чисельного розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь першого роду.

Спочатку описано загальний вигляд відповідних інтегральних рівнянь, після чого проведено параметризацію. Також тут представлено загальні відомості про генетичні алгоритми, зокрема один із способів доведення збіжності алгоритмів. Далі покроково розписано алгоритм знаходження чисельних розв'язків, після чого наведено чисельні експерименти, результати яких зображено відповідними графіками і проаналізовано.

Метою цієї роботи є застосування генетичних алгоритмів для розв'язування вищезгаданих інтегральних рівнянь.

1. Постановка задачі

Нехай задана границя $\Gamma \in C^3$, як зображено на (рис. 1), для якої відомо параметричне подання.

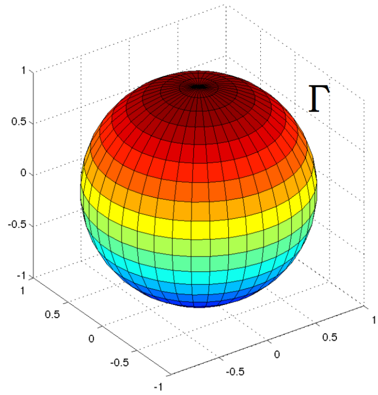

Рис. 1. Вигляд границі.

Розглянемо двовимірне інтегральне рівняяя першого роду, яке має наступний вигляд:

$$\int_\Gamma \varphi(y) H(x,y) ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma \tag{1}$$

Задача полягає в тому, щоб знайти функцію $\varphi(y)$, коли ядро $H(x,y)$ і функція $f(x)$ є відомими неперервними функціями.

Існування та єдиність розв'язку рівняння (1) базується на теорії Рісса-Шаудера, яка описана в [1]. Відомо з [10], що розвязок задачі є нестійким, тому дана задача є некоректною. Питання некоректності більш детально розглянемо в наступному підрозділі.

1.1. Поняття некоректної задачі та регуляризації

Подальші поняття та означення запропоновані в [9]. Розгляньмо операторне рівняння:

$$Ax = f. \tag{2}$$

Тут $A : X \to Y$ є лінійним оператором, що діє з нормованого лінійного простору X до нормованого лінійного простору Y.

Означення 1. Операторне рівняння (2) називається некоректним, якщо оператор A не задовольняє хоча б одну з таких умов:

- A є бієкцією;
- оператор $A^{-1} : Y \to X$, якщо він існує, є неперервним.

Означення 2. Лінійний оператор $A : X \to Y$ називають обмеженим знизу, якщо існує таке $C > 0$, що $\|Ax\| \geqslant C\|x\|, \forall x \in X$.

Результати досліджень у межах функціонального аналізу показують, що (2) є некоректним тоді й лише тоді, коли або A не є сюр'єкцією або не є обмеженим знизу. Якщо A не є сюр'єкцією, тоді існують $f \in Y$ такі, що (2) є нерозв'язним. У таких випадках доводиться шукати так званий *розв'язок із мінімальною нормою лишку*, скажімо $\hat{x}$. Якщо існування такого $\hat{x}$ гарантовано, варто визначити умови, за яких задача визначення $\hat{x}$ є коректною. Якщо модифікована задача також некоректна, доводиться її регуляризувати.

Означення 3. Регуляризацією рівняння (2) називається заміна початкової некоректної задачі сімейством близьких до неї коректних задач і наступне наближення до $\hat{x}$ із прямуванням похибки у даних y до нуля.

Прикладами некоректних операторних рівнянь першого роду є інтегральне рівняння Фредгольма першого роду, рівняння задачі, яка виникає під час аналізу даних геологорозвідки, рівняння зворотної задачі теплопровідності, рівняння Абеля першого роду.

Одним з істотних моментів у теорії таких рівнянь є те, що оператор, обернений до компактного, не обмежений. Тому, якщо f_1 і f_2 - два близьких між собою елемента з Y і обидва рівняння

$$A\varphi = f_1, \quad A\varphi = f_2$$

розв'язні, то відповідні розв'язки $\varphi_1 = A^{-1}f_1$ і $\varphi_2 = A^{-1}f_2$ можуть значно відрізнятися один від одного. Отже, як завгодно мала похибка у вільному члені рівняння (2) може привести до як завгодно великої помилки у розв'язку.

Загальніший підхід до розв'язування операторних рівнянь першого роду було запропоновано Тіхоновим. Для операторного рівняння (2) регуляризованим розв'язком за Тіхоновим називається елемент простору X, $x_\alpha(f) = R_\alpha f$, який мінімізує функціонал Тіхонова або згладжувальний функціонал

$$M^\alpha[x, f] = \|Ax - f\|^2 + \alpha\|x\|^2. \tag{3}$$

При цьому α називається параметром регуляризації. Вибір способу прямування цього параметра до нуля при відшуканні розв'язку є характеристикою алгоритму розв'язування.

1.2. Параметризація

Розглянемо наступну теорему, описану в [6]:

Теорема 1. *Нехай границя Γ є неперервна і може бути біективно відображена на одиничну сферу $\mathbb{S}^2$. Тоді існуює взаємнооднозначне відображення q:*

$$q : \mathbb{S}^2 \to \Gamma,$$

для якого визначено якобіан переходу J_q.

Відоме параметричне задання границі:

$$\Gamma := \{q(x(t)) = [q(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2\}. \tag{4}$$

Параметризований вигляд інтегрального рівняння (1):

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} \psi(\hat{y}) K(\hat{x}, \hat{y}) ds(\hat{y}) = \tilde{f}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2, \tag{5}$$

де $\psi(\hat{y}) = \varphi(q(\hat{y}))$, $\tilde{f}(\hat{x}) = f(q(\hat{x}))$, а $K(\hat{x}, \hat{y}) = H(q(\hat{x}), q(\hat{y}))J_q(\hat{y})$.

Отже, за допомогою оператора q було перейдено з тривимірної границі до двовимірної. Для розв'язування параметризованого інтегрального рівняння застосуємо генетичні алгоритми, які розглянемо в наступному розділі.

2. Означення генетичних алгоритмів

Протягом останніх років активно розвиваються алгоритми, побудовані на біологічних процесах, такі як нейронні мережі, генетичні алгоритми, еволюційні програми та інші. Дані алгоритми застосовують також для розв'язування прикладних задач матиматичної-фізики. В даній роботі ми використаємо генетечні алгоритми для розв'язування поставленої задачі.

Генетичний алгоритм – це в першу чергу еволюційний алгоритм, іншими словами, основна властивість алгоритму - схрещування (комбінування). Як нескладно здогадатися, ідея алгоритму нахабним чином взята у природи, добре, що вона не подасть на це в суд. Так ось, шляхом перебору і найголовніше відбору виходить правильна «комбінація».

Розглянемо детальніше основні компоненти генетичних алгоритмів, які наведені в [2]:

- **Створення нової популяції**. На цьому кроці створюється початкова популяція, яка, цілком можливо, виявиться далеко не найкращою, проте велика ймовірність, що алгоритм цю проблему виправить. Головне, щоб індивіди відповідали «формату» і були «пристосовані до розмноження».

- **Селекція**. Селекція полягає в тому, що батьками можуть стати тільки ті особини, значення пристосованості яких не менше порогової величини, наприклад середнього значення пристосованості по популяції. Такий підхід забезпечує швидшу збіжність алгоритму. В літературі для генетичного алгоритму виділяють різні варіації селекції. Найбільш відомі з них — це турнірний і рулеточний (пропорційний) відбори. При турнірному відборі (**tournament selection**) з популяції, яка складається із N особин, вибираються випадковим чином k особин, і найкраща особина записується в проміжний масив. Ця операція повторюється N раз. Особини в отриманому проміжному масиві потім використовуються для схрещування (також випадковим чином). Перевагою даного способу є те, що він не вимагає додаткових обчислень. У методі рулетки (**roulette-wheel selection**) особини відбираються за допомогою N «запусків» рулетки, де N — розмір популяції. Колесо рулетки містить по одному сектору для кожного члена популяції. Розмір i-го сектору пропорційний ймовірності попадання індивіда в нову популяцію.

- **Схрещення**. Ну тут все як у людей, для отримання нащадка потрібно двоє батьків. Головне, щоб нащадок міг успадкувати від батьків їх риси. При цьому розмножуються не всі, а лише «переможці», тобто ті особини, які пройшли відбір (наприклад турнірний відбір або відбір методом рулетки).

- **Мутація**. В мутації вибирають певну кількість особин (випадково, або за допомогою відборів) і змінюють їх відповідно з заздалегідь визначеними операціями.

- **Знищення попередньої популяції**. Тут ми починаємо вибирати частку тих, хто «піде далі». При цьому частку «вижили» після нашого відбору ми визначаємо заздалегідь, вказуючи у вигляді параметра. Як не сумно, інші особини повинні загинути.

Якщо результат нас не влаштовує, ці кроки повторюються до тих пір, поки результат нас не почне задовольняти або справдиться одна з нижче перерахованих умов:

- Знайдений результат, який задовольняє наші умови.

- Результат не покращується вже тривалий час.

- Кількість популяцій досягла заздалегідь обраного максимуму.

2.1. Збіжність

Доведемо збіжність генетичних алгоритмів методом, який запропоноапно в [2]. Спочатку розглянемо деякі поняття функціонального аналізу.

Означення 4. Простір S із відображенням $\delta : S \times S \to \mathbb{R}$ називається метричним, якшо: $\forall x, y, z \in S$:

$$\begin{array}{l} \delta(x,y) \geq 0, \delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ \delta(x,y) = \delta(y,x), \\ \delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z), \end{array}$$

де $\delta-$ відстань. Позначатимемо метричний простір так: $< S, \delta >$.

Означення 5. Функція $f : S \to S-$ стискуюче відображення, якщо

$$\exists \varepsilon \in [0,1) : \forall x, y \in S, \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon\delta(x,y).$$

Теорема 2 (Теорема Банаха про стискуюче відображення)**.** $< S, \delta > -$ *повний метричний простір,* $f : S \to S-$ *стискуюче відображення, тоді* f *має єдину нерухому точку* $x \in S$:

$$\begin{array}{c} x = \lim_{i\to\infty} f^i\left(x_0\right), \forall x_0 \in S \\ f^0\left(x_0\right) = x_0, f^i\left(x_0\right) = f\left(f^{i-1}\left(x_0\right)\right). \end{array}$$

В наступному розділі знаходження чисельного розв'язку інтегрального рівняння (1) буде зведено до пошуку мінімуму функції. Тому розглянемо наступну задачу:

$$F \to \min \text{(має єдину глобальну точку мінімуму)}.$$

$P(t) = P = \{x_1, \cdots, x_N\}$ – популяція, а $\text{eval}(x) = F(x)$ – функція придатності.

Легко зрозуміти, що $\text{eval}\left(x_i\right) <= \text{eval}\left(x_j\right) \Rightarrow x_i$ – кращий індивід. Також введемо оцінку популяції: $\text{eval}(P) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \text{eval}\left(x_i\right)$.

Якщо S - множина всіх можливих популяцій розміру N і $C = \min F$, а значить $C = F(x^*)$, де x^* – розв'язок задачі.

Введемо відстань:

$$\delta\left(P_1, P_2\right) = \begin{cases} 0, & P_1 = P_2 \\ \left|\text{eval}\left(P_1\right) - C + 1\right| + \left|\text{eval}\left(P_2\right) - C + 1\right|, & P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

Перевіримо аксіоми означення 4. Аксіоми $1, 2-$ очевидні, а аксіому 3 можна показати наступним чином:

$$\begin{aligned}\delta\left(P_1, P_2\right) + \delta\left(P_2, P_3\right) &= \left|\operatorname{eval}\left(P_1\right) - C + 1\right| + \left|\operatorname{eval}\left(P_2\right) - C + 1\right| \\ &+ \left|\operatorname{eval}\left(P_2\right) - C + 1\right| + \left|\operatorname{eval}\left(P_3\right) - C + 1\right| \\ &\geq \left|\operatorname{eval}\left(P_1\right) - C + 1\right| + \left|\operatorname{eval}\left(P_3\right) - C + 1\right| \\ &= \delta\left(P_1, P_3\right)\end{aligned}$$

Отже, $< S, \delta > -$ скінченновимірний метричний простір $\Rightarrow$ банахів простір.

Маючи $f : S \rightarrow S : f(P(t)) = P(t+1)$, припустимо, що $\operatorname{eval}(P(t+1)) < \operatorname{eval}(P(t))$ (якщо не виконується, то знову формуємо $P(t+1)$).

$$\begin{aligned}\delta\left(f\left(P_1(t)\right), f\left(P_2(t)\right)\right) &= \left|\operatorname{eval}\left(P_1(t+1)\right) - C + 1\right| + \left|\operatorname{eval}\left(P_2(t+1)\right) - C + 1\right| \\ &< \left|\operatorname{eval}\left(P_1(t)\right) - C + 1\right| + \left|\operatorname{eval}\left(P_2(t)\right) - C + 1\right| \\ &= \delta\left(P_1(t), P_2(t)\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ – стискуюче відображення. Отже, f має єдину нерухому точку:

$$P^* = \lim_{i\to\infty} f^i(P(0)), \forall P(0) \in S$$
$$P^* = \left(x^*, \cdots, x^*\right), x^* - \text{ глобальний мінімум.}$$

З цього випливає висновок, що незалежно від початкової популяції за нескінченну кількість ітерацій буде отримано популяцію, в якої всі індивіди – розв'язки.

Розглянувши основні компоненти генетичних алгоритмів і довівши збіжність, можна приступити безпосередньо до застосування генетичних алгоритмів для чисельного розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь.

параметризація S^2

y^ = p(\theta, \phi)

3. Знаходження чисельного розв'язку

\psi \approx \sum_{i=0}^n \psi_n * basis(y)

Під час процесу параметризації було отримано ... шукаємо наближення до розв'язку (5) наступним чином:

(n+1)^2 - числа індивіду

$$\psi(\hat{y}) \approx \psi_n(\hat{y}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=-k}^{k} \psi_{km} Y_{km}^{\mathbb{R}}(\hat{y}), \quad \hat{y} \in \mathbb{S}^2,\ n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

k=0?

де ψ_{km} – невідомі коефіцієнти, $Y_{km}^{\mathbb{R}}(\hat{y})$ – дійснозначні сферичні гармоніки.

Означення 6. Дійснозначні сферичні гармоніки $Y_{k,m}^{\mathbb{R}}$ мають наступний вигляд [6]:

$$Y_{k,m}^{\mathbb{R}}(\theta, \varphi) = c_k^m P_k^{|m|}(\cos\theta) \begin{cases} \cos(|m|\varphi), & m < 0 \\ 1, & m = 0 \\ \sin(|m|\varphi), & m > 0 \end{cases}, \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $P_k^{|m|}$ – приєднані функції Лежандра, а

$$c_k^m = (-1)^{\frac{|m|-m}{2}} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|m|)!}{(k+|m|)!}}.$$

.

Підставивши (6) в (5), отримаємо $r_n(\hat{x})$ – залишковий елемент:

$$r_n(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \psi_n(\hat{y}) K(\hat{x}, \hat{y})\, ds(\hat{y}) - \tilde{f}(\hat{x}) \approx$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-k}^{k} \psi_{km} \int_{\mathbb{S}^2} K(\hat{x}, \hat{y})\, Y_{km}^{\mathbb{R}}(\hat{y}) ds(\hat{y}) - \tilde{f}(\hat{x}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-k}^{k} \psi_{km} b_{km}(\hat{x}) - \tilde{f}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2.$$

x^ \in S^2 : x^ = p(\theta, \phi), \theta \in [0, \pi]; \phi \in [0, \2pi]
theta - 5 points; phi - 10points;
theta_n = 5; theta_a = 0; theta_b = \pi; h = (theta_b - theta_a) / theta_n.

Зазначимо, що

$$b_{km}(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} K\left(\hat{x}, \hat{y}\right) Y^{\mathbb{R}}_{km}(\hat{y}) ds(\hat{y}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \tag{8}$$

Наша мета – знайти ψ_{km}, де $k = 1, 2, ..., n$, а $m = -k, ..., k$ такі, що $|r_n(\hat{x}) = 0|$. Для отримання такого результату нам необхідно звести задачу до пошуку мінімуму $|r_n(\hat{x})|$.

$$Minimize\ |r_n(\hat{x})| = \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-k}^{k} \psi_{km} b_{km}(\hat{x}) - \tilde{f}(\hat{x}) \right|, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \tag{9}$$

Інтеграл (8) можна чисельно обчислити багатьма способами. Ми використаємо к … тимальною для вище-поставленої з…

x.. 50 елементів
k
m
b_{km}(x)

n1 = 8, 16, 32, 64 (?)

$$b_{km}(\hat{x}) \approx \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{p'=0}^{2n'+1} \widetilde{\mu}_{p'} \widetilde{\alpha}_{s'} K(\hat{x}, \widetilde{y}_{s'p'}) Y^{\mathbb{R}}_{k,m}(\widetilde{y}_{s'p'}), \qquad \hat{x} \neq \widetilde{y}_{s'p'}\ \forall s'p',\ n' \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

a[s'] a[1], ... a[n+1]

де $\widetilde{\alpha}_{s'} = \dfrac{2\left(1 - \widetilde{t}^2_{s'}\right)}{\left[(n'+1) P_{n'}\left(\widetilde{t}_{s'}\right)\right]^2}$ – ваги квадратурної формули Гауса-Лежандра, $P_{n'}$ – поліном Лежандра, $\widetilde{t}_{s'}$ – нулі полінома Лежандра $P_{n'+1}$, а $\widetilde{\mu}_{\rho'} = \dfrac{\pi}{n'+1}$, $n' \in \mathbb{N}_0$.

У випадку одиничної сфери в $\mathbb{R}^3$, має місце таке параметричне подання [6]:

$$\mathbb{S}^2 = \{p(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

з наступним розподілом точок на сфері $\mathbb{S}^2$:

$$\tilde{y}_{s'\rho'} = p\left(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'}\right),$$

де $\theta_{s'} = \arccos \widetilde{t}_{s'}$, $s' = 1, \ldots, n'+1$, $\varphi_{\rho'} = \frac{\pi\rho'}{n'+1}$, $\rho' = 0, \ldots, 2n'+1, n' \in \mathbb{N}_0$.

Методод регуляризації

Двовимірне інтегральне рівняяя першого роду є некоректно поставленою задачею. Такі задачі розв'язуються методом регуляризації. В нашому випадку пропонується замінити рівняння (9) на:

$$Minimize\ |\widetilde{r}_n(\hat{x})| = \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k} \psi_{km} b_{km}(\hat{x}) - \tilde{f}(\hat{x})\right| + \alpha \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k} |\psi_{km}|,\ \ \hat{x} \in \mathbb{S}^2, \tag{11}$$

де α – параметр регуляризації, який зазвичай дорівнює малому числу. Наприклад: $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.001$, $\alpha = 0.0001$... Отож, параметр регуляризації вибираємо методом перебору. Інший варіант побудови регуляризованого мінімізуючого функціоналу можна задати так:

$$Minimize\ |\widetilde{r}_n(\hat{x})| = \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k} \psi_{km} b_{km}(\hat{x}) - \tilde{f}(\hat{x})\right)^2 + \alpha \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k} \psi_{km}^2,\ \ \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \tag{12}$$

Формула (12) є аналогом мінімізуючого функціоналу Тіхонова.

Алгоритм

Далі розглянемо застосування генетичних алгоритмів для мінімізації функціоналу $\widetilde{r}_n(\hat{x})$. Для опису алгоритму введемо деякі позначення:

- x_i, $i = 1, .., n$ – хромосома, бітова строка, яка представляє одне значення коефіцієнта $\psi_{km} \in [A, B]$, де $A, B \in \mathbb{R}$ і $A < B$.
- $I_j(t) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $j = 1, .., N$ – індивід з популяції в момент часу t.
- $P(t) = \{I_1, I_2, ..., I_N\}$ – популяція в момент часу t.
- $\mathrm{eval}(I_j(t))$ – функція оцінки індивіда, проходить методом перетворення хромосом в коефіцієнти ψ_{km} і підставляння їх в (11) або (12).

- $\mathrm{eval}(I_*) <= \mathrm{eval}(I_j(t)) \Leftrightarrow I_*$ – кращий індивід серед всіх популяцій.
- $\mathrm{eval}(I_*(t)) <= \mathrm{eval}(I_j(t)) \Leftrightarrow I_*(t)$ – кращий індивід в $P(t)$.
- $\mathrm{eval}(P(t)) = \min\limits_{j=1,\dots,N} \mathrm{eval}(I_j(t)) = I_*(t)$ – функція оцінки популяції.

Крок 1: Створення першої популяції.

Створюється $P(0)$, яка містить N індивідів, кожен з яких зберігає n коефіцієнтів a, представлених бітовими стрічками.

Крок 2: Проведення оцінки популяції.

Якщо оцінюється $P(0)$, то $I_*(0)$ записується як $I*$, інакше $I_*(t)$ порівнюється з існуючим $I*$ і кращий запам'ятовується як $I*$.

Крок 3: Перевірка умов виходу.

Провіряються умови виходу, які запропоновані нижче. Якщо відповідні умови здійснюються, $I*$ вважається розв'язком, **алгоритм закінчує роботу**.

Крок 4: Селекція.

За допомогою турнірного або рулеткового відбору виділяються кращі $I_j(t)$, з яких буде формуватися нова популяція.

Крок 5: Схрещення та мутація.

Обрані індивіди мають шанс схрещуватися або мутувати. Якщо індивід був обраний для схрещування або мутації, тоді кожна його хромосома має шанс схреститися з відповідною хромосомою партнера або мутувати. Після алгоритм переходить на **крок 2**.

Умови виходу:

Тут можна відзначити три варіанти умов виходу, які можна використовувати незалежно або комбінувати:

- Знайдений I_*, для якого $\mathrm{eval}(I_*) < E$, $E \in \mathbb{R}$. E – це мале число,

обране на початку алгоритму.
Наприклад: $E = 0.0001$, $E = 0.00001$, $E = 0.000001$...

- Знайдений I_* не покращується протягом багатьох популяцій. Це може означати, що був знайдений найкращий можливий індивід при відповідних вхідних даних.

- Кількість ітерацій досягла заздалегідь обраного максимуму.

Розробивши алгоритм для чисельного розв'язування двовимірного інтегральгоно рівняння першого роду, перейдемо до чисельних експериментів.

4. Чисельні експерименти

Для програмної реалізації даного алгоритму було використано мову програмування C#, а графіки побудовані за допомогою середовища комп'ютерної математики MATLAB. Цей алгоритм базується на випадковості, тому при однакових вхідних даних програма може повертати різні результати.

qqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqq
qqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqq TO DO
qqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqqq

Як ми бачимо з результатів чисельних експериментів, генетичні алгоритми дали досить точні розв'язки двовимірних інтегральних рівнянь першого роду. Також на відповідних графіках видно, що алгоритм доволі швидко знаходить хороший результат, який протягом наступних ітерацій зазнає незначних покращень.

Висновок

В даній роботі було продемонстровано ефективність генетичних алгоритмів для знаходження чисельного розв'язку двовимірних інтегральних рівнянь першого роду.

Для змоги застосувати генетичні алгоритми було доведено їх збіжність. Потім був розроблений покроковий алгоритм, який дозволив чисельно розв'язати вищезгадані інтегральні рівняння. Аналіз результатів довід коректність роботи алгоритму.

Хоча генетичні алгоритми є відносно молодими, їх сьогодні активно використовують і обговорють, адже за допомогою цих алгоритмів можна знаходити рішення справді складних задач. Звичайно, це рішення далеко не завжди буде точним, але ми можемо контролювати необхідну нам точність. Також вищезгадані алгоритми є доволі швидкодіючими.

\Delta u = 0
u = f на S^2
u(x) = \int

Бібліоґрафія

[1] **Rainer Kress** Linear Integral Equations (Third edition) / (297-321)ст.

[2] **Zbigniew Michalevicz** Genetic algorithm + data structures = evolutions programs / (11-88)ст.

[3] **Denny Hermawanto** Genetic Algorithm for Solving Simple Mathematical Equality Problem.

[4] **Сергей Львовский** Набор и вёрстка в системе Latex.

[5] **Евгений Колпак** Вычисления в Matlab.

[6] **І. В. Бурачок** Чисельне розв'язування задачі Коші для рівняння Лапласа в тривимірних двозв'язних областях / 2009р.

[7] **Roman Chapko** On the use of an integral equation approach for the numerical solutionof a Cauchy problem for Laplace equation in a doubly connectedplanar domain / Roman Chapko, Tomas Johansson, Yuriy Savka.

[8] **Roman Chapko** An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies / Roman Chapko, Tomas Johansson.

[9] **Юрій Чорноіван** Конспект лекцій з курсу інтегральних рівнянь та елементів функціонального аналізу / 2017р., (147-159)ст.

[10] **Andreas Kirsch** An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems (Second edition).

[11] The annual International Student Scientific Conference of Applied Mathematics and Computer Science / 2022р., 25-28 ст.

[12] Genetic Algorithms Tutorial, URL: https://www.tutorialspoint.com/genetic_algorithms/index.htm.

[13] Genetic Algorithm, URL: https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/genetic-algorithm.