А. Ю. Эвнин, Э. Ю. Лернер, Ю. А. Игнатов, И. С. Григорьева, Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах, *Матем. обр.*, 2017, выпуск 4(84), 45–60

Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах

А. Ю. Эвнин, Э. Ю. Лернер, Ю. А. Игнатов, И. С. Григорьева

Мы рассмотрим задачи по теории вероятностей со студенческих олимпиад последних лет, а также задачи, которые могли бы быть предложены на такой олимпиаде. Эта подборка может служить основой нескольких занятий математического кружка (как школьного, так и студенческого).

Вероятностное мышление и представления о статистических закономерностях играют важную роль в формировании мировоззрения, видимо поэтому элементы теории вероятностей и статистики включены даже в школьную программу. В этой статье мы ни в кой мере не претендуем на охват всех тем популярного вводного курса. Напомним в этой связи об известной книге [10]; замечательный иллюстративный материал как по теории вероятностей, так и по статистике можно найти в [4, главы 4, 5] и в более наукоёмкой книге [13]; отметим также недавно изданную небольшую книгу [14], по которой можно строить и школьный курс. Однако, мы будем рады, если обсуждаемые ниже задачи позволят интересующимися студентам и продвинутым школьникам почувствовать радость нахождения некоторых закономерностей случайного мира.

Составление подборки олимпиадных и занимательных вероятностных задач не является оригинальной идеей. Наиболее известной такой подборкой, часто используемой на различных конкурсах, является сборник Мостеллера [12]. Настоятельно рекомендуем читателю с ним ознакомиться (элементарные занимательные задачи содержатся также в [1, глава 1]). Мы старались избежать пересечения нашей подборки задач с [12]. Тем не менее, часть оставшихся задач являются фольклорными или же так или иначе связанными с задачами из указанных сборников. Обратим внимание на задачу 25 про неразборчивого жениха, пародирующую задачу про разборчивую невесту (последней также посвящена отдельная брошюра Гусейн-Заде [5]); задачу 35 о математиках, надевающих шляпы наугад; новый сюжет на известную тему в задаче 7 (ср. с первым решением задачи 6, не использующим понятие условной вероятности).

Авторство задач мы решили отмечать лишь в исключительных ситуациях, когда задача уже стала классической и, при этом, авторство известно. Авторам статьи очень редко принадлежат задачи целиком (их мы не стали отмечать, такие отметки могли бы обидеть тех, чьё авторство других задач осталось бы из-за нашего незнания неотмеченным), несколько чаще может идти речь об авторстве задачных легенд. Заметим, что ниже условия задач 9, 26 прошедших олимпиад по разным причинам чуть изменены (математическая сущность задач осталась неизменной). Задачи 33, 34, 39 известны авторам как предлагавшиеся студентам ФИВТ МФТИ (в несколько иной формулировке).

Задачи сгруппированы по темам (хотя деление это весьма условно: некоторые задачи можно отнести к разным темам, например, из-за возможности разных способов решения). В конце мы даём список задач для самостоятельного решения, к которым приводим лишь ответы и иногда краткие указания.

Названия городов в условиях задач означают следующее:

Йошкар-Ола — Открытая международная студенческая интернет-олимпиада по математике (организатор — Поволжский технический университет);

Казань — Открытая Поволжская олимпиада студентов, посвящённая дню рождения Н.И. Лобачевского, проводимая Казанским университетом [8, 9] (отметим, что председателем жюри в 2009–2012 гг. был известный вероятностник Д.Х. Муштари);

Тула — Всероссийский студенческий турнир математических боёв, организуемый Тульским педагогическим университетом им. Л.Н. Толстого [7, 6];

Уфа — Всероссийская студенческая олимпиада (организатор — УГАТУ) [2];

Челябинск — олимпиады, проводящиеся в Южно-Уральском университете [15, 16, 17, 18].

Классическая вероятность

1. (Казань, 2007) Имеется 3 ящика и 5 призов. Каждый приз независимо от других помещается в произвольный ящик. Какова вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым?

2. (Тула, 2013) /[11, задача 27.3]/ Из вершин правильного n-угольника ($n \geqslant 6$) наугад выбираются две тройки различных точек. Какова вероятность того, что два треугольника, вершинами которых являются выбранные тройки, не пересекаются?

3. (Челябинск, 2012) Среди вершин правильного $(2n+1)$-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Они соединяются отрезками. С какой вероятностью получится остроугольный треугольник?

4. (Челябинск, 2013) Джордж, Гаррис и Джей выбирают один из трёх маршрутов своего будущего путешествия. Каждый упорядочивает маршруты по своему предпочтению. Они договорились считать вариант a лучше варианта b, если a предпочтительнее b по мнению большинства. С какой вероятностью найдётся маршрут, который в глазах путешественников лучше двух других, если их предпочтения равновероятны и независимы?

5. (Казань, 2010) В игре «Что? Где? Когда?» в каждом раунде волчок останавливается в секторе номер n, где n равновероятно принимает одно из значений $0, 1, \ldots, 13$. При этом играет первый из секторов по часовой стрелке, который ранее не играл. Найдите вероятность того, что после шести раундов сыграют (в любом порядке) секторы $1, 2, \ldots, 6$.

Условная вероятность

6. (Йошкар-Ола, 2010) /М. Беррондо, [1, задача 13]/ В одном маленьком французском городке полиция разыскивает бродягу. Вероятность того, что он находится в одном из восьми баров этого городка, безразлично в каком, равна 0,8. Двое полицейских посетили семь баров, но бродягу не обнаружили. С какой вероятностью он будет найден в восьмом баре?

7. (Челябинск, 2011) Предположим, что Клавдия Ивановна (тёща Кисы) спрятала бриллианты в одном из 12 стульев с вероятностью 90%, а с вероятностью 10% не спрятала их вовсе. Предположим также, что мы вскрыли 11 стульев и ни в одном из них бриллиантов не нашли. Какова вероятность того, что мы найдём их в последнем, 12-м, стуле?

Теоремы сложения и умножения

8. (Казань, 2008) В вершинах правильного тетраэдра сидят муравьи (по одному в каждой вершине). В некоторый момент времени они начинают ползти по рёбрам в одну из соседних вершин. Какова вероятность того, что какие-то два муравья встретятся на ребре (не в вершине)?

9. (Казань, 2006) Людей с положительным резус-фактором 15%. Известно, что положительный резус-фактор рецессивен, т. е. проявляется, только если он получен и от матери, и от отца. Этот ген распределён одинаково у женщин и у мужчин. Пусть у некоторой женщины резус-фактор положителен. Какова вероятность того, что и у её ребёнка он будут положителен?

10. (Казань, 2004) Из n вопросов, вынесенных на зачёт, студент выучил m вопросов ($m \leqslant n-3$). Зачёт ставится, если студент ответит не менее чем на половину вопросов. Какой билет ему выгоднее брать, с двумя вопросами или с четырьмя? Ответ зависит от n и m. (Билеты составляются случайным образом).

11. (Казань, 2002) /[11, задача 27.1]/ В двух урнах лежит 25 шаров белого и чёрного цвета. Из каждой урны вынимается по одному шару. Вероятность того, что они оба белые, равна 0,54. Найдите вероятность того, что они оба чёрные.

12. (Йошкар-Ола, 2015) Игральный кубик подбросили 3 раза. Найдите вероятность того, что полученные три числа могут быть длинами сторон некоторого треугольника.

13. (Тула, 2004) Три теннисиста (A, B и C) играют в турнире по следующей схеме. Сначала A играет с B, а во всех следующих партиях победитель последней партии встречается с участником, не игравшим в этой партии. Победителем турнира считается тот, кто выиграет две партии подряд. Найдите вероятность победы для каждого участника.

Формула полной вероятности

14. (Тула, 2011) Двое по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадут подряд два орла. Найдите вероятность выигрыша для первого игрока.

15. (Казань, 2009) Монету подбрасывают несколько раз до тех пор, пока не выпадут подряд три орла или две решки. Какова вероятность того, что бросания завершатся выпадением трех орлов? Вероятности выпадения орла и решки равны $1/2$, результаты бросков независимы один от другого.

16. (Йошкар-Ола, 2015) По паутине, имеющей вид правильного шестиугольника, разбитого на правильные треугольники, двигается мошка. В середине паутины (точка O) сидит паук. На каждой развилке нитей паутины мошка выбирает маршрут случайным образом, в частности, может повернуть назад. Если мошка попадает в точку O, то паук её съедает. Найдите вероятность того, что начав прогулку по паутине в вершине шестиугольника, мошка в неё вернется.

Геометрическая вероятность (см. также задачи 36–38)

17. (Йошкар-Ола, 2009) На сторонах прямоугольника независимо друг от друга случайным образом выбраны две точки. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками, если стороны прямоугольника равны a и b.

Рекуррентные соотношения

18. (Йошкар-Ола, 2014) Монету подбросили 10 раз. Найдите вероятность того, что в последовательности результатов этого опыта не будет двух последовательных орлов.

19. (Уфа, 2008) На плоскости расположен правильный тетраэдр. Раз в минуту он переворачивается через одно из рёбер, причём перевороты через разные рёбра равновероятны. Найдите вероятность того, что через n минут тетраэдр будет лежать на той же грани, что и вначале.

Математическое ожидание

20. (Казань, 2013) При приёме в старшую группу детского сада проводится следующий экзамен. Перед ребёнком случайной стороной раскладываются в ряд 35 карточек, на одной стороне карточек написана буква «м», на другой «а». Ребенок должен найти 4 подряд идущие карточки, на которых написано слово «мама». Сколько в среднем перед ним таких слов?

21. (Тула, 2013) Рассматриваются всевозможные последовательности из чисел 1 и -1 длиной n. Для каждой вычисляется квадрат суммы членов. Найдите среднее арифметическое получившихся величин.

22. (Челябинск, 2017) Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — случайная перестановка чисел от 1 до n. Найдите среднее число инверсий в этой перестановке (инверсия — это пара чисел $a_j > a_k$, для которой $j < k$).

23. (Челябинск, 2015) В группе детского сада n человек разного роста. Они встали в круг. Ребёнок скажет, что он высокий, если он выше двух своих соседей. Сколько в среднем детсадовцев назовут себя высокими?

24. (Казань, 2009) В комнате n ящиков, в каждом лежит по одному подарку. По очереди в комнату заходит m детей, каждый из которых случайным образом выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой там ещё есть. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?

25. (Челябинск, 2015; Казань, 2016) Пьяница находится на расстоянии всего лишь одного метра от входа в свой двор, однако, из-за нетвёрдости походки, каждый шаг (независимо от предыдущих шагов) приближает пьяницу к цели всего лишь на расстояние ξ_i, (i — номер шага), равномерно распределённое от 0 до 1 метра. Сколько в среднем шагов придётся совершить пьянице до того момента, когда он окажется во дворе?

26. (Челябинск, 2016) На игровой рулетке n секторов с числами $1, 2, \ldots, n$. Сколько в среднем раз нужно прокрутить барабан, чтобы общая сумма выпавших очков стала не меньше n?

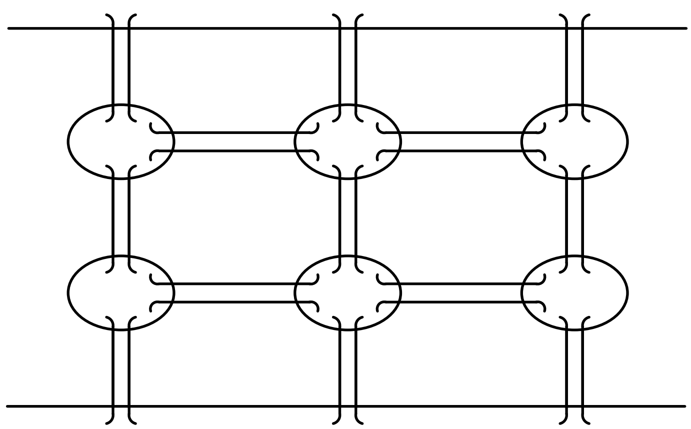
Разные задачи

27. (Челябинск, 2009) Две равные по силе команды играют в волейбол до тех пор, пока каждая из них не одержит по n или более побед. Найдите вероятность того, что будет проведено ровно $2n+k$ партий.

28. (Тула, 2004) В клетках таблицы $n \times n$ случайным образом расставляются n звёздочек, по одной в каждом столбце и каждой строке. Из левого верхнего угла таблицы в правый нижний также случайным образом проводится ломаная длины $2n$ по линиям сетки. Какова вероятность того, что все звёздочки окажутся по одну сторону от этой линии?

29. (Тула, 2011) Имеются $2n$ шаров с числами $1, \ldots, n$, каждое число встречается по два раза. Эти шары случайным образом раскладываются по два в n урн. Из каждой урны вынимается один шар. Какова вероятность того, что на вынутых шарах все числа различные?

30. (Тула, 2015) Между двумя берегами реки расположены 6 островов, соединенных мостами, как показано на рисунке. В результате урагана часть мостов могла разрушиться. Для каждого моста вероятность быть разрушенным равна 0,5. С какой вероятностью после урагана можно будет пройти по мостам с одного берега реки на другой?



31. (Казань, 2012) На окружность бросают случайным образом $n > 1$ точек. Найдите вероятность того, что окружность можно разбить на n равных дуг так, что на каждой дуге будет ровно одна точка (считаем, что в дугу входит ровно один из ее концов).

32. (Челябинск, 2011; Тула, 2011) /Н. Н. Константинов/ Каждый из n пассажиров купил по билету на n-местный самолет ($n > 1$). Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь зашедший занимает своё место, если оно свободно; иначе занимает случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир займёт своё место?

Задачи для самостоятельного решения

33. Флаги n стран (в том числе России) вывешивают на m мачтах корабля. Разные способы вывешивания отличаются порядком следования флагов на каждой мачте, при этом на некоторых мачтах (возможно даже на всех, кроме одной) флаги могут совсем отсутствовать. Считая, что все способы вывешивания флагов имеют равные шансы, найдите вероятность того, что российский флаг будет висеть выше других на одной из мачт.

34. n рассеяных математиков пришли на семинар в шляпах, повесили их на одной вешалке и уходя каждый из них взял шляпу наугад. Кроме того, по дороге домой каждый из рассеяных математиков, независимо от других, мог потерять надетую шляпу с вероятностью p (здесь p — константа, $p \in [0,1]$). Найдите предел вероятности того, что ни один из рассеяных математиков не вернулся домой в своей шляпе, при $n \to \infty$.

35. На сторонах параллелограмма с периметром p берутся две случайные точки. Найдите средний квадрат расстояния между ними.

36. На окружности радиуса r берутся две случайные точки. Найдите средний квадрат расстояния между ними.

37. n случайных чисел из интервала $(0,1)$ являются длинами n отрезков, $n > 2$. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно составить n-угольник?

38. Математик каждую секунду с вероятностью $1/2$ делает шаг вперед, а с вероятностью $1/2$ стоит и *обдумыает мысль*. По истечении каждой секунды (независимо от продолжительности предыдущего обдумывания) с вероятностью $1/3$ математику может прийти в голову *гениальная идея*. Какова вероятность того, что перед тем, как *гениальная идея* придёт математику в голову, он сделает ровно 2 шага?

39. Из множества $\{1, 2, \ldots, 100\}$ случайно выбираются 3 числа. Какова вероятность того, что из них можно составить арифметическую прогрессию?

40. /по сути А. Реньи/ Авиакомпания «Эконом» собирается соединить некоторые из 10 городов, среди которых город К, двусторонними рейсами так, что из любого из этих городов в любой другой можно было долететь только одним способом (возможно с пересадками). Считая, что всевозможные реализации планов авиакомпании имеют равные шансы, найдите вероятность того что из К будет ровно 3 рейса в остальные 9 городов.

Ответы

1. $\dfrac{31}{81}$. **2.** 0,3. **3.** $\dfrac{n+1}{4n-2}$. **4.** $\dfrac{17}{18}$. **5.** $\dfrac{1}{448}$. **6.** $\dfrac{1}{3}$. **7.** $\dfrac{3}{7}$. **8.** $\dfrac{17}{27}$. **9.** $\sqrt{0{,}15} \approx 0{,}387$. **10.** При $m < \dfrac{2n}{3} - 1$ — с двумя вопросами, при $m > \dfrac{2n}{3} - 1$ — с четырьмя. В случае равенства $3m = 2n - 3$ оба билета одинаково выгодны. **11.** 0,04. **12.** $\dfrac{37}{72}$. **13.** A и B выигрывают с вероятностью $\dfrac{5}{14}$, C — с вероятностью $\dfrac{2}{7}$. **14.** $\dfrac{14}{25}$. **15.** 0,3. **16.** $\dfrac{7}{27}$. **17.** $\dfrac{(a+b)^2}{6}$. **18.** $\dfrac{9}{64}$. **19.** $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$. **20.** 2. **21.** n. **22.** $C_n^2/2$. **23.** $\dfrac{1}{3}$. **24.** $m - n + n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^m$. **25.** e. **26.** $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-1}$. **27.** $C_{2n+k-1}^{n-1} \cdot 0{,}5^{2n+k-1}$. **28.** $\dfrac{1}{2^{n-1}}$. **29.** $\dfrac{n!}{(2n-1)!!} = \dfrac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}$. **30.** $\dfrac{1}{2}$. **31.** $\dfrac{(n-1)!}{n^{n-2}}$. **32.** $\dfrac{1}{2}$. **33.** $\dfrac{m}{n+m-1}$. **34.** e^{p-1}. **35.** $\dfrac{p^2}{24}$. **36.** $2r^2$. **37.** $1 - \dfrac{1}{(n-1)!}$. **38.** $\dfrac{3}{16}$. **39.** $\dfrac{1}{66}$. **40.** $\dfrac{C_8^2 9^6}{10^8} \approx 0{,}1488$.

Решения задач 1–32

1. Пусть A_i — множество распределений подарков по ящикам, когда i-й ящик пуст, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, $|A_i| = 2^5$. Кроме того, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ и $|A_i \cap A_j| = 1$ при $i \neq j$. Поэтому

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1|) = 3 \cdot 2^5 - 3 = 93,$$

а искомая вероятность равна $93/3^5 = 31/81$.

Замечание. В случае m ящиков и n подарков задача решается с помощью формулы для числа сюръекций n-элементного множества в m-элементное [3]. Оно равно $\sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$.

2. Выделим произвольную шестёрку точек, а в ней какую-то точку A. Число способов добавить к A две точки, чтобы получить тройку, равно $C_5^2 = 10$ (оставшиеся три точки образуют другую тройку). Число способов, при которых треугольники с вершинами в этих тройках не пересекаются, равно 3 (точки в треугольниках должны идти в порядке их следования по часовой стрелки, при этом точка A в своём треугольнике будет первой, второй или третьей). Значит, для выделенной шестёрки точек вероятность того, что треугольники не пересекаются, равна 3/10. Поскольку это верно для любой шестёрки точек, искомая вероятность также равна 0,3.

3. Зафиксируем одну из трёх выбранных точек. Обозначим её B. Следующие за ней по часовой стрелке точки обозначим $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$.

В качестве двух других вершин треугольника могут быть выбраны любые две из $2n$ точек. Всего возможных вариантов C_{2n}^2.

Подсчитаем, в скольких случаях получится остроугольный треугольник. Ясно, что из групп точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{2n}$ должно быть выбрано ровно по одной точке. Пусть из первой группы выбирается точка A_i, а из второй — A_j. При этом в треугольнике BA_iA_j углы при вершинах A_i и A_j будут острыми.

Для того, чтобы был острым и угол при вершине B, необходимо и достаточно выполнение условия $j - i \leqslant n$. При $i = k$ индекс j может быть равен $n+1, n+2, \ldots, n+k$ — всего имеем k вариантов. Значит, общее число способов выбрать вершины A_i и A_j равно

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Осталось подсчитать искомую вероятность:

$$P = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{C_{2n}^2} = \frac{n+1}{4n-2}.$$

Замечание. Хорошо известен предельный вариант этой задачи, в которой требуется найти вероятность того, что три случайно выбранные на окружности точки будут вершинами остроугольного треугольника. Это несложная задача на геометрическую вероятность, в которой, тем не менее, легко запутаться, вследствие чего ответ будет неправильным. Правильный ответ можно получить, рассмотрев предел P при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n-2} = \frac{1}{4}.$$

4. Проще найти вероятность того, что предпочтительного маршрута не окажется. Если какой-то маршрут был на первом месте у двоих или троих, то он окажется предпочтительным. Поэтому можно считать, что на первом месте каждый маршрут встречался по одному разу. Если при этом какой-то маршрут будет вторым в списках предпочтений путешественников дважды, то он (всякий раз по мнению двух из трёх) будет лучше каждого из двух других маршрутов. Таким образом, если выбор первого (a, b, c), то второй и третий должны в каком-то порядке выбрать (b, c, a) и (c, a, b). Вероятность этого $\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{18}$. А вероятность противоположного события, которую и требуется найти в задаче, равна 17/18.

5. Искомая вероятность равна $m/n(14)$, где $n(14)$ — общее число вариантов остановки волчка в 14 секторах в 6 опытах, а m — число вариантов, при которых выпадут секторы $1, 2, \ldots, 6$. Очевидно, что $n(14) = 14^6$. Заметим, что число m не зависит от общего числа секторов на волчке (лишь бы оно было больше 6). Действительно, исследуемое событие означает, что волчок останавливался только на секторах 1–6, но никогда — на остальных секторах. Поэтому не важно, сколько именно секторов есть от седьмого до нулевого включительно.

Рассмотрим аналогичную задачу в случае 7 секторов. Здесь событие, состоящее в том, что будут играть какие-то 6 конкретных секторов, означает, что не играет оставшийся седьмой сектор. Для каждого невыпавшего сектора она одна и та же и равна $\frac{1}{7} = \frac{m}{n(7)} = \frac{m}{7^6}$. Значит, $m = 7^5$, а искомая вероятность равна $\frac{7^5}{14^6} = \frac{1}{2^6 \cdot 7} = 1/448$.

6. Добавив два виртуальных бара, получим 10 баров, в каждом из которых бродяга оказывается с вероятностью 0,1. Известно, что в 7 «реальных» барах его не было. Из трёх оставшихся баров реален только один. Поэтому вероятность, с которой он окажется там, равна 1/3.

Замечание. Решим более общую задачу, заменив в условии 8 на n, а 0,8 на p. Рассмотрим события A_i: «бродяга находится в i-м баре», $i = 1, \ldots, n$, и B: «бродяга — не в баре». Вычислим условную вероятность

$$P\left(A_n/\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_{n-1}}\right) = P(A_n/(A_n + B)) = \frac{P(A_n)}{P(A_n + B)} = \frac{P(A_n)}{P(B) + P(A_n)} =$$

$$= \frac{p/n}{1 - p + p/n} = \frac{p}{n(1-p) + p}.$$

7. Задача аналогична предыдущей. Её решение (в общем виде) приведено выше.

8. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что на i-м ребре состоится встреча муравьёв, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Нужно найти вероятность суммы этих событий. Одновременно может произойти не более двух из них. Поэтому

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_6) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j).$$

Очевидно, $\forall i \quad P(A_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Если события A_i и A_j совместны (а таких пар ровно три), то $P(A_i A_j) = 1/81$. Стало быть, $P(A_1 + A_2 + \dots + A_6) = 6/9 - 3/81 = 17/27$.

9. Пусть p — вероятность того, что один из родителей передаст ребёнку ген данного признака. Тогда вероятность его проявления равна $p^2 = 0{,}15$. Отсюда $p = \sqrt{0{,}15}$. В силу того, что мать в данном случае передаёт признак с вероятностью 1, искомая вероятность равна $1 \cdot p = p$.

10. Вычислим вероятность P_k не сдать зачёт, если в билете k вопросов.

1) Пусть в билете два вопроса. Студент не сдаст зачёт, только если не ответит на оба вопроса. Поэтому

$$P_2 = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n-m-1}{n-1}.$$

2) Если в билете четыре вопроса, зачёт не будет сдан в следующих случаях: студент не ответил ни на один вопрос; студент ответил ровно на один (любой из четырёх). Значит,

$$P_4 = P_2 \cdot \frac{n-m-2}{n-2} \cdot \frac{n-m-3}{n-3} + 4 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n-m}{n-1} \cdot \frac{n-m-1}{n-2} \cdot \frac{n-m-2}{n-3} =$$

$$= P_2 \cdot \frac{n-m-2}{n-2} \left(\frac{n-m-3}{n-3} + 4 \cdot \frac{m}{n-3} \right) = P_2 \cdot \frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)}.$$

Разность двух вероятностей равна

$$P_4 - P_2 = P_2 \cdot \left(\frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)} - 1 \right) = P_2 \cdot \frac{m(2n-3m+3)}{(n-2)(n-3)}.$$

Если $P_4 > P_2$, то вероятность сдать зачёт больше, когда в билете два вопроса. Так будет, если $3m < 2n - 3$. Если знак неравенства противоположный, то выгодней билет с 4 вопросами. В случае равенства $3m = 2n - 3$ оба билета одинаково выгодны.

11. Пусть в i-й урне n_i шаров, среди которых k_i белых, $i = 1, 2$. Тогда $\dfrac{k_1}{n_1} \cdot \dfrac{k_2}{n_2} = 0{,}54 = \dfrac{27}{50}$. Поэтому для некоторого натурального m справедливы равенства $k_1 k_2 = 27m$, $n_1 n_2 = 50m$. Одно из чисел n_i делится на 5, тем же свойством обладает и второе из них (так как их сумма равна 25). Пусть $n_1 \leqslant n_2$. Возможны два случая.

1) $n_1 = 5$, $n_2 = 20$. Тогда $k_1 k_2 = 54$, причём $k_1 \leqslant 5$, $k_2 \leqslant 20$, так что $k_1 = 3$, $k_2 = 18$.

2) $n_1 = 10$, $n_2 = 15$. Тогда $k_1 k_2 = 81$, причём $k_1 \leqslant 10$, $k_2 \leqslant 15$, так что $k_1 k_2 = 9$.

Несложно подсчитать, что в обоих случаях вероятность вынуть два чёрных шара равна $\left(1 - \dfrac{k_1}{n_1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{k_2}{n_2}\right) = 0{,}04$.

12. Пусть A — интересующее нас событие. Для $i = 1, 2, 3$ и $k = 2, 3, 4, 5, 6$ рассмотрим событие $B_{i,k}$, состоящее в том, что при i-м броске выпало k очков, а в двух других бросках сумма очков не больше k. Тогда сумма (очевидно, попарно несовместных) событий $B_{i,k}$ по всем i и k есть событие, противоположное A. Несложно убедиться в том, что количество решений в натуральных числах неравенства $x + y \leqslant k$, где натуральное число $k \geqslant 2$, равно $1 + 2 + \cdots + (k-1) = \dfrac{k(k-1)}{2}$. Отсюда $P(B_{i,k}) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{k(k-1)}{2 \cdot 6^2}$. Поэтому

$$P(\overline{A}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=2}^{6} P(B_{i,k}) = \frac{3}{6^3} \sum_{k=2}^{6} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{35}{72}.$$

13. Вероятности выигрыша для A и B одинаковы. Найдём вероятность p_C победы игрока C. Введём события M_i: «выигрыш игрока M в i-й игре», $i = 1, 2, \ldots$. Для C неважно, кто выиграет в первой партии. Обозначим её победителя через X, а побежденного через Y. Тогда событие «выигрыш C» можно записать в виде:

$$C_2 C_3 + C_2 Y_3 X_4 C_5 C_6 + C_2 Y_3 X_4 C_5 Y_6 X_7 C_8 C_9 + \ldots.$$

Отсюда

$$p_C = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7}.$$

Стало быть, вероятности выигрышей для A и B равны по 5/14.

14. Пусть событие A означает победу первого игрока, а $P(A) = p$ (существование вероятности события A обосновывается стандартным образом — как предела монотонной ограниченной последовательности вероятностей победы после первых n бросков). Рассмотрим полную группу событий $H_1, H_2, \ldots, H_6$ (эти события описаны в приводимой ниже таблице последовательностью результатов подбрасывания монеты). Для каждого i вычислим $P(H_i)$ и $P(A/H_i)$.

H_i	ООО	ООРО	ООРР	ОРО	ОРР	Р
$P(H_i)$	1/8	1/16	1/16	1/8	1/8	1/2
$P(A/H_i)$	1	0	p	1	$1-p$	$1-p$

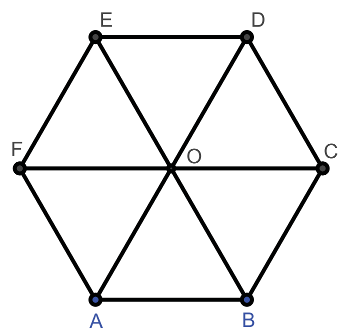
По формуле полной вероятности,

$$p = P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(H_i)P(A/H_i) = \frac{1}{8} + \frac{p}{16} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)(1-p).$$

Отсюда $p = 14/25$.

15. Пусть вероятность выпадения 3-х орлов (ООО) после того, как уже выпали два орла (ОО) равна x; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения орла и решки (ОР) равна y; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения решки и орла (РО) равна z. Вероятности выпадения наборов ОО, ОР, РО равны 1/4.

После ОО с равной вероятностью (1/2) можно получить либо ООО, либо ООР. После ООР вероятность выпадения ООО равна y. По формуле полной вероятности $x = 1/2 + y/2$. Аналогично, после ОР получаем две возможности ОРР и ОРО, поэтому $y = 0 + z/2$; после РО можем получить РОО и РОР, откуда $z = x/2 + y/2$. Решение системы уравнений: $x = 0{,}6$, $y = 0{,}2$, $z = 0{,}4$. Искомая вероятность есть $(x + y + z)/4 = 0{,}3$.



16. Обозначим вершины шестиугольника так, как показано на рис. Пусть паук сидел в вершине A. Обозначим через r вероятность интересующего нас события, а через P_{XY} вероятность попадания из точки X в точку Y. Пусть $P_{BA} = x$, $P_{CA} = y$, $P_{DA} = z$. Из соображений симметрии следует, что $P_{FA} = P_{BA} = x$, $P_{EA} = P_{CA} = y$. Ясно также, что $P_{OA} = 0$. По формуле полной вероятности,

$$r = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{FA} + \frac{1}{3}P_{OA} = \frac{2}{3}x;$$

$$P_{BA} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P_{CA}; \quad P_{CA} = \frac{1}{3}P_{BA} + \frac{1}{3}P_{DA}; \quad P_{DA} = \frac{1}{3}P_{CA} + \frac{1}{3}P_{EA}.$$

Значит, имеем систему уравнений

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y; \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z; \quad z = \frac{2}{3}y.$$

Решив эту систему, получим $x = 7/18$, откуда $r = 7/27$.

17. Возможны следующие пять случаев взаимного расположения двух точек:

H_1 (H_2): «обе точки попадают на одну сторону длиной a (b)»;

H_3 (H_4): «обе точки попадают на противоложные стороны длиной a (b)»;

H_5: «точки попадают на смежные стороны».

Несложно видеть, что

$$P(H_1) = P(H_3) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{2(a+b)} = \frac{a^2}{2(a+b)^2};$$

$$P(H_2) = P(H_4) = \frac{b^2}{2(a+b)^2}; \quad P(H_5) = \frac{2ab}{(a+b)^2}.$$

Пусть δ — квадрат расстояния между двумя точками.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие (легко проверяемые) факты.

Если случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0;a]$, то $D\xi = a^2/12$, $M\xi^2 = a^2/3$.

Если случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены, то $M(\xi-\eta)^2 = 2D\xi$.

Отсюда и с помощью теоремы Пифагора находим

$$M(\delta/H_1) = \frac{a^2}{6}; \quad M(\delta/H_2) = \frac{b^2}{6}; \quad M(\delta/H_3) = \frac{a^2}{6} + b^2;$$

$$M(\delta/H_4) = \frac{b^2}{6} + a^2; \quad M(\delta/H_5) = \frac{a^2+b^2}{3}.$$

Осталось подсчитать окончательный результат по формуле полной вероятности:

$$M\delta = \sum_{i=1}^{5} P(H_i) \cdot M(\delta/H_i) = \frac{(a+b)^2}{6}.$$

18. Результаты подбрасываний монеты запишем двоичной последовательностью, в которой 1 (0) на i-м месте означает, что при i-м броске выпал орёл (соответственно, решка). Назовём двоичную последовательность *хорошей*, если в ней нет двух соседних единиц. Пусть a_n — количество хороших последовательностей длины n. Очевидно, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

Если хорошая последовательности из n символов оканчивается нулём, то её можно получить из произвольной хорошей последовательности длины $n-1$ приписыванием справа нуля. Значит, имеется ровно a_{n-1} таких последовательностей.

Если же хорошая последовательности из n символов оканчивается единицей, то её предпоследняя цифра — ноль, и эту последовательность можно получить из произвольной хорошей последовательности длины $n-2$ приписыванием справа нуля и единицы. Поэтому имеется ровно a_{n-2} таких последовательностей.

Таким образом, при $n \geqslant 3$ имеет место рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Отсюда получаем числа Фибоначчи:

$$a_3 = 5, \quad a_4 = 8, \quad a_5 = 13, \quad a_6 = 21, \quad a_7 = 34, \quad a_8 = 55, \quad a_9 = 89, \quad a_{10} = 144.$$

Искомая вероятность равна доле хороших последовательностей длины 10 среди всех двоичных последовательностей этой длины $\dfrac{a_{10}}{2^{10}} = \dfrac{9}{64}$.

19. Пусть p_k — вероятность того, что через k минут тетраэдр будет лежать на той же грани, что и вначале. Очевидно, $p_0 = 1$, $p_1 = 0$. Выразим p_{k+1} через p_k. Если через k минут тетраэдр будет лежать на первоначальной грани, то $p_{k+1} = 0$, а если на другой грани, то $p_{k+1} = 1/3$ в силу равновероятности поворотов через разные рёбра.

По формуле полной вероятности $p_{k+1} = 0 \cdot p_k + \dfrac{1}{3} \cdot (1 - p_k)$. Положим $y_k = p_k - \dfrac{1}{4}$. Тогда $y_0 = \dfrac{3}{4}$ и $y_{k+1} = -\dfrac{1}{3} y_k$, $k = 0, 1, \ldots$ Отсюда $y_n = \dfrac{3}{4} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

20. Рассмотрим случайную величину ξ_i, которая равна 1, если 4 карточки с номерами i, $i+1$, $i+2$, $i+3$ составляют слово «мама», и 0 в противном случае. Вероятность того, что $\xi_i = 1$, есть 1/16.

Искомое количество способов есть сумма $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{32}$. Поскольку математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их матожиданий,

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_{32} = 32\left(1 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{15}{16}\right) = 2.$$

21. Рассмотрим n независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, принимающих значения -1 и 1 с вероятностью $1/2$. Сумма членов этой последовательности есть случайная величина $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а математическое ожидание её квадрата есть искомое среднее арифметическое. Имеем

$$M\xi_i = 0;\ M\xi = 0;\ M\xi_i^2 = 1;\ D\xi_i = 1;\ D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i = n,\ M(\xi^2) = D\xi + (M\xi)^2 = n.$$

22. Пусть $\xi_{i,j} = 1$, если числа a_i и a_j образуют инверсию, и $\xi_{i,j} = 0$ в противном случае. Оба указанных события равновероятны. Поэтому $M\xi_{i,j} = 1/2$. Общее число инверсий в случайной перестановке равно $\xi = \sum\limits_{i<j} \xi_{i,j}$. В данной сумме C_n^2 слагаемых. Из свойства линейности математического ожидания случайной величины имеем $M\xi = C_n^2/2$.

23. Пусть ξ_i — случайная величина, равная 1, если стоящий на i-м месте детсадовец назовёт себя высоким, и нулю в противном случае. Самый высокий из трёх человек, стоящих на i-м месте и двух соседних с ним, с равной вероятностью может быть на любом из этих трёх мест. Поэтому $\xi_i = 1$ с вероятностью $1/3$ и $\xi_i = 0$ с вероятностью $2/3$. Отсюда математическое ожидание ξ_i равно $1/3$. Общее число назвавших себя высокими равно $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Из линейности математического ожидания получаем $M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_n = n/3$.

24. Пусть ξ_i — случайная величина, равная 1, если подарок из i-го ящика взят, и 0, если не взят. Очевидно,

$$P\{\xi_i = 0\} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \quad P\{\xi_i = 1\} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m.$$

Поэтому

$$M\xi_i = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \quad M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right).$$

Мы нашли среднее число взятых подарков. Но число взятых подарков в нашей задаче совпадает с количеством детей, их получивших. Значит, без подарков уйдут в среднем $m - n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right)$ детей.

Замечание. Простое решение получилось за счёт случайных величин, связанных с *подарками*, несмотря на то, что вопрос задачи касался *детей*. Найти вероятность того, что заходящий i-м ребёнок уйдёт с подарком значительно сложнее и для решения задачи этого не требуется. Отметим, что при $m = n$ доля детей, оставшихся без подарка, составляет $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx (1/e)$-ю часть.

25. Мы должны посчитать матожидание натуральнозначной случайной величины, принимающий значения i, $i = 1, 2, \dots$ с некими вероятностями p_i, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ip_i$. Один из способов подсчета такой суммы заключается в представлении её в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$, где $q_n = \sum\limits_{i:i>n} p_i$ — вероятность того, что случайная величина принимает значения строго большие n (очевидно, что $q_0 = 1$).

Итак, подсчитаем вероятность q_n того, что после n шагов пьяница ещё на улице, то есть, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \leqslant 1$. Вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ равномерно распределён в n мерном единичном кубе $[0,1]^n$, мы должны найти объём его части, в которой сумма координат не превышает 1. Это пирамида с единичными рёбрами, образующими прямые углы, её объём есть $1/n!$. Искомое матожидание есть $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n = e$.

Вот такой неожиданный ответ!

26. Будем вращать барабан до тех пор, пока сумма выпавших очков впервые не станет большей либо равной n. Пусть случайная величина ξ — число таких вращений, а $p_k = P(\xi = k)$. Нужно вычислить $M\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} kp_k$.

Вычислим вероятность p_k в общем случае. Пусть x_i — количество очков, выпавшее при i-м вращении барабана. Если после k-го вращения текущая сумма выпавших очков меньше n, то существует решение в натуральных числах уравнения

$$x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n.$$

Количество решений такого уравнения равно C_{n-1}^{k}. Значения x_1, $x_2, \ldots$, x_k описывают благоприятный исход интересующего нас опыта, а общее число исходов опыта, состоящего в том, что барабан крутится k раз, равно n^k. Поэтому

$$a_k = P(\xi > k) = \frac{C_{n-1}^{k}}{n^k}.$$

Очевидно, $p_n = a_{n-1}$, а при $k < n$ имеем

$$p_k = P(\xi > k-1) - P(\xi > k) = a_{k-1} - a_k.$$

Дальнейшие выкладки похожи на преобразование Абеля, являющееся дискретным аналогом интегрирования по частям:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k-1} - a_k) + na_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (k-1)a_{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^{i}}{n^i} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Последний переход использует формулу бинома Ньютона.

Замечание. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = e$, что соответствует ответу предыдущей задачи. Данная задача представляет собой её дискретный вариант.

27. Серия игр останавливается, когда обе команды одерживают по n или более побед. Поэтому окончательный счёт после серии $n : (n+k)$, причём последнюю игру выигрывает именно та команда, для которой эта победа n-я (иначе серия закончилась бы ранее). В предыдущих $2n+k-1$ играх она должна была выиграть ровно $n-1$ раз, неважно в каком порядке. Отсюда получаем (по формуле Бернулли) искомую вероятность.

28. Положение ломаной можно задать, составив последовательность из n символов X и n символов Y. В порядке прохождения этой последовательности мы строим ломаную, проводя звено ломаной вправо, если очередной член последовательности X, и вниз, если этот член Y.

Положение звёздочек зададим перестановкой $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Звёздочку в i-й строке расположим в клетке с номером π_i. В построенной выше последовательности символов X и

Y i-му по счёту символу Y присвоим индекс π_i, а символы X нам удобно занумеровать в порядке их следования. Получившаяся индексированная последовательность символов X, Y однозначно определяет и ломаную, и положение звёздочек.

Определим вероятность того, что все звёздочки окажутся левее ломаной. Чтобы это выполнялось, перед каждым символом Y_j должно стоять не менее j символов X, так как только в этом случае ломаная пересечёт соответствующую строку таблицы правее j-й клетки, в которой расположена звёздочка.

Свяжем это условие с геометрической вероятностью. Выберем случайным образом в единичном квадрате n точек, положения которых равновозможны в любом месте квадрата. Пронумеруем их координаты (X_i, Y_i) в порядке возрастания абсцисс. Затем расставим символы X_i, Y_i в порядке возрастания их значений. Так как эти значения являются независимыми случайными величинами, последовательности, получающиеся при этом, равновозможны. Это именно те последовательности, которые определяют расположение ломаной и звёздочек в таблице. При этом условие, отмеченное в предыдущем абзаце, означает, что $X_j < Y_j$ для всех j, то есть, что все n точек в квадрате располагаются выше диагонали $y = x$. Вероятность этого $1/2^n$. Тогда вероятность того, что все звёздочки расположены по одну сторону от ломаной, в два раза больше и равна $1/2^{n-1}$.

29. 1-й способ. Введём событие A_n: «все числа на вынутых шарах различные». Пусть $P(A_n) = p_n$. Очевидно, $p_1 = 1$. Выразим p_{k+1} через p_k. Выделим первую урну и рассмотрим две гипотезы:

H_1: «в урне шары с одинаковыми числами»;

H_2: «в урне шары с разными числами».

Если выполняется H_1, то первая урна ни на что не влияет, и искомая вероятность равна p_k. Пусть теперь выполняется H_2, причём в первой урне шары с числами a и b, а вынут шар с числом a. Рассмотрим другую урну с числом b, содержащую также число c. Для осуществления события A_{k+1} требуется, чтобы из этой урны было вынут шар с числом b; вероятность этого равна $1/2$.

Если это произойдёт, то ситуация будет равносильна тому, что исключили вторую урну и два шара с числом b, а в первой урне находились шары с числами a и c. При этом нет никаких ограничений на распределение шаров в оставшихся урнах: числа a и c могут быть равными. Поэтому соответствующая условная вероятность также равна p_k. Тогда, по формуле полной вероятности, получаем

$$p_{k+1} = P(A_k) = P(H_1)P(A_{k+1}/H_1) + P(H_2)P(A_{k+1}/H_2) =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \cdot p_k + \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{1}{2} p_k = \frac{k+1}{2k+1} p_k,$$

откуда $p_n = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{n!}{(2n-1)!!}$.

2-й способ. Пусть из i-й урны извлекается шар с номером a_i, после чего в нём остаётся шар с номером b_i. Все исходы опыта можно описать последовательностью $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$, в которой каждое число от 1 до n встречается по два раза. Всего таких перестановок с повторениями $\frac{(2n)!}{(2!)^n} = \frac{(2n)!}{2^n}$. В благоприятных исходах опыта числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ образуют перестановки чисел от 1 до n. Поэтому количество благоприятных исходов равно $(n!)^2$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}$.

30. Пусть искомая вероятность x (то, что она существует, следует из конечности числа мостов).

Предположим, что лодка не может проплыть под неразрушенным мостом, а под разрушенным может. Тогда перейти с северного берега на южный можно тогда и только тогда, когда лодка не может переплыть с запада на восток. Видно, что схема возможного движения лодки получается поворотом на 90° схемы возможного движения пешехода. Поэтому вероятность переплыть равна вероятности перейти, т. е. $x = 1 - x$. Отсюда $x = 1/2$.

31. «Брошенные» точки обозначим через A_i, а граничные точки равных дуг — через B_i. Без ограничения общности можно считать, что одна из вершин B_k совпадает с одной из точек A_ℓ. Действительно, множество $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ можно поворачивать вокруг центра окружности до тех пор, пока не произойдёт совпадения; при этом, если разбиение на дуги было искомым, то оно останется таковым и после «поворота до упора». Заметим также, что если искомое разбиение на дуги существует, то, с точностью до нулевой вероятности, точка A_ℓ определена однозначно — совместив конец дуги с любой другой точкой A_m, мы обнаружим на одной из дуг две точки. Действительно, центральный угол по часовой стрелке между A_ℓ и любой точкой A_m при $m > \ell$ составляет более $2\pi(m-\ell)/n$. Поэтому, если мы совместим начало дуги с A_m, то, дойдя по часовой стрелке до A_ℓ, мы обнаружим «лишние» точки.

Итак, для каждого ℓ и фиксированного набора дуг, «стартующего» с A_ℓ, нужно найти вероятность того, что остальные $n-1$ точек распределятся по одной на дуге (конкретно, на $n-1$ дугах, не считая той, что занята точкой A_ℓ), а потом просуммировать по всем выборам точки A_ℓ, то есть умножить на n. Легко видеть, что для фиксированного ℓ эта вероятность (вероятность каждого из n несовместных событий) равна

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}.$$

После умножения на n получаем окончательный ответ: $\dfrac{(n-1)!}{n^{n-2}}$.

32. Доказательство того, что ответ в задаче $1/2$, может быть произведено индукцией по n, если воспользоваться формулой полной вероятности и тем, что пассажир, чьё место заняла старушка, сам начинает играть её роль. Однако, у этой задачи имеется другое более элементарное решение, позволяющее моментально решить не только эту задачу, но и её обобщение.

Достаточно заметить, что для последнего пассажира имеются только две альтернативы — в конце посадки в самолёте останется свободным либо его место, либо место старушки, причём все ранее заходящие одинаково индефферентны к обоим этим местам. Поэтому ответ задачи обратен количеству альтернатив, то есть равен $1/2$.

В случае «k старушек» (и соответственно $n > k$) аналогично получаем, что вероятность того, что последний пассажир окажется на своём месте, есть $\dfrac{1}{k+1}$.

Краткие комментарии к задачам 33–40

33. У этой задачи имеется решение в «одно соображение», аналогично решению предыдущей задачи.

34. Случай $p = 0$ известен со времен Л. Эйлера — см., например, [4, задача 46], предел в общем случае несложно свести к частному.

35. Это задача, очевидно, обобщение задачи 17.

36. Достаточно рассмотреть случай единичной окружности с фиксированной первой точкой $(1, 0)$.

37. Для решения задачи через геометрическую вероятность надо из n-мерного единичного кубика исключить n пирамидок объёма $\dfrac{1}{n!}$.

38. Задача взята из [9, раздел «Вместо заключения»].

39. Количество искомых троек совпадает с количеством способов выбора пары чисел одинаковой чётности, т.е. с $2C_{50}^2$.

40. Ответ легко получается, если воспользоваться кодом Прюфера при рассмотрении помеченных деревьев на 10 вершинах.

Литература

[1] Беррондо, М. *Занимательные задачи* — М.: Мир, 1983. — 230 с.

[2] Бронштейн, Е. М. *Задачи студенческих олимпиад по математике УГАТУ* / Е. М. Бронштейн, В. В. Водопьянов, Р. Д. Муртазин и др. — Уфа: УГАТУ, 2011. — 72 с.

[3] *Вся высшая математика:* учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко и др. — М.: КомКнига, 2017. — Т. 7 — 208 с.

[4] Гарднер, М. *А ну-ка, догадайся!* — М.: Мир, 1984. — 213 с.

URL: http://golovolomka.hobby.ru/books/gardner/gotcha/content.shtml

[5] Гусейн-Заде, С. М. *Разборчивая невеста.* (Серия: Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 25) — М.: МЦНМО, 2003. — 24 с.

URL: http://www.math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/book.25.pdf

[6] Игнатов, Ю. А. *Задачи студенческих математических боёв* / Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. — 43 с.

[7] Игнатов, Ю. А. *Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002–2015* В 2-х ч. Часть I / Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, И. Ю. Реброва и др. — Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016. — 148 с.

[8] *Казанские студенческие олимпиады по математике:* сборник задач / сост.: И. С. Григорьева. — Казань: Казанский университет, 2011. — 48 с.

URL: http://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F1556774232/Stud..olimpiady.pdf

[9] *Казанские студенческие олимпиады по математике, посвящённые дню рождения Н. И. Лобачевского, ч. 2:* сборник задач / И. С. Григорьева, Э. Ю. Лернер. — Казань: Казанский университет, 2015. — 36 с.

URL: http://shelly.kpfu.ru/e-ksu/docs/F476091938/ForPrintProblems2010_2015Final.pdf

[10] Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. *Введение в теорию вероятностей* — М., 1995. — 176 с. (Б-чка «Квант»; Вып. 23).

[11] Конягин, С.В. *Зарубежные математические олимпиады* / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др.; под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987. — 416 с.

[12] Мостеллер, Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями* — М.: Наука, 1975. — 112 с.

URL: http://ilib.mccme.ru/djvu/50zadach.htm

[13] Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике* — М.: Мир, 1990. — 240 с.

[14] Шень А. *Вероятность: примеры и задачи.* 3-е изд., дополненное — М.: МЦНМО, 2012. — 72 с.

URL: https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-00786358/document

[15] Эвнин, А. Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков* / А. Ю. Эвнин. — М.: КРАСАНД, 2017. — 224 с.

[16] Эвнин, А. Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — 86 с.

[17] Эвнин, А. Ю. *Задачи математического конкурса в ЮУрГУ* / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. — 2015. — № 4(76). — С. 26–52.

[18] Эвнин, А. Ю. *Математические олимпиады в ЮУрГУ 2010–2015 гг.* / А. Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 63 с.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики и программирования Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

Лернер Эдуард Юльевич,
доцент кафедры анализа данных и исследования операций Казанского (Приволжского) федерального университета,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: eduard.lerner@gmail.com

Игнатов Юрий Александрович,
доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ignatov-yurii@mail.ru

Григорьева Ирина Сергеевна,
доцент кафедры мат. статистики Института ВМ и ИТ Казанского (Приволжского) федерального университета,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: igrigori_@mail.ru