Задачи студенческих олимпиад по математике, посвящённых дню рождения Н. И. Лобачевского

Казанский университет
1999 – 2019 гг.

УДК 51, 37.8

Книга издана в рамках реализации программы развития
Научно-образовательного математического центра
Приволжского федерального округа,
соглашение № 075-02-2020-1478.

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доцент Сочнева В.А.

Задачи студенческих олимпиад по математике, посвящённых дню рождения Н.И.Лобачевского. Казанский университет (1999-2019 гг.): учеб.-метод. пособие/ сост. Д.Ф.Абзалилов, И.С.Григорьева, Э.Ю.Лернер. – Казань: Фэн, 2020. – 101 с.

Математические олимпиады играют большую роль в пропаганде математического знания, повышении мотивации студентов к учёбе. Олимпиада, проводимая в Казанском университете, давно стали всероссийской и привлекает внимание студентов и преподавателей многих вузов. В настоящем пособии приведены тексты задач олимпиад и их решения. Пособие предназначено для студентов, готовящихся к олимпиадам, а также для тех, кто желает повысить свою математическую грамотность и расширить кругозор.

Содержание

Введение

Математические олимпиады студентов, посвящённые дню рождения Н.И. Лобачевского,, уже более 20 лет проводятся в Казанском университете ежегодно в день его рождения — 1-го декабря. Церемония проведения олимпиады приобрела различные традиции, создающие атмосферу праздника: место проведения — библиотека имени Н.И. Лобачевского, возложение цветов и фотографирование на фоне памятника Н.И. Лобачевскому, вечернее чаепитие с участием всех команд. В первые годы в олимпиадах принимали участие только студенты казанского университета. Однако с 2009 года олимпиада стала междугородней. В разные годы к нам приезжали участники из Барнаула, Волгограда, Екатеринбурга, Иркутска, Йошкар-Олы, Краснодара, Майкопа, Нижнего Новгорода, Омска, Ростова на Дону, Саратова, Сарова, Уфы, Таганрога, Тюмени, Чебоксар, Челябинска, Элисты, а в последний год — команды МФТИ (Долгопрудный) и команда ВШЭ (Москва). В составлении заданий принимали участие преподаватели университета и других вузов г. Казани. Это Д.Х. Муштари (председатель жюри в 2009–2012 гг.), Д.Ф. Абзалилов, М.Д. Бронштейн, И.С. Григорьева, А.Е. Заяц, И.Ш. Калимуллин, Э.Ю. Лернер, Е.В. Патрин, В.А. Сочнева, В.В. Шурыгин-ст. (председатель жюри с 2013 г.), В.В. Шурыгин-мл. и М.М. Ямалеев. А проверкой решений олимпиады занимается обычно большой коллектив (порядка 30 человек) математиков университета, участвуют в проверке и желающие руководители команд.

Бессменным организатором и вдохновителем олимпиады является доцент каф. общей математики мехмата Валентина Алексеевна Сочнева.

Задачи подбираются из разных областей математики. Не менее половины из них соответствуют программе 1–2 курсов математических или физических специальностей, в другой половине всегда имеются более сложные и интересные задачи.

Как и в более ранних сборниках задач нашей олимпиады ([1],[2]) к каждой задаче, кроме решений, будут приведены ответы или указания; последними можно воспользоваться, если не получается решить задачу самостоятельно. При издании настоящего сборника, в котором рассмотрены задачи всех прошедших олимпиад, часть решений была изменена. Кроме того, был написан раздел “Примечания”, включающий в себя исторические сведения о задачах, их обобщения и связь с другими проблемами. Авторы благодарны А.Н. Абызову и Д.А. Звонкину за помощь при написании этого раздела.

Мы старались, чтобы наши задачи, их решения и замечания по ним стали для читателя не просто упражнениями, а источниками творческой радости. Мы посвящаем нашу олимпиаду памяти великого математика России Николая Ивановича Лобачевского, вся сознательная жизнь которого была связана с Казанью. В 1804 г. был создан Казанский университет, в 1807 г. поступил в университет 15-летний студент Николай Лобачевский, в 1827 г. он был избран ректором университета и оставался на этом посту 20 лет! Он умел быть и талантливым учёным, и успешным руководителем, и замечательным педагогом. И как много о нём говорят его слова, обращённые к студентам в 1828 г.: “Вы счастливее меня, родившись позже . . . но счастливейшие дни России ещё впереди”.

Казань, апрель-май 2020 года

Условия задач

Задачи, 1999 г.

99-1. Чему равна сумма $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$?
99-2. Пусть $x_1 = 1, x_n = a^{x_{n-1}}$ при $n > 1$ $(a > 0)$. Найти наибольшее значение a, при котором существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
99-3. Найти все вещественные матрицы A размерности 2×2, такие, что $A^n = E$, если **а)** $n = 2$; **б)** $n = 3$.
99-4. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и парабола $y = Ax^2 + Bx + C$ имеют четыре точки пересечения. Доказать, что через эти точки можно провести окружность.
99-5. Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) = \int_0^1 x(1 + xy)f(y)\,dy + \sqrt{x}.$$

99-6. На координатной плоскости построили график функции $y = x^3$, после чего оси координат стерли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки?
99-7. Два числа a и b случайным образом выбираются на отрезке $[-M; M]$ числовой прямой. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ имеет вещественные корни?

Задачи, 2001 г.

01-1. Пусть матрица A имеет размерность 3×2, а матрица B — 2×3. Чему равен определитель матрицы AB?
01-2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}$.
01-3. График многочлена третьей степени пересекает ось Ox в трех точках. Из крайней провели касательную к противоположному "горбу" графика. Доказать, что абсцисса точки касания делит отрезок между двумя другими корнями пополам.

01-4. Доказать, что из любых пяти векторов в евклидовом пространстве можно выбрать два таких, что длина их суммы не превосходит длины суммы трех оставшихся.
01-5. На плоскости даны три точки A_1, A_2, A_3; S_i — симметрия относительно A_i. Доказать, что $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ — это симметрия относительно точки A с радиус-вектором $\vec{r}_A = \vec{r}_{A_1} + \overrightarrow{A_2A_3}$.
01-6. Функция $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$ и дифференцируема на $(0;1)$. Доказать, что если $f(0) = f(1) = 0$, то $f(x) = f'(x)$ в некоторой точке $x \in (0;1)$.
01-7. У белой сферы 12% ее площади окрашено в красный цвет. Доказать, что в сферу можно вписать параллелепипед, у которого все вершины белые.

Задачи, 2002 г.

02-1. В двух урнах лежит 25 шаров белого или чёрного цветов. Из каждой урны вынимается по одному шару. Вероятность того, что они оба белые, равна 0.54. Найти вероятность того, что они оба чёрные.
02-2. На круговой цилиндр радиуса 2 туго намотали лист бумаги (толщиной ноль) и разрезали цилиндр плоскостью, образующей угол 45° с осью цилиндра. Затем лист бумаги развернули и положили на плоскость. Какой вид приобрела линия разреза? (записать её уравнение)
02-3. На множестве A задана бинарная операция # такая, что для любых x, y из A выполняются соотношения $(x\#y)\#y = x$ и $y\#(y\#x) = x$. Доказать, что эта операция коммутативна, т.е. $x\#y = y\#x$ для любых x, y из A.
02-4. Многочлен $P(x)$ не имеет действительных корней. Доказать, что многочлен $P(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \ldots$ также не имеет действительных корней.
02-5. Найти все дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции f, удовлетворяющие условиям $f(0) = 0$ и $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.
02-6. График многочлена четвертой степени имеет две точки перегиба. Проведённая через них прямая, отрезает от графика три луночки. Доказать, что площадь средней из них равна сумме площадей крайних.
02-7. Найти все непрерывные на $[a,b]$ функции φ, удовлетворяющие соотношению $\varphi(x) = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — некоторая функция, непрерывная на $[a,b]$.
02-8. Пусть R — множество точек плоскости, входящих в замкнутый выпуклый многоугольник, $\rho(x,y)$ — расстояние от точки $M(x,y)$ до ближайшей точки из R. Выразить $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho(x,y)}\,dxdy$ через периметр и площадь многоугольника.

Задачи, 2003 г.

03-1. Доказать, что если все корни многочлена $x^n + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ вещественны, то $a_2 \leqslant 0$.

03-2. Пусть квадратная матрица A — невырожденная, а матрица X удовлетворяет уравнению $AX + XA = 0$. Доказать, что след матрицы X равен 0.

Напоминание. След матрицы — сумма её диагональных элементов: $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

03-3. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Доказать, что если $A^2 = E$, то сумма рангов матриц $A + E$ и $A - E$ равна n.

03-4. Пусть $x_n = \frac{(n-1)x_{n-1}+x_{n-2}}{n}$ при $n \geqslant 2, x_0 = 0, x_1 = 1$ Найти предел этой последовательности.

03-5. Определим фигуру P как часть плоскости, ограниченную параболой $y = x^2$: $P = \{(x,y) | y \geqslant x^2\}$. Определим фигуру H как часть плоскости, ограниченную ветвью гиперболы $x^2 - y^2 = 1$: $H = \{(x,y) | x^2 - y^2 \geqslant 1, x > 0\}$. Можно ли покрыть плоскость конечным числом фигур а) вида P; б) вида H?

03-6. На плоскости с прямоугольной системой координат задана сеть линий $y = \pm 2(x+a), a \in \mathbb{Z}$. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, вершины которого расположены в узлах сети?

03-7. Ряд $\sum a_n$ сходится. Может ли расходиться ряд $\sum a_n^{2003}$?

03-8. Для двух множеств A и B определим расстояние $\rho(A,B) = \sup\limits_{a \in A} \inf\limits_{b \in B} r(a,b)$, где $r(a,b)$ обычное расстояние между точками.

а) Доказать, что $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geqslant \rho(A,C)$.

б) Может ли выполняться неравенство $\rho(A,B) + \rho(B,C) \leqslant \rho(C,A)$?

Задачи, 2004 г.

04-1. Решить систему $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$

04-2. Вычислить определитель **а)** при $z = i$; **б)** при $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{199} & z^{200} \\ z^2 & z^3 & \dots & z^{200} & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^{200} & z & \dots & z^{198} & z^{199} \end{vmatrix}$$

04-3. Доказать, что при любом натуральном n верно неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < 2.5.$$

04-4. На плоскости дана прямая ℓ. Плоскость повернули произвольным образом. При этом прямая ℓ перешла в прямую ℓ'. Для произвольной точки $M \in \ell$ возьмем соответствующую ей точку $M' \in \ell'$. Найти геометрическое место середин отрезков MM'.
05-5. Пусть функция $f \in C^1([-1;1])$. Найти $\lim\limits_{h\to+0} \int_{-1}^{+1} \frac{hf(x)dx}{h^2+x^2}$.
04-6. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, показать, что

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

04-7. Из n вопросов, вынесенных на зачёт, студент выучил m ($m \leqslant n-3$). Зачёт ставится, если студент ответил не менее, чем на половину вопросов билета. Какой билет ему выгоднее брать, с двумя вопросами или с четырьмя? (Билеты составляются случайным образом).
04-8. Найти предел последовательности $x_n = n \cdot \sin(2\pi e n!)$.
04-9. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n, причем матрица A обратима. Возможно ли равенство $AB - BA = A$?

Задачи, 2005 г.

05-1. Доказать, что во всяком тетраэдре $ABCD$ найдется ребро, которое образует острые углы со всеми смежными с ним ребрами.
05-2. A и B — квадратные матрицы, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. Доказать, что определитель $\det(A-B)$ может принимать только значения 0, 1 или −1.
05-3. Доказать, что $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+a}\,dt$ для любого $a \geqslant 0$.
05-4. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$, $f(0) = f(1)$. Доказать, что существует хорда графика $y = f(x)$ длины $1/5$, параллельная оси абсцисс.
05-5. Найти все функции f, непрерывные на $[0;+\infty)$, для которых

$$\sin\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{x}{x+1}.$$

05-6. Какую долю от объёма n-мерного куба составляет объём вписанного в него n-мерного шара? Рассмотреть случаи $n = 3, n = 4$.
05-7. Существует ли многочлен **а)** $P(x)$ от одной переменной, **б)** $P(x,y)$ от двух переменных, множеством значений которого является промежуток $(0;+\infty)$?

Задачи, 2006 г.

06-1. Доказать, что все 6 слагаемых в разложении определителя 3-го порядка не могут быть одновременно положительными.

06-2. В пространстве заданы точки $A(1,1,1)$; $B(3,-3,3)$; $C(6,-1,0)$ и точка $D(7,1,-2)$. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ — плоский, невырожденный и выпуклый.

06-3. В каждой вершине треугольной пирамиды написано число. На каждом ребре написана сумма чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на ребрах равна 3 и сумма их квадратов равна 3. Доказать, что сумма их кубов также равна 3.

06-4. Пусть $\mathcal{M}$ - множество квадратных матриц $n \times n$, элементами которых являются 0 и 1. Произведение $D = (d_{ij})$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ из $\mathcal{M}$ находится по формуле $d_{ij} = \max_k \min(a_{ik}, b_{kj})$.

а) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите $A^2, A^3, \ldots$.

б) Будет ли это умножение ассоциативным?

06-5. Найти $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$

06-6. Число людей с отрицательным резус-фактором равно примерно 15%. У женщины резус-фактор отрицателен. Какова вероятность того, что и у её ребенка он будет отрицателен?

Напоминание. Известно, что отрицательный резус-фактор рецессивен, т.е. проявляется, только если он получен и от матери, и от отца. Этот ген распределен одинаково у женщин и у мужчин.

06-7. Пусть $K_1, K_2 \ldots K_n$ — круги на плоскости. Через a_{ij} обозначим площадь пересечения $K_i \cap K_j$. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица порядка n, составленная из этих чисел. Доказать, что $\det A \geqslant 0$.

Задачи, 2007 г.

07-1. Пусть A и B — точки на параболе такие, что касательные к параболе, проведённые в данных точках, перпендикулярны. Зависит ли произведение расстояний от точек A и B до оси параболы от выбора этих точек?

07-2. Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ — натуральные числа, $a_0, a_1 \ldots a_k$ — действительные числа, не равные 0 одновременно. Доказать, что уравнение

$$a_0 + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_k x^{n_k} = 0$$

имеет не более k различных положительных корней.

07-3. Построить график неявной функции $x^y = y^x$.

07-4. Имеется 3 ящика и 5 призов. Каждый приз независимо от других помещается в произвольный ящик. Какова вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым?

07-5. В игре используются карточки с числами $1, 2, 3 \dots 9$. Двое по очереди выкладывают их в клетки таблицы 3×3. По окончании игры подсчитывается определитель. Если он больше 0, то выигрывает первый, если меньше — второй. На диагонали таблицы оказались числа $1, 2, 4$. Кто выиграет?

07-6. Пусть A — квадратная матрица $n \times n$. Будем считать, что $|A| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Доказать, что $|A \cdot B| \leqslant |A| \cdot |B|$.

07-7. Чему равен предел $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\cos\cos\dots\cos}_{n} x$

07-8. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом.

Задачи, 2008 г.

08-1. Множество $A \subseteq \mathbb{N}$ обладает следующими свойствами: 1) $1 \in A$; 2) если $x, y \in A$, то $2x + 3y \in A$. Доказать, что $2009 \in A$ и $20092009 \in A$.

08-2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$. Доказать, что

$$\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx$$

.

08-3. Найти все квадратные матрицы второго порядка, удовлетворяющие условию $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

08-4. Построить пример ограниченной нефундаментальной последовательности $\{a_n\}$, у которой расстояния между соседними членами стремится к нулю при $n \to +\infty$.

08-5. В вершинах правильного тетраэдра сидят муравьи (по одному в каждой вершине). В некоторый момент времени они начинают ползти по ребрам в одну из соседних вершин. Какова вероятность того, что два муравья встретятся на одном ребре?

08-6. Доказать, что предел последовательности $x_n = n \cdot \sin(2\pi e n!)$ равен 2π.

08-7. В азартной игре “определитель” используются карточки с числами 1, 2, …, n^2 ($n > 1$). Два игрока по очереди выкладывают их в клетки таблицы $n \times n$. По окончании подсчитывается определитель D получившейся матрицы. Если $D > 0$, то выигрывает первый, если $D < 0$ — второй, если $D = 0$ — провозглашается ничья. Кто выиграет больше партий, если игроки решат разыграть все $(n^2)!$ возможных партий?

08-8. В треугольнике ABC точка D — середина отрезка AB, точка E лежит на AC, точка F лежит на BC. Доказать, что $S_{\triangle DEF} \leqslant S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDF}$.

08-9. Встретились два математика, давно не видевших друг друга. Диалог при встрече:
– Как давно мы не виделись! Я слышал, у тебя большая семья?
– Да, трое детей. Младший — просто ангелочек! Кстати, произведение возрастов моих детей равно количеству лет, сколько мы не виделись.
– Этих сведений мне недостаточно, чтобы однозначно определить возраст твоих детей.
– Мой старший — огненно-рыжий.
– Теперь все ясно.
Сколько лет детям и сколько лет не виделись математики?

Задачи, 2009 г.

09-1. Найти все функции $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ такие, что $3f(-x) + f(1/x) + f(x) = x$ для всех $x \neq 0$.
09-2. Дана сфера S единичного радиуса с центром O. Точки A, B и C на сфере таковы, что векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ взаимно ортогональны. Плоскость α проходит через центр сферы. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точек A, B и C до плоскости α равна 1.
09-3. Вычислить интеграл $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,dx$.
09-4. Кончик головы змеи находится на метр к востоку от начала координат. От кончика головы тело змеи идет строго на север π метров, затем $\pi^2/2$ на запад, потом $\pi^3/3!$ на юг и т.д. по спирали. Длина n-й части змеи равна $\pi^n/n!$ метров, $n = 1, 2, \ldots + \infty$. Где расположен кончик хвоста змеи?
09-5. Вычислить $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x+y}{x+y+z}\,dxdydz$.
09-6. Пусть A — вещественная несимметричная нормальная матрица размера 3×3 (т.е. $A \cdot A^T = A^T \cdot A \neq 0$). Тогда вектор $\mathbf{e} = (a_{23} - a_{32}, a_{31} - a_{13}, a_{12} - a_{21})^T$ является собственным вектором A. Доказать.
09-7. Имеется n ящиков, в каждом из которых лежит один подарок. В комнату по очереди заходят m детей, каждый из которых равновероятно выбирает ящик и забирает оттуда подарок, если таковой остался. Сколько в среднем детей уйдут без подарка?
09-8. Последовательность вещественных чисел $\{a_n\}$ называется постоянной по отношению, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1+\ldots+a_k}{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}$ для любого натурального k. Доказать, что для любого натурального m существует такой многочлен $f_m(x)$ порядка m с целочисленными коэффициентами, что последовательность $\{f_m(n)\}$ постоянна по отношению. Доказать, что $f_m(x)$ выбирается с точностью до умножения на константу.
09-9. Задана биективная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{C}$ имеет место $|x - y| = 1 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 1$. Установить, что для всех $x, y \in \mathbb{C}$

а) из $|x - y| = 2$ следует $|f(x) - f(y)| = 2$;
б) из $|x - y| = 1/2$ следует $|f(x) - f(y)| = 1/2$;
в) из $|x - y| \leqslant 1$ следует $|f(x) - f(y)| \leqslant 1$.

Задачи, 2010 г.

10-1. Комплексные числа a,b, c таковы, что $|a| = |b| = |c| = r$. Найти модуль числа $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$.

10-2. Две вершины треугольника зафиксированы в точках A $(-1;0)$ и B $(1;0)$, а третья (точка C) движется по параболе $y = x^2 - 6x + 15$. Напишите уравнение кривой, которую описывает центр тяжести треугольника.

10-3. Из точки на плоскости отложено $2n$ векторов единичной длины. Они покрашены поочередно в красный и зелёный цвет. Просуммируем все вектора каждого цвета. Докажите, что разность двух этих сумм имеет длину не больше 2.

10-4. В множестве из 2010 элементов выбраны несколько подмножеств так, что каждые два из них имеют ровно один общий элемент и никакие три не имеют общих элементов. Каково наибольшее возможное число таких подмножеств?

10-5. Найти интеграл $\int \frac{(x-1)^2\,dx}{x^2+e^x+1}$.

10-6. Пусть γ — отрезок, соединяющий точки a и bi комплексной плоскости (a, b — вещественные, $a \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), а кривая Γ — его образ при отображении $w = \sin z$. Найти сумму углов, которые эта кривая составляет с вещественной и мнимой осями.

10-7. В игре “Что? Где? Когда?” в каждом раунде волчок останавливается в секторе номер x, где x равновероятно принимает одно из значений $0, 1, \ldots, 13$. При этом играет первый из секторов по часовой стрелке, который ранее не играл. Найти вероятность того, что после шести раундов сыграют (в любом порядке) сектора $1, 2, \ldots, 6$.

10-8. Имеется k одинаковых стеклянных шариков. Их кидают с некоторых этажей 1000 этажного дома. Требуется за наименьшее число бросаний X определить самый нижний этаж, при бросании с которого шарики разбиваются (или убедиться, что таких этажей в доме нет). Вычислить X **а)** для $k = 2$; **б)** для $k = 3$.

10-9. Функция $f(x)$ задана всей числовой прямой, причём в иррациональных точках она равна 0. Если же x представимо в виде несократимой дроби m/n, то $f(x) = m/n^3$. Будет ли эта функция дифференцируема в иррациональных точках? В 0?

10-10. Рассмотрим множество $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Будем говорить, что два множества из $2^{\mathbb{N}}$ эквивалентны, $X \sim Y$, если их симметрическая разность — конечное множество (т.е. X отличается от Y лишь конечным числом элементов). Существует ли такое отображение $f : 2^{\mathbb{N}} \mapsto 2^{\mathbb{N}}$, ко-

торое удовлетворяет условиям
1) $f(X) \sim X$;
2) $X \sim Y \Rightarrow f(X) = f(Y)$;
3) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Задачи, 2011 г.

11-1. Матрицы A и B не коммутируют между собой, т.е. $AB \neq BA$. Может ли оказаться, что матрицы A^2 и B^2 коммутируют?
11-2. Кривая задана параметрически в виде $x = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $y = a_2t^2 + b_2t + c_2$. Может ли она пересекать саму себя под углом 45°.
11-3. На шахматной доске проведено 64 вектора из центра клетки $d3$ в центры всех клеток доски. Найти длину суммы этих векторов (за единицу взята сторона клетки).
11-4. Сколько вещественных корней у многочлена $P(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - 1$?
11-5. Пусть q_{ij} — число общих делителей чисел i и j, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Найти $\det(q_{ij})$.
11-6. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$na_{n+1} = (n+1)a_n - \max(a_n; n^2), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Существует ли предел этой последовательности и если существует, чему он равен?
11-7. Существует ли функция $f : [0;1] \to \mathbb{R}^+$ такая, что для каждой точки a отрезка $[0;1]$ и всех $x \in [0;1]$, таких, что $0 < |x-a| < f(a)$, выполняется неравенство $f(x) < f(a)$?
11-8. Даны действительные различные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти сумму длин отрезков, из которых состоит множество $\{x \in \mathbb{R} : |\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^{-1}| > c\}$, где $c > 0$.
11-9. a) На эллипсе $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ выбраны точки M_1 и M_2 такие, что $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ перпендикулярны (здесь O — начало координат). Доказать, что

$$\frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_1}\right)^2} + \frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

b) На эллипсоиде $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ выбраны точки M_1, M_2 и M_3 такие, что векторы $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_3}$ попарно перпендикулярны (здесь O — начало координат). Доказать, что

$$\frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_1}\right)^2} + \frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\overrightarrow{OM_3}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

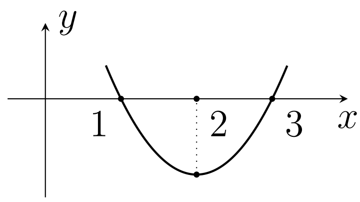
11-10. Пусть ξ, η — случайные величины, $\rho(\xi,\eta)$ — коэффициент корреляции между ξ и η, а для их матожидания $\mathbb{M}$ и дисперсии $\mathbb{D}$ выполнено: $\mathbb{M}\xi = \mathbb{M}\eta = 0$, $\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}\eta = 1$. Доказать, что $\mathbb{M}(\max\{\xi^2,\eta^2\}) \leqslant 1 + \sqrt{1-\rho^2}$.

Задачи, 2012 г.

12-1. Докажите, что для монотонно возрастающей функции $f(x)$ уравнения $x = f(f(x))$ и $x = f(x)$ равносильны.

12-2. Судоку-куб. Куб разбит на 9^3 одинаковых кубиков. Можно ли каждому из них приписать число от 1 до 9 так, чтобы в каждой “строке”, “столбце” или “столбике” из 9 кубиков каждая цифра встречалась ровно по одному разу.

12-3. На рисунке представлена часть графика многочлена $y = P(x)$ (в точке 2 он имеет минимум среди всех значений на отрезке $[1,3]$, а 1 и 3 являются его простыми корнями). Какой может быть степень этого многочлена?



12-4. При каких $a \in \mathbb{R}$ выполняется

$$I_1 = \int_0^a e^{x^2-2x}\,dx \geqslant I_2 = \int_0^a x\,e^{x^2-2x}\,dx\,?$$

12-5. Матрица размера $m \times n$ имеет ранг r. Нужно дополнить ее до квадратной так, чтобы полученная матрица стала невырожденной. Каков наименьший размер полученной квадратной матрицы?

12-6. Известно, что для некоторой дифференцируемой функции f при произвольной простой замкнутой кривой L интеграл $\oint_L (f(y) + x^2 + 1)\,dx - (xf(y) + e^{2y})\,dy$ равен площади области, ограниченной L . Найти f, если $f(0) = 0$.

12-7. У n-мерного куба покрашено k вершин. Окрасим также ребра, у которых окрашены обе вершины. **а)** Пусть окрашено более половины всех вершин. Тогда окрашено не меньше n ребер. **б)** Показать, что существует куб, у которого покрашена половина всех вершин, но ни одного ребра.

12-8. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на единичной окружности с центром в точке O. Известно, что $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = 0$. Доказать, что для любой точки B выполняется $\sum_{i=1}^n |\overrightarrow{BA_i}| \geqslant n$

12-9. Рассмотрим систему подмножеств $\{A_\alpha\}$, $A_\alpha \subset \mathbb{N}$ таких, что каждые два из них сравнимы в смысле включения (т.е. либо первое входит во второе, либо второе — в первое). Может ли такая система множеств быть несчётной?

12-10. На окружность бросают случайным образом $n > 1$ точек. Найти вероятность того, что окружность можно разбить на n равных дуг так, что на каждой дуге будет ровно одна точка (считаем, что в дугу входит ровно один из ее концов).

Задачи, 2013 г.

13-1. Найти ограниченное и непрерывное вместе с производной на всей числовой прямой решение дифференциального уравнения $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^{-|x|}$.

13-2. а) Существует ли на вещественной оси непрерывная функция, график которой пересекается с любой прямой на плоскости по крайней мере один раз?
б) Существует ли на неотрицательной полуоси непрерывная функция, пресекающаяся с любой горизонтальной прямой четное число раз?

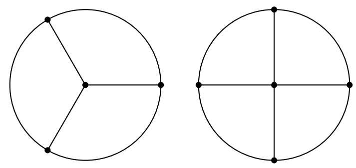
13-3. Функция $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, дифференцируема и имеет непрерывную производную. Найдите неопределённый интеграл $\int \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)+e^{-x}}\, dx$.

13-4. Вершина С треугольника ABC неподвижна, а сторона AB постоянной длины $2a$ скользит вдоль данной прямой l. По какой линии движется центр окружности, описанной около треугольника?

13-5. При приеме в старшую группу детского сада проводится следующий экзамен. Перед ребенком случайной стороной раскладываются в ряд 35 карточек, на одной стороне карточек написана буква "м", на другой "а". Ребенок должен найти 4 подряд идущие карточки, на которых написано слово "мама". Сколькими в среднем способами ребенок может выполнить задание?

13-6. Введем следующее обозначение для n-й итерации вещественной функции $f : \underbrace{f(f(\ldots(f}_{n \text{ раз}}(x)\ldots)) = f^{(n)}(x)$. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsin}^{(n)}(x) - \sin^{(n)}(x)}{x^3}$.

13-7. В городе Wheel метро состоит из кольцевой линии (n станций) и центральной станции, соединённой с каждой станцией кольцевой линии (см. рисунок, иллюстрирующий случаи $n = 3, 4$). Руководство города решило устроить ремонт максимального числа перегонов, но так, чтобы с любой станции оставалась возможность добраться с помощью метро до любой другой. Сколькими способами руководство может осуществить свой замысел, если **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$?



13-8. Пусть числа a, b, c не все совпадают друг с другом. Описать все наборы параметров (a, b, c), при которых данная система уравнений имеет решения в действительных числах x, y, z:

$$\begin{cases} x^2 - zy = a \\ y^2 - zx = b \\ z^2 - xy = c \end{cases}$$

13-9. Относительно квадратной матрицы (a_{ij}) известно, что сумма ее элементов в каждом наборе, соответствующем произведению элементов, входящих в определитель (сумма элементов, выбранных по одному из каждого столбца и каждой строки, $\sum_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, σ — перестановка из S_n) одна и та же (не зависит от $\sigma \in S_n$). Доказать, что $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, где в матрице (b_{ij}) столбцы состоят из одинаковых элементов, а в матрице (c_{ij}) строки состоят из одинаковых элементов.

13-10. Даны две окружности ω_1, ω_2, расположенные вне друг друга. Найти геометрическое место центров M окружностей, каждая из которых касается обеих заданных окружностей.

Задачи, 2014 г.

14-1. Пусть $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Найдите значение 100-й производной $f^{(100)}(0)$.
14-2. Рассмотрим все (комплексные) корни уравнения $x^{2014} + 2015x + 2016 = 0$. Найдите сумму их 2014-х степеней.
14-3. Пусть $I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(\sin x)\, dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(\sin x)\, dx$. Какой из интегралов больше I_1 или I_2?
14-4. Квадратная матрица A размера 20×20 невырождена. Какое наименьшее значение может иметь ранг подматрицы 12×13 матрицы A? (подматрица получается вычеркиванием из A некоторых строк и столбцов).
14-5. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k^k \right)$.
14-6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, причём $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$. Докажите, что треугольник равносторонний.
14-7. Неразборчивый жених женится на первой желающей выйти за него замуж, а потом, как только встретит более привлекательную партию, оформляет развод и заключает новый брак. Потенциальные n невест (женщин, не возражающих против брака с ним) могут быть строго ранжированы по своей привлекательности, но встречаются жениху в случайном порядке, все их перестановки равновероятны. Хватит ли в среднем места в паспорте жениха для всех штампов о браках и разводах, если $n = 50$, а паспорт вмещает всего 5 штампов о браках (вместе с 4 штампами о разводах)?
14-8. Пусть функции f и g заданы на всей числовой прямой. Может ли оказаться так, что $f(g(x)) = x^2$, а $g(f(x)) = x^3$ для всех $x \in \mathbb{R}$?
14-9. В каждой строке невырожденной квадратной $n \times n$ матрицы A стоит только одно отличное от 0 число, равное +1 или −1. Докажите, что найдется такое m, при котором m-я степень матрицы совпадает с матрицей, транспонированной к A, то есть $A^m = A^T$.
14-10. Рассмотрим множество неупорядоченных пар точек окружности. Наделим его естественной топологией (топологией произведения, фактор-топологией). Докажите, что полученное множество гомеоморфно листу Мёбиуса.

Задачи, 2015 г.

15-1. Дан многочлен $P(x) = x^3 - ax - b$, где a и b — положительные числа. Доказать, что **а)** ровно один корень многочлена $P(x)$ является вещественным положительным числом; **б)** этот корень лежит в интервале $(\max\{\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}\}, \sqrt{a} + \sqrt[3]{b})$.

15-2. а) Докажите, что площадь треугольника, заключенного между осями координат и касательной к линии $xy = 1$, $x, y, \geqslant 0$, не зависит от выбора точки касания. **б)** Докажите, что объём тетраэдра, заключенного между координатными плоскостями и касательной плоскостью к поверхности $xyz = 1$, $x, y, z \geqslant 0$, не зависит от выбора точки касания.

15-3. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Доказать, что

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \times \det(A - B).$$

15-4. Найти функцию $f : (\frac{1}{e}, \infty) \ni x \to y(x) \in \mathbb{R}$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$\int_0^{y'(x)} \frac{e^t\,dt}{1 + 2e^t} = \frac{1}{2}\ln x$$

с начальным условием $y(1) = -2/3$.

15-5. Пусть S_M обозначает центральную симметрию плоскости относительно точки M. Докажите, что точка W является центром тяжести $\triangle ABC$ (точкой пересечения медиан) тогда и только тогда, когда композиция $S_W \circ S_C \circ S_W \circ S_B \circ S_W \circ S_A$ представляет собой тождественное преобразование.

15-6. Каких граней у 7-мерного куба $[0; 1]^7 \subset \mathbb{R}^7$ больше, трёхмерных или четырёхмерных?

15-7. Пусть S — некоторый класс функций вида $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, удовлетворяющий следующим условиям: a) функции $f_1(x) = e^x - 1$ и $f_2(x) = \ln(x + 1)$ принадлежат классу S; b) если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S, то функции $f(x) + g(x)$ и $f(g(x))$ также принадлежат S; c) если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S и $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \geqslant 0$, то функция $f(x) - g(x)$ также принадлежит S. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу S, то и функция $f(x)g(x)$ тоже принадлежат классу S.

15-8. Рассматриваются матрицы, состоящие из пяти строк и восьми столбцов, все строки которых попарно различны. Доказать, что во всякой такой матрице можно указать четыре столбца, при вычёркивании которых строки получившейся матрицы также будут попарно различны. Показать, что пять таких столбцов можно указать не всегда.

15-9. Монету подбрасывают несколько раз до тех пор, пока не выпадут подряд три орла или две решки. Какова вероятность того, что бросания завершатся выпадением трёх орлов? Вероятности выпадения орла и решки равны $1/2$, результаты бросков независимы один от другого.

15-10. Последовательность $\{f_n\}$, состоящую из натуральных чисел, можно рассматривать как отображение $f : \mathbb{N} \ni n \to f(n) = f_n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел). Для трех таких последовательностей a_n, b_n и c_n выполняются следующие условия: отображение a — сюръективно, отображение b — инъективно, $c_n = a_n - b_n + 1$. Доказать, что $c_n = 1$ для всех n.

Задачи, 2016 г.

16-1. Найти все многочлены, удовлетворяющие условию $f(2x) = f'(x)f''(x)$.

16-2. Центр окружности ω совпадает с центром тяжести (точкой пересечения медиан) треугольника. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M, лежащей на ω, до вершин треугольника ABC не зависит от выбора точки M.

16-3. Решите уравнение $2x^{2x} = 1$.

16-4. Найти значение параметра q, при котором интеграл $\int_0^{\pi/2} |\cos x - q|\,dx$ принимает наименьшее значение.

16-5. Доказать, что для любых матриц X и Y выполняется равенство $\det(E + XY) = \det(E + YX)$. Размерности матриц таковы, что все указанные действия имеют смысл.

16-6. Рассмотрим класс функций $K = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Покажите, что

а) функция $f(x) = x^2$ представима в виде суммы инъекции и сюръекции из K;

б) функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, заданную на $\mathbb{R}$, нельзя представить в виде суммы инъекции и сюръекции из K.

Напоминание. Инъективное отображение переводит разные аргументы в разные значения, сюръективное отображение — отображение "на", $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

16-7. Назовем упорядоченным разбиением натурального числа $n \geqslant 2$ упорядоченный набор натуральных чисел $a_1, a_2 \ldots a_k$ (то есть, например, $5, 5, 8$ и $5, 8, 5$ — разные наборы), удовлетворяющий условиям: $k \geqslant 1, a_i \geqslant 2, a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Доказать, что число упорядоченных разбиений числа n равно $(n-1)$-му числу Фибоначчи F_{n-1}.

16-8. Идеальный датчик случайных чисел одно за другим выдаёт числа из промежутка $[0; 1]$ до тех пор, пока сумма выданных им чисел не окажется больше единицы. Найти математическое ожидание количества чисел, выданных датчиком.

16-9. A и B — противоположные вершины n-мерного куба. Доказать, что можно найти n граней размерности $(n-2)$, таких, что они не содержат вершин A и B, но все остальные вершины содержатся в их объединении.

16-10. Доказать, что не существует такого топологического пространства X, что $\mathbb{R}$ гомеоморфно произведению $X \times X$.

Задачи, 2017 г.

17-1. Доказать, что при $a \in [0, \pi/2]$, $b \in [0, 1]$ выполняется неравенство $\int\limits_0^a \sin x\, dx + \int\limits_0^b \arcsin x\, dx \geqslant ab.$

17-2. Все вершины многогранника пронумерованы числами от 1 до N в некотором порядке. Пусть A – матрица размера $N \times N$, состоящая из 0 и 1, причём её элементы $a_{km} = a_{mk} = 1$, если вершины с номерами k и m лежат на одном ребре, и $a_{km} = 0$ в противном случае (в частности $a_{kk} = 0$). Показать, что $\det(A)$ не зависит от порядка нумерации вершин. Вычислить $\det(A)$ для тетраэдра и октаэдра.

17-3. Решить матричное уравнение $AX + X + A = 0$, где квадратная матрица A нильпотентна (некоторая степень A является нулевой матрицей).

17-4. К десятичной записи любого ли натурального числа можно приписать справа конечный набор цифр так, чтоб получившееся число представляло собой полный квадрат?

17-5. План города представляет собой квадрат, разделённый на 25 одинаковых кварталов квадратной формы. Из левого верхнего угла в противоположный угол вышел Антон, одновременно с ним с той же скоростью навстречу ему вышел Борис. С какой вероятностью они встретятся? На перекрестках направление выбирается произвольным образом, но так, чтобы длина пути была минимальна, т.е. Антон движется вниз или вправо, Борис вверх или влево.

17-6. Сколько существует последовательностей длины n из чисел “1” и “2” таких, что их сумма делится на 3?

17-7. Доказать, что число $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ иррациональное.

17-8. Доказать, что площадь проекции единичного куба на плоскость численно равна длине его проекции на ортогональную плоскости прямую.

17-9. Из скольких компонент связности в пространстве $\mathbf{R}^4$ состоит дополнение конуса $C = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0\}$?

17-10. Конечная система множеств $\mathcal{L}$ замкнута относительно операции взятия симметрической разности: если множества $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$, то множество $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ также принадлежит $\mathcal{L}$. Может ли $\mathcal{L}$ состоять в точности из 2017 множеств?

17-11. Билет называется счастливым по-питерски, если сумма его цифр, стоящих на чётных местах, совпадает с суммой цифр, стоящих на нечётных местах. Назовем билет счастливым по-казански, если все его цифры можно разбить на две непересекающиеся группы с одинаковыми суммами цифр. На совместном заседа-

нии руководителей транспортных управлений Петербурга и Казани было принято решение не ограничивать число цифр в номере билета.
а) Пусть $P_{\Pi}(n)$ — вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-питерски. Найти $\lim_{n\to\infty} P_{\Pi}(n)$.
б) Пусть $P_{\text{К}}(n)$ вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-казански. Найти $\lim_{n\to\infty} P_{\text{К}}(n)$.

Задачи, 2018 г.

18-1. Матрица A размера $n \times n$ является суммой матрицы B, все элементы которой равны 1, и диагональной матрицы C, на главной диагонали которой стоят числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Вычислить определитель матрицы A в случае a) $n = 5$, b) произвольного n.
18-2. Правильный n-мерный симплекс представляет собой выпуклую оболочку $n+1$ точки A_1, A_2, …, A_{n+1} (вершин симплекса) n-мерного евклидова пространства, находящихся на равном расстоянии одна от другой. Центром симплекса называется точка O, равноудалённая от всех вершин. Найти величину угла A_1OA_2 в случае: **a)** $n = 3$ (правильный тетраэдр), **b)** произвольного n.
18-3. Найти все решения сравнения $x^{2019} \equiv x \pmod{2018}$, принадлежащие множеству $\{1, 2, \ldots, 2017\}$.
18-4. Вычислить $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$
18-5. Корни многочлена $F(z)$ степени n над полем комплексных чисел располагаются в вершинах правильного n-угольника. Доказать, что корни производной $F'(z)$ совпадают и расположены в центре этого n-угольника.
18-6. Что больше: $A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{36}}$ или $B = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$?
18-7. Дан четырёхугольник на плоскости, противоположные стороны которого не параллельны. Доказать, что середины его диагоналей и середина отрезка, концами которого являются точки пересечения противоположных сторон, лежат на одной прямой.
18-8. На плоскости $\mathbb{R}^2$, рассматриваемой как топологическое пространство, выбрано некоторое счётное подмножество X. Доказать, что топологическое пространство $\mathbb{R}^2 \setminus X$ линейно связно.
18-9. На окружности единичного радиуса случайным образом выбираются две точки A и B. Середина хорды AB является случайной величиной η, распределённой в этом круге. Найти наименьшее значение её плотности распределения.
Напоминание. Плотность $f_\eta(Q)$ случайной величины η в точке Q — это предел $\lim\limits_{\operatorname{diam}(\Omega)\to 0} \frac{P(\Omega)}{S(\Omega)}$, где $S(\Omega)$ — площадь области Ω, содержащей точку Q, $\operatorname{diam}(\Omega)$ —

её диаметр, а $P(\Omega)$ – вероятность попадания η в Ω.

18-10. Даны $n \geqslant 1$ комплексных чисел x_i, $i = 1, \dots, n$. Известно, что $\sum x_i = \sum x_i^2 = \dots = \sum x_i^{n+1}$. Верно, ли что $x_i \in \{0, 1\}$ для любого $i = 1, \dots, n$?

Задачи, 2019 г.

19-1. Дан многочлен $x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_n$, где все $a_k \geqslant 0$, $\sum a_k > 0$. Сколько положительных корней может иметь этот многочлен?

19-2. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ произведение $\mathbf{v} \cdot ((\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{w})$ не положительно. Когда это произведение равно нулю?

19-3. Непрерывно дифференцируемая функция f, $f \not\equiv 0$, удовлетворяет условию: $f'(x) = f(-x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Найти все вещественные нули функции f.

19-4. На плоскости даны два эллипса с одинаковыми осями, касающиеся один другого в вершинах: Φ_1 с уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и Φ_2 с уравнением $(x - 2a)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. По каким траекториям будут двигаться фокусы эллипса Φ_2 при качении этого эллипса вокруг эллипса Φ_1?

19-5. Каждый студент группы из 25-ти студентов симпатичен не более, чем двум студентам этой группы. Отношение симпатии, вообще говоря, не является симметричным. **а)** Доказать, что в группе найдется 5 студентов, попарно не симпатичных между собой. **б)** Какое наибольшее количество произвольным образом выбранных студентов можно отчислить, чтобы по прежнему гарантированно нашлись 5 попарно не симпатичных студентов?

19-6. Имеется два тела одинаковой массы и одинаковой теплоемкости. Температура первого тела $0°C$, второго $90°C$. Можно ли нагреть первое тело за счёт теплообмена со вторым до температуры $60°C$, если второе тело произвольным образом можно делить на части? Предполагается, что теплообмена с окружающей средой нет, при соприкосновении двух тел с температурами T_1 и T_2 и массами m_1 и m_2, их температура мгновенно выравнивается до $T = (T_1 m_1 + T_2 m_2)/(m_1 + m_2)$.

19-7. Доказать неравенство: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy\,dx\,dy}{(e^{x-y}+1)^2} \geqslant \frac{1}{16}$.

19-8. Последовательность целых чисел такова, что $x_0 = 0$, $|x_n| = |x_{n-1} + 1|$ для всех натуральных n. Каково наименьшее возможное значение может принять выражение $|x_1 + x_2 + \dots + x_{2019}|$?

19-9. **а)** Для матриц B и C размера 2×2 проверить, что след матрицы $BC - CB$ равен нулю. **б)** Доказать, что для любой вещественной матрицы A размера 2×2 с нулевым следом существуют такие вещественные матрицы B и C, что $A = BC - CB$.

Напоминание. Следом матрицы называется сумма элементов главной диагонали. Операция $[B, C] = BC - CB$ называется коммутатором B и C. Т.о., требуется доказать для матриц 2×2, что след матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица является коммутатором. За доказательство существования комплексных матриц B и C в пункте б) – 4 балла.

19-10. За круглым столом сидят n ($n > 4$) человек. Все они, независимо друг от друга, случайно (с вероятностью $1/2$) выбирают кого-то из своих соседей. Найти: **а)** среднее количество людей, которых никто не выбрал; **б)** дисперсию этого количества.

Напоминание. Если $\mathbb{M}\xi$ — среднее (математические ожидание) случайной величины ξ, то дисперсия $\mathbb{D}\xi$ подсчитывается по формуле $\mathbb{D}\xi = \mathbb{M}(\xi - \mathbb{M}\xi)^2 = \mathbb{M}\xi^2 - (\mathbb{M}\xi)^2$.

19-11. Николай начертил две равновеликие фигуры: правильный пятиугольник с прямыми углами при вершинах и правильный треугольник. Чему равны углы при вершинах треугольника?

Ответы и указания

99-1. C_{2n}^n.
99-2. Максимальное значение a равно $e^{1/e}$.
99-3. **а)** Для $n = 2$ либо $A = \pm E$, либо $a + d = 0$ и $\det A = -1$.
б) Для $n = 3$ либо $A = E$, либо $a + d = -1$ и $\det A = 1$.
99-4. Выразите x^2 из второго уравнения.
99-5. $f(x) = 1.6x^2 + 2.4x + \sqrt{x}$.
99-6. Найдите точки пересечения графика с произвольной прямой.
99-7. $1/2 + M/6$ при $M \leqslant 1$ и $1 - \frac{1}{3\sqrt{M}}$ при $M \geqslant 1$.

01-1. 0.
01-2. 1.
01-3. Запишите уравнение многочлена через его корни.
01-4. Запишите квадрат суммы векторов через скалярное произведение.
01-5. Запишите преобразование симметрии векторно.
01-6. Вспомните теорему Ролля.
01-7. Отразите симметрично красное пятно на сфере.

02-1. 4%.
02-2. Синусоида $y = 2\sin(t/2)$.
02-3. Рассмотрите умножение справа (слева) как преобразование множества A.
02-4. Сравните записанное выражение с формулой Тейлора.
02-5. $f(x) = Cx$.
02-6. Площадь равна интегралу от разности функций. Запишите уравнение этой разности.
02-7. $\psi(x) = C + \psi(x)$, где $C(1 - b + a) = \int_a^b \psi(x)\,dx$.
02-8. $S + P + 2\pi$.

03-1. Используйте теорему Виета.
03-2. Найдите сначала след матрицы AX.
03-3. Приведите A к жордановой форме.

03-4. $x = 1 - 1/e$.
03-5. **а)** Нет. **б)** Да.
03-6. 1/2.
03-7. Может.
03-8. **б)** Может.

04-1. $x = 1$, $y = -1$.
04-2. **а)** 0; **б)** 0.
04-3. Докажите более сильное неравенство $a_n < 2.5\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
04-4. Прямая.
04-5. $\pi f(0)$.
04-6. Исследуйте интеграл $\int_a^b\int_a^b(f(x) - f(y))^2\,dxdy$.
04-7. При $m < 2n/3 - 1$ — с двумя вопросами, при $m > 2n/3 - 1$ — с четырьмя.
04-8. 2π.
04-9. Все сводится к подобию матриц B и $I + B$, где I — единичная матрица.

05-1. Рассмотрите ребро наибольшей длины.
05-2. Постройте уравнение, которому удовлетворяет матрица $A - B$.
05-3. Продифференцируйте левый интеграл по параметру.
05-4. Исследуйте поведение функции $f(x + 1/5) - f(x)$.
05-5. $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$.
05-6. Если $n = 2k$ или $n = 2k + 1$, то шар занимает долю $\pi^k/(n!!\,2^k)$ от объема описанного вокруг него куба.
05-7. **а)** нет; **б)** да.

06-1. Рассмотрите произведение всех слагаемых.
06-2. Разложите вектор $\overrightarrow{AC}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
06-3. Выразите искомую сумму через заданные суммы.
06-4. **б)** да.
06-5. $I = \pi/4$.
06-6. $p = \sqrt{0.15}$
06-7. Используйте понятие определителя Грама.

07-1. Нет.
07-2. Используйте индукцию по k.
07-3. Прологарифмируйте равенство.
07-4. 31/81.
07-5. Первый.
07-6. Решается вычислением.
07-7. Корень уравнения $x = \cos x$.

07-8. Окружность с радиусом $\sqrt{a^2+b^2}$, где a, b — полуоси эллипса.

08-1. Выпишите несколько первых элементов множества A и заметьте закономерность.
08-2. Сделайте замену $t = \pi - x$.
08-3. Любая матрица, у которой и след, и определитель равны 0.
08-4. Например, $a_n = \sin\sqrt{n}$.
08-5. Вероятность встречи на ребрах (не включая вершины) — 17/27 (см. так же примечание).
08-6. Используйте разложение числа e в ряд Тейлора.
08-7. Количество выигрышей будет одинаковым.
08-8. Используйте векторное произведение для записи площади.
08-9. 1, 2 и 8 лет. Математики не виделись 16 лет.

09-1. $f(x) = -\frac{2x}{3} - \frac{1}{3x}$.
09-2. Выберите данные векторы в качестве координатных.
09-3. 2π.
09-4. На метр западнее начала координат.
09-5. 2/3.
09-6. Исследуйте матрицу $S = A - A^T$.
09-7. $m - n(1-(1-1/n)^m)$.
09-8. Перейдите от последовательности к ряду.
09-9. а) Рассмотрите правильный шестиугольник со стороной 1; б) Используйте св-ва подобных треугольников; в) Воспользуйтесь неравенством треугольника.

10-1. r.
10-2. $y = 3x^2 - 6x + 5$.
10-3. Используйте проекцию на прямую, исходящую из начала координат и совпадающую по направлению с вектором искомой разности.
10-4. 63.
10-5. Выделите целую часть дроби под интегралом.
10-6. $\pi/2$.
10-7. 1/448.
10-8. **а)** $X = 45$; **б)** $X = 19$.
10-9. В иррациональных точках нет, в 0 — да.
10-10. Не существует.

11-1. Да.
11-2. Нет, не может.
11-3. $32\sqrt{10}$.

11-4. 1 при нечетном n и 2 при четном $n > 0$.
11-5. 1.
11-6. $-\infty$.
11-7. Нет, не существует.
11-8. $2n/c$.
11-9. Пусть $\overrightarrow{OM_i} = \mathbf{e}_i r_i$, где $\|\mathbf{e}_i\| = 1$. Запишите уравнение эллипса для точки M_i в терминах координат вектора $\mathbf{e}_i$.
11-10. Попробуйте записать неравенство в терминах $|\xi - \eta|$ и $|\xi + \eta|$.

12-1. Доказательство нетривиального следствия от противного.
12-2. Да, можно.
12-3. Степень многочлена не менее 2, но не равна 3.
12-4. При $a \in [0, 2]$.
12-5. $n + m - r$.
12-6. $f(y) = e^{-y} - 1$.
12-7. **а)** Воспользуйтесь индукцией по n. **б)** Куб представляет собой двудольный граф с равным числом вершин в каждой доле.
12-8. Представьте $|\overrightarrow{BA_i}|$ как $|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}|$.
12-9. Да, может.
12-10. $\frac{(n-1)!}{n^{n-2}}$.

13-1. $y = \begin{cases} \exp(x)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right), & x < 0, \\ \frac{1}{4}\exp(-x), & x \geqslant 0. \end{cases}$
13-2. **а)** Существует, например x^3; **б)** существует.
13-3. $\ln(e^x f(x) + 1) + C$.
13-4. По параболе.
13-5. В среднем 2-мя способами.
13-6. $n/3$.
13-7. **а)** 16 способами; **б)** 45 способами.
13-8. $a + b + c > 0$.
13-9. Любой минор матрицы (a_{ij}) обладает тем же свойством, что и вся исходная матрица (a_{ij}). Рассмотрите подходящие миноры второго порядка.
13-10. Две гиперболы с общими фокусами.

14-1. $-2 \times 100!$.
14-2. -4060224.
14-3. $I_1 > I_2$.
14-4. Минимальный возможный ранг равен 5.
14-5. Предел равен 1.

14-6. Условие эквивалентно тому, что $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{0}$.
14-7. В среднем места в паспорте хватит.
14-8. Нет, не может.
14-9. Совокупность всех таких матриц образует конечную группу относительно умножения матриц, при этом все матрицы ортогональны.
14-10. Множество упорядоченных пар точек окружности гомеоморфно тору.

15-1. **а)** Рассмотрите точки пересечения графика функции $y = x^3 - ax$ с осью абсцисс. **б)** Рассмотрите знак полинома $P(x)$ в точках, задающих концы рассматриваемого интервала.
15-2. Рассмотрите уравнение **а** касательной прямой; **а** касательной плоскости; найдите пересечение касательной с осями координат.
15-3. Решение легко получается преобразованием определителя (имеется несколько вариантов решения задачи).
15-4. $\frac{3x-1}{3}\left(\ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) - 1\right)$.
15-5. Симметрия плоскости относительно точки M с радиус-вектором $\mathbf{m}$ отображает точку с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в точку с радиус-вектором $\mathbf{x} + 2(\mathbf{m} - \mathbf{x}) = 2\mathbf{m} - \mathbf{x}$.
15-6. Трёхмерных.
15-7. Докажите, что $f(x)g(x) + f(x) + g(x) \in S$.
15-8. Рассмотрите строки матрицы как точки пространства $\mathbb{R}^8$.
15-9. Составьте систему уравнений, связывающую три переменных — вероятности выпадения 3-х орлов после того, как а) уже выпали два орла; б) уже выпали орел и решки; в) уже выпали решки и орел.
15-10. Воспользуйтесь принципом Дирихле при доказательстве от противного.

16-1. $f(x) = 0$ или $f(x) = 4x^3/9$.
16-2. Запишите расстояние через скалярное произведение. Задействуйте центр окружности.
16-3. $x = 1/2$ или $x = 1/4$.
16-4. $q = \sqrt{2}/2$.
16-5. Сведите к случаю квадратных матриц X и Y.
16-6. б) Докажите, что сюръективная составляющая нигде не принимает значение, противоположное значению инъективной составляющей в нуле.
16-7. Рассмотрите отдельно случаи, когда последнее слагаемое разбиения равно двум и больше двух.
16-8. e.
16-9. Задайте вершину куба вектором из n нулей и единиц.
16-10. Используйте факт, что числовая прямая теряет связность, если из неё выколоть точку.

17-1. Используйте геометрический смысл определённого интеграла.
17-2. Для тетраэдра $\det(A) = -3$, для октаэдра $\det(A) = 0$.
17-3. $X = -(E + A)^{-1}A$.
17-4. Для любого.
17-5. $p = 63/256 \approx 24.6\%$.
17-6. $(2^n + (-1)^n 2)/3$.
17-7. Используйте метод доказательства от противного.
17-8. Длины проекций запишите через скалярное произведение соответствующего вектора на нормаль к поверхности, а площади проекций — через соответствующие смешанные произведения.
17-9. Из двух.
17-10. Не может.
17-11. а) 0; б) 1/2.

18-1. $\det A = \prod\limits_{k=1}^{n} x_k + \sum\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{k\neq j} x_k$.
18-2. $\alpha = \arccos(-1/n)$.
18-3. 5 решений $x = 1, 1008, 1009, 1010, 2017$.
18-4. 2.
18-5. Все сводится к случаю многочлена az^n.
18-6. B.
18-7. Задача аффинная.
18-8. Любые две точки связываются ломаной из двух звеньев.
18-9. $2/\pi^2$.
18-10. Верно.

19-1. 1.
19-2. Это произведение равно нулю $\Leftrightarrow$ векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ коллинеарны.
19-3. $-\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
19-4. Траектории фокусов – окружности с центрами, расположенными в фокусах первого эллипса.
19-5. Можно отчислить 4-х студентов, оставив группу из 21-го студента.
19-6. Нельзя, $\sup(T) = (1 - e^{-1}) \cdot 90°C \approx 56.89°C < 60°C$.
19-7. Симметризуйте неравенство (рассмотрите его совместно с аналогичным неравенством, в котором x и y поменялись местами).
19-8. 42.
19-9. б) Можно отдельно рассмотреть случай верхне-треугольной матрицы и случай, когда элемент в левом нижнем углу отличен от нуля.
19-10. а) $n/4$; б) $n/16$.
19-11. $\pi/6$.

Решения задач

Решения, 1999 г.

99-1. Рассмотрим два множества по n элементов в каждом. Выберем из этой совокупности n элементов. Очевидно, что это можно сделать C_{2n}^n способами. С другой стороны, если из первого множества берётся i элементов, а из второго, соответственно, $n-i$ элементов, то количество способов выбора будет равно $C_n^i C_n^{n-i} = (C_n^i)^2$. Значит $\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$.

99-2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Перейдя в рекуррентном равенстве к пределу, получим $x = a^x$ или $\ln x = x \ln a$. Значит, $\ln a$ — одно из значений функции $\frac{\ln x}{x}$. Исследование с помощью производной показывает, что $\max \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{e}$, так что максимальное значение параметра a можно найти из соотношения $\ln a = 1/e$, т.е. $a = e^{1/e}$.
Покажем, что для этого значения параметра искомый предел существует. Для этого проверим, что последовательность x_n возрастает и ограничена. Доказательство обоих свойств проведем по индукции:
Возрастание. Надо показать, что $x_{n+1} > x_n$. Для $n = 1$ неравенство принимает вид $a > 1$, что верно. Кроме того, в силу соотношения $a > 1$, из $x_n > x_{n-1}$ следует, что $x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n$.
Ограниченность. Покажем, что $x_n < e$. Для $n = 1$ это очевидно. При условии, что $x_{n-1} < e$ имеем $x_n = a^{x_{n-1}} < a^e = e$, что и завершает доказательство.

99-3. Для обратимой матрицы A введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

а) Из условия $A^2 = E$ следует, что $(\det A)^2 = 1$, откуда $\det A = \pm 1$. Значит, A обратима и исходное соотношение можно переписать в виде $A = A^{-1}$.
1) $\det A = 1$. Равенство $A = A^{-1}$ принимает вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, откуда $b = c = 0$, $a = d$. В силу того, что $\det A = 1$, получаем, что $a = d = \pm 1$.

2) $\det A = -1$, тогда $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, что сводится к равенству $a + d = 0$.

б) Если $A^3 = E$, то $(\det A)^3 = 1$, и $\det A = 1$. Имеем $A^2 = A^{-1}$, что в силу условия $\det A = 1$ сводится к виду $\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. В частности, $b(a+d) = -b$, $c(a+d) = -c$. Значит, либо $b = c = 0$, либо $a + d = -1$.

1) $b = c = 0$. "Диагональные" равенства принимают вид $a^2 = d$; $d^2 = a$, откуда либо $a = d = 1$, либо $a = d = 0$ (последнее не подходит, получается вырожденная матрица).

2) $a+d = -1$. В силу того, что $ad-bc = 1$, получаем $a^2+bc = a^2+ad-1 = a(a+d)-1 = -a-1 = d$. Аналогично $d^2+bc = a$, так что равенство $A^2 = A^{-1}$ выполняется.

99-4. Заметим, что второе уравнение будет уравнением параболы только при условии $A \neq 0$. Выразим из него $x^2 = (y - Bx - C)/A$ и подставим в первое. Оно примет вид $(y - Bx - C)/(Aa^2) + y^2/b^2 = 1$. Из полученного уравнения можно выразить y^2 в виде $y^2 = \alpha x + \beta y + \gamma$. Сложив это уравнение с выражением для x^2, получим уравнение вида $x^2 + y^2 = px + qy + r$, где p, q и r — некоторые числа, полученные комбинированием параметров A, B и C.

Это и есть уравнение окружности, на которой лежат все точки пересечения эллипса и параболы.

99-5. Правую часть заданного уравнения можно представить как $x\int_0^1 f(y)\,dy + x^2\int_0^1 yf(y)\,dy + \sqrt{x}$. Коэффициенты при x и x^2 — некоторые константы, так что $f(x) = ax^2 + bx + \sqrt{x}$. Имеем

$$a = \int_0^1 yf(y)\,dy = \int_0^1 y(ay^2 + by + \sqrt{y})\,dy = a/4 + b/3 + 2/5$$

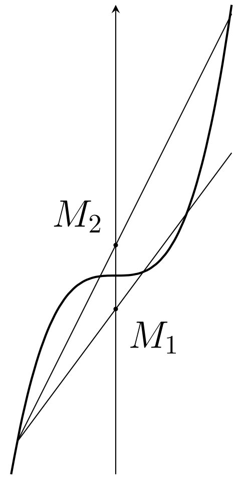
Аналогично

$$b = \int_0^1 f(y)\,dy = \int_0^1 (ay^2 + by + \sqrt{y})\,dy = a/3 + b/2 + 2/3$$

Мы получили систему линейных уравнений для параметров a и b. Решив её, найдем $a = 1.6$ и $b = 2.4$.

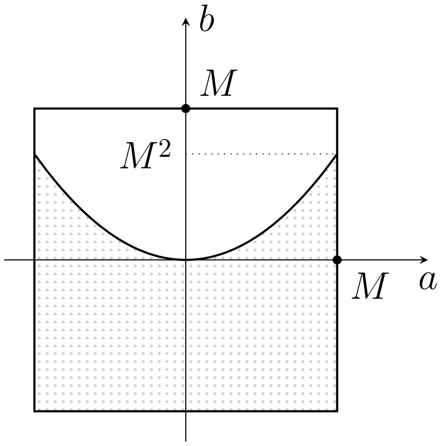
99-6. Проведем какую-нибудь прямую, пересекающую график в трёх точках A, B и C. Её уравнение имеет вид $y = kx + b$. Значит, абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению $x^3 - kx - b = 0$. По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна 0 (как и их среднее арифметическое). Но среднее арифметическое координат есть координата центра тяжести M заданных точек, так что этот последний имеет абсциссу 0, т.е. лежит на оси Oy.

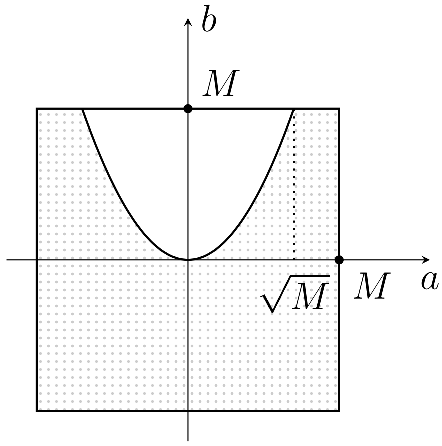
Построим точку M с помощью векторов. Она удовлетворяет уравнению $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})/3$ для любой точки O. В частности, для $O = A$ получаем $\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})/3$. Построение: отложим вдоль выбранной прямой отрезок $CD = AB$ и поделим AD на 3 части (деление отрезка на 3 равные части проводится с помощью стандартной процедуры, основанной на теореме Фалеса).



Как уже было сказано, полученная точка M будет лежать на оси Oy. Повторяя этот процесс для другой прямой, получим вторую точку, лежащую на оси ординат. Это позволяет построить всю ось. В точке пересечения её с графиком будет находиться начало координат, через которое проведем ось Ox перпендикулярно к Oy.

99-7. Каждое уравнение заданного типа можно изобразить как точку $(a; b)$ координатной плоскости. Искомую вероятность можно найти как отношение $S/(4M^2)$. В знаменателе стоит площадь, пробегаемая всеми парами a, b. Число S есть площадь множества точек, для которых соответствующее квадратное уравнение имеет решение. Эти точки определяются условием $D = 4a^2 - 4b \geqslant 0$, т.е. $b \leqslant a^2$.





Возможны два случая.

а) Парабола $b = a^2$ пересекает боковую сторону квадрата. Это выполняется при $M^2 \leqslant M$, т.е. $M \leqslant 1$. Площадь под параболой равна $S = 2M^2 + 2M^3/3$, а соответствующая вероятность $1/2 + M/6$.

б) Парабола пересекает верхнюю сторону квадрата, $M \geqslant 1$. Проще подсчитать площадь над параболой, она равна $2M\sqrt{M} - 2M\sqrt{M}/3 = 4M\sqrt{M}/3$. Искомая вероятность есть $1 - \frac{4M\sqrt{M}/3}{4M^2} = 1 - \frac{1}{3\sqrt{M}}$.

Решения, 2001 г.

01-1. $\operatorname{rang} AB \leqslant \max\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$, при этом $\operatorname{rang} A \leqslant \min\{3,2\} = 2$, $\operatorname{rang} B \leqslant \min\{2,3\} = 2$. Следовательно $\operatorname{rang} AB \leqslant 2$, то есть, матрица AB (размерности 3×3) — вырожденная.

01-2. Оценим числитель:

$$1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n \leqslant n^1 + n^2 + \ldots + n^n = \frac{n(n^n - 1)}{n-1} < \frac{n \cdot n^n}{n-1}$$

Значит, сама дробь находится между числами 1 и $\frac{n}{n-1}$ и по теореме о зажатой последовательности стремится к 1.
Типичная ошибка: вычисление предела отдельно для слагаемых $\frac{k^k}{n^n}$, число которых меняется и стремится к бесконечности.

01-3. Сдвинем начало координат так, чтобы крайний корень был равен 0. Исходный многочлен примет вид $P(x) = xQ(x)$ где $Q(x)$ — многочлен второй степени. Проведем через точку $(0,0)$ касательную к графику многочлена. Её уравнение имеет вид $y = kx$. В точке касания выполняются равенства $P(x) = kx$, $P'(x) = k$. Первое равенство можно переписать $xQ(x) = kx$, что в силу $x \neq 0$ получаем $Q(x) = k$. Второе равенство принимает вид $Q(x)+xQ'(x) = k$, что в силу предыдущего соотношения сводится к $Q'(x) = 0$. Значит, x — абсцисса вершины параболы $y = Q(x)$, которая лежит как раз посередине между корнями этого многочлена.

01-4. Обозначим сумму всех векторов через $\overrightarrow{r}$, а сумму двух векторов с номерами i и j — через $\overrightarrow{r_{ij}}$. Заметим, что упорядоченные пары (i,j) пробегают 10 значений, причём каждый из 5 векторов входит в 4 суммы вида $\overrightarrow{r_{ij}}$.
Предположим, что для любых двух векторов длина их суммы больше, чем длина суммы оставшихся трёх, т.е. $|\overrightarrow{r_{ij}}| > |\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_{ij}}|$. Возведя это равенство в квадрат, получим $\overrightarrow{r_{ij}}^2 > \overrightarrow{r}^2 - 2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_{ij}}) + \overrightarrow{r_{ij}}^2$, т.е. $\overrightarrow{r}^2 < 2(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_{ij}})$. Сложив все 10 таких равенств, получим, что $10\overrightarrow{r}^2 < 2(\overrightarrow{r}, \sum \overrightarrow{r_{ij}}) = 2(\overrightarrow{r} \cdot 4\overrightarrow{r}) = 8\overrightarrow{r}^2$, чего не может быть.

01-5. Задачу можно решить прямым вычислением. Действительно, пусть y — результат отражения точки x от центра A. Выберем произвольно начало отсчета O. Тогда $\overrightarrow{r_y} - \overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_x}$, т.е. $\overrightarrow{r_y} = 2\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_x}$.
Применяя эту формулу для симметрий относительно A_1, A_2, A_3, получаем последовательно точки $2\overrightarrow{r_{A_1}} - \overrightarrow{r_x}$; $2\overrightarrow{r_{A_2}} - (2\overrightarrow{r_{A_1}} - \overrightarrow{r_x})$; $2\overrightarrow{r_{A_3}} - (2\overrightarrow{r_{A_2}} - (2\overrightarrow{r_{A_1}} - \overrightarrow{r_x}))$. Последнее выражение приводится к виду $2(\overrightarrow{r_{A_3}} - \overrightarrow{r_{A_2}} + \overrightarrow{r_{A_1}}) - \overrightarrow{r_x}$, т.е. задаёт центральную симметрию относительно точки с радиус-вектором $\overrightarrow{r_{A_3}} - \overrightarrow{r_{A_2}} + \overrightarrow{r_{A_1}}$. Осталось заметить, что $\overrightarrow{r_{A_3}} - \overrightarrow{r_{A_2}} = \overrightarrow{A_2A_3}$, что и завершает доказательство.

01-6. Пусть $g(x) = f(x)e^{-x}$. Заметим, что $g'(x) = (f(x) - f'(x)) \cdot e^{-x}$. Для функции g выполняются все условия теоремы Ролля: она непрерывна на отрезке $[0;1]$ и дифференцируема в интервале $(0;1)$, причём $g(0) = g(1) = 0$. Значит, существует точка $c \in (0;1)$ такая, что $g'(c) = 0$. Но тогда и $f(c) - f'(c) = 0$, что и требовалось доказать.

01-7. Выберем три попарно перпендикулярные плоскости, проходящие через центр сферы. Отразим окрашенную область последовательно от всех трёх плоскостей. В результате красной окажется не более $12\% \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 96\%$ площади сферы. Выберем точку на сфере, которая осталась белой. Отражая ее так же от выбранных плоскостей, получим 8 вершин параллелепипеда, окрашенных в белый цвет.

Решения, 2002 г.

02-1. Пусть n_i — число шаров в урнах, k_i — число белых шаров, $i = 1, 2$. Имеем $\frac{k_1}{n_1} \cdot \frac{k_2}{n_2} = 0.54 = \frac{27}{50}$, значит, $k_1 \cdot k_2 = 27m$, $n_1 \cdot n_2 = 50m$ для некоторого натурального m. Но тогда одно из чисел n_i делится на 5, то же верно и для второго (так как сумма их равна 25).

а) $n_1 = 5$, $n_2 = 20$. Тогда $k_1 \cdot k_2 = 54$, причём $k_1 \leqslant 5$, $k_2 \leqslant 20$, так что $k_1 = 3$, $k_2 = 18$. Вероятность вынуть два черных шара равна $(1 - \frac{k_1}{n_1}) \cdot (1 - \frac{k_2}{n_2}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{20} = 0.04$.

б) $n_1 = 10$, $n_2 = 15$. Тогда $k_1 \cdot k_2 = 81$, причём $k_1 \leqslant 10$, $k_2 \leqslant 15$, т.е. $k_1 = 9$, $k_2 = 9$. Вероятность вынуть два черных шара также равна $\frac{1}{10} \cdot \frac{6}{15} = 0.04$.

02-2. Выберем систему координат так, что уравнения цилиндра имеют вид $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = z$, а уравнение секущей плоскости есть $z = y$.

При разворачивании бумаги расстояние, отмеряемое в горизонтальной плоскости, равно длине дуги окружности, т.е. $t = 2\varphi$. Вторая координата совпадает с $z = y = 2\sin(t/2)$, что и задает уравнение линии разреза.

02-3. Рассмотрим преобразование $f_y(x) = x\#y$. Первое соотношение показывает, что функция f_y обратна сама себе, а значит и обратима (взаимно однозначна на всем множестве A).

Это означает, что для любых x и y существует единственное решение уравнения $z\#y = x$, а именно, элемент $z = x\#y$.

Рассуждая аналогично, по второму свойству получаем, что умножение слева также обратно само себе, так что $y = z\#x$, причем это значение единственно при заданных x и z.

Пусть $x\#y = t$, тогда $y = x\#t$, откуда $x = y\#t$. Но тогда $y\#x = y\#(y\#t) = t$, что и требовалось доказать.

02-4. Многочлен совпадает со своим рядом Тейлора в любой точке, то есть

$$P(x+\Delta) = P(x) + P'(x)\cdot\Delta + \frac{P''(x)}{2}\cdot\Delta^2 + \dots$$

$$\text{при } \Delta = 1 \text{ имеем } P(x+1) = P(x) + P'(x) + \frac{P''(x)}{2} + \dots;$$

$$\text{при } \Delta = -1 \text{ имеем } P(x-1) = P(x) - P'(x) + \frac{P''(x)}{2} - \dots.$$

Складывая, получим, что исследуемый многочлен равен $\frac{1}{2}(P(x+1)+P(x-1))$, так что он сохраняет постоянный знак, как и $P(x)$.

02-5. Имеем $\triangle f(x) = f(x+\triangle x) - f(x) \leqslant f(\triangle x)$. Поделим это неравенство на $\triangle x$. Если $\triangle x > 0$, то $\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} \leqslant \frac{f(\triangle x)}{\triangle x}$. Переходя к пределу, получаем, что $f'(x+0) \leqslant f'(+0)$. Аналогично, при $\triangle x < 0$ получаем неравенство $f'(x-0) \geqslant f(-0)$. Но в силу дифференцируемости функции левые и правые производные совпадают, так что $f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(0)$. Итак, производная искомой функции постоянна, так что $f(x) = Cx + \mathrm{const}$. Проверка показывает, что условие задачи выполняется для всех функций такого вида при условии $\mathrm{const} = 0$.

02-6. Сдвинем ось Oy на середину между точками перегиба, а масштаб на осях выберем так, что точки перегиба имеют координаты 1, -1, а старший коэффициент заданного многочлена $P(x)$ равен 1. Пусть $y = ax + b$ — прямая, проходящая через точки перегиба. Площадь между графиками этих функций можно подсчитать как интеграл от многочлена $Q(x) = P(x) - (ax+b)$.
Вторая производная от Q совпадает со второй производной от P, поэтому $Q''(1) = Q''(-1) = 0$. Старший коэффициент многочлена Q'' равен 12, так что $Q''(x) = 12(x^2-1)$. Интегрируя это равенство два раза и используя то, что $Q(1) = Q(-1) = 0$ получаем, что $Q(x) = x^4 - 6x^2 + 5$. Значит, внешние граничные точки луночек есть $\pm\sqrt{5}$, а внутренние — ± 1.
В силу четности Q условие равенства площадей можно переписать в виде

$$\int_0^1 Q(x)\,dx = -\int_1^{\sqrt{5}} Q(x)\,dx,$$

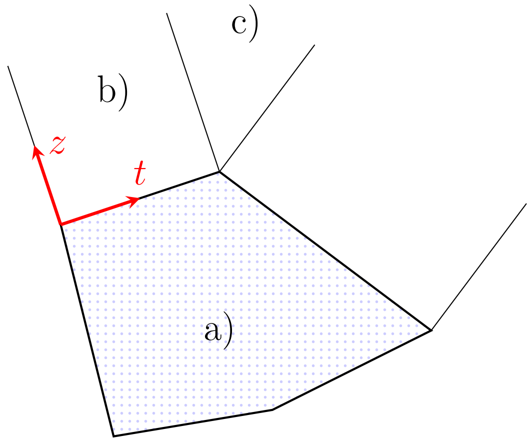
что проверяется вычислением.

02-7. Для фиксированной функции φ интеграл в правой части является константой, так что $\varphi(x) = C + \psi(x)$. Подставляя это выражение в уравнение, получим, что $C(1-b+a) = \int_a^b \psi(x)\,dx$. Из этого равенства C легко находится, если $b - a \neq 1$. В противном случае решение существует, только если $\int_a^b \psi(x)\,dx = 0$, при этом константа C произвольна.

02-8. Разобьем всю плоскость на части, для которых расстояние ρ находится легко.

a) Для точек многоугольника $\rho(x, y) = 0$, подынтегральная функция равна 1, так что интеграл по этой области равен её площади S.

b) Если (x, y) лежит в полуполосе, перпендикулярной стороне длиной a, то расстояние до многоугольника равно расстоянию до этой стороны.



Повернём систему координат так, чтобы одна её ось (Oz) была направлена перпендикулярно стороне вовне от неё, а другая (Ot) — вдоль неё. Якобиан такой замены равен 1, интеграл по этой области принимает вид $\int_0^a \int_0^{+\infty} e^{-z}\, dz dt = a$. Сумма таких интегралов по всем сторонам многоугольника равна его периметру.

c) Для оставшихся частей плоскости, имеющих вид угла, расстояние до многоугольника равно расстоянию до вершины этого угла. Сдвинув все эти части так, чтобы их вершины совпали, получим полный круг, так что интеграл по всем таким частям равен $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r}\, dx dy$. Он легко считается переходом к полярной системе координат и равен 2π.

Решения, 2003 г.

03-1. Пусть $x_1, x_2 \ldots x_n$ — корни многочлена. По теореме Виета $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1 = 0$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$. Возводя первое из этих равенств в квадрат, получаем ${x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2 + 2a_2 = 0$, откуда и следует необходимое неравенство.

03-2. *1 способ.* (для тех, кто знает свойства подобных матриц). Имеем $X = -A^{-1}XA$, но след матрицы $A^{-1}XA$, как известно, равен следу матрицы X, так что $\operatorname{tr}(X) = -\operatorname{tr}(X)$, откуда и следует, что $\operatorname{tr}(X) = 0$.

2 способ. Имеем $\operatorname{tr}(AX) = \sum_i \sum_j a_{ij}x_{ji} = \sum_i \sum_j x_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(XA)$, так что $\operatorname{tr}(AX + XA) = 2\operatorname{tr}(AX) = 0$. Итак, матрица вида AX имеет нулевой след для всякой матрицы X, удовлетворяющей исходному уравнению.

Положим $X = AC$, где $C = A^{-1}X$. Имеем $AAC + ACA = 0$. Умножая слева на A^{-1}, получаем, что $AC + CA = 0$, откуда $\operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(X) = 0$.

03-3. Пусть B — матрица, приводящая A к жордановой форме, так что матрица $B^{-1}AB$ является треугольной, и на ее диагонали стоят ее собственные значения.

При подобном преобразовании ранг матрицы не меняется, так что $\operatorname{rang}(A \pm E) = \operatorname{rang} B^{-1}(A \pm E)B = \operatorname{rang}(B^{-1}AB \pm E)$.
В силу $A^2 = E$ все собственные значения матрицы A равны 1 или -1, причем ранг матрицы $B^{-1}AB + E$ равен количеству единиц, а ранг $B^{-1}AB - E$ — количеству (-1), откуда и следует, что сумма этих рангов равна n.

03-4. Имеем

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{n} = \frac{x_{n-3} - x_{n-3}}{n(n-1)} = \ldots = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(x_1 - x_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Тогда

$$x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = x_{n-2} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \ldots = x_0 + 1 - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

Получаем, что $x = \lim x_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots$
С другой стороны, используя ряд Тейлора, получаем: $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots = 1 - x$, так что $x = 1 - 1/e$.

03-5. а) Нет. На любой прямой, не параллельной оси параболы, она высекает конечный отрезок. Выберем прямую, не параллельную оси ни одной из парабол, тогда на ней будет покрыто только конечное число отрезков конечной длины.
б) Да, так как фигура H содержит в себе прямой угол, то есть для покрытия плоскости хватит 4 таких фигур.

03-6. Легко вычислить, что все вершины сети имеют координаты $(k + \frac{m}{2}; m)$,где k и m — целые числа. Без ограничения общности можно считать, что одна из вершин треугольника находится в начале координат, тогда его стороны задаются векторами $\vec{a} = (k + \frac{m}{2}; m)$ и $\vec{b} = (p + \frac{q}{2}; q)$,а площадь — половиной длины их векторного произведения.
Имеем $\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} k + \frac{m}{2} & m \\ p + \frac{q}{2} & q \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} k & m \\ p & q \end{vmatrix}$. Последний определитель есть целое число, так что площадь принимает значения не меньше $\frac{1}{2}$. Легко привести пример того, что этот минимум достигается.

03-7. Очевидно, что не знакопостоянный, не знакопеременный ряды искомым свойством не обладают. Рассмотрим ряд

$$\sum a_n = b_1 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_1 + b_2 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_2 + \ldots + b_k - \frac{1}{2}b_k - \frac{1}{2}b_k + \ldots,$$

где $b_k = k^{-1/2003}$. Он сходится, так как его частичные суммы S_{3k} у него равны 0, а остальные отличаются от них на бесконечно малые величины.

В то же время

$$\sum a_n^{2003} = b_1^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_1^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_1^{2003} + b_2^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_2^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_2^{2003} + \ldots$$
$$+ b_k^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_k^{2003} - \frac{1}{2^{2003}} b_k^{2003} + \ldots$$

У этого ряда частичные суммы с номером $3k$ равны

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{2002}}\right),$$

т.е. стремятся к бесконечности.

03-8. а) Для обычного расстояния имеем $r(A,B)+r(B,C) \geqslant r(A,C)$. Наименьшее значение правой части не превосходит наименьшего значения левой. Но первое слагаемое не зависит от C, так что

$$\inf_{c\in C}(r(A,B) + r(B,C)) = r(A,B) + \inf_{c\in C} r(B,C) \geqslant \inf_{c\in C} r(A,C).$$

В полученном неравенстве перейдем к инфимуму по $b \in B$:

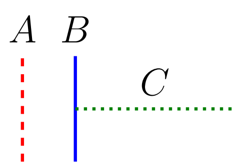
$$\inf_{b\in B} r(A,B) + \inf_{b\in B}\inf_{c\in C} r(B,C) \geqslant \inf_{c\in C} r(A,C).$$

Осталось применить супремум:

$$\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} r(A,B) + \inf_{b\in B}\inf_{c\in C} r(B,C) \geqslant \sup_{a\in A}\inf_{c\in C} r(A,C).$$

Первое слагаемое и правая часть — расстояния между соответствующими множествами. Во втором слагаемом можно заменить внешний инфимум на супремум, от этого неравенство только усилится.

б) Может. Пусть A и B — два параллельных отрезка длины 2, находящиеся друг от друга на единичном расстоянии в направлении, перпендикулярном этим отрезкам, а C — отрезок длины 3, представляющий собой часть серединного перпендикуляра к отрезку B, отложенного в направлении "от A" (см. рис.). Имеем $\rho(A,B) = \rho(B,C) = 1$, в то время как $\rho(C,A) = 4$.



Решения, 2004 г.

04-1. Из первого уравнения получаем $y^2 = \frac{2x}{1+x^2}$. Функция в правой части принимает значения от -1 до 1, так что $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Исследуем второе уравнение как квадратное относительно x. Его дискриминант равен $D = -8(1+y^3)$. Он будет неотрицательным при $y \leqslant -1$. Итак, $y = -1$, при этом $x = 1$.

04-2. Умножим первую строку на $-z$ и сложим со второй. Тогда определитель примет вид $\begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{199} & z^{200} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & z(1-z^{200}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{200} & z & \dots & z^{198} & z^{199} \end{vmatrix}$. В обоих заданиях $z^{200} = 1$, так что определитель равен 0.

04-3. Обозначим левую часть неравенства через a_n.
Способ 1. Для $n = 1$ неравенство верное. Для $n \geqslant 2$ докажем более сильное неравенство $a_n < 2.5(1 - \frac{1}{2^n})$. Доказательство проведем по индукции.
Для $n = 2$ неравенство верное. Пусть $a_k < 2.5(1 - \frac{1}{2^k})$. Тогда

$$a_{k+1} = a_k\Big(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\Big) \ < \ 2.5\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2^{k+1}}\Big) < 2.5\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big)\Big(1 + \frac{1}{2^k}\Big) =$$
$$= 2.5\Big(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\Big)$$

Таким образом, индукционный переход также доказан.
Способ 2. Имеем $\ln a_n = \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{2^2}) + \ldots + (1 + \frac{1}{2^n})$.
Воспользуемся неравенством $\ln(1 + x) \leqslant x$ для всех слагаемых, кроме первого. Получим, что $\ln a_n \leqslant \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$. Последнее выражение получается, если заменить геометрическую прогрессию рядом.
Итак, $a_n < \frac{3}{2}e^{1/2}$. Осталось проверить неравенство $\frac{3}{2}e^{1/2} < 2.5$, которое арифметическими преобразованиями сводится к виду $e < 25/9 = 2.777\ldots$ Это неравенство верное.

04-4. Произвольной точке M прямой ℓ соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\cdot\overrightarrow{a}$. При повороте плоскости меняется начальная точка $\overrightarrow{r_0}$ и направляющий вектор $\overrightarrow{a}$. Если длина вектора $\overrightarrow{a}$ сохраняется, то параметр t не меняется. Значит, точке M' соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{r'} = \overrightarrow{r_0'} + t\cdot\overrightarrow{a'}$ Середина отрезка MM' имеет радиус-вектор $\frac{1}{2}\big(\overrightarrow{r} + \overrightarrow{r'}\big) = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{r_0'}\big) + t\cdot\frac{1}{2}\big(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a'}\big)$. Это уравнение также задаёт прямую.

04-5. Переходить к пределу под знаком интеграла в данном случае нельзя, т.к. подынтегральная функция не является непрерывной в точке $(0;0)$. В силу непрерывности функция f и ее производная ограничены на $[-1;1]$. Пусть $|f(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \leqslant M_1$. Заметим, что функция $\frac{h}{h^2+x^2}$ при малых h близка к 0 во всех точках, кроме окрестности точки $x = 0$.

Разобьем интеграл на три части I_1, I_2 и I_3 по отрезкам $[-1;-t]$, $[-t,t]$ и $[t;1]$ соответственно так, чтобы два крайних интеграла были меньше наперед заданного ε. Для этого достаточно взять $t = \sqrt{Mh/\varepsilon}$. Действительно, в двух крайних отрезках $|\frac{hf(x)}{h^2+x^2}| \leqslant |\frac{hM}{h^2+Mh/\varepsilon}| < |\frac{hM}{Mh/\varepsilon}| = \varepsilon$, так что $I_1 + I_3 < \int_{-1}^{1} \varepsilon\, dx = 2\varepsilon$.
На отрезке $[-t,t]$ имеем $f(x) = f(0) + f'(c)x$, где $c = c(x)$ — некоторая точка между 0 и x. Значит,

$$I_2 = \int_{-t}^{t} \frac{hf(0)\,dx}{h^2+x^2} + \int_{-t}^{t} \frac{hf'(c)x\,dx}{h^2+x^2} = I_{21} + I_{22}.$$

Для второго интеграла выполняется оценка

$$\left|\int_{-t}^{t} \frac{hf'(c(x))x\,dx}{h^2+x^2}\right| < M_1 h \int_{-t}^{t} \frac{|x|\,dx}{h^2+x^2} = M_1 h \cdot \ln(1 + t^2/h^2).$$

С другой стороны,

$$I_{21} = \int_{-t}^{t} \frac{hf(0)dx}{h^2+x^2} = 2f(0)\operatorname{arctg}\frac{t}{h} = 2f(0)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{M}{\varepsilon h}}.$$

В частности, для $\varepsilon = \sqrt{h}$ получаем

$$\int_{-1}^{1} \frac{hf(x)dx}{h^2+x^2} = 2f(0)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{M}{h\sqrt{h}}} + \alpha, \text{ где } |\alpha| < 2\sqrt{h} + M_1 h \cdot \ln(1 + M\sqrt{h}/h^2).$$

Последнее выражение стремится к 0 при $h \to +0$. Значит, предел исходного интеграла равен $\lim_{h\to+0} 2f(0)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{M}{h\sqrt{h}}} = \pi f(0)$.

04-6. Рассмотрим интеграл от неотрицательной функции $(f(x) - f(y))^2$ по прямоугольнику $[a;b]\times[a;b]$, он также неотрицателен. Раскрывая скобки, получаем:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b (f(x)-f(y))^2\,dxdy &= \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b dy - 2\int_a^b dx \int_a^b f(x)f(y)\,dy + \\
+ \int_a^b dx \int_a^b f^2(y)\,dy &= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx - 2\Big(\int_a^b f(x)\,dx\Big)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства и следует утверждение задачи.

04-7. Вычислим вероятность P_k *не сдать* зачет, если в билете k вопросов.
1) Пусть в билете два вопроса. Студент не сдаст зачёт, только если не ответит на оба вопроса. Поэтому

$$P_2 = \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n-m-1}{n-1}.$$

2) Если в билете четыре вопроса, зачёт не будет сдан в следующих случаях: студент не ответил ни на один вопрос; студент ответил ровно на один (любой из четырёх). Значит,

$$\begin{aligned} P_4 &= P_2 \cdot \frac{n-m-2}{n-2} \cdot \frac{n-m-3}{n-3} + 4 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{n-m}{n-1} \cdot \frac{n-m-1}{n-2} \cdot \frac{n-m-2}{n-3} = \\ &= P_2 \cdot \frac{n-m-2}{n-2} \left(\frac{n-m-3}{n-3} + 4 \cdot \frac{m}{n-3} \right) = P_2 \cdot \frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)}. \end{aligned}$$

Разность двух вероятностей равна

$$P_4 - P_2 = P_2 \cdot \left(\frac{(n-m-2)(n+3m-3)}{(n-2)(n-3)} - 1 \right) = P_2 \cdot \frac{m(2n-3m+3)}{(n-2)(n-3)}.$$

Если $P_4 > P_2$, то вероятность сдать зачёт больше, когда в билете два вопроса. Так будет, если $3m < 2n - 3$. Если знак неравенства противоположный, то выгодней билет с 4 вопросами. В случае равенства $3m = 2n - 3$ оба билета одинаково выгодны.

Итак, "маленький" билет выгоден, если студент выучил менее $2/3$ вопросов. Например, при $n = 30$ и $m = 6$ вероятность сдать зачет по билету из 2 вопросов равна $1 - P_2 \approx 36,5\%$. С другой стороны, для билета из 4 вопросов эта вероятность равна $1 - P_4 \approx 16,9\%$. Изменение составляет примерно 20%. Для других m разница меньше. Для студентов, хорошо знающих предмет (более $2/3$ вопросов) выгоднее билет из 4 вопросов, но при $n = 30$ разница составляет менее 2%.

04-8. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем, что $e = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{(e)^\theta}{(n+2)!}$, где $0 < \theta < 1$.

Умножим это равенство на $n!$. Все слагаемые, кроме двух последних, превратятся в целые числа. Значит,

$$\begin{aligned} x_n = n \cdot \sin\left(2\pi k + 2\pi \tfrac{1}{n+1} + 2\pi \tfrac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right) = n \cdot \sin\left(2\pi \tfrac{1}{n+1} + 2\pi \tfrac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}\right) \sim \\ \sim n \cdot 2\pi \tfrac{1}{n+1} + n \cdot 2\pi \tfrac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Предел этой последовательности равен 2π.

04-9. Умножив справа на матрицу A^{-1} получаем, что $ABA^{-1} - B = I$, где I — единичная матрица. Другими словами, матрицы $I + B$ и B подобны (являются представлениями одного и того де оператора в разных базисах, связанных между собой преобразованием A). Известно, что у подобных матриц одинаковый след (сумма диагональных элементов). Однако, след матрицы $I + B$, очевидно, больше, чем у матрицы B, противоречие, следовательно рассматриваемое в условии задачи равенство невозможно.

Решения, 2005 г.

05-1. Как известно, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Рассмотрим самое длинное ребро тетраэдра. Прилегающие к нему углы не являются наибольшими в соответствующих треугольниках, поэтому они острые.

05-2. Пусть $C = A - B$, имеем $C^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A - B = C$. Значит, определитель $\det C$ удовлетворяет уравнению $x^3 = x$, т.е. равен 0, 1 или −1. Можно показать, что все эти значения действительно достигаются (для матриц единичной размерности достаточно рассмотреть случай $A, B \in \{0, 1\}$).

05-3. Пусть $J(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{1+t^2}\,dt$. Формально дифференцируя это равенство под знаком интеграла, получим соотношения

$$J'(a) = -\int_0^\infty \frac{te^{-at}}{1+t^2}\,dt, \qquad J''(a) = \int_0^\infty \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2}\,dt$$

Все полученные интегралы сходятся равномерно на промежутке $(\varepsilon; \infty)$. Этот факт можно доказать по признаку Вейерштрасса. Значит, дифференцирование выполнено правильно. Кроме того, это позволяет перейти к пределу при $a \to \infty$, так что $J(+\infty) = 0$.

Преобразуем выражение для второй производной от J.

$$J''(a) = \int_0^\infty \frac{t^2e^{-at}}{1+t^2}\,dt = \int_0^\infty e^{-at}\,dt - \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{a} - J(a)$$

Итак, функция J удовлетворяет уравнению $J''(a) + J(a) = 1/a$. Решим его методом вариации. Имеем $J(a) = f(a)\cos(a) + g(a)\sin(a)$, причем f и g при $a > 0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} f'(a)\cos(a) + g'(a)\sin(a) = 0 \\ -f'(a)\sin(a) + g'(a)\cos(a) = 1/a \end{cases}$$

Значит, $f'(a) = -\frac{\sin(a)}{a}$, $g'(a) = \frac{\cos(a)}{a}$. Имеем $f'(a) = -\left(\int_a^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt\right)'$, так что $f(a) = \int_a^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt + C_1$. Мы воспользовались тем, что интеграл Дирихле сходится. Аналогично получаем, что $g(a) = -\int_a^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt + C_2$. Подставив эти значения в выражение для J, получим

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_a^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt \cdot \cos(a) - \int_a^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt \cdot \sin(a) + C_1\cos(a) + C_2\sin(a) = \\ &= \int_a^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt \cdot \cos(a) - \int_a^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt \cdot \sin(a) + A\sin(a + a_0) \end{aligned}$$

Как ведет себя последняя сумма при $a \to \infty$? Заметим, что $\int_a^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt = \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \int_\varepsilon^a \frac{\cos(t)}{t}\,dt \to 0$ при $a \to \infty$ (в силу сходимости несобственного интеграла). Аналогично ведет себя и $\int_a^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. Перейдя к пределу в равенстве, получим $0 = J(+\infty) = 0 - 0 + \lim\limits_{a\to\infty} A\sin(a + a_0)$. Последний предел существует только если $A = 0$.

Итак, $J(a) = \int_a^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt \cdot \cos(a) - \int_a^\infty \frac{\cos(t)}{t}\,dt \cdot \sin(a) = \int_a^\infty \frac{\sin(t-a)}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x+a}\,dx$. Последнее выражение получено с помощью замены $t = x + a$.

Заметим, что доказательство проводилось для $a > 0$, однако равенство верно и при $a = 0$. Действительно, интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ равен $\pi/2$. Равенство же $J(0) = \pi/2$ проверяется непосредственным вычислением.

05-4. Пусть $g(x) = f(x + 1/5) - f(x)$. Требование задачи означает, что для некоторого $x \in [0; 4/5]$, $g(x) = 0$.

Имеем $g(0) + g(1/5) + g(2/5) + g(3/5) + g(4/5) = f(1) - f(0) = 0$. Если ни одно из слагаемых с этой сумме не равно 0, то существует пара соседних слагаемых разного знака. В силу того, что g — непрерывна, в некоторой промежуточной точке она обращается в 0.

05-5. Функция $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ является решением уравнения $\sin(F) = \frac{x}{x+1}$. Правая часть попадает в промежуток $[-1; 1]$ при $x \geqslant -0.5 > -1$. При этом условии $F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2\pi k$ или $F(x) = \pi - \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2\pi k$. В силу условия $F(0) = 0$ и непрерывности функции F подходит только решение $F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Тогда $f(x) = F'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$. Здесь при извлечении корня мы учли, что $x + 1 > 0$.

05-6. Объём n-мерного шара $V_n(r) = a_n \cdot r^n$. Можно считать, что n-мерный шар состоит из слоев, являющихся $(n-1)$-мерными шарами. Если слой отстоит от центра на расстояние x, его радиус равен $\sqrt{r^2 - x^2}$. Значит,

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})\,dx.$$

Сделаем замену $x = r \cdot \sin t$, получим, что

$$a_n \cdot r^n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{n-1}(r\cos t)^{n-1} r\cos t\,dt = 2a_{n-1}r^n \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t\,dt$$

Имеем $V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, т.е $a_3 = 4\pi/3$, тогда $a_4 = 2a^3 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,dt = \pi^2/2$. Итак, трёхмерный шар занимает долю $4\pi r^3/3 : 8r^3 = \pi/6$ от трёхмерного куба, а четырёхмерный — долю $\pi^2 r^4/2 : 16r^4 = \pi^2/32$.

В общем виде интеграл можно вычислить, например, через Г-функцию. Имеем $\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)/2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$. Значит,

$$a_n = 2a_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = a_{n-2} \cdot \pi \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = a_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Имеем $a_0 = 1$, поэтому если $n = 2k$ то $a_n = \frac{\pi^k 2^{k-1}}{n!!}$. Аналогично в силу $a_1 = 2$ при $n = 2k+1$, $a_n = \frac{\pi^k 2^k}{n!!}$. В обоих случаях шар занимает долю $\frac{\pi^k}{n!! \cdot 2^k}$ от объёма описанного вокруг него куба.

05-7. а) Пусть $P(x) > 0$. При $x \to \pm\infty$ многочлен $P(x)$ стремится к $+\infty$, поэтому вне некоторого отрезка $[a,b]$ значения $P(x)$ будут больше 1. На отрезке же $[a,b]$ значения непрерывной положительной функции отделены от нуля, так что $P(x) \geqslant \alpha > 0$, т.е. значения этого многочлена не могут приблизиться к нулю сколь угодно близко.
б) Рассмотрим многочлен $P(x,y) = x^2 + (xy+1)^2$. Его значения неотрицательны и не обращаются в 0. Но их можно сделать сколь угодно малыми. Действительно, $P(\sqrt{\alpha}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}) = \alpha$ для всех $\alpha > 0$.

Решения, 2006 г.

06-1. Имеем $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{31}$. Перемножим все слагаемые, получим величину $-(\prod a_{ij})^2 \leqslant 0$ (в скобках стоит произведение всех элементов матрицы). Значит, все слагаемые не могут быть положительны.

06-2. Разложим вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. Коэффициенты этого разложения больше 0, так что точка C лежит внутри угла BAD. Сумма коэффициентов больше 1, так что C находится вне треугольника ABD, что и требовалось доказать.

06-3. Пусть в вершинах пирамиды стоят числа a, b, c, d. Обозначим $a+b+c+d = m$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = n$, $ab+ac+\ldots+cd = k$.
Пусть S_i - сумма i-х степеней чисел на ребрах. Тогда $S_1 = 3m$, $S_2 = 3n+2k$. По условию $3m = 3$, $3n+2k = 3$. Кроме того, $m^2 = n+2k$, откуда $m = n = 1$. Имеем

$$\begin{aligned}(a+b)^3 + (c+d)^3 &= (a+b+c+d)\big((a+b)^2 - (a+b)(c+d) + (c+d)^2\big) = \\ &= m(n + 2ab + 2cd - ac - bc - ad - cd) = m(n + 3ab + 3cd - k).\end{aligned}$$

Складывая три таких равенства, получаем, что $S_3 = 3mn = 3$.

06-4. Заданное в задаче произведение называется булевым.

а) Вычислением получаем, что $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; A^n при $n \geqslant 3$ совпадает с последней матрицей.

б) *1 способ.* Пусть (β_{ij}) — матрица с неотрицательными членами. Присоединенной назовем матрицу $B = (b_{ij})$ из $\mathcal{M}$, такую, что $b_{ij} = \operatorname{sign}(\beta_{ij})$. Элемент с индексами i, j обычного произведения матриц β и γ имеет вид $\sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj}$. В силу неотрицательности он равен 0, только если каждое слагаемое равно 0. Это значит, что в каждом произведении хотя бы один сомножитель равен 0. Итак, при обычном умножении неотрицательных матриц их присоединенные матрицы перемножаются булевым способом. Значит, ассоциативность булева умножения матриц сводится к ассоциативности обычного.

2 способ. Каждой булевой матрице B, размера $n \times n$ можно сопоставить ориентированный граф G_B с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$, у которого ребро (i, j) существует тогда и только тогда, когда $b_{ij} = 1$. Произведение матриц $B_1 B_2, B_3$ есть матрица, у которой i, j-й элемент равен единице, если между вершинами i, j существует путь длины 3, первое ребро которого принадлежит графу G_{B_1}, второе — G_{B_2}, последнее ребро — графу G_{B_3}. Когда мы рассматриваем произведение $(B_1 B_2) B_3$ мы отсчитываем ребра с начала пути, при рассмотрении $B_1(B_2 B_3)$ мы отсчитываем ребра с конца. Очевидно, мы получим те же самые пути, произведение ассоциативно.

06-5. Обозначим искомый интеграл через I. Сделаем в нем замену $y = -x$. Получим, что $I = -\int_1^{-1} \frac{dy}{(e^{-y}+1)(y^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{e^y dy}{(1+e^y)(y^2+1)}$. Переобозначая переменную интегрирования снова через x и складывая два выражения для I, получаем, что $2I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$. Значит, $I = \pi/4$.

06-6. *1 способ.* Пусть $x \cdot 100\%$ людей имеют ровно один экземпляр гена данного признака, а $15\% = y \cdot 100\%$ — два. Тогда, по формуле полной вероятности, вероятность того, что ребенок получит этот ген от одного из родителей, равна $x \cdot 0.5 + y \cdot 1$. Соответственно, вероятность получить два таких гена будет равна $(0.5x + y)^2$, что должно совпадать с y. Итак, $x = 2(\sqrt{y} - y) \approx 47.5\%$.

Если у матери ген проявился, значит, он у нее представлен в обеих хромосомах, т.е. она передаст его ребенку в 100% случаев. Значит, у ребенка он проявится, если он получит этот ген от отца, вероятность чего равна $0.5x + y = \sqrt{y} \approx 0.387$.

2 способ. Пусть p — вероятность того, что в популяции один из родителей *передаст* ребенку ген данного признака. Тогда вероятность его *проявления* равна $p \cdot p = 0.15$. Значит, $p = \sqrt{0.15} \approx 0.387$. В силу того, что мать в данном случае передает признак с вероятностью 1, искомая вероятность равна $1 \cdot p \approx 38.7\%$.

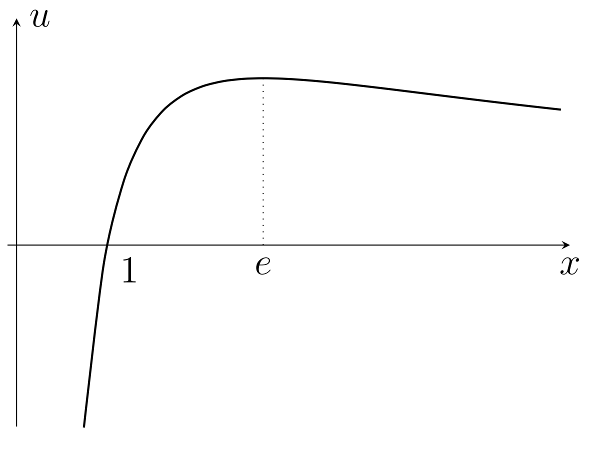
06-7. Введем для K характеристическую функцию $\chi(x, y)$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, равную 1 в каждой точке K и 0 во всех остальных точках плоскости. Тогда $S(K) = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi(x, y)\, dxdy$. Пусть χ_i, $i = 1, \ldots, n$ — характеристическая функция i-го круга. Имеем $a_{ij} = \iint_{R^2} \chi_i(x, y)\chi_j(x, y)\, dxdy$, что можно рассматривать как скалярное произведение функций χ_i и χ_j. Тогда $\det A$ есть определитель Грама системы функций $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$, который всегда неотрицателен.

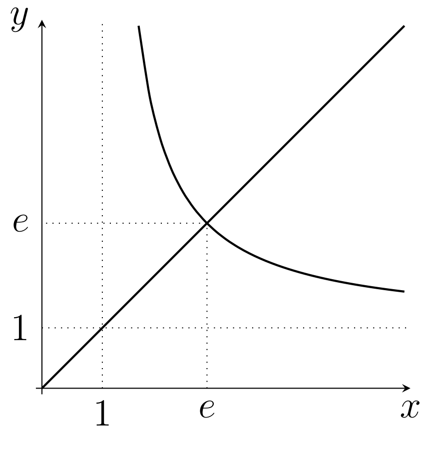
Решения, 2007 г.

07-1. Расположим параболу так, что ее ось совпадает с осью Oy. Тогда её уравнение имеет вид $y = ax^2$. Касательная в точке x имеет угловой коэффициент $k = y' = 2ax$. Если касательные в точках x_1 и x_2 перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$, откуда $4a^2 x_1 x_2 = -1$. Значит, произведение расстояний от A и B до оси равно $|x_1 \cdot x_2| = \frac{1}{4a^2}$, т.е. постоянно.

07-2. Мы можем считать, что все коэффициенты a_i не равны 0, так как это только усилит наше утверждение.
Проведем доказательство по индукции. Для $k = 0$ уравнение приобретает вид $a_0 = 0$, где $a_0 \neq 0$, поэтому у него нет корней. Предположим, что утверждение доказано для всех $k \leqslant m - 1$.
Рассмотрим уравнение $P(x) = a_0 + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_m x^{n_m} = 0$. Предположим, что у него не менее $m + 1$ положительных корней. Между двумя соседними корнями многочлена обязательно есть корень производной, так что она должна иметь не менее m положительных корней. Имеем $P'(x) = x^{n_1 - 1} Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен такого же типа, что и $P(x)$, у которого $k = m - 1$. По предположению индукции он (а, следовательно, и $P'(x)$) имеет $m - 1$ положительных корней.
Пришли к противоречию, что и завершает доказательство.

07-3. Ясно, что $x > 0$ и $y > 0$. Прологарифмировав уравнение, получим $\ln(x)/x = \ln(y)/y$. График функции $u = \ln(x)/x$ (см. правый рис.) строится обычным способом. Он имеет максимум в точке e.





Надо для каждого x найти y с тем же значением u. Одно из решений — $y = x$. Кроме того, если $u > 0$ ($x > 1$), то для каждого x есть ещё одно решение. Причем,

когда $x \to 1+0$, то $y \to \infty$. Полученный таким образом график соотношения $x^y = y^x$ изображен на левом рис.
Ясно, что график соотношения будет симметричным относительно прямой $y = x$.

07-4. Пусть A_i — событие, состоящие в том, что приз не попал в i-й ящик, $i = 1,2,3$. Имеем $\mathbb{P}(A_i) = (2/3)^5$; $\mathbb{P}(A_iA_j) = (1/3)^5$ $(i \neq j)$, $\mathbb{P}(A_1A_2A_3) = 0$. По формуле включения-исключения

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i,j:i<j} \mathbb{P}(A_iA_j) + P(A_1A_2A_3) = \\ &= 3 \cdot (2/3)^5 - 3 \cdot (1/3)^5 = 31/81\end{aligned}$$

07-5. Полученный в игре определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & 2 & c_1 \\ b_2 & c_2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_2 - c_1c_2 - 2b_1b_2 - 4a_1a_2.$$

Произведение второго и третьего слагаемых равно $p = 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, так что по свойству средних $a_1b_2c_1 + a_2b_1c_2 \geqslant 2\sqrt{p} > 2 \cdot 212 = 424$. С другой стороны, сумма $c_1c_2 + 2b_1b_2 + 4a_1a_2$ принимает наибольшее значение, если на большие коэффициенты умножаются большие числа. Поэтому эта сумма не превосходит $3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 9 = 387$. Значит, определитель больше 0, выигрывает первый.

07-6. Пусть $C = AB$ и c_{ij} — соответствующий элемент матрицы C. Имеем $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$, так что $\sum_{i,j}|c_{ij}| \leqslant \sum_{i,j}\sum_k |a_{ik}b_{kj}| = \sum_{i,j,k}|a_{ik}| \cdot |b_{kj}|$. С другой стороны,

$$|A| \cdot |B| = \sum_{i,j}|a_{ij}| \sum_{k,m}|b_{km}| = \sum_{i,j,k,m}|a_{ij}| \cdot |b_{km}|$$

В последней сумме есть все слагаемые из $|A \cdot B|$, но также и некоторые другие неотрицательные слагаемые.

07-7. Обозначим $x_0 = x$, $\underbrace{\cos\cos\ldots\cos}_{n} x = x_n$, тогда $x_n = \cos x_{n-1}$. Ясно, что, начиная с $n = 2$, все x_n лежат в промежутке $[0;1]$, в котором косинус убывает. Значит, при $x_n \geqslant x_{n-1}$ имеем $x_{n+1} = \cos x_n \leqslant \cos x_{n-1} = x_n$ и наоборот, т.е. значения последовательности колеблются. При этом $|x_{n+1} - x_n| = |\cos x_n - \cos x_{n-1}| = |\sin(c)| \cdot |x_n - x_{n+1}|$ (по формуле Лагранжа).
Заметим, что точка c лежит между x_{n-1} и x_n, так что $|\sin(c)| \leqslant \sin(1) < 1$ для $n \geqslant 1$. Значит,$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \alpha|x_n - x_{n-1}|$, где $\alpha = \sin(1) < 1$. Но тогда $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \alpha^n|x_1 - x_0|$, т.е. расстояние между соседними точками стремится к 0. При этом

отрезки $[x_n, x_{n+1}]$ стягиваются в некоторую точку x_0 (принцип вложенных отрезков). Переходя к пределу в равенстве $x_n = \cos x_{n-1}$, получаем, что эта точка является корнем уравнения $x = \cos x$, которое можно решить графически.

07-8. Пусть эллипс задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Через искомую точку (x, y) проведем прямую $(x + \lambda t; y + \mu t)$. Найдем точки пересечения этой прямой с эллипсом. Соответствующее значение параметра t является решением уравнения $\frac{(x+\lambda t)^2}{a^2} + \frac{(y+\mu t)^2}{b^2} = 1$. Упрощая, получаем, уравнение

$$(b^2\lambda^2 + a^2\mu^2)t^2 + 2(b^2\lambda x + a^2\mu y)t + b^2x^2 + a^2y^2 - 1 = 0$$

Прямая будет касательной к эллипсу, если пересекает его ровно в одной точке. Это значит, что дискриминант выписанного квадратного уравнения равен 0. После упрощений условие приобретает вид $(b^2 - y^2)\lambda^2 + (a^2 - x^2)\mu^2 + 2\lambda\mu xy = 0$.
Проведем через ту же точку прямую, перпендикулярную первой, ее направляющий вектор имеет вид $(-\mu, \lambda)$. Она будет касательной к эллипсу при условии, что $(b^2 - y^2)\mu^2 + (a^2 - x^2)\lambda^2 - 2\mu\lambda xy = 0$. Складывая эти два уравнения, получаем, что $(\lambda^2 + \mu^2)(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) = 0$.
Первый сомножитель в 0 не обращается, поэтому $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Можно проверить, что для каждой точки этой окружности существует решение (λ, μ).

Решения, 2008 г.

08-1. Ясно, что число $5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1$ принадлежит A. Легко найти несколько следующих элементов A: это $13 = 1 + 12$, $17 = 5 + 12, \ldots$. Докажем по индукции, что все числа вида $12k + 1$ и $12k + 5$ принадлежат A.
Ясно, что при $k = 0$ утверждение выполняется. Пусть уже доказано, что числа $1, 5, 13, 17, \ldots, 12k+1, 12k+5$ принадлежат A. Надо доказать, что в это множество входят и числа $12k + 13$, $12k + 17$.
Имеем $12k + 13 = 2(6k + 5) + 3 \cdot 1 = 2(6k - 1) + 3 \cdot 5$. Хотя бы в одном из этих двух представлений число в скобках принадлежит A. Действительно, оба числа $6k + 5$ и $6k - 1$ не превосходят $12k + 5$. Если k чётно, то $6k + 5 = 12\ell + 5$. Если же оно нечетно, $k = 2\ell + 1$, то $6k - 1 = 12\ell + 5$.
Аналогично $12k+17 = 2(6k+7)+3\cdot 1 = 2(6k+1)+3\cdot 5$, причём для чётных k имеем $6k + 1 = 12\ell + 1$, а если $k = 2\ell + 1$, то $6k + 7 = 12\ell + 13 = 12(\ell + 1) + 1$, т.е. хотя бы одно из чисел $6k + 1$, $6k + 7$ принадлежит A.

08-2. Сделаем в интеграле слева замену $x = \pi - t$. Получим, что

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi x f(\sin(x))\,dx &= -\int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t))\,dt = \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin(t))\,dt = \pi \int_0^\pi f(\sin(t))\,dt - I \end{aligned}$$

Из этого равенства находим значение I, которое совпадает с правой частью доказываемого равенства.

08-3. *1-й способ.* Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$ Покажем, что $a + d = \operatorname{tr} A = 0$. Действительно. В противном случае $b = c = 0$, так что "диагональные" равенства принимают вид $a^2 = d^2 = 0$. Но тогда и $a + d = 0$ — противоречие.

Итак, $a + d = 0$, при этом "диагональные" равенства принимают одинаковый вид $a^2 + bc = 0$.

Заметим, что последнее равенство в данном случае равносильно тому, что $\det A = ad - bc = 0$. Впрочем, это ясно и из равенства $\det(A^2) = (\det A)^2 = 0$.

2-й способ. Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа некоторой комплексной матрицы A, соответствующие собственным векторам $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, тогда, легко проверить, что λ_1^2, λ_2^2 — собственные числа матрицы A^2, соответствующие тем же собственным векторам. Поэтому в нашем случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то матрица A отображает любую линейную комбинацию $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ (то есть любой вектор) в $\overrightarrow{0}$. Значит $A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то есть условие $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ является не только необходимым, но и достаточным. Оно эквивалентно тому, что

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A \equiv \lambda^2,$$

то есть $\operatorname{tr} A = \det A = 0$.

08-4. Чтобы последовательность была ограниченной, будем искать её в виде $a_n = \sin(b_n)$. Если b_n имеет конечный предел, то же верно и для последовательности a_n, что противоречит ее нефундаментальности. Поэтому рассмотрим в качестве b_n неограниченную возрастающую последовательность. В силу непрерывности функции $\sin(\cdot)$, если $b_{n+1} - b_n \to 0$, то и $a_{n+1} - a_n = \sin(b_{n+1}) - \sin(b_n) \to 0$. Поэтому в качестве b_n рассмотрим частичные суммы любого расходящегося ряда с положительными, стремящимися к нулю, членами.

Докажем, что для любого такого выбора b_n последовательность a_n нефундаментальна. Выберем любое достаточно большое N, для которого $b_{n+1} - b_n < \pi/3$ при

всех $n > N$. Выберем k, такое, что $N < 2\pi k$. В силу неограниченности b_n, можно найти наименьшее n_1 такое, что $b_{n_1} > 2\pi k + \pi/2$. При этом, по условию $n_1 > N$, следовательно $b_{n_1} = 2\pi k + \pi/2 + \varepsilon_1$, где $0 < \varepsilon_1 < \pi/3$. Из последнего равенства следует $a_{n_1} = \sin(b_{n_1}) > 1/2$. Аналогично находится $n_2 > N$ такое, что $a_{n_2} < -1/2$. Но тогда $a_{n_1} - a_{n_2} > 1$, что противоречит фундаментальности a_n.
В качестве конкретных примеров нужных нам последовательностей можно рассмотреть $a_n = \sin(H_n)$, где $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$; или $a_n = \sin(\ln(n))$ (очевидно, что $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \to 0$); или же $a_n = \sin(\sqrt{n})$ (имеем $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = $ $= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$).

08-5. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что на i-м ребре состоится встреча муравьёв, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Нужно найти вероятность суммы этих событий. Одновременно может произойти не более двух из них. Поэтому

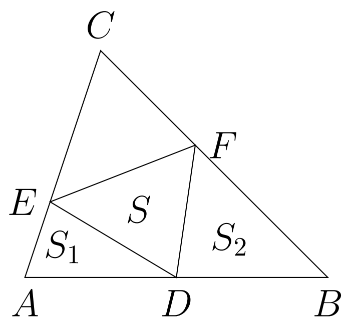
$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_6) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i A_j).$$

Очевидно, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ для любого ребра i. Если события A_i и A_j совместны (а таких пар ровно три, они соответствуют ребрам $i.j$ тетраэдра, не имеющим общих вершин), то $\mathbb{P}(A_i A_j) = 1/81$. Стало быть, $\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_6) = 6/9 - 3/81 = 17/27$.

08-6. См. задачу $04-8$.

08-7. Поменяем местами первые два столбца матрицы. Тогда ее определитель поменяет знак, хотя матрица станет другой (повторяющихся элементов в матрице нет). Получается, что каждой матрице с положительным определителем соответствует матрица с отрицательным и наоборот. Значит, их поровну.

08-8. Обозначим $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Тогда $\overrightarrow{DB} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{a} + x(\vec{c} - \vec{a})$,$\overrightarrow{DF} = -\vec{a} + y(\vec{c} - \vec{a})$. Здесь x, y — некоторые числа из промежутка $[0; 1]$. Надо доказать неравенство $S \leqslant S_1 + S_2$ (обозначения см. на чертеже). Площадь треугольника можно выразить через модуль векторного произведения.



Имеем $2S_1 = |[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}]| = x|[\vec{a}, \vec{c}]|$, $2S_2 = |[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DF}]| = y|[\vec{a}, \vec{c}]|$ и $2S = |[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}]| = ((1-x)y + (1-y)x)|[\vec{a}, \vec{c}]|$. Числовые коэффициенты вынесены без знака модуля, т.к. они неотрицательны.
Доказываемое неравенство приводится к виду $(1-x)y + (1-y)x = x + y - 2xy \geqslant x + y$, что, конечно, верно (с учётом значений, пробегаемых x и y).

08-9. Пусть математики не виделись n лет (оба они знают это число). Возрасты k, ℓ, m детей являются решением уравнения $n = k\cdot\ell\cdot m$. Из разговора мы узнаем, что эти числа удовлетворяют некоторым соотношениям. Назовем тройку (k, ℓ, m) М-решением, если $k \geqslant \ell > m$ (среди детей есть младший) и СМ-решением, если $k > \ell > m$ (среди детей есть и младший и старший).
По условию, уравнение $n = k \cdot \ell \cdot m$ имеет более одного М-решения и ровно одно СМ-решение.
Предположим, что существует СМ-решение с $m \neq 1$. Тогда, кроме (k, ℓ, m) решением является и тройка $(km, \ell, 1)$, также удовлетворяющая соотношению $km > \ell > 1$. Значит, дополнительная информация в этом случае не позволит второму математику найти решение. Итак, для СМ-решения $m = 1$. Пусть $n = k\ell$, $k > \ell > 1$. Предположим, что число ℓ не простое, $\ell = pq$, $p \geqslant q > 1$. Но тогда $n = k(pq) = (kp)q$ имеет не менее двух подходящих разложений.
Итак, $\ell = p$ — простое число, являющееся делителем n. В силу единственности СМ-решения такой делитель также один. Действительно, если n делится еще и на простое число $q \neq p$, то тройка $(n/q, q, 1)$ не совпадает с $(n/p, p, 1)$ и не должно быть СМ-решением (в силу его единственности). Значит, $n/q = q$, $n = q^2$, что не делится на p. Противоречие.
Мы получили, что $n = p^r$. Оно имеет М-разложения $(p^{r-1}, p, 1)$ и $(p^{r-2}, p^2, 1)$. СМ-решением среди них будет первое, а второе может быть только М-решением. Итак, $r - 2 = 2$ и $r = 4$.
Окончательно получаем, что $n = p^4$ для некоторого простого p, а возрасты детей составляют p^3, p и 1 год.
Вообще, числу p мы можем придать значения $3, 5, \ldots$ Однако уже при $p = 3$ оказывается, что математики не виделись 81 год, что довольно много по меркам человеческой жизни. Так что, скорее всего, $p = 2$ и математики не виделись 16 лет.

Решения, 2009 г.

09-1. Подставим в данное равенство вместо x значения $-x$, $1/x$, $-1/x$. Получим 4 уравнения
$$\begin{cases} 3f(-x) + f(1/x) + f(x) = x \\ 3f(x) + f(-1/x) + f(-x) = -x \\ 3f(-1/x) + f(x) + f(1/x) = 1/x \\ 3f(1/x) + f(-x) + f(-1/x) = -1/x \end{cases}$$

Они образуют линейную систему относительно неизвестных $f(x)$, $f(-x)$, $f(1/x)$, $f(-1/x)$. Решим ее по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 45, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 1 \\ 1/x & 0 & 1 & 3 \\ -1/x & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -30x - 15/x$$

Получаем, что $f(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{2x}{3} - \frac{1}{3x}$.

09-2. Пусть $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{k}$ — орты прямоугольной системы координат с началом в точке O. Плоскость α определяется своей нормалью в этой системе координат: $\mathbf{n} = (x, y, z)$. Можно считать, что эта нормаль единичная.
Расстояние от вектора $\mathbf{i}$ до плоскости α равно проекции этого вектора на нормаль. В силу того, что вектор n единичный, эта проекция равна скалярному произведению $(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = x$. Аналогично, два остальных расстояния равны y и z. Сумма их квадратов $x^2 + y^2 + z^2$ равна квадрату длины вектора $\mathbf{n}$, т.е. 1.

09-3. Аналогичные интегралы исследованы в задаче 08–2. В нашем случае $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$ — непрерывна на $[0, \pi]$. Имеем $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx$. Последний интеграл можно подсчитать, например, с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$, он равен 2. Значит, исходный интеграл равен π .

09-4. Будем считать, что змея лежит на комплексной плоскости. Тогда первый отрезок ее тела равен 1, второй расположен в направлении i и равен $\pi i, \ldots$. Продолжая этот процесс, получим что положение кончика хвоста определяется суммой ряда $1 + \pi i - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{3!}i + \ldots$. Легко заметить, что это ряд Тейлора для функции e^x в точке πi. Его сумма равна $e^{i\pi} = -1$.

09-5. Заметим, что подынтегральная функция ограничена на $(0, 1]^3$. Значит, она интегрируема.
Сделаем циклическую перестановку переменных. В силу симметрии функции и области интегрирования получаем, что

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{x+y}{x+y+z}\,dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{y+z}{x+y+z}\,dxdydz = \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{z+x}{x+y+z}\,dxdydz \end{aligned}$$

Сложив три значения, получим $3I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2\,dxdydz = 2$. Значит, $I = 2/3$.

09-6. Заметим, что компоненты вектора $\mathbf{e}$ получаются при вычитании из матрицы A транспонированной к ней матрицы A^T. Имеем

$$S = A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение $S\mathbf{e} = 0$. Но $SA = (A - A^T)A = A^2 - A^T \cdot A = A^2 - A \cdot A^T = AS$. Значит, $SA\mathbf{e} = AS\mathbf{e} = 0$, т.е. $A\mathbf{e}$ также является решением уравнения $Sx = 0$. Легко показать, что любое решение этого уравнения пропорционально $\mathbf{e}$. Итак, $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$, что и требовалось доказать.

09-7. Найдем среднее число взятых подарков. Рассмотрим сначала противоположное событие, что конкретный подарок не будет взят. Это произойдет только в том случае, если никто из детей не откроет этот ящик. Вероятность этого равна $(1 - 1/n)^m$.

Вероятность быть взятым для отдельного подарка равна $1-(1-1/n)^m$, а среднее число взятых подарков — $n(1-(1-1/n)^m)$. Столько же детей в среднем получат подарки. Тогда среднее число "неполучивших" равно $m - n(1 - (1 - 1/n)^m)$.

09-8. Заметим, что в числителе правой дроби стоит частичная сумма S_k ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. Ее знаменатель можно выразить в виде $S_{2k} - S_k$. Условие задачи можно переписать в виде $\frac{S_k}{S_{2k}-S_k} = \frac{a_1}{a_2}$.

Если $a_1 = 0$, то и все частичные суммы равны нулю, как и все a_k. В противном случае $S_{2k} = qS_k$, где $q = \frac{a_2+a_1}{a_1} = const$. Будем искать a_k в виде многочлена степени m, зависящим от k. Как известно, сумма одинаковых степеней $1^m + 2^m + \ldots + k^m$ есть некоторый многочлен степени $m+1$. Соответственно и S_k будет многочленом степени $m+1$: $S_k = b_1 k^{m+1} + b_2 k^m + \ldots + b_{m+2}$. Как мы показали, отношение $\frac{S_{2k}}{S_k}$ для искомого многочлена должно быть константой. Устремив $k \to \infty$ получим

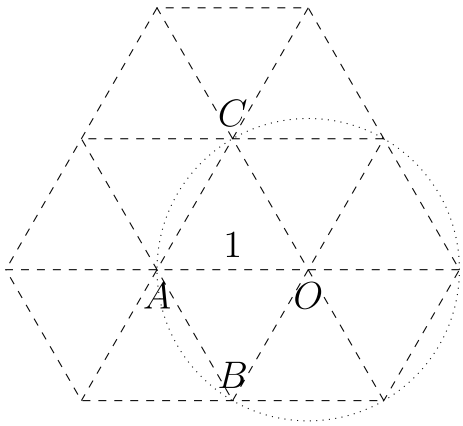
$$q = \frac{S_{2k}}{S_k} = \frac{b_1(2k)^{m+1} + b_2(2k)^m + \ldots + b_{m+2}}{b_1 k^{m+1} + b_2 k^m + \ldots + b_{m+2}} \to 2^{m+1}.$$

Многочлен $S_{2k} - qS_k = S_{2k} - 2^{m+1}S_k$ должен быть тождественно равен 0. Он имеет вид $-b_2(2k)^m - 3b_3(2k)^{m-1} - \ldots - (2^{m+1} - 1)b_{m+2}$. В силу произвольности k все коэффициенты, начиная с b_2, должны быть равны 0. Итак, $S_k = b_1 k^{m+1}$. Но тогда $a_k = S_k - S_{k-1} = b_1(k^{m+1} - (k-1)^{m+1})$. Коэффициенты этого многочлена будут целочисленными при целом b_1. Все такие многочлены отличаются только мультипликативным множителем.

09-9. Пусть точка O отображается в точку $f(O)$, тогда единичная окружность ω^O с центром в O переходит взаимно однозначно в единичную же окружность

$\omega^{f(O)}$ с центром $f(O)$. Пусть $A \in \omega^O$. Окружности ω^A и ω^O пересекаются в точках B и C, их образами являются точки пересечения окружностей $\omega^{f(A)}$ и $\omega^{f(O)}$. Рассмотрев окружности с центрами в точках B и C и т.д. мы последовательно построим правильную треугольную сеть как в исходной плоскости, так и в плоскости значений отображения. На такой сети точек отображение f является изометрией (движением).

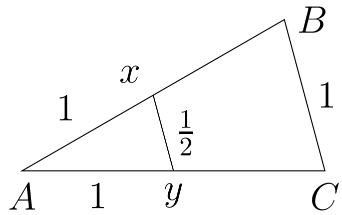
Заметим, что такую сеть можно построить, начиная с любых двух точек O, A.



а) Пусть точки x, y находятся на расстоянии 2, тогда они принадлежат сети, построенной на точках $O = (x+y)/2$ и $A = x$. Соответственно, точки $f(x)$ и $f(y)$ лежат на аналогичной сети, построенной на точках $f(O)$ и $f(A)$, так что расстояние между ними также равно 2.

б) Пусть расстояние между точками x и y равно 1/2. Построим равнобедренный треугольник с вершиной A и основанием $[x;y]$ так, что $|A-x| = |A-y| = 1$. Продолжим его стороны до точек B и C так, что расстояния AB и AC равны 2. Тогда отрезок $[x;y]$ будет средней линией треугольника BAC, так что длина BC равна 1.

По доказанному ранее треугольник с вершинами $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ будет равен по размерам исходному, а точки $f(x)$ и $f(y)$ будут серединами соответствующих сторон. Значит, расстояние между ними равно 1/2.



в) Пусть расстояние между точками x и y меньше 1. Тогда можно построить точку A, находящуюся на расстоянии 1/2 от каждой из них. По доказанному в пункте б) имеем $|f(A)-f(x)| = |f(A)-f(y)| = 1/2$. Но тогда по неравенству треугольника $|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(A)| + |f(A)-f(y)| = 1/2 + 1/2 = 1$.

Решения, 2010 г.

10-1. Пусть $a = re^{i\alpha}$, $b = re^{i\beta}$, $c = re^{i\gamma}$. Имеем

$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} = abc\,\frac{1/a+1/b+1/c}{a+b+c} = r^3 e^{i\alpha+i\beta+i\gamma}\cdot\frac{1/r}{r}\cdot\frac{e^{-i\alpha}+e^{-i\beta}+e^{-i\gamma}}{e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{i\gamma}}.$$

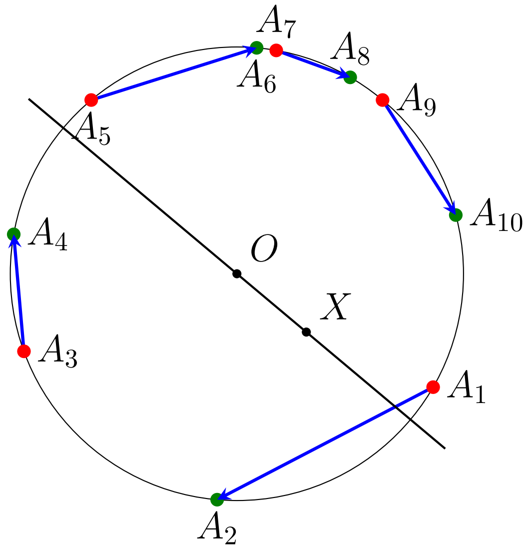
Величины в числителе и знаменателе последней дроби взаимно сопряжённые. Поэтому их модули совпадают. Итак, модуль всего выражения равен r.

10-2. Центр тяжести треугольника — точка пересечения его медиан. В частности, медиана, проведённая из точки C, проходит через середину отрезка AB, т.е. через точку $O(0;0)$. Искомая точка $M(t,z)$ делит отрезок OC в отношении $2:1$, считая от точки C. Это значит, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. Поэтому координаты t, z можно найти как $t = x/3$, $z = y/3$. Из этих соотношений следует, что $z = y(x)/3 = y(3t)/3 = 3t^2 - 6t + 5$.

10-3. Концы A_i данных векторов лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке O (нумерация идет по часовой стрелке). Нечётный номер соответствует красному цвету, а чётный — зелёному. Введём вектор $\overrightarrow{OX}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n}}\right) - \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n-1}}\right) = \\ &= \left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_3}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{OA_{2n}} - \overrightarrow{OA_{2n-1}}\right) = \\ &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}\end{aligned}$$

Проведем прямую вдоль $\overrightarrow{OX}$ и спроецируем на нее все слагаемые последней суммы. Все векторы $\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}$ разобьются на две группы: те, проекции которых сонаправлены $\overrightarrow{OX}$, и те, проекции которых противонаправлены. Заметим, что в каждой группе проекции точек A_i расположены на прямой в том же порядке, как и сами точки A_i на окружности. Это значит, что сумма проекций равна проекции суммы.



В каждой группе эта сумма не больше диаметра окружности, т.е. лежит в пределах от 0 до 2. Это значит, что разность двух сумм не больше $2 - 0 = 2$ и не меньше $0 - 2 = -2$.

10-4. Сопоставим каждому из k искомых подмножеств вершину графа. Соединим все вершины ребрами (напомним, что такой граф называется полным), пометим их общими элементами соответствующих множеств. Все пометки будут разными, поскольку повторяюшаяся пометка представляла бы собой элемент, принадлежащий двум парам множеств, т.е. не менее, чем трем множествам. Значит общее число ребер такого графа не меньше 2010. Поскольку число ребер полного графа равно $(k-1)k/2$, то $k \geqslant 63$.

Очевидно, что мы можем построить полный граф с 63 вершинами, пометки всех ребер которого различны и взяты из множества $\{1, \ldots, 2010\}$. Если i-е множество сформировать из пометок всех ребер, инцидентных i-й вершине, $i = 1, \ldots, 63$, то мы получим набор подмножеств с нужными свойствами.

10-5.

$$\int \frac{(x-1)^2\,dx}{x^2+e^x+1} = \int \frac{x^2-2x+1}{x^2+e^x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{2x+e^x}{x^2+e^x+1}\right)dx =$$
$$= x - \int \frac{d(x^2+e^x+1)}{x^2+e^x+1} = x - \ln(x^2+e^x+1) + C.$$

10-6. Заметим, что при отображении sin вещественная ось переходит в вещественную, а мнимая — в мнимую. Рассмотрим треугольник с вершинами 0, a и bi. Его образом будет кривая Γ, концы которой соединены с точкой 0. Значит, искомая сумма равна сумме углов полученного криволинейного треугольника за вычетом прямого угла при вершине 0. Но функция $\sin(z)$ является аналитической, везде за исключением точек в которой $\cos(z) = 0$, то есть точек $z \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, которые исключены по условию задачи. Поэтому рассматриваемое отображение является конформным и не меняет углов между линиями.

10-7. Искомое число есть $\frac{m}{n(14)}$, где $n(14)$ — общее число вариантов остановки волчка в 14 секторах при 6 бросаниях, а m — число вариантов, при которых выпадут секторы $1, 2, \ldots, 6$. Очевидно, что $n(14) = 14^6$. Заметим, что число m не зависит от общего числа секторов на волчке. Действительно, исследуемое событие означает, что волчок останавливался только на секторах 1–6, но никогда — на пустом промежутке перед сектором номер 7. Тогда не важно, сколько именно секторов есть между 7-м и 1-м.
Рассмотрим аналогичную задачу в случае 7 секторов. Тогда вероятность выпадения 6 конкретных секторов равна вероятности того, что не выпадет оставшийся седьмой сектор. Для каждого невыпавшего сектора она одинакова и, следовательно, равна $\frac{1}{7} = \frac{m}{n(7)} = \frac{m}{7^6}$. Значит, $m = 7^5$, а искомая вероятность равна $\frac{7^5}{14^6} = \frac{1}{7 \cdot 2^6} = \frac{1}{448}$.

10-8. Нам требуется по числу этажей в доме найти необходимое число бросков. Попробуем решить обратную задачу: по числу бросков найти максимальную этажность, для которой гарантированно можно определить самый нижний этаж разбития шаров.
Обозначим через $H(k, n)$ максимальную этажность дома, для которого это можно сделать k шарами за n бросаний, $k, n > 0$. С помощью одного бросания мы сможем определить только то, разбивается шарик с первого этажа или нет. Поэтому $H(k, 1) = 1$, вне зависимости от количества шариков k.

Рассмотрим случай, когда количество шаров $k = 1$, $n > 0$. Если мы бросим шарик хотя бы со второго этажа и он разобьется, то мы не узнаем, можно ли его было бросить с первого. Итак, один шарик надо бросать с 1-го, 2-го и так далее этажей, пока он не разобьется. Значит, $H(1,n) = n$.
Пусть теперь шариков $k > 1$ и количество бросаний $n > 1$. Сделаем первый бросок с этажа номер h. Пусть шар разбился, тогда обследовать нужно этажи, которые находятся ниже (всего $h-1$), причем у нас имеется $k-1$ шар и $n-1$ бросок. Значит, нужно потребовать, чтобы $h-1 \leqslant H(k-1,n-1)$. Если же шарик остался цел, то проверять нужно более высокие этажи (их всего $H-h$), используя k шаров и $n-1$ бросков. Их хватит, если $H(k,n) - h \leqslant H(k,n-1)$. Итак, для номера h мы получаем двойное неравенство

$$H(k,n) - H(k,n-1) \leqslant h \leqslant H(k-1,n-1) + 1$$

Это неравенство имеет решение, если левая часть не превосходит правую, откуда следует, что $H(k,n) \leqslant h \leqslant H(k-1,n-1) + H(k,n-1) + 1$. Ясно, что максимальное $H(k,n)$ мы получим, когда это неравенство превращается в равенство. Поэтому H удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$H(k,n) = H(k-1,n-1) + 1 + H(k,n-1), \tag{1}$$

при граничных условиях $H(k,1) = 1$, $H(1,n) = n$.
Выведем яаную формулу для функции $H(k,n)$. Докажем, что $H(k,n) = \sum_{i=1}^{k} C_n^i$ (считаем, что $C_n^i = 0$ при $i > n$, при таком "расширенном" понимании биномиальных коэффициентов их основное свойство $C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^i$ выполнено при любых $n, i > 0$). Доказательство в общем случае будем вести индукцией по $k+n$. Для $k, n = 1$ мы это равенство уже проверили.
Индуктивный переход сделаем на основе соотношения (1). Имеем

$$\begin{aligned} H(k,n) &= 1 + H(k-1,n-1) + H(k,n-1) = \left(C_n^0 + \sum_{i=1}^{k-1} C_{n-1}^i\right) + \sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^i = \\ &= \sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^{i-1} + \sum_{i=1}^{k} C_{n-1}^i = \sum_{i=1}^{k} (C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^i). \end{aligned}$$

Используя основное свойство биномиальных коэффициентов получаем, что последняя сумма совпадает с $\sum_{i=1}^{k} C_n^i$, то есть $H(k,n) = \sum_{i=1}^{k} C_n^i$.
а) Пусть у нас есть два шарика. Имеем $H(2,n) = C_n^1 + C_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Итак, за 44 броска можно проверить не более $\frac{44\cdot 45}{2} = 990$ этажей, а за 45 — уже $\frac{45\cdot 46}{2} = 1035$. Значит, 45 бросков хватит.
б) Для трёх шариков имеем $H(3,n) = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = (n^3 + 5n)/6$. Поскольку $(18^3 + 5\cdot 18)/6 < 1000 < (19^3 + 5\cdot 19)/6$, то $X = 19$.

10-9. Выберем какое-нибудь иррациональное число x_0. Приращение $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x)$. Для рационального $x = \frac{m}{n}$ оно равно $\frac{x}{n^2}$. Известно, что для любого иррационального x_0 существует последовательность наилучших приближений, т.е. чисел вида $x = \frac{m}{n}$ таких, что $|\Delta x| = \left|x_0 - \frac{m}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. В этих точках

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right| = \left|\frac{x}{n^2 \Delta x}\right| \geqslant |x| \geqslant \left|\frac{x_0}{2}\right|.$$

Последнее неравенство верно в достаточно малой окрестности x_0. Итак, сколь угодно близко к числу x_0 существуют точки, в которых $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$ равно 0 (любые иррациональные), и точки, в которых $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$ отделено от 0. Значит, это отношение не имеет предела при $\Delta x \to 0$, а функция не имеет производной.

Исследуем теперь производную в точке 0. Имеем $\Delta x = x - 0 = x$, так что $\left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$ равно 0 для иррациональных x и $\frac{x/n^2}{x} = \frac{1}{n^2}$ для рациональных $x = \frac{m}{n}$ Если x находится достаточно близко к 0, $|x| < 1/k$, то $n > k$ и $n^{-2} < k^{-2}$.

Значит, $\lim_{\Delta x \to 0} \left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right| = f'(0) = 0$.

10-10. Предположим, что искомое f существует. В силу свойств 1), 2) имеем $f(f(X)) = f(X)$ для всех $X \in 2^{\mathbb{N}}$. Множество $f(\varnothing) \sim \varnothing$, т.е. конечно. Для любого конечного (т.е. эквивалентного $\varnothing$) множества K имеем $f(K) = f(\varnothing)$. Если пересечение множеств A и B конечно, то пересечение их образов есть $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = f(\varnothing)$. Выберем произвольную бесконечную последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ бесконечных попарно не пересекающихся подмножеств $\mathbb{N}$. В силу свойства 1) последовательность $f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_n), \ldots$ будет состоять из бесконечных множеств. Как показано выше, образы $f(X_n)$ пересекаются между собой только по множеству $f(\varnothing)$.

Значит, множества вида $f(X_n) \setminus f(\varnothing)$ попарно не пересекаются. Выберем в каждом из них по одному элементу a_n (все они различны). Множество всех a_n обозначим через A.

Какое значение может принимать отображение f на множестве A? Пересечение $A \cap f(X_n) = \{a_n\}$ конечно, следовательно, $f(A) \cap f(f(X_n)) = f(A) \cap f(X_n) = f(\varnothing)$ для каждого n. В частности, пересечение $f(A)$ и $f(X_n)$ не содержит элемент a_n. Заметим, что в множество $f(X_n)$ элемент a_n входит. Значит, он не входит в $f(A)$. Это верно при всех n, так что $f(A)$ отличается от A *бесконечным* числом элементов, что противоречит соотношению $A \sim f(A)$.

Решения, 2011 г.

11-1. Можно выбрать одну из матриц так, что ее квадрат равен нулевой или единичной матрице. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В то же время матрица $B^2 = E$, т.е. перестановочна с любой матрицей.

11-2. Точка самопересечения определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} x = a_1t^2 + b_1t + c_1 = a_1z^2 + b_1z + c_1 \\ y = a_2t^2 + b_2t + c_2 = a_2z^2 + b_2z + c_2 \end{cases},$$

где $z \neq t$. С учётом этого соотношения система приводится к виду $\begin{cases} -a_1(t+z) = b_1 \\ -a_2(t+z) = b_2 \end{cases}$. Пусть эта система имеет решение. Обозначим $t + z = \lambda$. Подставляя найденные значения b_i в уравнения кривой, получаем, что $\begin{cases} x = a_1t(t-\lambda) + c_1 \\ y = a_2t(t-\lambda) + c_2 \end{cases}$. Значит, $a_2x - a_1y = a_2c_1 - a_1c_2$. Если a_1 и a_2 не обращаются в 0 одновременно, то это — уравнение прямой, на которой и лежат все точки кривой. В противном случае x и y постоянны.

11-3. Пусть O — центр доски; M — центр клетки $d3$; M_i, $i = 1, \ldots, 64$ — центры всех 64 клеток доски. Имеем $\overrightarrow{MM_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_i}$. Сумма этих векторов равна $64\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{64}\overrightarrow{OM_i}$ Последняя сумма равна $\overrightarrow{0}$, так как все векторы разбиваются на пары противоположных друг другу. Длина вектора $\overrightarrow{MO}$ равна $\sqrt{1.5^2 + 0.5^2} =$ $= \sqrt{10}/2$.

11-4. Заметим, что $x = 1$ является корнем многочлена $P(x)$. Для остальных x преобразуем многочлен к виду

$$P(x) = nx^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x - 1}.$$

Все сводится к подсчёту корней, отличных от 1 для многочлена $Q(x)$, стоящего в числителе этой дроби.
Имеем $Q'(x) = n(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$. Производная обращается в 0 при $x = 0$ и $x = 1$. Кроме того, $Q(0) = 1$, $Q(1) = 0$. В зависимости от четности n имеется два варианта поведения функции $Q(x)$.

а) n —четное.

x	$-\infty$	<0	0	$(0,1)$	1	>1
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$Q(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

Функция $Q(x)$ имеет два корня: 1 (кратности 2) и еще один в промежутке $(-\infty, 0)$.

б) n —нечетное.

x	<0	0	$(0,1)$	1	>1
$Q'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$Q(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

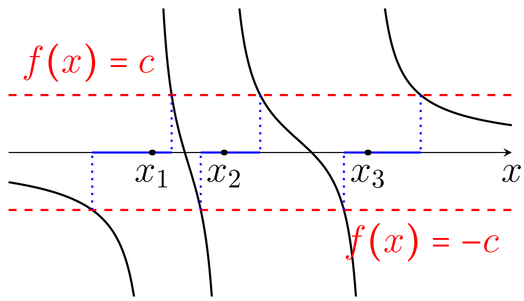
Функция $Q(x)$ имеет единственный корень: 1 (кратности 2).

11-5. Первая строка матрицы (q_{ij}) состоит из единиц. Вычтем её из всех последующих. Тогда в клетках останется количество общих делителей i и j, не считая 1. В частности, в строке с номером 2 будут стоять 1 (в столбцах с чётными номерами) и 0 (в нечётных столбцах).
Вычтем эту строку из всех строк, номера которых делятся на 2. Тогда в строках, начиная с третьей, будут стоять количества всех общих делителей кроме 1 и 2. Продолжая этот процесс, получим матрицу, у которой каждый элемент равен числу общих делителей i и j, *не меньших* i.
Ясно, что ниже диагонали в такой матрице стоят 0, а на диагонали — 1.

11-6. Имеем $na_{n+1} = (n+1)a_n - \max(a_n; n^2) \leqslant (n+1)a_n - a_n = na_n$, следовательно, $a_{n+1} \leqslant a_n$, то есть последовательность не возрастает. Более того, пока $n^2 \leqslant a_n$, $a_{n+1} = a_n = a_1$, т.е. последовательность при таких n постоянна. Как только $n^2 \geqslant a_1$, имеем $na_{n+1} = (n+1)a_n - \max(a_n; n^2) = (n+1)a_n - n^2 \leqslant a_1 + na_1 - n^2$, откуда $a_{n+1} \leqslant a_1/n + a_1 - n$, поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

11-7. Докажем промежуточный факт, что искомая функция стремится к 0 в любой точке отрезка. Пусть $0 < |x-a| < f(a)$, тогда $f(x) < f(a)$. Насколько велико может быть значение $f(x)$?
Если $f(x) > |x-a|$, т.е. $|a-x| < f(x)$, то, по условию, $f(a) < f(x)$, чего быть не может. Значит, для всех x, достаточно близких к a , имеем $0 < f(x) \leqslant |x-a|$. Из этого по теореме о двух милиционерах и следует, что $f(x)$ стремится к 0.
Докажем теперь, что функция с таким свойством не может принимать только положительные значения. Обозначим $A_n = \{x \in [0;1] : f(x) > 1/n\}$. Если это множество бесконечно, то у него существует предельная точка x_n. Тогда $\lim_{x\to x_n} f(x) \geqslant 1/n$, что противоречит предположению.
Итак, множества A_n конечны, а их объединение не более чем счётно. Но в него входят все точки, для которых $f(x) > 0$. Таким образом, существует бесконечное число точек, в которых $f(x) = 0$.

11-8. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i}$. Ее производная отрицательна, так что она убывает на всех интервалах между соседними корнями (и вне них). При этом она пробегает все значения от 0 до $-\infty$ при $x \in (-\infty, \min_i\{x_i\})$; все значения от ∞ до 0 при $x \in (\max_i\{x_i\}, \infty)$; все значения от $+\infty$ до $-\infty$ между каждой парой соседних корней.



Значит, около каждой точки x_i существует промежуток, в котором $f(x) > c$ или $f(x) < -c$. Это промежуток между корнями уравнений $f(x) = -c$ и $f(x) = c$. Сумма длин этих промежутков есть $A - B$, где A — сумма корней уравнения $f(x) = c$, B — уравнения $f(x) = -c$.

Уравнение $f(x) = c$ можно переписать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i:i\neq j} (x - x_i) = c \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Перенесем все слагаемые на правую сторону и приведем подобные. Коэффициент при x^n равен c, коэффициент при x^{n-1} равен $-c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n$. Последнее слагаемое получается из n слагаемых левой части. Итак, уравнение приводится к виду

$$c\,x^n - \left(c\sum_{i=1}^{n} x_i + n\right) x^{n-1} + \ldots = 0.$$

По теореме Виета сумма корней такого уравнения есть $A = (c\sum_{i=1}^{n} x_i + n)/c$. Величину B получаем, заменив c на $-c$, то есть $B = (c\sum_{i=1}^{n} x_i - n)/c$. Итак, $A - B = 2n/c$.

11-9. а) Имеем $\overrightarrow{OM_1} = r_1(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Тогда перпендикулярному вектору соответствует полярный угол $\varphi + \pi/2$, т.е. в координатах он имеет вид $\overrightarrow{OM_2} = r_2(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Тот факт, что точка M_1 лежит на эллипсе, записывается в виде $r_1^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1$, откуда $\frac{1}{r_1^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$.

Аналогично $\frac{1}{r_2^2} = \frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}$. Складывая эти равенства, получаем желаемое.

б) Запишем заданные вектора через их орты, т.е. $\overrightarrow{OM_i} = r_i\mathbf{e}_i$, где векторы $\mathbf{e}_i = (e_i^1, e_i^2, e_i^3)$ единичные и попарно ортогональные. Подставляя координаты $\overrightarrow{OM_i}$ в уравнение эллипса, получаем, что

$$\frac{1}{r_i^2} = \frac{(e_i^1)^2}{a^2} + \frac{(e_i^2)^2}{b^2} + \frac{(e_i^3)^2}{c^2}$$

Сложим три таких равенства, получим

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{\sum_{i=1}^3(e_i^1)^2}{a^2}+\frac{\sum_{i=1}^3(e_i^2)^2}{b^2}+\frac{\sum_{i=1}^3(e_i^3)^2}{c^2}$$

Координаты (e_i^j) образуют ортогональную матрицу. Для такой матрицы не только сумма квадратов элементов столбца равна 1, но и сумма квадратов элементов каждой строки. Это и завершает доказательство.

Заметим, что оно подходит для пространства любой размерности.

11-10. Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\mathbb{M}(\max(\xi^2,\eta^2))-1\leqslant\sqrt{1-\rho^2}.$$

Заметим, что $1=\frac{\mathbb{M}\xi^2+\mathbb{M}\eta^2}{2}$.

Преобразуем левую часть. Имеем $\mathbb{M}(\max(\xi^2,\eta^2))-1=\mathbb{M}(\max(\xi^2,\eta^2))-\frac{\mathbb{M}\xi^2+\mathbb{M}\eta^2}{2}$. Но $\max(\xi^2,\eta^2)-(\xi^2+\eta^2)/2=|\xi^2-\eta^2|/2=|\xi-\eta||\xi+\eta|/2$. Итак, левую часть неравенства можно представить в виде $\frac{1}{2}\mathbb{M}\kappa\zeta$, где $\kappa=|\xi-\eta|$, $\zeta=|\xi+\eta|$.

Теперь преобразуем подкоренное выражение. Заметим, что при заданных условиях $\rho=\mathbb{M}\xi\eta$, так что

$$1-\rho^2=\left(\frac{\mathbb{M}\xi^2+\mathbb{M}\eta^2}{2}\right)^2-(\mathbb{M}\xi\eta)^2=\frac{1}{4}(\mathbb{M}\xi^2+\mathbb{M}\eta^2-2\mathbb{M}\xi\eta)(\mathbb{M}\xi^2+\mathbb{M}\eta^2+2\mathbb{M}\xi\eta).$$

Последнее выражение есть $\frac{1}{4}\mathbb{M}\kappa^2\,\mathbb{M}\zeta^2$.

Итак, доказываемое утверждение можно переписать в виде $\mathbb{M}\kappa\zeta\leqslant\sqrt{\mathbb{M}\kappa^2\cdot\mathbb{M}\zeta^2}$. Это неравенство верно для всех случайных величин κ, ζ.

Решения, 2012 г.

12-1. Из второго соотношения первое очевидно следует. Следствие второго соотношения из первого будем доказывать от противного. Предположим, что для некоторого a выполняется первое соотношение $f(f(a))=a$, но $f(a)\neq a$. Обозначим $b=f(a)$. По предположению имеем $a=f(b)$. Но тогда разности $a-b$ и $f(a)-f(b)$ противоположны (по знаку), что противоречит возрастанию функции f.

12-2. Расположим куб в первом октанте, взяв сторону малого кубика за 1. Пронумеруем кубики тремя числами (m,n,k) — координатами самой ближней к началу координат вершины куба. Эти числа будут меняться от 0 до 8. Тогда в каждом кубе можно поставить число $(m+n+k)\bmod 9+1$.

12-3. Многочлен с корнями 1 и 3 можно записать в виде

$$P(x) = (x-1)(x-3)Q(x) = (x^2-4x+3)Q(x).$$

Найдем производную $P'(x) = (2x-4)Q(x) + (x^2-4x+3)Q'(x)$. Ее значение в точке 2 равно $P'(2) = -Q'(2) = 0$.
Разложим многочлен $Q(x)$ по степеням $(x-2)$, $Q(x) = a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\ldots$, здесь $a_1 = Q'(2) = 0$. Значит, $Q(x)$ либо константа (чтобы рисунок был справедлив в качестве неё можно взять любое положительное число), либо многочлен степени n не меньше 2. В качестве последнего можно взять, например, $Q(x) = (x-2)^n + 2^n$, он положителен на отрезке $[1,3]$.

12-4. Имеем

$$I_2 - I_1 = \int_0^a (x-1)e^{x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a e^{x^2-2x}\,d(x^2-2x) = \frac{e^{(a-2)a}-1}{2}.$$

Последнее выражение отрицательно при отрицательном показателе степени, т.е. при $a \in [0,2]$.

12-5. Пусть размер искомой матрицы будет $k \times k$. Сначала добавим к матрице новые столбцы (в количестве $k-n$ штук). Полученные таким образом m строк должны быть линейно независимыми, т.е. ранг промежуточной матрицы должен быть равен m. Но исходная матрица имела r независимых столбцов, значит, добавить нужно как минимум $m-r$ столбцов, из которых ровно $m-r$ не зависят от r исходных. Это возможно тогда и только тогда, когда имеется необходимое количество добавляемых столбцов, то есть если $k-n \leqslant m-r$.
Далее к матрице добавляем строки, чтобы сделать её квадратной. Это возможно сделать, соблюдя требование невырожденности: если исходные m строк были линейно независимы, всегда можно найти ещё $k-m$ не зависящих от них строк длиной k.
Итак, требуется лишь, чтобы $k \geqslant n+m-r$, откуда и получаем минимальный размер искомой матрицы.

12-6. Применим формулу Грина. Дифференцируя вторую скобку по x, а первую скобку по y получаем, что интеграл равен $\iint_D(-f(y)-f'(y))\,dxdy$, где D — область, ограниченная L. С другой стороны, он равен $\iint_D 1\,dxdy$. *В силу произвольности D* подынтегральное выражение в первом интеграле тождественно равно 1. Имеем дифференциальное уравнение $f'(y) = -1-f(y)$, его решение есть $-1+Ce^{-y}$. С учётом начального условия получаем, что $C = 1$.

12-7. а). Для $n = 1$ одномерный куб есть одно ребро, утверждение задачи очевидно. Далее доказываем по индукции. $(n+1)$-мерный куб получается из n-мерного его “движением” вдоль “$(n+1)$-й оси”. По предположению индукции либо в перемещаемом n-мерном кубе, либо в том, который получился после перемещения, есть n закрашенных рёбер. Но рёбра, вдоль которых мы “двигались”, не могут все остаться незакрашенными — любая вершина $(n+1)$-мерного куба являются концом одного и только одного такого ребра, а закрашенных вершин больше половины, то есть больше, чем рассматриваемых рёбер.

б). Закрасим любую вершину, не будем красить её соседей, зато покрасим соседей соседей и т.д. Поскольку n-мерный куб представляет собой связный граф, то в конце концов мы рассмотрим все вершины, а поскольку все циклы в нашем графе имеют чётную длину, то мы не получим противоречия. То, что мы покрасим при этом ровно половину вершин, следует из “равноправправности” всех вершин куба и того, что если бы мы начали с соседа нашей начальной вершины и НЕ стали бы его красить, то получили бы ровно такую же раскраску.

12-8. Каждое слагаемое представим в виде $|\overrightarrow{BA_i}| = |\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}|$. Умножим это выражение на $|\overrightarrow{OA_i}| = 1$. Получим

$$|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}||\overrightarrow{OA_i}| \geqslant (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{OA_i}) = 1 - (\overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{OA_i}).$$

Суммируя эти неравенства, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} |\overrightarrow{BA_i}| \geqslant n - \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{OA_i}) = n - (\overrightarrow{OB_i}, \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}) = n.$$

12-9. Известно, что множество $\mathbb{Q}$ счетное, т.е. каждому его элементу можно поставить в соответствие номер, т.е. представить каждое рациональное число как p_n, $n \in \mathbb{N}$. Но из $\mathbb{Q}$ можно выбрать искомую систему подмножеств. Соответствующие номера дадут решение задачи. Например, можно взять $A_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : p_n < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Конечно, все эти множества будут бесконечными (для конечных множеств ответ был бы отрицательным).

12-10. Введем обозначения. “Брошенные” точки обозначим A_i, а граничные точки равных дуг — через B_i. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что одна из вершин B_k совпадает с одной из точек A_ℓ — очевидно, что множество $\{B_i\}$ можно поворачивать вокруг центра окружности до тех пор, пока не произойдёт совпадения, при этом, если разбиение на дуги было искомым, то оно останется таковым и после “поворота до упора”. Заметим так же, что если искомое разбиение на дуги существует, то, с точностью до нулевой вероятности, точка A_ℓ определена однозначно — совместив конец дуги с любой другой точкой A_m , мы обнаружим на одной из дуг две точки. Действительно, центральный угол

по часовой стрелке между A_ℓ и любой точкой A_m при $m > \ell$ составляет более $2\pi(m-\ell)/n$. Поэтому, если мы совместим начало дуги с Am, то дойдя по часовой стрелке до A_ℓ, мы обнаружим "лишние" точки.
Итак, для каждого ℓ и фиксированного набора дуг, "стартующего" с A_ℓ, нужно найти вероятность того, что остальные $(n-1)$ точек распределятся по одной на дуге (конкретно, на $n-1$ дугах, не считая той, что занята точкой $A-\ell$), а потом просуммировать по всем выбора ℓ — умножить на n. Легко видеть, что для фиксированного ℓ эта вероятность равна

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}.$$

Решения, 2013 г.

13-1. Решаем уравнение отдельно для $x<0$ и $x>0$. Получаем, что

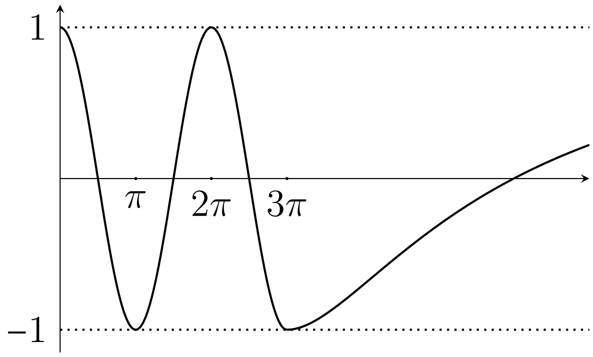
$$y=\begin{cases} e^x\left(\frac{x^2}{2}-C_1x+C_2\right), & x<0,\\ \frac{1}{4}e^{-x}+e^x(C_3x+C_4), & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Из ограниченности следует, что $C_3=C_4=0$. Осталось согласовать значения y и y' в 0.

13-2. а) Существует, например x^3.
б) Существует, например

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant 3\pi,\\ \cos\frac{3\pi^2}{x}, & x>3\pi,\end{cases}$$

(см. график справа).



13-3. Умножим обе части обе части подынтегрального выражения на e^x. Имеем

$$\int\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^xf(x)+1}dx=\int\frac{(e^xf(x)+1)'}{e^xf(x)+1}dx=\ln(e^xf(x)+1)+C.$$

13-4. Выберем систему координат на плоскости, по отношению к которой ℓ — это ось абсцисс, а точка C лежит на оси ординат и имеет координаты $(0;2c)$. Движущиеся точки A и B имеют координаты $(2u;0)$ и $(2u+2a;0)$ соответственно. Середина стороны AC имеет координаты $(u;c)$. Вектор $\overrightarrow{CA}$ имеет координаты

$(2u;-2c)$, а вектор, перпендикулярный $\overrightarrow{CA}$ имеет координаты $(c;u)$. Серединные перпендикуляры к AC и AB имеют соответственно уравнения: $x = u+ct$, $y = c+ut$ и $x = 2u+a$. Решая эту систему, находим координаты центра описанной окружности $x = 2u + a$, $y = c + u(u + a)/c$. Исключая параметр u, получим уравнение кривой, по которой движется центр описанной окружности:

$$y = c + \frac{(x-a)(x+a)}{4c} = \frac{1}{4c}x^2 + c - \frac{a^2}{4c}.$$

13-5. Рассмотрим случайную величину ξ_i, которая равна 1, если 4 карточки с номерами i, $i+1$, $i+2$, $i+3$ составляют слово «мама» и 0 в противном случае. Вероятность того, что i-я величина будет равна 1, есть $1/16$.
Искомое количество способов есть сумма $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{32}$. Поскольку среднее от суммы равно сумме средних, то

$$\mathbb{M}\xi = \mathbb{M}\xi_1 + \mathbb{M}\xi_2 + \ldots + \mathbb{M}\xi_{32} = 32\left(1\cdot\frac{1}{16} + 0\cdot\frac{15}{16}\right) = 2.$$

13-6. Пусть $f(x) = x + ax^3 + o(x^3)$ и $g(x) = x + bx^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Тогда $g(f(x)) = x + (a+b)x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Применяя эту формулу для $g \equiv f$, получаем, что $f^{(n)}(x) = x + nax^3 + o(x^3)$. Кроме того, если g — функция, обратная к f, то $g(x) = x - ax^3 + o(x^3)$.
Имеем при $x \to 0$: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, тогда $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Числитель дроби принимает вид

$$\left(x + n\frac{x^3}{6}\right) - \left(x - n\frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = n\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

13-7. а) У руководства имеется 6 возможностей для реализации замысла, если из центральной станции можно будет проехать в 2 стороны (Рис. 1). В случае, если центральная станция будет тупиковой, то к аналогичным 6 возможностям добавляется ещё три (Рис. 2). Наконец, надо не забыть вариант, когда из центральной станции будут расходиться 3 ветки.

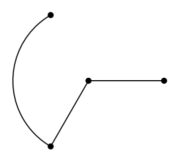


Рис.1

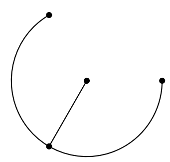


Рис.2

б) При любом выборе в метро останутся 4 линии. Сделаем перебор по числу линий, выходящих из центра. Вариантов с нулём центральных прогонов нет (центральная станция тоже должна быть доступна) и есть 1 вариант с четырьмя "центральными" прогонами.
Пусть оставлены $n = 1, 2$ или 3 центральных прогона, причём подряд (назовем этот набор "веером"). Ясно, что для каждого n имеется 4 таких веера. Кольцевые

прогоны можно присоединить к вееру по или против часовой стрелки (от соответствующего конца). Всего получаем $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ варианта. Кроме того, если $n = 2$, то оставшиеся два кольцевых прогона можно добавить к обоим концам веера ($4 \cdot 1 = 4$ варианта), если же $n = 1$, то в одном из направлений можно добавить 2 кольцевых прогона, а в другом — один, всего получаем $4 \cdot 2 = 8$ вариантов.
И, наконец, осталось рассмотреть случай, когда центральные прогоны не образуют веер. В этом случае $n = 2$, кольцевые прогоны присоединяются к конца диаметра в разные стороны против часовой (буквой “Z”) или по часовой стрелке (буквой “И”). При этом, не образующие веер центральные прогоны, так же можно выбрать 2-мя способами. Итого $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ вариантов.
Всего получаем $1 + 24 + 4 + 8 + 8 = 45$ вариантов.

13-8. Прежде всего отметим, что для разрешимости системы необходимо, чтобы $a + b + c$ была неотрицательной, т.к. сложив уравнения системы получим

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a + b + c \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 2(a + b + c).$$

Более того, $a+b+c > 0$, при $a+b+c = 0$ получим $x = y = z$ и $a = b = c = 0$. Докажем, что положительность суммы $a + b + c$ является также и достаточным условием, когда хотя бы одно из чисел a, b или c отличается от других.
Теперь перепишем исходную систему в векторном виде. С этой целью для любого вектора $\overrightarrow{V} = (z, x, y)$ через $s(\overrightarrow{V})$ обозначим вектор, полученный из $\overrightarrow{V}$ круговым сдвигом координат: $s(\overrightarrow{V}) = (y, z, x)$. Тогда исходная система с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{V}$ и $s(\overrightarrow{V})$ может быть записана так:

$$[\overrightarrow{V}, s(\overrightarrow{V})] = \overrightarrow{A}, \quad \text{где } \overrightarrow{A} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Отсюда вытекает, что вектор $\overrightarrow{A}$ ортогонален векторам $\overrightarrow{V}$ и $s(\overrightarrow{V})$, т.е.

$$(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{A}) = za + xb + yc = 0 \ \text{ и } \ (s(\overrightarrow{V}), \overrightarrow{A}) = ya + zb + xc = 0 = (\overrightarrow{V}, s^{-1}(\overrightarrow{A})).$$

Векторы $\overrightarrow{A}$ и $s^{-1}(\overrightarrow{A})$ имеют равные длины и неколлинеарны, иначе они были бы равны или отличались только знаком. Но равенство $\overrightarrow{A} = s^{-1}(\overrightarrow{A})$ приводит к $a = b = c$, запрещённому условиями задачи. Равенство $\overrightarrow{A} = -s^{-1}(\overrightarrow{A})$ влечёт $a = b = c = 0$.
Так как $\overrightarrow{V}$ ортогонален двум неколлинеарным векторам $\vec{A}$ и $s^{-1}(\overrightarrow{A})$, то $\overrightarrow{V}$ должен быть коллинеарен их ненулевому векторному произведению $\overrightarrow{V} = k[\overrightarrow{A}, s^{-1}(\overrightarrow{A})]$.
Введём теперь вектор

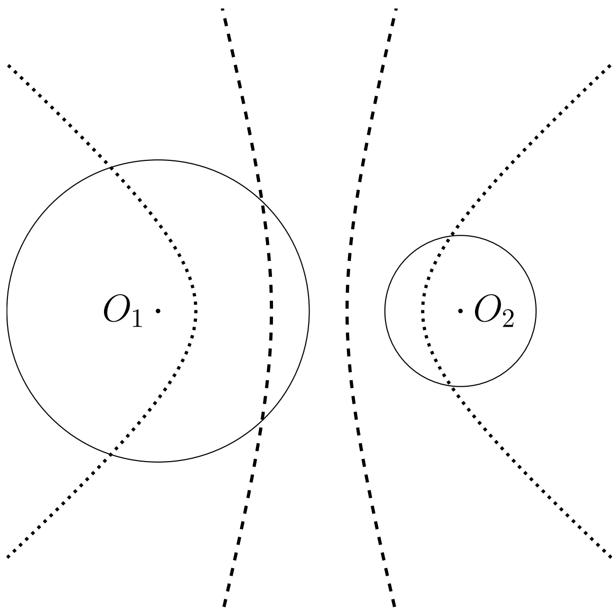
$$\overrightarrow{W}(k) = k[\overrightarrow{A}, s^{-1}(\overrightarrow{A})] \qquad (2)$$

Векторы $\overrightarrow{W}$ и $s(\overrightarrow{W})$ неколлинеарны, иначе у вектора $\overrightarrow{W}$ все координаты совпадают и условие ортогональности $\overrightarrow{W}$ и $\overrightarrow{A}$ не может быть выполнено в силу условия $(a+b+c) \neq 0$.
Введём ещё вектор $\overrightarrow{B} = [\overrightarrow{W}, s(\overrightarrow{W})]$. Выбором k можно добиться выполнения равенства длин векторов $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$. Отметим, что существует равно два таких k, отличающихся знаком. Как мы установили в самом начале, сумма координат вектора $\overrightarrow{B}$ неотрицательна при совершенно произвольном выборе вектора $\overrightarrow{W}$.
Векторы $\overrightarrow{A}$ и $\overrightarrow{B}$ ортогональны неколлинеарным векторам $\overrightarrow{W}$ и $s(\overrightarrow{W})$, отсюда $\overrightarrow{B} = \pm\overrightarrow{A}$. Но так как у вектора $\overrightarrow{A}$ сумма координат положительна, а у вектора $\overrightarrow{B}$ неотрицательна, то $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ и исходная система имеет решение, причём это решение $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{W}(k)$ может быть найдено по формуле (2).
Таким образом, для вектора (a, b, c), неколлинеарного вектору $(1, 1, 1)$, система является разрешимой тогда и только тогда, когда сумма $a + b + c$ положительна. Отметим, что попутно мы доказали единственность решения с точностью до знака.

13-9. 1) Очевидно, любой минор матрицы (a_{ij}) (рассматриваемый как матрица, подматрица) обладает тем же свойством, что и сама матрица (a_{ij}). В частности, для миноров второго порядка выполняется $a_{1j} + a_{ik} = a_{1k} + a_{ij}$, откуда $a_{ik} - a_{1k} = a_{ij} - a_{1j}$.
2) Отсюда следует, что если положить $b(j) = a_{1j}$, то $a_{ij} - b_j = c(i)$. То есть матрица $(b_{ij}) = (a_{1j})$ (все строки которой совпадают с первой строкой матрицы (a_{ij})) и матрица $(c_{ij}) = (a_{ij}) - (b_{ij})$ удовлетворяют условию задачи.

13-10. Обозначим центры и радиусы заданных окружностей через O_1, O_2 и r_1, r_2 соответственно. Расстояние между центрами обозначим через d. Также введем обозначения $d_1 = |O_1M|$, $d_2 = |O_2M|$. Через R обозначим радиус искомой окружности ω. Если точка M лежит вне окружности ω_1, то выполняется одно из соотношений $R = d_1 - r_1$ или $R = d_1 + r_1$, в первом случае ω_1 лежит вне искомой ω, а во втором — внутри неё.
Если же точка M лежит внутри окружности ω_1, то соотношения примут вид $R = r_1 - d_1$ или $R = d_1 + r_1$. Аналогичные соотношения верны для второй окружности. Чтобы по расстояниям d_1, d_2 можно было построить точку M, они должны удовлетворять условиям $d_1 + d_2 \geqslant d$; $-d \leqslant d_1 - d_2 \leqslant d$. Приравняем выражения для радиуса с разными индексами. Получим 9 вариантов:
(1) $d_1 - r_1 = d_2 - r_2$; значит, $d_1 - d_2 = r_1 - r_2 = \mathrm{const}$.
(2) $r_1 - d_1 = d_2 - r_2$; значит, $d_1 + d_2 = r_1 + r_2$. Случай невозможен, так как $r_1 + r_2 < d$.
(3) $d_1 + r_1 = d_2 - r_2$; значит, $d_2 - d_1 = r_1 + r_2 = \mathrm{const}$.

(4) $d_1 - r_1 = r_2 - d_2$; этот случай аналогичен случаю (2).
(5) $r_1 - d_1 = r_2 - d_2$; невозможно (точка M не может лежать внутри обеих окружностей).
(6) $d_1 + r_1 = r_2 - d_2$; значит, $d_1 + d_2 = r_2 - r_1$. Случай невозможен, так как $r_2 - r_1 < d$.
(7) $d_1 - r_1 = d_2 + r_2$; значит, $d_1 - d_2 = r_1 + r_2 =$ const.
(8) $r_1 - d_1 = d_2 + r_2$; значит, $d_1 + d_2 = r_1 - r_2$. Случай невозможен, так как $r_1 - r_2 < d$.
(9) $d_1 + r_1 = d_2 + r_2$; значит, $d_2 - d_1 = r_1 - r_2 =$ const.



Итак, остаётся только 4 соотношения, в каждом из которых разность расстояний от точки M до точек O_1, O_2 постоянна. Как известно, ГМТ этого соотношения — ветвь гиперболы. Условия (1) и (9) дают две ветви одной гиперболы, то же можно сказать и об условиях (3) и (7). Получаем две софокусные гиперболы, $|d_1 - d_2| = r_1 + r_2$ и $|d_2 - d_1| = r_1 - r_2$ (считаем, что $r_1 > r_2$). В случае, если окружности имеют равные радиусы, последняя гипербола вырождается в прямую (серединный перпендикуляр отрезка O_1O_2). Тот же ответ можно получить и расчётом.

Решения, 2014 г.

14-1. Перепишем функцию в виде $f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x(1-x)}{1-x^3}$ и разложим ее в ряд Тейлора. Получим, что

$$f(x) = 1-(2x-2x^2)(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3n}+\ldots) = 1-2x+2x^2-2x^4+2x^5-2x^7+2x^8-\ldots$$

Мы видим, что коэффициенты повторяются через три, так что при степени 100 будет стоять то же коэффициент, что и при степени 1, то есть −2. С другой стороны, коэффициент при сотой степени ряда (многочлена) Тейлора есть $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$.

14-2. Для каждого корня x_i уравнения выполняется равенство $x^{2014} = -2015x - -2016$, так что искомая сумма может быть переписана в виде $-2015\sum_i x_i - 2014 \times 2016$. Но, в силу теоремы Виета, сумма всех корней равна 0, так что искомая сумма равна -2014×2016.

14-3. Классическая в этом случае замена $x \mapsto \pi/2 - x$, приводит к (известному) равенству

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx,$$

так что второй интеграл можно переписать как $\int_0^{\pi/2}\sin(\cos x)\,dx$. Заметим, что при $x\in(0;\pi/2)$ выполняется $\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$. Первое неравенство следует из $\sin x < x$, а второе — еще и из убывания косинуса.

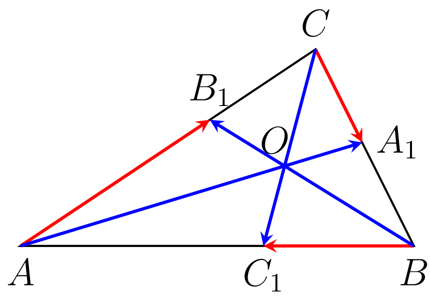
14-4. Минимальный возможный ранг равен 5. Если бы ранг равнялся четырем или меньше, то проводя элементарные преобразования минора (с сопутствующими преобразованиями всей матрицы), мы бы получили минор размера 12×13, у которого 8 строк из 12 — нулевые. Но тогда преобразованная исходная матрица 20×20 (по-прежнему невырожденная) содержит 8 строк с нулями в 13 столбцах. Следовательно максимальный ранг подматрицы, составленной из этих 8 строк исходной матрицы был бы равен $20-13=7$, эти строки линейно зависимы. Противоречие с невырожденностью исходной матрицы.
Минимальный ранг 5 достигается, если у единичной матрицы 20×20 рассмотреть левый нижний угол.

14-5. См. задачу 01-2.

14-6. Пусть биссектрисы треугольника пересекаются в точке O. Введем обозначения $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{b}$. Имеем

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0} \qquad (3)$$

Указанная в условии сумма может быть переписана в виде $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{CA_1}$ (сумма “синих” векторов равна сумме “красных”).



Последнюю сумму можно записать в виде $\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{b}+\nu\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$. Вычитая из этого уравнения (3), умноженное на ν, получим, что $(\lambda-\nu)\overrightarrow{a}+(\mu-\nu)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$. В силу линейной независимости векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ получаем, что $\lambda=\nu=\mu$.
Используем тот факт, что биссектриса делит противоположную сторону в отношении прилегающих сторон. Мы доказали, что $a:b=b:c=c:a$. Из этого следует, что $a=b=c$.

14-7. Пусть ξ_i, $i=1,\ldots,50$ — случайная величина, принимающая значение единица, если после встречи с i-й по счёту невестой в паспорте жениха появляется

штамп о браке и ноль в противном случае. Вероятность принятия значения единица есть вероятность того, что i-я невеста будет лучше всех предыдущих, что при случайной перестановке невест равно $1/i$.
Матожидание количества штампов в паспорте жениха совпадает с суммой матожиданий ξ_i, то есть с $1+1/2+\ldots+1/50$. Последняя сумма, геометрически очевидно (в силу убывания функции $1/x$), меньше чем $1+\int_1^{50}\frac{1}{x}\,dx = 1+\ln 50$, т.е. меньше 5.

14-8. Заметим, что функция f должна быть инъективна, то есть принимать при разных аргументах различные значения. В противном случае и композиция $g\circ f$ была бы не инъективна. Применим ко второму равенству функцию f. Получим, что $f(g(f(x))) = f(x^3)$. Левую часть можно переписать как $f\circ g(f(x)) = f^2(x)$. Итак, $f(x^3) = f^2(x)$. Подставим в это равенство в качестве x значения $0, 1$ и -1. Для каждого из них $x^3 = x$, так что все три числа $f(0)$, $f(1)$ и $f(-1)$ удовлетворяют уравнению $a = a^2$. Но у этого уравнения только два различных корня. Пришли к противоречию.

14-9. Заметим, что ненулевые элементы стоят в попрано различных строках и в попарно различных столбцах матрицы (в силу ее невырожденности). Поэтому данная матрица ортогональная, то есть $A^T = A^{-1}$. Произведение двух матриц такого вида также является матрицей того же вида. Рассмотрим набор степеней $E, A, A^2, \ldots, A^k, \ldots$. Среди них может быть лишь конечное число различных (так как вообще матриц заданного вида конечное число). Пусть, например, $A^k = A^l$, $k > l$. Тогда $A^{k-l-1} = A^{-1} = A^T$.

14-10. Множество упорядоченных пар точек окружности гомеоморфно тору. Его можно рассматривать как квадрат, $ABCD$, противоположные стороны которого попарно склеены с сохранением ориентации: $\overrightarrow{AB}$ с $\overrightarrow{BC}$, а $\overrightarrow{BC}$ с $\overrightarrow{AD}$ Кроме того, отождествляя пары (x, y) и (y, x), мы склеим наш квадрат по диагонали AC.
Получим прямоугольный равнобедренный треугольник ACD, у которого еще надо склеить $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ (с указанными ориентациями). Для осуществления этой склейки сначала разрежем треугольник по высоте DE. После склейки $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ получим квадрат, у которого нужно еще склеить противоположно ориентированные две стороны разреза DE.

Решения, 2015 г.

15-1. а) График функции $y = x^3-ax$ пересекает ось абсцисс в трёх точках $0, \pm\sqrt{a}$, поэтому при $b > 0$ график функции $y = x^3-ax-b$ пересекает положительную часть оси абсцисс только в одной точке.

б) Пусть c — корень многочлена $P(x)$.
Функция $y = x^3 - ax - b$ при $x > c$ возрастает. Подставляя $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ в многочлен $P(x)$, с очевидностью получаем, что $P(\sqrt{a}) < 0$, $P(\sqrt[3]{b}) < 0$, $P(\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}) > 0$.

15-2. б) Касательная плоскость в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет уравнение

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0 \Leftrightarrow y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0.$$

Подставляя $y = 0, z = 0$, найдем точку пересечения с осью Ox. Имеем: $y_0z_0x - y_0z_0x_0 - x_0z_0y_0 - x_0y_0z_0 = 0$. Поэтому $x = 3x_0$.
Аналогично, $y = 3y_0$, $z = 3z_0$. Следовательно, объём тетраэдра равен

$$\frac{1}{6} \times 27x_0y_0z_0 = \frac{9}{2}.$$

а) То же самое, но всюду отсутствует третье слагаемое.

15-3. 1) К каждой строке с номером $i \in \{1, \dots, n\}$ прибавим строку с номером $n+i$. 2) Из каждого столбца новой матрицы с номером $n+j$, $j \in \{1, \dots, n\}$ вычтем столбец с номером j:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся теоремой Лапласа.
2-е решение. Ту же самую процедуру можно осуществить следующим образом:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{pmatrix}$$

15-4. Имеем

$$\int_0^{y'(x)} \frac{\exp(t)\,dt}{1+2\exp(t)} = \frac{1}{2}\ln(1+2\exp(t))\Big|_0^{y'(x)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2\exp(y'(x))}{3}\right).$$

Приравняв это выражение правой части исходного уравнения и найдя $y'(x)$ из полученного равенства, заключим

$$y'(x) = \ln\left(\frac{3x-1}{2}\right), \quad y(x) = \frac{3x-1}{3}\left(\ln\left(\frac{3x-1}{2}\right) - 1\right) + C$$

и $C = 0$, так как $y(1) = 2/3$.

15-5. Симметрия плоскости относительно точки M с радиус-вектором $\mathbf{m}$ отображает точку с радиус-вектором $\mathbf{x}$ в точку с радиус-вектором $\mathbf{x} + 2(\mathbf{m} - \mathbf{x}) = 2\mathbf{m} - \mathbf{x}$.

Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$ — радиус-векторы точек A, B, C, W соответственно. Вычислим композицию, указанную в задаче.
Для произвольной точки X с радиус-вектором $\mathbf{x}$ имеем:

$$\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{a}-\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{w}-(2\mathbf{a}-\mathbf{x}) = 2(\mathbf{w}-\mathbf{a})+\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{b}-(2(\mathbf{w}-\mathbf{a})+\mathbf{x}) = 2(\mathbf{b}-\mathbf{w}+\mathbf{a})-\mathbf{x} \mapsto$$
$$2\mathbf{w}-(2(\mathbf{b}-\mathbf{w}+\mathbf{a})-\mathbf{x}) = 4\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a})+\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{c}-(4\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a})+\mathbf{x}) =$$
$$-4\mathbf{w}+2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{w}-(-4\mathbf{w}+2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{x}) = 6\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{x}.$$

Отображение $\mathbf{x} \mapsto 6\mathbf{w}-2(\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c})+\mathbf{x}$ является тождественным тогда и только тогда, когда $\mathbf{w} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})/3$.

15-6. Чтобы задать трёхмерную грань, надо четырём координатам из семи придать значение 0 или 1. Поэтому число трёхмерных граней равно $f_3 = 2^4C_7^4$. Аналогично, число четырёхмерных граней равно $f_4 = 2^3C_7^3$. Ясно, что $f_3 = 2f_4$.

15-7. Если $f(x)$ и $g(x)$ лежат в S, то, по условию a), $\ln(f(x)+1)$ и $\ln(g(x)+1) \in S$. Но тогда, по условию b), функция

$$\ln(f(x)+1)+\ln(g(x)+1) = \ln(f(x)g(x)+f(x)+g(x)+1) \in S$$

и, по условию a), функция

$$\exp(\ln(f(x)g(x)+f(x)+g(x)+1))-1 = f(x)g(x)+f(x)+g(x) \in S.$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то $f(x)g(x)+f(x)+g(x) \geqslant f(x)+g(x)$ и, по условию c),

$$f(x)g(x)+f(x)+g(x)-(f(x)+g(x)) = f(x)g(x) \in S.$$

15-8. Будем рассматривать строки матрицы как точки A_i, $i = 1,2,\ldots,5$, пространства $\mathbb{R}^8$. Вычёркивание столбца с номером k можно рассматривать как проекцию точек A_i на координатную плоскость $x^k = 0$ пространства $\mathbb{R}^8$ параллельно вектору $\mathbf{e}_k$ стандартного базиса $\mathbf{e}_\ell$, $\ell = 1,2,\ldots,8$ пространства $\mathbb{R}^8$. Размерность плоскости α, натянутой на точки A_i, $i = 1,2,\ldots,5$, не больше чем 4. Пусть L_1 - линейная оболочка векторов $\overrightarrow{A_5A_i}$ $(i = 1,2,3,4)$. $\dim L_1 \leqslant 4$. Следовательно существуют базисные векторы (пусть это будут $\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8$) такие, что $L_1 \bigcap \mathfrak{L}\{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8\} = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому проекции точек A_i на плоскость $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ попарно различны.
Если $\overrightarrow{A_5A_1} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{A_5A_2} = \mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{A_5A_3} = \mathbf{e}_3$, $\overrightarrow{A_5A_4} = \mathbf{e}_4$, то найти пять столбцов, удовлетворяющих условиям задачи нельзя.

15-9. Пусть вероятность выпадения 3-х орлов (ООО) после того, как уже выпали два орла (ОО) равна x; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения орла и решки (ОР) равна y; вероятность выпадения 3-х орлов после выпадения решки и орла (РО) равна z. Вероятности выпадения наборов ОО, ОР, РО равны 1/4.
После ОО с равной вероятностью (1/2) можно получить либо ООО, либо ООР. После ООР вероятность выпадения ООО равна y. По формуле полной вероятности $x = 1/2 + y/2$. Аналогично, после ОР получаем две возможности ОРР и ОРО, поэтому $y = 0 + z/2$; после РО можем получить РОО и РОР, откуда $z = x/2 + y/2$. Решение системы уравнений: $x = 0.6$, $y = 0.2$, $z = 0.4$. Искомая вероятность есть $\frac{1}{4}(x + y + z) = 0.3$

15-10. Покажем, что последовательности a_n и b_n совпадают. Действительно,
1. $b_n = a_n + 1 - c_n \leqslant a_n$.
2. Предположим теперь, противное совпадению a_n и b_n, то есть что $b_k < a_k = m$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Из сюръективности a следует, что найдутся числа $n_1, \ldots, n_{m-1}$ такие, что $a_{n_i} = i$, $i = 1, \ldots, m-1$. Тогда $b_{n_i} \leqslant a_{n_i} = i \leqslant m-1$ и, следовательно, одно из значений (принцип Дирихле) b_{n_i} совпадёт с b_k. Это противоречит инъективности b_n, поскольку по определению $n_i \neq k$.

Решения, 2016 г.

16-1. Если $f(x) = ax + b$, то $f''(x) = 0$, а значит, и $f(x) = 0$. Сравним степени левой и правой частей. Если $f(x)$ имеет степень $n \geqslant 2$, то $f'(x)$ - степень $(n-1)$, а $f''(x)$ - степень $(n-2)$. Значит, $n = n - 1 + n - 2$, откуда $n = 3$. Будем искать $f(x)$ в виде $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Уравнение приобретает вид

$$8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$$

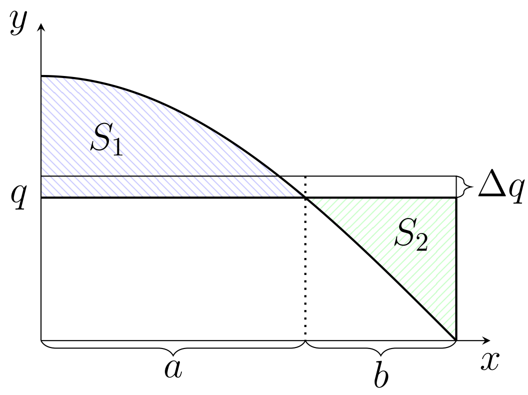
$$8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = 18a^2x^3 + 18abx^2 + (6ac + 4b^2)x + 2bc$$

Значит, $a = 4/9$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.

16-2. Пусть O - центр окружности ω, R - ее радиус.Обозначим $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{MO} = \mathbf{x}$, тогда $\overrightarrow{MA} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, $\overrightarrow{MB} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{MC} = \mathbf{x} + \mathbf{c}$. Имеем
$(\mathbf{x} + \mathbf{a})^2 + (\mathbf{x} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{x} + \mathbf{c})^2 = 3\mathbf{x}^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b^2} + \mathbf{c^2} = 3R^2 + \mathbf{a^2} + \mathbf{b^2} + \mathbf{c^2}$.

16-3. Построим график функции $y = 2x^{2x}$. При $x \to 0$ имеем $y \to 2$, при $x \to +\infty$ также и $y \to +\infty$.Кроме того, $y' = y \cdot 2(\ln x + 1)$, так что функция имеет минимум в точке $x = 1/e$, равный $\frac{2}{e^{2e}} \approx 0.96$. Итак, уравнение $y = 1$ имеет два корня, которые можно найти подбором.

16-4. Значение интеграла равно сумме площадей двух криволинейных треугольников, ограниченных косинусоидой $y = \cos x$ и прямой $y = q$. Исследуем, как меняется эта сумма при изменении q на небольшую положительную величину $\triangle q$. Мы видим, что "левая" площадь уменьшилась примерно на $a \triangle q$, а "правая" — увеличилась на $b \triangle q$, в целом площадь уменьшится на $(a-b) \triangle q$. Итак, если $a > b$, то искомую площадь можно уменьшить, увеличивая q. Аналогично, если $a < b$, её можно уменьшить, уменьшая q. Мы видим, сумма площадей минимальна когда $a = b = \pi/4$. Поэтому наименьшее значение интеграла достигается при $q = \cos \pi/4$.



16-5. Рассмотрим сначала случай квадратных матриц. Пусть матрица X обратима, умножим матрицы $E + XY$ и $E + YX$ на X^{-1} слева и справа соответственно. Получим одинаковые матрицы $X^{-1} + Y = A$. Итак, $E + XY = XA$, $E + YX = AX$. Ясно, что определители этих матриц совпадают.
Рассмотрим теперь равенство $\det(E + XY) = \det(E + YX)$ как равенство многочленов от компонент матрицы X. Оно выполняется почти всюду в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$. В силу непрерывности это равенство выполняется и для вырожденных матриц, которые образуют в $\mathbb{R}^{n\times n}$ множество меры ноль.
Если же матрицы X и Y прямоугольные (размерности $m \times n$ и $n \times m$ соответственно), их можно дополнить нулями до квадратных, что сводит задачу к разобранному случаю.

16-6. а.) Например, запишем равенство $x^2 = x^3 + (x^2 - x^3)$. Здесь x^3 - монотонно и, следовательно, инъективно. Значения функции $(x^2 - x^3)$ пробегают всю числовую прямую, она сюръективна.
б) Предположим, что $f(x) = g(x) + h(x)$, причём $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — инъективно, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сюръективно. Имеем $g(x) = -h(x)$ при $x \neq 0$ и $g(0) = 1 - h(0)$. В силу инъективности функции g, ни при каком $x \neq 0$ она не принимает значение $1-h(0)$. Следовательно, ни при каких x функция h не принимает значение $-(1 - h(0)) = h(0) - 1$. Это противоречит инъективности функции h.

16-7. Утверждение задачи будем доказывать по индукции. Обозначим искомое количество разбиений через $T(n)$. Число 2 можно разбить единственным способом, $n = 2$, так что $T(2) = 1$. То же верно и для $n = 3$.
Рассмотрим произвольное упорядоченное разбиение числа $n > 3$. Имеется две альтернативы.

1) Последнее число в разбиении больше 2. Вычтем из него единицу, получим (произвольное) допустимое разбиение числа $(n-1)$.
2) Последнее слагаемое разбиения равно 2. В силу того, что $n > 3$, в разбиении есть и другие слагаемые. Вычеркнем последнее слагаемое, получим произвольное разбиение числа $(n-2)$.
Значит $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$.

16-8. Обозначим через A_k событие "на k-м шаге сумма случайных чисел не больше 1". Тогда событие B_k ="сумма чисел превысила 1 на k-м шаге" имеет вид $B_k = A_{k-1}\,\overline{A_k}$ (на $(k-1)$-м шаге сумма не превосходит 1, а на k-м это условие уже не выполняется). Ясно, что $A_{k-1} \supset A_k$, так что $P(B_k) = P(A_{k-1}) - P(A_k)$.
Рассмотрим k случайных чисел $x_1, x_2 \dots x_k$ как координаты в k-мерном единичном кубе.Множество точек, соответствующих неравенству $x_1+x_2+\ldots+x_k \leqslant 1$ — это симплекс объёма $\frac{1}{k!}$. Итак, $P(A_k) = \frac{1}{k!}$ и $P(B_k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{(k-1)}{k!}$. Математическое ожидание величины k равно сумме ряда

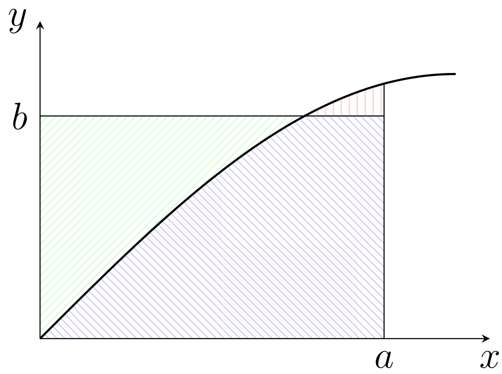
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(B_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = e$$

16-9. Вершина куба задаётся вектором из n нулей и единиц. Пусть $A = (0, 0 \dots 0)$, тогда $B = (1, 1 \dots 1)$. Всякая другая вершина имеет в координатной записи как 0, так и 1.
Грань размерности $(n-2)$ задаётся двумя уравнениями вида $x_i = 0$ или $x_i = 1$. Рассмотрим n граней вида $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \dots \begin{cases} x_{n-1} = 0 \\ x_n = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$. Они не содержат вершины A и B. Покажем, что любая другая вершина лежит в одной из этих граней.
Действительно, рассмотрим все нули в списке координат вершины C. Если после некоторого из нулей стоит 1, например на месте номер $(k+1)$, то C лежит на грани номер k. Если же все нули стоят в конце списка, то первая координата равна 1. Значит, вершина C лежит на грани номер n.

16-10. Доказательство основано на том, что числовая прямая связна, но теряет связность, если выколоть из неё точку.
Предположим, что для некоторого X пространство $Y = X \times X$ гомеоморфно $\mathbb{R}$. Тогда Y линейно связно. Первая координата непрерывной кривой, соединяющей точки $A(u_0, v_0)$ и $B(u_1, v_1)$ этого пространства является непрерывной кривой из точки u_0 пространства X в точку u_1 того же пространства. Поэтому пространство X линейно связно.

Выберем некоторую точку $y = (x_1, x_2) \in Y$, ей при гомеоморфизме соответствует число $\alpha \in \mathbb{R}$. Но подпространство $Y \setminus \{y\}$ по-прежнему линейно связно. Действительно, между любыми двумя точками $A_1(u, v_1)$ и $A_2(u, v_2)$ при $u \neq x_1$ существует непрерывный путь, оставляющий неизменным первую координату. Аналогично, между любыми двумя точками $B_1(u_1, v)$ и $B_2(u_2, v)$ при $v \neq x_2$ существует "горизонтальный" путь. Очевидно, что не более чем тремя такими "вертикальными" или "горизонтальными" отрезками можно соединить любые две точки в декартовом квадрате Y.

Решения, 2017 г.



17-1. Интеграл представляет собой площадь под криволинейной трапецией. Если вторую трапецию отобразить симметрично относительно биссектрисы координатного угла, то получится трапеция, ограниченная той же синусоидой и осью ординат. Но граничные точки, соответствующие $x = a$ и $y = b$ в общем случае не совпадают, поэтому в дополнение к ab в сумме интегралов содержится ещё добавочный кусочек.

17-2. Если поменять местами номера у любых двух вершин многогранника, то в матрице A поменяются местами соответствующие строки и соответствующие столбцы. После такой двойной перестановки определитель не изменится. Очевидно, что путём последовательной смены номеров вершин можно получить все возможные варианты.

17-3. Матрица $(E + A)$ невырождена, поскольку $(E + A)(E - A + A^2 - A^3 + A^4 - - A^5 \ldots) = E$. Поэтому $X = -(E + A)^{-1}A$.

17-4. Обозначим рассматриваемое число через N, пусть его запись состоит из n цифр. Пусть число $M = N \times 10^{n+2}$, его десятичная запись состоит из $2n + 2$ цифр. Пусть X^2 – наибольший полный квадрат, меньший M. Докажем, что $Y = (X+1)^2$ – искомый полный квадрат. Заметим, что $X < 10^{n+1}$ и $2X + 1 < 10^{n+2}$. Поэтому $Y = X^2 + 2X + 1$ попадает в промежуток $[M, M + 10^{n+2})$.

17-5. Решим задачу для города $n \times n$. Дорога Антона и Бориса занимает $2n$ кварталов. Очевидно, что они могут встретиться только на середине пути, т.е. пройдя n кварталов. Пути Антона и Бориса при этом будут представлять собой ломаные из n звеньев. Сделаем параллельный перенос ломаной Бориса так, чтобы она была продолжением ломаной Антона (если Антон и Борис встретились, то перенос будет на нулевой вектор, иначе на ненулевой). Получим случайную ломаную длины $2n$, исходящую из левого верхнего угла, каждое звено которой направлено или вниз или вправо. Число таких ломаных $N = 2^{2n}$. Встреча произойдет, если в этой ломаной будет ровно n звеньев, направленных вниз. Их число $M = C_{2n}^{n}$. Итоговая вероятность $p = M/N = C_{2n}^{n}/2^{2n}$. Приняв $n = 5$, получим $p = 252/1024$.

17-6. Каждой искомой последовательности длины n, $n > 1$, взаимно однозначно соответствует последовательность длины $n-1$ из единиц и двоек, сумма чисел в которой не делится на 3. Поэтому, если $x(n)$ – искомое количество последовательностей, $y(n)$ – количество остальных последовательностей длины n из единичек и двоек, то $x(n) = y(n-1)$ при $n > 1$. Очевидно, что $x(1) = 0$, $x(n) + y(n) = 2^n$, следовательно

$$x(n) = 2^{n-1} - x(n-1) = 2^{n-1} - 2^{n-2} + \ldots + (-1)^n 2^1 = (2^n + (-1)^n 2)/3.$$

17-7. Предположим противное: $S = \frac{p}{q}$. Тогда число $S \cdot (q!)^2 = p(q-1)!q!$ — целое число. Но

$$S \cdot (q!)^2 = \sum_{n=1}^{q} \frac{(q!)^2}{(n!)^2} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(q!)^2}{(n!)^2}.$$

Первое слагаемое в правой части — целое число. Поэтому целым должно быть и второе слагаемое. Однако,

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(q!)^2}{(n!)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{2k}} = \frac{1/(q+1)^2}{1-1/(q+1)^2} = \frac{1}{q(q+2)} \leqslant \frac{1}{3}.$$

17-8. Обозначим упомянутые проекции соответственно через S и s.
Будем считать, что куб расположен по одну сторону от плоскости (обозначим её α) и что его вершина A лежит на α. Пусть C – противоположная вершина куба, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к α, направленный в ту сторону от плоскости, в которой лежит куб. Тогда длина проекции куба на перпендикуляр к α равна $s = (\mathbf{d}, \mathbf{n})$.
Пусть, далее, B_1, B_2, B_3 — концы ребер куба, выходящих из вершины A, $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{AB_i}$, а $\mathbf{a}_i$ — проекции векторов $\mathbf{e}_i$ на плоскость α. Имеем: $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i + \lambda_i \mathbf{n}$.
Площадь S равна сумме площадей трех параллелограммов (возможно вырожденных), построенных на векторах $\mathbf{a}_i$. Поэтому

$$\begin{aligned} S &= |(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n})| + |(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{n})| + |(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{n})| = |(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})| + |(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{n})| + |(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{n})| = \\ &= |([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \mathbf{n})| + |([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{n})| + |([\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], \mathbf{n})| = (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}) + (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) + (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}) = \\ &= (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{n}) = (\mathbf{d}, \mathbf{n}) = s. \end{aligned}$$

17-9. Две компоненты A и B определим, соответственно, неравенствами

$$x^2+y^2-z^2-w^2<0 \quad \text{и} \quad x^2+y^2-z^2-w^2>0.$$

Покажем, что множество A связно. Множество A можно представить как объединение полноторий

$$A(a^2): \quad x^2+y^2<a^2, \quad z^2+w^2=a^2, \quad a^2\in(0,\infty).$$

Каждая точка (x_0,y_0,z_0,w_0) полнотория $A(a^2)$ соединяется отрезком прямой, целиком принадлежащей полноторию $A(a^2)$, с точкой $(0,0,z_0,w_0)$. Далее, точка $(0,0,z_0,w_0)$ дугой окружности $x=0$, $y=0$, $z^2+w^2=a^2$ соединяется с точкой $(0,0,0,a)$. Аналогично, точка (x_1,y_1,z_1,w_1) полнотория $A(b^2)$ соединяется непрерывным путем с точкой $(0,0,0,b)$. Точки $(0,0,0,a)$ и $(0,0,0,b)$ соединяются отрезком прямой $(0,0,0,a+tb)$, $t\in[0;1]$, очевидно принадлежащим множеству A. Таким образом, A – линейно связно и, следовательно, связно. Аналогичным образом, B – линейно связно и связно.

17-10. Очевидно, что $\varnothing\in\mathcal{L}$. Назовем рассматриваемые множества векторами, определим сумму векторов как симметрическую разность множеств, также определим на них операцию умножения на элементы поля $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ по формуле: $1\times A=A$, $0\times A=\varnothing$. Легко проверить, что выполнены все аксиомы линейного пространства над полем $\mathbb{F}_2$. По условию пространство конечномерно, пусть $e_1,\dots,e_n$ — его базис. Тогда все вектора пространства есть всевозможные линейные комбинации $e_1,\dots,e_n$, их 2^n штук. Поскольку 2017 не является степенью двойки то $|\mathcal{L}|\neq 2017$.

17-11. а) Пусть $(x_1,\dots,x_n)$ — цифры рассматриваемого билета, пусть $\xi_i=x_{2i}-x_{2i-1}$, $i=1,\dots,[n/2]$. Очевидно, что ξ_i — независимые случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией, обозначим её через V. По центральной предельной теореме для любого $\varepsilon>0$ имеет место соотношение

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i\right|<\varepsilon\sqrt{[n/2]V}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \tag{4}$$

Для чётного n билет является счастливым, если $\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i=0$. Для нечётного n билет является счастливым, если $\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i=x_n$. В любом случае вероятность того, что билет является счастливым меньше

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i\right|\leqslant 9\right). \tag{5}$$

Зафиксируем в (4) сколь угодно малое $\varepsilon>0$. Сравнивая левую часть этого неравенства с (5) получаем, что $P_{\Pi}(n)\xrightarrow{n\to\infty}0$.

б) Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — цифры рассматриваемого билета, $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Легко проверить, что с вероятностью $1/2$ сумма S нечётна. Очевидно, что в этом случае рассматриваемый билет не является счастливым по-казански.
Оценим долю билетов, содержащих, по крайней мере, 8 единичек. Обозначим рассматриваемое событие через A. Для оценки снизу $P(A)$ разобьём набор из n цифр на непересекающиеся группы по 8 цифр. Для каждой такой группы вероятность того, что она отлична от “11111111” равна $1 - 0.1^8$, поэтому

$$P(A) \geqslant 1 - \left(1 - 0.1^8\right)^{[n/8]} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Таким образом, для любого заранее заданного $\varepsilon > 0$ мы можем считать, что n настолько велико, что доля билетов, среди цифр которых не содержится 8 единичек, меньше ε. Докажем, что все билеты с чётной суммой S, содержащие, по крайней мере, 8 единичек являются счастливыми по-казански. Нам достаточно представить алгоритм выбора цифр, дающих в сумме $S/2$. Вычеркнем вначале из рассматриваемого билета 8 единичек. Будем включать в искомый набор по очереди все невычеркнутые цифры до тех пор, пока они либо не закончатся, либо их сумма после взятия следующей цифры не станет больше $S/2$. По построению, сумма полученного набора заключена в интервале $[S/2 - 8, S/2]$. Дополнив взятый набор необходимым числом единиц (из тех, что были вычеркнуты вначале), получим искомый набор.
Таким образом, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n выполнено $1/2 - \varepsilon \leqslant P_{\text{К}}(n) \leqslant 1/2$ и, значит, $P_{\text{К}}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 1/2$.

Решения, 2018 г.

18-1. Представляя каждый столбец матрицы A как сумму столбца, состоящего из единиц, и столбца, содержащего x_k, приходим к тому, что $\det A$ является суммой определителя матрицы C и определителей матриц, в которых либо 1) один столбец состоит из единиц либо 2) два или более столбцов состоят из единиц.

18-2. За $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n+1}$ обозначим векторы с началом в точке O и концами в вершинах. Очевидно, что $\sum \vec{e}_k = 0$. Следовательно, сумма скалярных произведений $\sum(\vec{e}_1, \vec{e}_k) = 0$. Длины всех векторов обозначим a, искомый угол через α. Учтем, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = a^2$, а для $k > 1$ имеем $(\vec{e}_1, \vec{e}_k) = a^2 \cos\alpha$. Отсюда получим $a^2(1+n\cos\alpha) = 0$ и $\cos\alpha = -1/n$.

18-3. Мы должны найти все x, для которых $x^{2019} - x$ делится на 2018. Поскольку $2018 = 2 \times 1009$, то это означает, что 1) $x^{2019} - x$ чётно; 2) $x^{2019} - x$ делится на

1009. Первое условие верно при любом целом x. Второе эквивалентно: $x(x^{2018} - 1) = x(x^{1009} - 1)(x^{1009} + 1)$ делится на 1009. По малой теореме Ферма $x^{1009} \equiv x \pmod{1009}$. Имеем

$$x(x^{1009} - 1)(x^{1009} + 1) \equiv x(x - 1)(x + 1) \pmod{1009}.$$

Значит, x или $x - 1$ или $x + 1$ делятся на 1009. Объединив все варианты таких x из искомого диапазона, получим ответ.

18-4. Заменим n на y. Поскольку при $y > 1$ подынтегральную функцию можно ограничить снизу как $1/(2\sqrt{y})$ (при $0 < z < 1$ выполнено: $\ln(1 + z) - z/2 > 0$), числитель стремится к бесконечности при $y \to \infty$. Использовав правило Лопиталя, получим

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\int\limits_1^y \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx}{\sqrt{y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)}{\dfrac{1}{2\sqrt{y}}} = \left\{\text{Замена} \frac{1}{\sqrt{y}} = t\right\} = 2\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 2.$$

18-5. Число w является корнем многочлена $F(z)$ тогда и только тогда, когда число $w + z_0$ является корнем многочлена $G(z) = F(z - z_0)$. При этом $G'(z) = F'(z - z_0)$, то есть и для производных это свойство сохраняется: w является корнем многочлена $F'(z)$ тогда и только тогда, когда $w + z_0$ является корнем многочлена $G'(z) = F(z - z_0)$.

Таким образом, можно считать, что центр n-угольника расположен в нуле. Отсюда следует, что $F(z) = az^n + b$, а $F'(z) = naz^{n-1}$.

18-6. Имеем: $A < 1 + \displaystyle\int_1^{36} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1 + 2\sqrt{x}\Big|_1^{36} = 11$, $B > \displaystyle\int_1^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_1^{27} + \frac{1}{3} = 12\frac{1}{3}$.

18-7. Задача аффинная. Выбираем систему координат, в которой точка B является началом координат, точка A имеет координаты $(0; 2)$, точка C имеет координаты $(2; 0)$, а точка D имеет координаты $(2a; 2b)$, $a \neq 0; 1$, $b \neq 0; 1$. Тогда середины диагоналей имеют координаты $(1; 1)$, $(a; b)$, а для нахождения точек пересечения противоположных сторон составляем следующие пропорции: $\dfrac{2}{2b} = \dfrac{x}{x - 2a}$ и $\dfrac{2}{2a} = \dfrac{y}{y - 2b}$, откуда находим $x = \dfrac{2a}{1 - b}$, $y = \dfrac{2b}{1 - a}$ и получаем координаты третьей точки $\left(\dfrac{a}{1 - b}; \dfrac{b}{1 - a}\right)$. Остаётся проверить, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ \dfrac{a}{1 - b} & \dfrac{b}{1 - a} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

18-8. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus X$ — произвольная точка, а S — множество прямых, проходящих через точку $\mathbf{x}$. Множество S имеет мощность континуум, множество X — счётно, поэтому существуют две не параллельные прямые l_1 и l_2, проходящие через точку $\mathbf{x}$ и не содержащие точек множества X. Пусть теперь $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus X$ — любая другая точка, а m — прямая, проходящая через точку $\mathbf{y}$ и не содержащая точек множества X. Прямая m пересекает хотя бы одну из прямых l_1 и l_2 в некоторой точке $\mathbf{z} \notin X$. Ломаная $\mathbf{xzy}$ соединяет точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и лежит целиком в $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

18-9. В силу симметрии один из концов (например, конец A) хорды можно зафиксировать, а второй конец расположить в произвольной точке B полуокружности AD. Введем случайную величину α, равную углу BAD. Случайная величина α равномерно распределена на отрезке $(0, \pi/2)$. В самом деле, вероятность попадания α в любой интервал $(0, b)$, где $b \in (0, \pi/2)$, пропорциональна длине b этого интервала, поскольку вписанный угол с вершиной в точке A равен половине центрального угла, опирающегося на эту же дугу. Таким образом, $P(\alpha < b) = b/(\pi/2)$. Рассмотрим случайную величину ρ, равную расстоянию середины хорды AB до центра окружности. Очевидно, $\rho = \sin(\alpha)$. Для функции распределения случайной величины ρ имеем равенство

$$F_\rho(x) = P(\rho < x) = P(\sin(\alpha) < x) = P(\alpha < \arcsin x) = (2/\pi)\arcsin x.$$

Её плотность распределения равна $f_\rho(x) = F'_\rho(x) = (2/\pi)/\sqrt{1-x^2}$. Вероятность попадания точки $Q(\rho, \varphi)$ в кольцо $K = \{Q(\rho,\varphi)|\ r < \rho < r + dr\}$ равна $P(r < \rho < r + dr) = f_\rho(r)\, dr$. Плотность $f_\eta(Q(\rho, \varphi))$, очевидно, не зависит от φ. Поскольку площадь кольца K равна $2\pi r\, dr$, то

$$f_\eta(r, \varphi) = f_\rho(r)\, dr/(2\pi r\, dr) = 1/\left(\pi^2 r\sqrt{1-r^2}\right) \quad \text{для любого } r \text{ из } (0,1).$$

Функция $f_\eta(r, \varphi)$ достигает минимума при $r = 1/\sqrt{2}$, т. к.

$$(f_\eta(r,\varphi))'_r = \frac{2r^2 - 1}{\pi^2 r^2 (1-r^2)^{3/2}}.$$

Отсюда минимальное значение функции f_η равно $2/\pi^2$.

18-10. *1 способ* Будем решать более общую задачу, где рассматриваемыми равенствами являются $k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2 = \cdots = k_1x_1^{n+1} + k_2x_2^{n+1} + \cdots + k_nx_n^{n+1} = c$, где k_i – натуральные числа, и докажем, что $x_i \in \{0, 1\}$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Рассуждаем по индукции. Поскольку базис индукции $n = 1$ очевиден, то перейдем сразу к индукционному шагу, и предположим, что задача решена для всех $m < n$, где k_i – натуральные числа ($i = 1, \ldots, m$). Введём фиктивную переменную $x_{n+1} = 1$ и рассмотрим определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j\le n+1} (x_j - x_i).$$

Умножив обе части на $\prod\limits_{i\le n+1} x_i$, получим

$$\left(\prod_{i\le n+1} x_i\right)\left(\prod_{i<j\le n+1} (x_j - x_i)\right) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n+1}^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Прибавив к n-му столбцу линейную комбинацию остальных и помня о том, что $x_{n+1} = 1$, согласно первоначальным равенствам, получим

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & c & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & c & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \ldots & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $\left(\prod\limits_{i\le n+1} x_i\right)\left(\prod\limits_{i<j\le n+1} (x_j - x_i)\right) = 0$. Возможны следующие случаи:

(1) Существует i, что $x_i = 0$.

(2) Существует i, что $x_i = x_{n+1} = 1$.

(3) Существуют $i, j \le n$, что $x_i = x_j$.

Во всех случаях задача очевидных образом сводится к задаче для $n-1$, для которой по индукции имеем $x_t \in \{0, 1\}$, где $t = 1, \ldots, n$ и также $t \ne i$. Таким образом, индукционный шаг завершен (элемент x_i был рассмотрен в разборе случаев и, очевидно, $x_i \in \{0, 1\}$ во всех случаях).

2 способ. Без ограничения общности можно считать, что для каждого i выполнено $x_i \ne 0$. Обозначим $f(k) = \sum_{i=1}^n x_i^k$ и пусть $P(x) = x^n - \sum_{k=1}^n a_k x^{n-k}$ – многочлен, имеющий корни $x_i, i = 1, \ldots, n$ (очевидно, что $a_n \ne 0$). Тогда, сложив $P(x_i)$ по всем корням, получим уравнение $f(n) = \sum_{k=1}^n a_k f(n-k)$. Аналогично, сложив $x_i P(x_i)$ по всем корням, получим $f(n+1) = \sum_{k=1}^n a_k f(n+1-k)$. По условию

$f(1) = f(2) = \ldots = f(n+1) = c$. Подставив эти значения в последнее уравнение и сравнив его с предыдущим, получим $c = f(0)$. Но $f(0)$ по определению совпадает с n, следовательно, $c = n$.

Для любого приведённого полинома n-й степени его коэффициенты являются симметрическими функциями его корней x_i, однозначно выражаемыми через суммы $f(k)$ при $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $P(x)$ однозначно определён, однозначно определены и его корни, которые могут быть равны только единице.

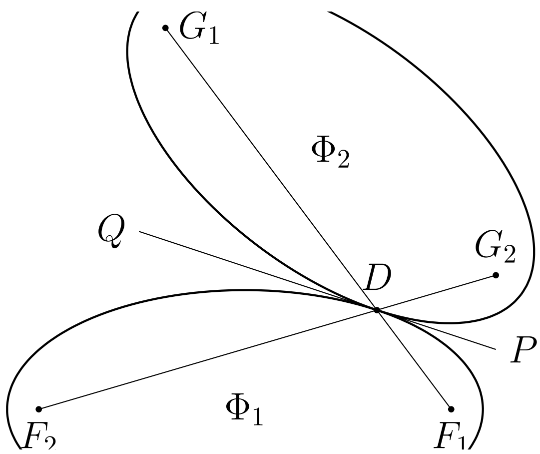
Решения, 2019 г.

19-1. Если x – корень многочлена, то он удовлетворяет уравнению $1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$. Справа – монотонно убывающая от $+\infty$ до 0 на интервале $(0, +\infty)$ функция, она принимает значение 1 на этом интервале только в одной точке.

19-2. Воспользуемся свойством смешанного произведения $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}$. Тогда $\mathbf{v}\cdot((\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{w}) = -((\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})) = -|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|^2$. Следовательно, нуль получается тогда и только тогда, когда $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ равно нуль-вектору. А это равносильно коллинеарности векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$.

19-3. Поскольку $f(-x)$ непрерывно дифференцируема, то $f''(x) = (f(-x))' = -f(x)$. Отсюда $f(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$, при этом, условиям удовлетворяет только случай $A = B \neq 0$. Значит $f(x) = C\sin(x + \pi/4)$, где $C \neq 0$.

19-4. Обозначим через F_1, F_2 фокусы первого эллипса, через G_1, G_2 – второго. Через точку D касания проведём касательную PQ к эллипсам. В процессе качения эллипс Φ_2 все время оказывается симметричным эллипсу Φ_1 относительно PQ. Поэтому $\angle F_1DF_2 = \angle G_2DG_1$. Из оптического свойства эллипсов следует $\angle F_1DP = \angle F_2DQ$, как следствие $\angle F_1DG_2 = \angle F_2DG_1$. Т.о., точки F_1, D, G_1 лежат на одной прямой, длина отрезка $F_1G_1 = F_1D + G_1D = F_1D + F_2D = 2a$ Значит, траектория G_1 – окружность, с радиусом $2a$ и центром в точке F_1. Аналогично, что траектория G_2 – окружность с радиусом $2a$ и центром в точке F_2.



19-5. а) По индукции доказываем, что в группе из $5n - 4$ студентов имеется n не симпатичных друг другу студентов. Базис $n = 1$ очевиден. Отметим, что в орграфе симпатий N студентов с указанными условиями имеется не более, чем

$2N$ ребер, так что сумма всех степеней вершин (входящих и исходящих) не превышает $4N$ и, поэтому, имеется вершина, имеющая степень не более 4. Чтобы обосновать индукционный шаг теперь достаточно в группе из $N = 5(n+1) - 4$ студентов найти студента S, который связан симпатиями не более, чем с 4 другими. Если временно изъять студента S вместе с этими 4-мя, то получим $5n - 4$ студентов, среди которых по индукционному предположению имеется n не симпатизирующих. Присоединим к ним нашего студента S.
б) Остаётся доказать, что среди 20-ти студентов может не найтись 5 не симпатизирующих друг другу. Например так: разобьем группу на 4 пятерки, так чтобы в каждой пятерке $\{1,2,3,4,5\}$:
1 симпатичен 2 и 3; 2 симпатичен 3 и 4; 3 симпатичен 4 и 5; 4 симпатичен 5 и 1; 5 симпатичен 1 и 2.
По принципу Дирихле, двое из любых пяти человек попадут в одну и ту же пятерку, а в ней каждый связан с каждым.

19-6. Массу тел примем за единицу. Разделим второе тело (его температуру обозначим T_0) на n частей массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и поочередно будем обмениваться теплом с первым телом. Заметим, что температура первого тела станет $T = T_0(1 - [(1+m_1)\ldots(1+m_n)]^{-1})$. Т.о., максимум температуры достигнется при максимуме функции $f = \prod_k (1+m_k)$ при ограничении $\sum_k m_k = 1 \quad\Rightarrow \sum_k (1+m_k) = n+1$. Максимум произведения чисел с фиксированной суммой достигается при равных сомножителях, откуда $m_k = 1/n$. Тогда $f = (1+1/n)^n$ – монотонно возрастающая при увеличении n функция, при $n \to \infty$ получаем второй замечательный предел. Значит, $\sup(T) = T_0(1 - e^{-1})$.

19-7. Искомый интеграл $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy \cdot e^{2y}}{(e^x+e^y)^2} dxdy$. В силу симметрии заметим, что $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy \cdot e^{2x}}{(e^x+e^y)^2} dxdy$. Тогда, сложив два таких интеграла, получим:

$$2I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy(e^{2x}+e^{2y})}{(e^x+e^y)^2} dxdy.$$

Далее, применив свойства интегралов, докажем искомое неравенство:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy(e^{2x}+e^{2y})}{(e^x+e^y)^2} dxdy \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^1 xy\frac{1}{2} dxdy = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 xdx\right)^2 = \frac{1}{4\cdot 4} = \frac{1}{16}$$

Осталось показать верность неравенства, использованного выше: $\frac{e^{2x}+e^{2y}}{(e^x+e^y)^2} \geqslant \frac{1}{2}$. Это неравенство эквивалентно неравенству $2e^{2x} + 2e^{2y} \geqslant e^{2x} + 2e^x e^y + e^{2y}$, которое легко следует из неравенства $e^{2x} - 2e^x e^y + e^{2y} \geqslant 0$.

19-8. Сложив равенства $x_1^2 = 1$, $x_2^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1, \ldots, x_{2020}^2 = x_{2019}^2 + 2x_{2019} + 1$, получим $x_{2020}^2 = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2019}) + 2020$. Отсюда $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2019} = \frac{1}{2}|x_{2020}^2 - 2020|$. Также заметим, что x_{2020} является чётным (в последовательности идет чередование чётных и нечётных чисел). Значение $|S|$ минимально, если $|x_{2020}| = 44$. Пример для этого варианта: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\ldots$ $x_{44} = 44$, $x_{45} = -45$, $\ldots$ $x_{2n} = 44$, $x_{2n+1} = -45$, $\ldots$ $x_{2019} = -45$.

19-9. а) Проверка тривиальна.
б) *1 способ.* Нетрудно проверить, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Поэтому доказываемое утверждение верно для верхне-треугольных матриц с нулевым следом. Для матриц, не являющихся верхне-треугольными, утверждение следует из равенства

$$\begin{pmatrix} -c & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b/c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -b/c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ при } c \neq 0.$$

2 способ. Заметим, что если матрица A подобна матрице $BC - CB$, то она сама имеет вид $B'C' - C'B'$. Действительно,

$$A = T^{-1}(BC - CB)T = (T^{-1}BT)(T^{-1}CT) - (T^{-1}CT)(T^{-1}BT) = B'C' - C'B'$$

при $B' = T^{-1}BT$ и $C' = T^{-1}CT$. Теперь достаточно установить, что любая ненулевая матрица A размера 2×2 с нулевым следом подобна матрице вида (частный случай формы Фробениуса)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, пусть x – ненулевой вектор-столбец 2×1, не являющийся собственным для матрицы A. Такой вектор должен существовать; в случае, когда оба элемента стандартного базиса $\{e_1, e_2\}$ являются собственными, соответствующие собственные значения должны в сумме давать ноль, что позволяет рассмотреть несобственный вектор $x = e_1 + e_2$. Тогда система $\{x, Ax\}$ образует базис двухмерного пространства. Т.к. след матрицы нулевой, мы должны иметь $A(Ax) = -ax$ для некоторого числа a.

3 способ. Матрицу A можно представить в виде $A = \begin{pmatrix} a_x & a_z \\ a_y & -a_x \end{pmatrix}$. Возьмём $B = \begin{pmatrix} b_x & b_y \\ b_z & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_x & c_y \\ c_z & 0 \end{pmatrix}$. Теперь $A = BC - CB$ сводится к

$$\begin{cases} a_x = b_y c_z - b_z c_y \\ a_y = b_z c_x - b_x c_z \\ a_z = b_x c_y - b_y c_x \end{cases}$$

Интерпретируем эти величины как декартовы компоненты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в $\mathbb{E}^3$, тогда система равносильна $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$. Задача свелась к следующей: показать, что любой вектор в $\mathbb{E}^3$ можно представить в виде векторного произведения двух векторов.

19-10. Искомая случайная величина представляется в виде $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i принимает значение единица, если i-го человека не выбрал никто из соседей, $\xi_i = 0$ иначе. Очевидно, что ξ_i принимает значение единица с вероятностью $1/4$, $\mathbb{M}\xi_i = 1/4$. В дальнейшем мы будем многократно использовать свойство аддитивности матожидания. При решения пункта б) нам так же понадобится тот факт, что матожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их матожиданий.

а) Имеем

$$\mathbb{M} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{M}\xi_i = n/4.$$

Заметим, что в пункте а) мы не использовали в полной мере неравенство $n > 4$, достаточно было предположить, что $n > 2$.

б) По определению дисперсии, а так же в силу равноправности ξ_i, имеем

$$\mathbb{D} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{M}\Big(\xi_i \sum_{j=1}^{n} \xi_j\Big) - \left(\frac{n}{4}\right)^2 = n\ \mathbb{M}\Big(\xi_1 \sum_{j=1}^{n} \xi_j\Big) - \frac{n^2}{16} = n\Big(\mathbb{M}\xi_1^2 + \sum_{j=2}^{n} \mathbb{M}\xi_1\xi_j\Big) - \frac{n^2}{16}.$$

Поскольку $\xi_1^2 \equiv \xi_1$, первое слагаемое в скобках равно $1/4$. Заметим, что соседи первого человека не пересекаются с соседями j-го человека, при $j \notin \{3, n-1\}$, в этом случае величины ξ_1 и ξ_j независимы, $\mathbb{M}\xi_1\xi_j = 1/4 \times 1/4 = 1/16$. Если же речь идёт о 3-м или же о $n-1$-м человеке, то их общий сосед с первым должен кого-то выбрать, поэтому $\xi_1\xi_3 \equiv 0 \equiv \xi_1\xi_{n-1}$. Имеем

$$\mathbb{D} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = n\left(\frac{1}{4} + (n-3) \times \frac{1}{16}\right) - \frac{n^2}{16} = n/16.$$

19-11. В геометрии Лобачевского площадь S треугольника связана с его углами α, β. γ формулой $S = q^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$, где q – постоянная, связанная с кривизной поверхности. Обозначив искомый угол за x, запишем $S = q^2(\pi - 3x)$. Поделив пятиугольник на три треугольника и сложив их площади, получим $S = q^2(3\pi - 5\frac{\pi}{2}) = q^2\frac{\pi}{2}$. Значит, $\pi - 3x = \frac{\pi}{2}$, откуда находим x.

Примечания

99-1. Это тождество — свертка Вандермонда [3]. Однако, еще в 1303 г. оно было известно Чжу Ши-цзе из Китая. (см., напр., [4]).

99-2. С этой задачей связан известный математический софизм, “доказательство”, что 2 = 4: Пусть z это один из пределов, рассматриваемых в условии задачи, то есть $z = a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ для некоторого a. Очевидно, что $z = a^z$, откуда $a = z^{1/z}$. Для $z = 2$ имеем $a = \sqrt{2}$ и для $z = 4$ имеем $a = 4^{1/4} = \sqrt{2}$. Но для фиксированного числа a не может быть двух пределов выражения $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, значит 2 = 4. Читатель, решивший задачу 99-2, легко обнаружит ошибку в этом “доказательстве”.

99-6. Это задача № 4355 из “Задачника” [5], автор — М.П.Буловацкий.

Аналогичная задача с параболой $y = x^2$ вместо вместо функции $y = x^3$ была ранее предложена А.А. Егоровым в Турнире Городов в 1996 году [6].

99-7. Это задача 50 из [7].

01-7. Эта задача предлагалась на Московской математической олимпиаде в 1978 году [8].

Если использовать теорию меры, то 12 процентов в условии задачи можно увеличить до 49.9%.

Действительно, поскольку белым цветом закрашено 50.1% сферы, то найдутся две центральносимметричных области белого цвета ненулевой меры. Рассмотрим одну из них. По дифференциальной теореме Лебега, мера точек множества ненулевой меры, для которых не существует окрестности, в которой плотность точек сколь угодно высока, равна нулю. Поэтому мы можем найти в рассматриваемой области круг, в котором плотность белых точек больше 75%. Выберем в нём концентрический прямоугольник с вершинами белого цвета (то, что это можно сделать, легко доказывается методом, рассмотренным ранее в решении этой задачи, только в данном случае роль плоскостей симметрии играют прямые, проходящие через центр круга). Отметим симметричный прямоугольник в другой нашей области. Соединение двух прямоугольников даст искомый параллелепипед, у которого отмеченные прямоугольники являются основаниями.

02-1. Это задача 27.1 из [9].

02-5. Функции, обладающие свойством $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$ для всех $x, y \in \operatorname{dom} f$ называются субаддитивными. Если $\operatorname{dom} f = [0, \infty)$, то набор таких дифференцируемых функций менее тривиален (https://en.wikipedia.org/wiki/Subadditivity).
04-8, **08-6**. Эта задача есть в нескольких книгах без ссылок на первоисточник происхождения. См., например [10].
06-6. Задача была предложена И.С. Григорьевой (сюжет взят непосредственно из жизни). На олимпиаде в тексте задачи вместо отрицательного резус-фактора было ошибочно указан положительный.
07-5, **08-7**. Игра "Определитель" разбирается в [11].
08-5. Если учитывать возможность встречи и непосредственно в той вершине, куда муравей направляется, то вероятность встречи будет равна 25/27.
08-9. Тип таких задач подробно разбирается в книге [12], они встречаются еще у Льюиса Кэрролла. Сюжет о 3-х детях со старшим "рыжим" опубликован в [13], задача 45. Однако, математическая сущность задачи там немного другая и в условии присутствует ещё одно число, кроме количества неизвестных. Непосредственно задача **08-9** была предложена Э.Ю. Лернером.
Ещё более завораживающий вариант задачи о возрастах детей (в котором даже количество детей неизвестно) придуман Джоном Конвеем ещё в 1960-х (перевод условия задачи К.А. Кнопа):

Вчера вечером в автобусе я услышал разговор двух волшебников:
A: "У меня целое положительное количество детей; возраст каждого из них — натуральное число. Если ты сложишь их возраста, то получишь номер этого автобуса. Если ты перемножишь их возраста, то получишь мой собственный возраст".
B: "Как интересно! Если ты назовешь свой возраст и скажешь, сколько у тебя детей, смогу ли я узнать их возраста?"
A: "Нет, не сможешь!"
B: "Ага! Но теперь я знаю, сколько тебе лет!"
Какой номер у автобуса?

Ответ (единственно возможный): 12.
Решение: Пусть n_A — номер автобуса, n_W — возраст волшебника A, $x_1, \ldots, x_k$ — возраста детей, $x'_1, \ldots, x'_k$ — ещё один вариант возрастов детей. По условию:

$$x_1 + \ldots + x_k = x'_1 + \ldots + x'_k = n_A, \tag{7}$$
$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = x'_1 \cdot \ldots \cdot x'_k = n_W. \tag{8}$$

Важно, что есть ещё одно условие, вытекающее из последней фразы волшебника B. Оно заключается в том, что если $\{y_1, \ldots, y_m\}$ и $\{y'_1, \ldots, y'_m\}$ — ещё пара наборов натуральных чисел (возрастов детей), являющихся разбиением числа n_A (то есть $\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{m} y'_i = n_A$), то

$$\text{если } y_1 \cdot \ldots \cdot y_m = y'_1 \cdot \ldots \cdot y'_m = n'_W, \text{ то } n'_W = n_W. \tag{9}$$

Будем решать задачу перебором всевозможных значений $n_A = 2, 3, \ldots$, а при фиксированном n_A поиском пар наборов x и x', удовлетворяющих условиям (7) и (8) (удобнее всего такой поиск осуществлять с помощью компьютера). При $n_A < 12$ пары наборов, удовлетворяющих условиям (7) и (8) не существует (отметим, что количество слагаемых разбиений (7), т.е. количество элементов в наборах x и x', совпадает).
При $n_A = 12$ существует одна такая пара $x = \{4, 4, 3, 1\}$, $x' = \{6, 2, 2, 2\}$, $n_W = 48$. При $n_A = 13$ добавляется ещё пара $y = \{6, 6, 1\}$, $y' = \{9, 2, 2\}$, $n'_W = 36$. Последнее означает, что при всех $n_A \geqslant 13$ нарушается условие (9), поскольку в этом случае существует по крайней мере две пары разбиения числа n_A: первая пара получается из x и x' добавлением необходимого числа единиц, вторая получается аналогичным образом из наборов y и y', при этом, $48 = n_W \neq n'_W = 36$.
09-4. Эта задача — переизложение сюжета из статьи [14].
09-5. Задача была предложена Д.Х. Муштари.
Удивительно, но правильных решений этой задачи на олимпиаде предложено не было (участники пытались использовать специфические для трёхмерного случая замены координат и не доходили до ответа). В 5-мерном случае (именно такой вариант предложил изначально Д.Х.) правильных решений было бы, наверное, больше.
09-9. Задача и её решение является частным случаем работы [15], в которой доказано, что любое отображение в евклидовом пространстве размерности не менее двух, сохраняющее единичные расстояния, является изометрией. А.Д.Александров в [16, 17] поставил вопрос о характеризации метрических пространств с этим свойством. Наиболее общие результаты, касающиеся того, для каких метрических пространств взаимное сохранение единичных расстояний влечёт взаимное сохранение всех точек в шаре (ср. с пунктом "в" задачи) содержатся в работе [18].
10-6. В формулировке, предлагаемой на олимпиаде, особые точки a не были исключены, из-за чего решение оказалось более сложным, чем изначально предполагало жюри. Решение для этого случая см. в [1].
10-7. Другое решение той же задачи (с иной легендой) рассмотрено в [19].
10-8. Общий случай задачи (произвольное количество стеклянных шариков и этажей) рассмотрен в статье [20]. Там же есть некоторые ссылки по поводу первоисточников задачи.

11-2. Кривая, описанная в задаче, может быть параболой, лучом или точкой на плоскости.

11-5. Определитель близкой матрицы, в которой i, j-й элемент равен наибольшему общему делителю чисел (НОДу) i и j называется определителем Смита — см статью [21]. В этой же статье рассмотрены разные функции от НОДа. Особо выделены частные случаи $s = 0$, $s = 1$, $s = -1$ для функции "сумма s-х степеней всех делителей НОДа" (pp. 211–212). Рассмотренный в задаче случай соответствует, очевидно, показателю $s = 0$. Более подробно статья Смита разбирается в работе [22], задача совпадает с Proposition 3.23.

11-10. Это задача 3.150 из книги [23].

12-5. Задача предложена Ю.А. Альпиным. Более общий случай рассмотрен в статье [24].

12-10. Задача была предложена Д.Х. Муштари.

13-2. Автор задачи — М.Д.Бронштейн.

13-5. Задача была предложена Э.Ю. Лернером.

13-7. Для произвольного n искомое количество может быть посчитано по формуле $Fib(2n+2) - Fib(2n-2) - 2 = ((3+\sqrt{5})/2)^n + ((3-\sqrt{5})/2)^n - 2$ (элементарное доказательство см. в [25]). Эта формула впервые была выведена в работе [26], используя матричную теорему о деревьях Кирхгофа.

14-7. Это пародия на знаменитую задачу о разборчивой невесте (см. [27]). Математическая сущность задачи содержится в разделе 1.2.10 книги [28].

15-9. Уолтер Пенни рассмотрел общий случай игры, когда кидают монету до тех пор, пока она не выпадет одна из двух альтернативных последовательностей, на которые игроки делают ставки [29]. Как подсчитать вероятности выигрыша в игре Пенни для каждого из игроков см. в книге [4], с. 446–448. Парадокс Пенни заключается в том, что для любой последовательности, на которую ставит первый игрок, всегда найдётся последовательность той же длины, поставив на которую, второй игрок, выиграет у первого с вероятностью больше, чем $1/2$.

16-7. Эту задачу впервые рассмотрел Ойген Нетто в 1901 году: [30], последняя формула на стр. 134. Более подробно ою этой задаче и её обобщених см. Example 6.5, p. 28 из книги [31]

16-8. Это задача 3.128 из книги [23].

Она обсуждалась в блоге "задачи и головоломки на фэйсбуке" в более общей форме и с другой легендой:

Пьяница направляется к воротам своего дома, находясь на расстоянии x (метров) от них. Из-за нетвёрдости походки длина каждого его шага есть случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$. За воротами его тут же подхватит любимая жена. Пусть $f(x)$ есть матожидание количества шагов,

которое предстоит совершить. Найти:
а) явное выражение для $f(x)$ в виде линейной комбинации нескольких элементарных функций (количество слагаемых может зависеть от x);
б) предел разности $f(x) - 2x$ при x стремящемся к бесконечности.

Очевидно, что задача 16.8 представляет собой частный случай пункта а) этой задачи, когда $x = 1$. Ниже мы приведём достаточно неожиданные, как нам кажется, ответы пунктов а) и б) и решение задачи выше, принадлежащие Дмитрию Звонкину.
Ответ: а) $f(x) = \sum_{i=0}^{[x]}(i - x)^i e^{x-i}/i!$, где $[x]$ — целая часть x; б) $2/3$.
Комментарий к ответу: Поскольку выражение $(x-i)^i$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$ зануляется при $x = i$, то $f(x)$ представляет собой функцию, непрерывную везде, кроме точки $x = 0$. В частности, при $x \in [0, 1]$ имеем $f(x) = e^x$. Несмотря на наличие явной формулы в пункте а), пункт б) весьма нетривиален.
Решение: а) Очевидно, что $f(x) = 0$ при $x < 0$. Далее будем рассматривать ситуацию, когда пьяница стартует с точки $x > 0$. Величина первого шага y имеет единичную плотность на отрезке $[0, 1]$, после его совершения мы попадаем в точку $x - y$. При этом, для учёта количества шагов, совершённых из x, мы должны к количеству шагов, совершённых затем (уже из $x - y$), прибавить единицу. Получаем уравнение

$$f(x) = 1 + \int_0^1 f(x-y)\,dy = 1 + \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = 1 + \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x-1} f(t)\,dt. \quad (10)$$

Дифференцируя обе части этого равенства, выводим дифференциальное уравнение $f'(x) = f(x) - f(x-1)$, справедливое для всех $x > 0$. В частности, при $x \in (0, 1]$ имеем $f'(x) = f(x)$, откуда, (с учётом очевидного граничного условия $f(0) = 1$) получаем $f(x) = e^x$ для всех $x \in [0, 1]$. Решая уравнение $f'(x) = f(x) - e^{x-1}$ находим $f(x)$ при $x \in [1, 2]$, и так далее. Поскольку $g(x) = \sum_{i=0}^{[x]}(i - x)^i e^{x-i}/i!$ совпадает с $f(x)$ при $x \in [0, 1]$ и удовлетворяет уравнению $g'(x) = g(x) - g(x-1)$ при всех $x \geqslant 1$, то это и есть явная формула для $f(x)$.
б) Введём функцию $h(x) = f(x) - 2x$, у которой нам нужен предел на бесконечности. Пользуясь уравнением (10) получаем, что

$$\int_{x-1}^{x} h(t)\,dt = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt - \int_{x-1}^{x} 2t\,dt = (f(x) - 1) - (x^2 - (x-1)^2) = f(x) + 2x = h(x).$$

Иными словами, значение функции h в точке x равно её матожиданию в точках, в которые пьяница попадёт из точки x за один шаг. То же будет верно, если дать пьянице сделать два шага, а затем посчитать матожидание функции h в точках, в которые он мог попасть. Более общо, мы можем выпустить пьяницу из точки x, дать ему ходить как угодно, *один* раз отловить в любой момент и посчитать матожидание функции h в тех точках, где мы его отловили (то есть проинтегрировать

$h(t)$ по всем точкам отлова t по вероятностой мере, учитывающей вероятность отлова в каждой точке t).

Будем ловить пьяницу как обычно, за воротами, то есть на участке $-1 < t < 0$. Функция $h(t)$ совпадает на этом интервале с $-2t$. Но, чтобы учесть все траектории, мы должны узнать, какие шансы, что заступ пьяницы за ворота будет равен $-t$.

Представим себе, что пьяница шагает к нам откуда-то из-за горизонта. Мы видим его случайные шаги разной длины. И вот где-то на прямой, по которой он идёт, стоит точка — ворота. Давайте посчитаем отношение вероятностей двух событий:

– ворота попали внутрь шага длины s_1;

– ворота попали внутрь шага длины s_2.

Сами шаги длины s_1 и s_2 встречаются одинаково часто. Но вероятность попасть в более длинный шаг больше, отношение вероятностей равно s_1/s_2. Это означает, что плотность вероятности попадания в шаг длины s пропорциональна s, то есть равна $2s$, $s \in [0,1]$.

Теперь предположим, что мы уже точно знаем, что ворота попали внутрь шага длины s. Тогда расстояние от конца шага до ворот равномерно распределено на отрезке $[0,s]$, то есть имеет плотность вероятности $1/s$ на этом отрезке.

Чему же равна плотность вероятности, что заступ пьяницы за ворота равен $-t$, где $t \in [-1,0]$? Она равна свертке рассматриваемых плотностей, то есть $\int_{-t}^{1} 2s\,ds/s = 2(1+t)$. Как и можно было ожидать, эта плотность зануляется в точке $t = -1$.

Проинтегрировав по этой плотности, получаем ответ:

$$\int_{-1}^{0} h(t) \times 2(t+1)\,dt = \int_{-1}^{0} (-2t) \times 2(t+1)\,dt = 2/3.$$

17-4. Этот вопрос А.В. Савватееву задал в своё время его сын Миша, после чего А.В. Савватеев предложил эту задачу на олимпиаду. Интересно, что Ю.П. Соловьев тоже в своё время, побуждаемый запросами школьника-сына, написал популярную статью о неперовском алгоритме извлечения квадратного корня [32], из которого, очевидно, следует положительный ответ на вопрос задачи. По поводу аналогичного вопроса, в котором вместо полного квадрата речь идет о степенях двойки (или другого натурального числа, большего единицы) см. статью [33].

17-5. Переформулировка задачи о равновесии при бросании монет.

17-6. Задача предложена Э.Ю. Лернером, более общий случай содержится в Lemma 1 статьи [34]

17-11. Отметим, что можно дать элементарное доказательство пункта **а)** без привлечения центральной предельной теоремы. Но его аккуратное изложение значительно длиннее (см. [35], с.172).

18-1. Задача предложена Э.Ю. Лернером, более общий случай содержится в

Lemma 5 статьи [36]

18-2. Задача предложена Д.Ф. Абзалиловым.

18-3. Задача предложена Э.Ю. Лернером.

18-9. Задача по мотивам знаменитого парадокса Бертрана, автор — М.Д. Бронштейн.

18-10. Эта задача возникла в работе [37], см. лемму 1 и её доказательство.

19-2. Задача предложена М.Д. Бронштейном.

19-3. Автор задачи — К.А. Кноп [38].

19-5. Автор задачи — И.Ш. Калимуллин.

19-6. Это задача 96 из [39].

Заметим также, что если делить оба тела, то ответ на поставленный в задаче вопрос будет утвердительный. Рассмотрим эту задачу и её решение.

Имеется два тела одинаковой массы и одинаковой теплоемкости. Температура первого тела $0°C$, второго $T_0 = 90°C$. Оба тела произвольным образом можно делить на части. а) Можно ли нагреть первое тело за счёт теплообмена со вторым до температуры $\frac{2}{3}T_0 = 60°C$? б) До какой максимальной температуры можно нагреть первое тело? Предполагается, что теплообмена с окружающей средой нет, при соприкосновении двух тел с температурами T_1 и T_2 и массами m_1 и m_2, их температура выравнивается до $T = (T_1m_1 + T_2m_2)/(m_1 + m_2)$.

Ответ: а) да. б) можно "почти обменяться" температурами, т. е. нагреть первое тело почти до T_0, а второе остудить почти до $0°C$.

Решение: а) Разделим каждое тело на n одинаковых частей, которые пронумеруем от 1 до n. Далее, первую часть первого тела поочередно приложим ко всем частям второго, выбирая части второго тела в порядке возрастания их номеров. Процесс повторим для второй и всех последующих частей первого тела, оставляя тот же порядок вторых частей. В конце соединим все части первых и вторых тел, итоговая температура найдется как среднее арифметическое температур частей. Общую температуру i-й части первого тела к j-й части второго после их соприкосновения обозначим через $a_{ij}T_0$. Коэффициенты a_{ij} находятся как среднее арифметическое $a_{ij} = (a_{(i-1)j}+a_{i(j-1)})/2$. Эта формула будет верна также для $i = 1$, $j = 1$, если положить $a_{0j} = 1$, $a_{i0} = 0$. Пример матрицы для $n = 3$ с добавленными нулевыми строкой и столбцом:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1/2 & 3/4 & 7/8 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 11/16 \\ 0 & 1/8 & 5/16 & 1/2 \end{array}\right)$$

Итоговая температура второго тела $T_2 = bT_0$, где b — среднее последней строки (без нулевого элемента): $b = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}/n = 5/16$. Итоговая температура первого тела

$T_1 = (1-b)T_0$, коэффициент перед начальной температурой также может быть найден как среднее последнего столбца матрицы. Таким образом, для $T_0 = 90°C$ получим температуру первого тела $T_1 = 11/16 \cdot T_0 = 61.875°C > 60°C$. Поставленную задачу мы решили, нам хватило для этого деления тел всего на 3 части!

б) Найдем зависимость коэффициента b от n.

Заметим, что если бы в нулевой строчке матрицы A были бы не единицы, а произвольные числа a_{0k}, $k = 1, \ldots, n$, то a_{nj} равнялся бы линейной комбинации a_{0k} для всех $k \leqslant j$. Коэффициенты этой линейной комбинации есть результат $(n+j-k)$ операций "усреднения" температур кусков (то есть $1/2^{n+j-k}$), помноженный на количество способов добраться из клетки с индексами $(1k)$ до клетки с индексом (nj), ходя только "вниз" или "вправо" (то есть $C^{n-1}_{n-1+j-k}$). Итак

$$a_{nj} = \sum_{k=1}^{j} \frac{a_{0k}}{2^{n+j-k}} C^{n-1}_{n-1+j-k}.$$

В нашем случае $a_{0k} \equiv 1$. Также сделаем замену в сумме $j - k \to k$:

$$a_{nj} = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{2^{n+k}} C^{n-1}_{n+k-1}.$$

Заметим также, что в силу симметрии процедуры заполнения таблицы $a_{nn} = 1/2$ для любого n, откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n+k}} C^{n-1}_{n+k-1} = \frac{1}{2} \qquad (11)$$

Найдем теперь среднее последней строки

$$b = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{nj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{n2^{n+k}} C^{n-1}_{n+k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n2^{n+k}} C^{n-1}_{n+k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n+k}} C^{n-1}_{n+k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n2^{n+k}} C^{n-1}_{n+k-1}$$

Заметим, что первая сумма равна 1/2 из (11), а во второй сумме $\frac{k}{n} C^{n-1}_{n+k-1} = C^{n}_{n+k-1}$. Имеем:

$$b = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n+k}} C^{n}_{n+k-1} = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^{n+1+k}} C^{n}_{n+k} = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1+k}} C^{n}_{n+k} + \frac{1}{2^{2n}} C^{n}_{2n-1} + \frac{1}{2^{2n+1}} C^{n}_{2n}$$

Сумма в последнем выражении равна 1/2, т.к. получается из (11) при замене n на $n+1$, поэтому

$$b = \frac{1}{2^{2n}} C^{n}_{2n-1} + \frac{1}{2^{2n+1}} C^{n}_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C^{n}_{2n}$$

Для подсчёта асимптотики воспользуемся стандартным приемом — формулой Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. После сокращений получим $b = C_{2n}^n/2^{2n} \sim 1/\sqrt{\pi n}$. Таким образом, при $n \to \infty$ получим, что температура второго тела $T_2 = bT_0 \to 0$, а первого $T_1 = (1-b)T_0 \to T_0$.
19-7. Авторы задачи — И.Ш. Калимуллин и М.М. Ямалеев.
19-9. Задача и первые два способа решения предложены И.Ш. Калимуллиным. Эти решения могут быть проведены в любом поле. Во втором способе, для случая поля характеристики 2, нужно дополнительно рассмотреть диагональные матрицы с использованием равенства (6). Доказанное свойство справедливо для квадратных матриц любого размера, имеющих нулевой след [40].
Третий способ решения предложил пользователь svv на форуме `https://dxdy.ru`
19-10. Автор задачи — Э.Ю. Лернер.
Заметим, что при $n = 4$ дисперсия получается равной не $4/16$, а $1/2$.
19-11. Автор задачи — Д.Ф. Абзалилов.
Заметим, что модуль дефекта треугольника ($|\pi - \alpha - \beta - \gamma|$) пропорционален площади не только в неевклидовой, но и в сферической геометрии (см., напр., [41]). Сам Н.И. Лобачевский нашёл явную аналитическую связь между формулами неевклидовой и сферической геометрий [42], стр. 61.

Предметный указатель

Общая алгебра

Дискретный анализ

Теория чисел

Линейная алгебра

Векторная алгебра

Аналитическая геометрия

Основания геометрии

Математический анализ

99-2, 01-2, 01-3, 01-6, 02-4, 02-6, 02-8, 03-4, 03-7, 04-3, 04-5, 04-8, 05-3, 05-4, 05-7, 06-5, 07-3, 07-7, 08-2, 08-4, 08-6, 09-3, 09-4, 09-5, 10-5, 10-9, 11-4, 11-6, 11-8, 12-4, 12-6, 13-3, 13-6, 14-1, 14-3, 14-5, 15-6, 16-3, 16-4, 17-1, 18-4, 18-6, 19-6, 19-7, 09-8.

Многочлены

99-6, 01-3, 02-4, 02-6, 03-1, 05-7, 07-2, 09-8, 11-4, 12-3, 14-2, 15-1, 16-1, 18-5, 19-1.

Комплексный анализ

10-1, 10-6.

Свойства функций, функциональный анализ, топология

99-5, 01-7, 02-5, 03-5, 03-8, 04-6, 05-5, 06-7, 07-6, 09-1, 09-9, 11-7, 12-1, 12-9, 13-2, 13-6, 14-8, 14-10, 15-7, 15-10, 16-6, 16-10, 17-9, 18-8.

Дифференциальные и интегральные уравнения

02-7, 13-1, 15-4, 16-1, 19-3.

Дискретная вероятность

02-1, 04-7, 06-6, 07-4, 08-5, 09-7, 10-7, 13-5, 14-7, 15-9, 17-5, 17-11, 19-10.

Геометрическая вероятность, непрерывные случайные величины

99-7, 01-7, 11-10, 12-10, 16-8, 18-9.

Список литературы

[1] Казанские студенческие олимпиады по математике: Сборник задач / Сост. И.С.Григорьева. Казань: Казан. ун-т, 2011. 48 с.

[2] Казанские студенческие олимпиады по математике, посвященные дню рождения Н.И.Лобачевского. Сборник задач. Часть 2: учеб.-мет. пособие / Сост. И.С.Григорьева, Э.Ю.Лернер. Казань: Казан. ун-т, 2015. 36 с.

[3] Vandermonde A. “Memoire sur des irrationnelles de differens ordres avec une application au cercle” Histoire de l’Academie Royale des Sciences (1772), part 1, 71–72; Memoires de Mathematique et de Physique, Tires des Registres de l’Academie Royale des Sciences (1772), p. 489–498.

[4] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998, с. 196.

[5] Математика в школе, 1998, № 5.

[6] Задача 98325 на сайте problems.ru

[7] Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. Издание 2-е, исправленное. Перевод с английского под редакцией Ю.В. Линника. М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975.

[8] Задача 79358 на сайте problems.ru

[9] Конягин, С.В. Зарубежные математические олимпиады / С.В. Конягин, Г.А. Тоноян, И.Ф. Шарыгин и др.; под ред. И.Н. Сергеева. М.: Наука, 1987.

[10] Muresan M. A concrete approach to classical analysis, volume 14. Springer, 2009, Proposition 1.17, p. 103.

[11] Переславский В. Игра “Определитель”, Квант, 1981, 10, с. 27–31.

[12] Смаллиан Р.М. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.

[13] Квант, 1973, № 1.

[14] Дейвис Ф. Арифметика // Математика в современном мире. М.: Мир, 1967, с. 350–356.

[15] Beckman F.S., Quarles D.A. On isometries of Euclidean spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), p. 810–815.

[16] Александров А.Д. Отображения семейств множеств I. Доклады Академии наук СССР. 1970. Т.190, N3. с. 502–505.

[17] Александров А.Д. Отображения семейств множеств. II Доклады Академии наук СССР. 1970. Т.191, N3. с. 503–506.

[18] Андреев П.Д. Задача А.Д.Александрова для пространств неположительной кривизны в смысле Буземана // Изв. вузов. Матем., 2010, N9, с. 10–35.

[19] Бурман Ю.М., Спивак А.В. Автостоянки, перестановки и деревья // Квант, 2004, № 4, с. 2–11.

[20] Denman R.T., Hailey D., Rothenberg M. The Tower and Glass Marbles Problem (2010). The College Mathematics Journal: Vol. 41.

[21] Smith S. On the value of a certain arithmetical determinant, Proc. London Math. Soc. 7 (1875-1876), p. 208–212.

[22] Nowicki A. Hankel determinants with arithmetic functions, Conference: Nicolaus Copernicus University, Torun, 2017.

[23] Прохоров А.М., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. М.: Наука, 1986.

[24] Альпин Ю.А., Ильин С.Н. Матричное уравнение $AX - YB = C$ и смежные вопросы. Зап. науч. сем. ПОМИ РАН, 2005, Т.323, с. 15–23.

[25] Hassan M., Haghighi S., Bibak Kh. Recursive Relations for the Number of Spanning Trees, Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, 2009, no. 46, p. 2263–2269.

[26] Sedlacek J., On the number of spanning trees of finite graphs C̃asopis pro pẽsrovani matematiky, vol. 94, 1969, p. 217–221.

[27] Гусейн-Заде С.М. Разборчивая невеста. М.: МЦНМО, 2003.

[28] Кнут Д.Э. Искусство программирования для ЭВМ, том 1. М.: Мир, 1978.

[29] Walter Penney. Problem 95: Penney-Ante // J. of Recreational Mathematics, 1974. p. 321.

[30] Netto E. Lehrbuch der Combinatorik, 1901, Leipzig: B.G. Teubner.

[31] Grimaldi R.P., Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction, 2012, Wiley.

[32] Соловьев Ю.П. Старый алгоритм. Журнал “Квант”, 3 (1987), с. 34–37.

[33] Арнольд В.И., Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира. Квант 1 (1998), с. 2–4.

[34] Lerner E.Yu., Mukhamedjanova S.A. Explicit formulas for chromatic polynomials of some series-parallel graphs // Ученые записки Казанского университета. Серия Физ.-мат. Науки, 2018. Том 160, Кн. 2, с. 339–349.

[35] Бронштейн М.Д., Лернер Э.Ю., О счастливых билетах по-казански // Матем. просв., сер. 3, 22, МЦНМО, М., 2018, с. 170–178.

[36] Bochkarev V., Lerner E., Calculation of Precise Constants in a Probability Model of Zipf’s Law Generation and Asymptotics of Sums of Multinomial Coefficients // Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences, 2017. – Vol. 2017.

[37] Bikchentaev A.M, Ivanshin P.N., On Operators all of Which Powers have the same Trace // Int. J. of Theoretical Physics. – 2019.

[38] Задачи и головоломки на Facebook.

[39] Маковецкий П.В. Смотри в корень! М: Наука, 1984, 288 с.

[40] Albert A. A., Muckenhoupt B. On matrices of trace zeros. Michigan Math. J. 4 (1957), N 1, 1–3.

[41] Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского. М: МЦНМО, 2004, 89 с

[42] Широков П.А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М: Наука, 1983, 80 с.