2020/2021 учебный год

Всероссийская олимпиада студентов «Я – профессионал»

Демонстрационный вариант
задания заключительного этапа
по направлению «**Математика»**

Категория участия: «Бакалавриат»
(для поступающих в магистратуру)

БИЛЕТ 1

1. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y''' + 6y'' + 21y' + 26y = e^{\sin 3x}$. Найдите все возможные значения предела $\lim\limits_{x \to +\infty} (y_2(x) - y_1(x))$.

2. **(2 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[0; 2]$ и $[-1; 4]$ соответственно. Найдите вероятность $P\left\{\xi^2 + \eta \leqslant 5\right\}$.

3. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{1003} + x^{1002}$ на многочлен $x^2 - x + 1$.

4. **(2 балла)** В числе 5****1* каждую из звёздочек заменяют на одну из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (каждая цифра может быть использована сколько угодно раз). Определите вероятность того, что полученное в результате семизначное число делится на 12.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy$.

6. **(2 балла)** Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n (n+1)^2}{n!}$.

7. **(3 балла)** Покажите, что только одно решение уравнения $xy' - \left(6x^6 + 5\right) y = x^6$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найдите этот предел.

8. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые

$$\ell_1 : \ \frac{2-x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}, \quad \ell_2 : \ \frac{7-x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{1}, \quad \ell_3 : \ \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

   На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

9. **(3 балла)** Пусть функция f непрерывна на $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$, и при этом $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} f^2(x)\, dx = 4\pi$, а $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} f(x) \sin x\, dx = 2\pi$. Найдите $\max\limits_{x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]} (f(x) + \cos x)$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что $\det A = -12$, $\mathbf{a}_1(1; 2; 3)$ и $\mathbf{a}_2(3; 0; -1)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 2 и 3 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(1; x; y)$. В случае утвердительного ответа найдите оставшиеся координаты $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).

БИЛЕТ 2

1. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y''' - 4y'' + 14y' - 20y = e^{\cos 3x}$. Найдите все возможные значения предела $\lim\limits_{x\to-\infty}(y_2(x) - y_1(x))$.

2. **(2 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[6;16]$ и $[3;5]$ соответственно. Найдите вероятность $P\left\{\frac{\eta^2}{\xi} \geqslant 1\right\}$.

3. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{1001} + x^{999}$ на многочлен $x^2 + x + 1$.

4. **(2 балла)** В числе 7*****2* каждую из звёздочек заменяют на одну из цифр 0, 1, 2, 4, 6, 8 (каждая цифра может быть использована сколько угодно раз). Определите вероятность того, что полученное в результате восьмизначное число делится на 12.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{16-y^2}}^{-\sqrt{-4y-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

6. **(2 балла)** Найдите сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

7. **(3 балла)** Покажите, что только одно решение уравнения $xy' - \left(5x^5 + 4\right)y = x^5$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найдите этот предел.

8. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые
$$\ell_1 : \ \frac{x-1}{3} = \frac{1-y}{1} = \frac{z-5}{1}, \quad \ell_2 : \ \frac{x}{3} = \frac{5-y}{1} = \frac{z-12}{1}, \quad \ell_3 : \ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}.$$
На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

9. **(3 балла)** Пусть функция f непрерывна на $[\pi; 5\pi]$, и при этом
$\displaystyle\int\limits_{\pi}^{5\pi} f^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$, а $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{5\pi} f(x)\sin\frac{x}{2}\,dx = \pi$. Найдите $\min\limits_{x\in[\pi;5\pi]}\left(f(x) - \cos\frac{x}{2}\right)$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что $\det A = -9$, $\mathbf{a}_1(1;2;1)$ и $\mathbf{a}_2(1;0;-1)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 1 и 3 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(1;x;y)$. В случае утвердительного ответа найдите оставшиеся координаты $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).

БИЛЕТ 3

1. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y''' + 5y'' + 11y' + 15y = e^{\sin 2x}$. Найдите все возможные значения предела $\lim\limits_{x \to +\infty} (y_2(x) - y_1(x))$.

2. **(2 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[2; 9]$ и $[0; 3]$ соответственно. Найдите вероятность $P\left\{\eta^2 \xi \leqslant 36\right\}$.

3. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{1000} + x^{999}$ на многочлен $x^2 - x + 1$.

4. **(2 балла)** В числе 6****5* каждую из звёздочек заменяют на одну из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 (каждая цифра может быть использована сколько угодно раз). Определите вероятность того, что полученное в результате семизначное число делится на 12.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{-3x-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$.

6. **(2 балла)** Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2}{3^n n!}$.

7. **(3 балла)** Покажите, что только одно решение уравнения $xy' - \left(4x^4 + 3\right) y = x^4$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найдите этот предел.

8. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые
$$\ell_1: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}, \quad \ell_2: \ \frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}, \quad \ell_3: \ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$
На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

9. **(3 балла)** Пусть функция f непрерывна на $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$, и при этом
$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f^2(x)\, dx = 9\pi$, а $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) \cos x\, dx = 3\pi$. Найдите $\max\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]} (\sin x - f(x))$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что $\det A = -4$, $\mathbf{a}_1(1; 3; -2)$ и $\mathbf{a}_2(3; -1; 0)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 1 и 2 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(1; x; y)$. В случае утвердительного ответа найдите оставшиеся координаты вектора $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).

БИЛЕТ 4

1. **(2 балла)** Пусть y_1 и y_2 – различные решения уравнения $y''' - 7y'' + 17y' - 15y = e^{\cos x}$. Найдите все возможные значения предела $\lim\limits_{x\to-\infty}(y_2(x) - y_1(x))$.

2. **(2 балла)** Независимые случайные величины ξ и η равномерно распределены на отрезках $[2;5]$ и $[-16;-1]$ соответственно. Найдите вероятность $P\left\{4\eta + \xi^3 \geqslant 0\right\}$.

3. **(2 балла)** Найдите остаток от деления многочлена $x^{1000} + x^{1002}$ на многочлен $x^2 + x + 1$.

4. **(2 балла)** В числе 4*****6* каждую из звёздочек заменяют на одну из цифр $3, 4, 5, 6, 7, 8$ (каждая цифра может быть использована сколько угодно раз). Определите вероятность того, что полученное в результате восьмизначное число делится на 12.

5. **(3 балла)** Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{-6}^{0} dy \int\limits_{\sqrt{-6y-y^2}}^{\sqrt{36-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

6. **(2 балла)** Найдите сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$.

7. **(3 балла)** Покажите, что только одно решение уравнения $xy' - \left(3x^3 + 2\right)y = x^3$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найдите этот предел.

8. **(3 балла)** В пространстве расположены прямые

$$\ell_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{2-z}{3}, \quad \ell_2: \frac{x-8}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{3-z}{3}, \quad \ell_3: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}.$$

   На прямой ℓ_1 выбрана точка A, на ℓ_2 – точка B, на ℓ_3 – точка C. Найдите наименьшую возможную площадь треугольника ABC. Система координат декартова прямоугольная (базис ортонормированный).

9. **(3 балла)** Пусть функция f непрерывна на $[-\pi;3\pi]$, и при этом $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{3\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2\pi}{9}$, а $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{3\pi} f(x)\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2\pi}{3}$. Найдите $\min\limits_{x\in[-\pi;3\pi]}\left(f(x) + \sin\frac{x}{2}\right)$.

10. **(3 балла)** Линейное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе задаётся вещественной симметрической матрицей A порядка 3. Известно, что $\det A = -4$, $\mathbf{a}_1(1;-1;2)$ и $\mathbf{a}_2(1;1;0)$ – собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям 1 и 4 соответственно. Выясните, существует ли собственный вектор $\mathbf{a}_3$, образующий вместе с векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимую систему, и имеющий координаты $(1;x;y)$. В случае утвердительного ответа найдите оставшиеся координаты вектора $\mathbf{a}_3$ и соответствующее ему собственное значение (все координаты рассматриваются в исходном ортонормированном базисе).