

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Теория и практика конформных отображений

*Рекомендовано
Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2013

УДК 517.5
ББК 22.1
Т33

Рецензенты:

С. П. Суетин (МИАН им. В. А. Стеклова)
А. В. Копаев (МГТУ им. Н. Э. Баумана)

Т33 Теория и практика конформных отображений : учеб. пособие / А. Н. Канатников, Е. Е. Красновский, В. Д. Морозова, К. Ю. Федоровский. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 84, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-3791-7

Содержит основы теории конформных отображений и охватывает материал, достаточный для освоения соответствующего раздела курса «Комплексный анализ», который читается студентам факультета ФН на четвертом семестре обучения, и решения задач.

Предназначено для студентов второго курса, обучающихся по специальности «Прикладная математика».

УДК 517.5
ББК 22.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие рассчитано прежде всего на студентов специальности «Прикладная математика», однако будет полезно всем, кто интересуется теорией конформных отображений и ее многочисленными приложениями. Пособие охватывает следующий круг вопросов: основы теории конформных отображений, основные элементарные функции комплексного переменного, типовые области их конформности и осуществляемые этими функциями конформные отображения, методы построения конформных отображений заданных областей комплексной плоскости.

Теория конформных отображений имеет множество приложений, ее методы используют в решении самых разных задач, позволяя переносить эти задачи из областей, в которых они естественно возникают, в более простые области, где их анализ и решение заметно облегчается.

Теория конформных отображений — это динамично развивающаяся область комплексного анализа. Специалистов активно интересуют задачи, связанные с нахождением новых критериев однолистности, с граничными свойствами конформных отображений и вычислительными аспектами теории конформных отображений.

Пособие поможет заинтересованному читателю не только научиться решать типовые задачи, но и подготовит его к восприятию последних публикаций по теории конформных отображений.

Авторы предполагают, что читатель владеет основными понятиями теории функций комплексного переменного (комплексного анализа).

В пособии приведены все необходимые теоретические сведения. Дополнительную информацию по теории конформных отображений можно почерпнуть в двух источниках: в выпуске X серии «Математика в техническом университете»^{*} (в тексте пособия ссылки на эту книгу отмечены символом [X]) и в ставшей классической книге М.А. Лаврентьева и Б.В. Шабата^{**} (в тексте ссылки на книгу отмечены символом [ЛШ]).

^{*} *Морозова В.Д.* Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

^{**} *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969.

1. ПОНЯТИЕ О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

1.1. Предварительные сведения

Всюду символом z будем обозначать комплексное число $z = x + iy$, интерпретируя его как точку комплексной плоскости \mathbb{C} или точку \mathbb{R}^2 с координатами (x, y) . Будем также использовать обозначение \mathbb{C}_z (соответственно \mathbb{C}_w , \mathbb{C}_ζ и т. д.) или (z) (соответственно (w) , (ζ) и т. д.) как область изменения комплексного переменного z (соответственно w , ζ и т. д.).

Предполагается, что читателю известны определения и основные свойства *открытых, замкнутых, ограниченных и компактных* множеств в \mathbb{C} , а также *непрерывных, жордановых, гладких и кусочно-гладких кривых, ломаной линии, параметризации кривой, связных и линейно-связных множеств и областей*. Все эти понятия далее используются без соответствующих определений.

Следующие обозначения общеприняты:

∂E — граница множества $E \subset \mathbb{C}$;

E° — множество всех *внутренних точек* множества E ;

$\overline{E} = \partial E \cup E^\circ$ — замыкание множества E .

В пособии рассматриваются в основном области с гладкими или кусочно-гладкими границами. В связи с этим удобно использовать следующее понятие. Под контуром (кусочно-гладким) мы понимаем замкнутую жорданову гладкую или кусочно-гладкую кривую (т. е., неформально говоря, замкнутую гладкую или кусочно-гладкую кривую, не имеющую точек самопересечения). Так, окружность является контуром, а лемниската Бернулли (имеющая форму восьмерки) — нет.

Определение. Область Ω называется *простой*, если она ограничена конечным числом кусочно-гладких контуров.

На кусочно-гладком контуре можно выбрать одно из двух возможных направлений обхода. Предполагается, что на контуре, входящем в границу простой области, направление выбрано так, что при обходе этого контура область остается слева (такое направление обхода называют положительным).

Зафиксируем обозначения ряда стандартных областей в комплексной плоскости:

\mathbb{D} — единичный круг $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$;

\mathbb{D}_e — внешность единичного круга $\{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\}$;

\mathbb{T} — единичная окружность $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

\mathbb{C}_+ — верхняя полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$;

\mathbb{C}_- — нижняя полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z < 0\}$;

\mathbb{C}_r — правая полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0\}$;

\mathbb{C}_l — левая полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < 0\}$.

Часто верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ обозначают также символом \mathbb{H} .

В геометрических вопросах теории функций комплексного переменного, в том числе и в теории конформных отображений, часто используют понятие *расширенной комплексной плоскости* $\overline{\mathbb{C}}$, под которым понимают множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с соответствующим уточнением понятия окрестности точки, а именно: ε -окрестностью точки ∞ называют множества $\{z: |z| > R\}$, где $R = \sqrt{1/\varepsilon^2 - 1}$ (см., например, [X, разд. 1.4]).

1.2. Геометрическая интерпретация функций комплексного переменного

Любую функцию f комплексного переменного, определенную на подмножестве E комплексной плоскости \mathbb{C}_z , можно интерпретировать как отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное парой функций u_f , v_f двух вещественных переменных, определенных на множестве E , которое также можно рассматривать как подмножество в \mathbb{R}^2 . При этом функцию f можно записать в виде

$$f(z) = u_f(x, y) + iv_f(x, y), \quad z = x + iy.$$

Наоборот, любое отображение $f: E \rightarrow \mathbb{R}^2$, $E \subset \mathbb{R}^2$, можно трактовать как функцию комплексного переменного, заданную на множестве $E \subset \overline{\mathbb{C}}_z$.

Эта двойственность функций комплексного переменного позволяет широко использовать в теории функций комплексного переменного геометрические представления, что отражается и на используемой в этой теории терминологии. Так понятие «отображение» имеет преимущественно геометрический подтекст, в то время как понятие «функция» — алгебраический.

Среди множеств, рассматриваемых в теории функций комплексного переменного, особое значение имеют кривые и области на комплексной плоскости. Поэтому важной задачей является нахождение образов этих геометрических объектов при разных отображениях комплексной плоскости. Рассмотрим такую задачу в некоторых типичных ситуациях.

Отыскание образов и прообразов множеств, заданных неявно

Рассмотрим множество E на плоскости \mathbb{C}_z , заданное уравнением $F(x, y) = 0$, т. е. $E = \{z \in \mathbb{C}: F(x, y) = 0\}$. Чаше всего уравнениями такого вида задают различные кривые. Например, окружность с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом 1 задается уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$, эллипс с центром в точке $(0, 0)$ и полуосями 2 и 1 задается уравнением $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, а уравнение $y - x = 0$ описывает прямую.

Однако уравнения вида $F(x, y) = 0$ могут задавать и множества более общего вида, нежели кривые. Так, уравнение

$$(x^2 + y^2 - 1)((x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 1) = 0$$

задает объединение двух непересекающихся окружностей радиусом 1 с центрами в точках $(0, 0)$ и $(2, 2)$ соответственно. В самом общем случае, когда на функцию F не наложено никаких ограничений, уравнение $F(x, y) = 0$ может описывать произвольное подмножество плоскости.

Прообразом (полным прообразом) множества E для заданной функции f комплексного переменного называется множество

$$f^{-1}(E) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}_z: f(z) \in E\}.$$

Чтобы описать множество $f^{-1}(E)$, достаточно использовать композицию двух отображений:

$$f^{-1}(E) = \{z \in \overline{\mathbb{C}}_z: F(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)) = 0\}.$$

Действительно, если $z \in f^{-1}(E)$, то, согласно определению прообраза множества, $f(z) \in E$, отсюда следует, что значения $x = \operatorname{Re} f(z)$ и $y = \operatorname{Im} f(z)$ подчиняются уравнению $F(x, y) = 0$. Наоборот, если $F(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)) = 0$, то значение $f(z)$ принадлежит множеству E . Следовательно, $z \in f^{-1}(E)$.

Найти образ множества E , заданного неявно уравнением $F(x, y) = 0$, значительно труднее. Пусть функция комплексного переменного f определена при всех $z \in E$. Образом $f(E)$ множества E называют множество

$$f(E) = \{w \in \overline{\mathbb{C}}_z: w = f(z), z \in E\}.$$

Чтобы найти образ множества E , можно, например, попробовать найти обратную функцию $z = f^{-1}(w)$ и построить прообраз множества E при отображении $f^{-1}(w)$. Однако обратная функция может не существовать либо ее нельзя представить аналитически. Другой вариант решения этой задачи — замена неявного представления множества E на параметрическое.

Представленные соображения относятся к более общему случаю, когда множество $E \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ задано системой уравнений и неравенств:

$$F_1(x, y) = 0, \dots, F_m(x, y) = 0, F_{m+1}(x, y) \geq 0, \dots, F_n(x, y) \geq 0.$$

Отыскание образов и прообразов множеств, заданных параметрически

Пусть кривая Γ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R},$$

или параметрическим уравнением в комплексной форме

$$z = \gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}.$$

Тогда образ $f(\Gamma)$ кривой Γ при отображении, осуществляемом функцией комплексного переменного $f(z) = u_f(x, y) + v_f(x, y)$, $z = x + iy$, будет описываться параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} u = U(t), \\ v = V(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где $U(t) = u_f(x(t), y(t))$, $V(t) = v_f(x(t), y(t))$. То же множество можно описать параметрическим уравнением в комплексной форме

$$w = w(t) = U(t) + iV(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Отметим, что образ $f(\Gamma)$ кривой Γ может не быть кривой при определенных свойствах функции f .

Пример 1. Найдём образ кривой $\Gamma = \{|z - 1| = 1\}$ (рис. 1.1) при отображении, осуществляемом функцией $f(z) = \frac{1}{z}$.

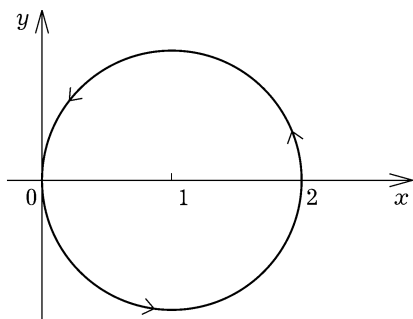


Рис. 1.1

В данном случае функция $w = f(z)$ имеет обратную функцию $z = \frac{1}{w}$. Образ кривой Γ при отображении $w = f(z)$ есть ее прообраз при отображении $z = f^{-1}(w)$. Следовательно, множество $f(\Gamma)$ описывается уравнением

$$\left| \frac{1}{w} - 1 \right| = 1,$$

или после упрощения

$$|w - 1| = |w|. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) описывает множество точек комплексной плоскости, равноудаленных от точек $z_1 = 1$ и $z_2 = 0$. Ясно, что это — прямая, проходящая через середину отрезка $[z_1, z_2]$ перпендикулярно ему, т. е. прямая $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ (рис. 1.2).

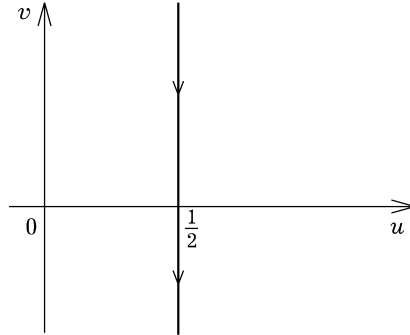


Рис. 1.2

Такой же результат можно получить, записав уравнение (1.1) в действительной форме. Выполним замену $w = u + iv$:

$$|u + iv - 1| = |u + iv|.$$

Раскроем знаки модулей:

$$\sqrt{(u-1)^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Возведем в квадрат и упростим:

$$2u - 1 = 0.$$

В результате получим уравнение $u = \frac{1}{2}$, которое в комплексной форме имеет вид $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

Поставленную задачу можно решить с помощью параметрического представления окружности. Окружность $|z - z_0| = r$ с

центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и радиусом r можно задать параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t, \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi],$$

или в комплексной форме

$$z = z_0 + re^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Используя комплексную форму параметрического представления с учетом $z_0 = 1$, $r = 1$, получаем параметрическое представление образа окружности Γ :

$$z = \frac{1}{1 + e^{it}}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Преобразуем это представление, домножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^{it}} &= \frac{1 + e^{-it}}{(1 + e^{it})(1 + e^{-it})} = \frac{1 + e^{-it}}{1 + e^{it} + e^{-it} + 1} = \\ &= \frac{(1 + \cos t) - i \sin t}{2 + 2 \cos t} = \frac{1}{2} - \frac{i \sin t}{2(1 + \cos t)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

При изменении параметра t от $-\pi$ до π функция $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому при движении точки по окружности Γ против часовой стрелки (изменение t от $-\pi$ до π) ее образ при отображении $f(z) = \frac{1}{z}$ пробегает прямую $u = \frac{1}{2}$ сверху вниз, т. е. от $\frac{1}{2} + \infty$ до $\frac{1}{2} - \infty$, оставляя слева правую полуплоскость.

1.3. Однолистные функции и отображения

Среди всех отображений комплексной плоскости практически важными являются взаимно-однозначные (биективные). В комплексном анализе функции, реализующие такие отображения, называют *однолистными*.

Определение. Пусть функция f задана на некотором множестве E . Тогда функция f называется:

а) *однолистной в точке $a \in E$* , если f взаимно-однозначна (инъективна) в некоторой окрестности точки a ;

б) *локально-однолистной на множестве E* , если f однолистка в каждой точке множества E ;

в) *однолистной на множестве E* , если f взаимно-однозначна на множестве E .

Однолистность функции f на множестве E эквивалентна существованию обратной функции, т. е. такой функции f^{-1} , определенной на $f(E)$, что равенство $f^{-1}(f(z)) = z$ выполняется для любого $z \in E$.

Нетрудно показать, что функция f , аналитическая в области $\Omega \in \mathbb{C}$, является однолистной в точке $a \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $f'(a) \neq 0$. Следовательно, для локальной однолистности аналитической функции f в области Ω необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции в Ω не обращалась в нуль, т. е. $f'(z) \neq 0$ при всех $z \in \Omega$.

Таким образом, проверить функцию на локальную однолистность достаточно просто. Проверка условия однолистности функции f в области (т. е. ее глобальной обратимости) значительно сложнее. Ясно, что у функции $f(z)$, однолистной в области Ω , производная в этой области не обращается в нуль, поскольку из условия однолистности вытекает локальная однолистность. Однако условие $f'(z) \neq 0$ в области не является достаточным. Простейший пример — функция $f(z) = e^z$. Для этой функции $f'(z) = e^z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, так что она локально однолистка в комплексной плоскости. Однако легко проверить, что эта функция не является однолистной в \mathbb{C} , так как периодична с мнимым периодом $2\pi i$. В частности, $f(0) = f(2\pi i) = 1$.

Различные достаточные условия однолистности функции в области могут быть установлены на основе принципа аргумента и его следствий (теоремы Руше и Гурвица). Докажем одно простое достаточное условие однолистности функции в единичном круге \mathbb{D} .

Теорема 1.1. Пусть функция f аналитична в единичном круге \mathbb{D} и $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ всюду в \mathbb{D} . Тогда функция f однолистка в \mathbb{D} .

◀ Для любых двух несовпадающих точек $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ отрезок Δ , их соединяющий, целиком лежит в \mathbb{D} . Поэтому, согласно формуле Ньютона — Лейбница для аналитических функций,

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{\Delta} f'(z) dz = (z_2 - z_1) \int_0^1 f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt.$$

Так как $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ всюду в \mathbb{D} , то

$$\operatorname{Re} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 \operatorname{Re} f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt > 0.$$

Следовательно, $f(z_1) \neq f(z_2)$. ►

При анализе конкретных функций закономерно возникает вопрос об отыскании их максимальных областей однолиственности. Под максимальной областью однолиственности функции f понимается любая область G такая, что f однолистка в G , но f не однолистка в любой области G_1 , содержащей G . Так, легко проверить, что функция e^z однолистка в любой полосе вида $a < \operatorname{Im} z < a + 2\pi$ с границами, параллельными вещественной оси и не однолистка ни в какой большей области. Ясно, что у каждой функции может быть много максимальных областей однолиственности.

Нас будут интересовать в первую очередь максимальные области однолиственности для основных элементарных функций комплексного переменного. Более того, среди всех таких областей мы будем стараться выделить области с просто устроенными границами. Такие области однолиственности будем также называть *стандартными* (или типовыми) *областями однолиственности*.

Рассмотрим, например, функцию $f(z) = z^2$. Так как эта функция аналитична всюду в \mathbb{C} и $f'(z) = 2z$, то f будет локально однолистной в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (соответственно в любой меньшей

области). Но $f'(0) = 0$ и, следовательно, область $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ является максимальной областью локальной однолиственности функции z^2 . Проверим, что эта область не является областью однолиственности для z^2 . В самом деле, из равенства $z_1^2 = z_2^2$ вытекает, что $z_1 = z_2$ или $z_1 = -z_2$, т. е. функция z^2 будет однолистной в любой области, которая не содержит точек z_1 и z_2 , связанных соотношением $z_2 = -z_1$. Этому условию удовлетворяет любая полуплоскость, не содержащая точку $z = 0$, например верхняя полуплоскость \mathbb{C}_+ (рис. 1.3).

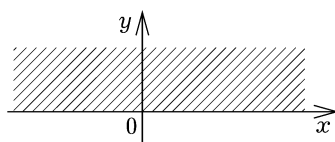


Рис. 1.3

Заметим, что каждая из таких полуплоскостей удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым стандартным областям однолиственности для функции z^2 .

Как уже отмечалось выше, функция e^z локально однолистна всюду в \mathbb{C} и однолистна в любой области, не содержащей точек z_1 и z_2 , связанных условием $z_1 = z_2 + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. Соответственно в качестве стандартных областей однолиственности для функции e^z можно взять область $S_{0,2\pi} = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ (рис. 1.4) или область $S_{-\pi,\pi} = \{z \in \mathbb{C}: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ (рис. 1.5), или любую другую горизонтальную полосу шириной 2π .

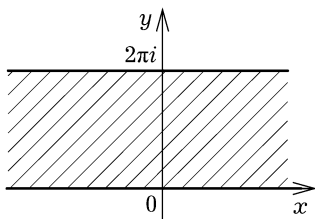


Рис. 1.4

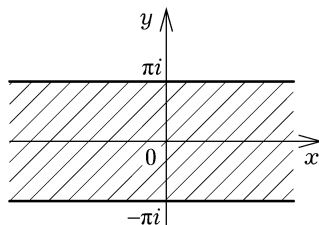


Рис. 1.5

1.4. Конформные отображения и их свойства

В дальнейшем будем рассматривать отображения, осуществляемые аналитическими однолиственными функциями. Как нетрудно проверить, если функция f является однолистной в точке $a \in \mathbb{C}$, то соответствующее отображение будет сохранять углы между гладкими кривыми в этой точке (см. разд. 4). В силу этого обстоятельства отображения, осуществляемые аналитическими однолиственными функциями, называют *конформными*.

Понятие конформности можно распространить на отображения областей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Для этого достаточно ввести понятие конформности в полюсах аналитической функции (считая, что в полюсе аналитическая функция принимает значение ∞) и в бесконечно удаленной точке. Считаем, что отображение, определяемое функцией $f(z)$, конформно в точке z_0 , являющейся полюсом этой функции, если в этой точке конформно отображение, осуществляемое функцией $\frac{1}{f(z)}$. Отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, определенной в некоторой окрестности точки ∞ , назовем конформным в этой точке, если отображение, осуществляемое функцией $f(1/z)$, конформно в точке 0.

Конформные отображения широко применяют при изучении многих задач физики и механики, а также в других прикладных областях. Широко используют два свойства конформных отображений, которые непосредственно вытекают из определения однолистной функции и теоремы об обратной функции.

Предложение 1.1. Если f — конформное отображение области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ на область $G_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, а g — конформное отображение области G_1 на область $G_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$, то $g \circ f$ — конформное отображение области G на область G_2 . Если f — конформное отображение области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ на область $G_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$, то обратное отображение f^{-1} — конформное отображение области G_1 на область G .

Особое место в теории конформных отображений занимает понятие *односвязной области*. В различных разделах математического анализа, теории функций комплексного переменного и геометрии используют разные (но эквивалентные) определения односвязной

области. Так, в соответствии с классическим геометрическим определением область $\Omega \subset \mathbb{C}$ односвязна, если имеет связную границу в $\overline{\mathbb{C}}$.

Согласно другому определению, область $\Omega \subset \mathbb{C}$ односвязна, если для любого непрерывного контура, лежащего в Ω , ограниченная этим контуром область целиком лежит в Ω . Имея в виду это определение, часто говорят об *односвязности по Жордану*. В действительности оба определения односвязности эквивалентны и приводят к одному и тому же понятию, но доказательство этого сложное и выходит за рамки настоящего курса.

В случае областей в $\overline{\mathbb{C}}$ понятие односвязной области вводится аналогично: область Ω в $\overline{\mathbb{C}}$ односвязна, если имеет связную границу в $\overline{\mathbb{C}}$.

Например, единичный круг \mathbb{D} — односвязная область, а внешность единичного круга \mathbb{D}_e — нет, поскольку его границей (в $\overline{\mathbb{C}}$) является несвязное множество $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$. Отметим, что если область односвязна в \mathbb{C} , то она односвязна и в $\overline{\mathbb{C}}$.

Сформулируем и обсудим ряд фундаментальных результатов, на которых базируется теория конформных отображений и практика ее применения. Так как полные формулировки соответствующих теорем требуют аккуратного введения ряда новых понятий и определений, сформулируем их при дополнительных ограничениях и в таком виде, который будет достаточным для решения практических задач. Более подробно основные теоремы теории конформных отображений обсуждаются в разд. 4 настоящего пособия, где все они формулируются, а некоторые из них и доказываются в разумной общности (см. также [X, гл. 9]).

Теорема Римана. Пусть Ω — односвязная область в расширенной комплексной плоскости, граница которой содержит не менее двух точек. Тогда:

- 1) существует аналитическая однолистная в Ω функция f , осуществляющая конформное отображение Ω на единичный круг \mathbb{D} ;
- 2) функцию f , осуществляющую конформное отображение Ω на \mathbb{D} , можно выбрать так, что для произвольных точек $z_0 \in \Omega$, $w_0 \in \mathbb{D}$

и произвольного числа $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ будут выполнены условия

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta_0, \quad (1.2)$$

причем этими условиями функция f определяется однозначно.

Условия (1.2) называют *условиями нормировки*.

Условие в теореме, устанавливающее, что граница области имеет по крайней мере две точки (а фактически континуум точек), существенно. Единственная область в $\overline{\mathbb{C}}$ с пустой границей — это сама расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, а любая область, имеющая границу из единственной точки, есть расширенная комплексная плоскость с выколотой точкой, т. е. имеет вид $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$ (такой областью, в частности, является $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$). Функция, аналитическая и однолистная в любой из этих областей, является дробно-линейной [X, гл. 9]. Такая функция не может осуществлять конформное отображение такой области (расширенной комплексной плоскости, возможно, с выколотой точкой) на единичный круг.

Из теоремы Римана и предложения 1.1 непосредственно следует важное для решения задач утверждение.

Предложение 1.2. Для любых двух односвязных областей Ω_1 и Ω_2 в $\overline{\mathbb{C}}$ с границами, состоящими не менее чем из двух точек, существует конформное отображение Ω_1 на Ω_2 , причем такое отображение существует и единственно при любых условиях нормировки (1.2).

Распространенным приемом построения конформного отображения одной области на другую является его «склейка» из отображений частичных областей. Этот прием требует знания поведения конформного отображения вблизи границы области.

Принцип соответствия границ. Пусть простые односвязные области Ω_1 и Ω_2 имеют границы, состоящие более чем из одной точки, и пусть аналитическая однолистная в области Ω_1 функция f отображает Ω_1 конформно на Ω_2 . Тогда:

1) функция f имеет непрерывное продолжение на границу Γ_1 области Ω_1 , т. е. ее можно так доопределить в точках Γ_1 , что получится функция, непрерывная в замыкании $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \Gamma_1$ области Ω_1 ;

2) функция f , доопределенная на границе Γ_1 указанным выше образом, биективно отображает Γ_1 на границу Γ_2 области Ω_2 причем так, что обходу контура Γ_1 в положительном направлении будет соответствовать обход контура Γ_2 в положительном направлении.

Обратный принцип соответствия границ. Пусть Ω — простая односвязная область в комплексной плоскости с границей Γ , причем в \mathbb{C} эта область ограничена. Если функция f , аналитичная в области Ω и непрерывная в замыкании $\Omega \cup \Gamma$ этой области, биективно отображает Γ на некоторый простой кусочно-гладкий контур Γ' , то f является однолистной в Ω . В этом случае она конформно отображает Ω на область Ω' , границей которой является Γ' , и положительному обходу границы Γ области Ω соответствует положительный обход границы Γ' области Ω' .

Утверждение обратного принципа соответствия границ сохраняется и для большого числа неограниченных областей, а именно таких, которые имеют хотя бы одну внешнюю точку в $\overline{\mathbb{C}}$ (к таким областям относятся, например, полуплоскости, углы, полосы и т. д.).

Обратный принцип соответствия границ открывает практический подход к отысканию образа области Ω при заданном конформном отображении f . Достаточно найти образ границы (что само по себе может оказаться весьма непростой задачей), а далее из двух областей, ограниченных этим образом, выбрать ту, которую обход контура оставляет слева (т. е. обход границы области будет в положительном направлении).

Основываясь на обратном принципе соответствия границ, можно решать многие задачи теории конформных отображений: для построения конформного отображения одной односвязной области на другую достаточно найти однолистную аналитическую функцию, биективно отображающую границу первой области на границу второй. Соответствующие примеры будут рассмотрены в разд. 3.

Принцип симметрии Римана — Шварца. Пусть Ω_1 — область, лежащая в верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ , граница Γ_1 которой содержит интервал γ_1 вещественной оси, и Ω_1^* — область, симметричная Ω_1 относительно вещественной оси. Предположим также, что множество $\Omega_1 \cup \gamma_1 \cup \Omega_1^*$ является областью (рис. 1.6). В этом

случае будем говорить, что область Ω_1 симметрично продолжается через интервал γ_1 действительной оси.

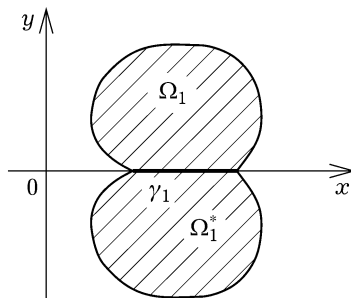


Рис. 1.6

Если функция f аналитична в области Ω_1 , симметрично продолжаемой через интервал γ_1 действительной оси, непрерывна на $\Omega_1 \cup \gamma_1$ и на γ_1 принимает вещественные значения, то функция

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega_1 \cup \gamma_1; \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \Omega_1^*, \end{cases}$$

аналитична в области $\Omega_1 \cup \gamma_1 \cup \Omega_1^*$. При этом, если функция f взаимно-однозначна в $\Omega_1 \cup \gamma_1$, то функция F однолистка в $\Omega_1 \cup \gamma_1 \cup \Omega_1^*$.

Пусть область Ω_2 симметрично продолжается через интервал γ_2 действительной оси и Ω_2^* — область, симметричная Ω_2 относительно действительной оси. Тогда, согласно *принципу симметрии*, если функция f конформно отображает Ω_1 на Ω_2 , причем она непрерывна на $\Omega_1 \cup \gamma_1$ и отображает γ_1 взаимно-однозначно на γ_2 , то функция F конформно отображает область $\Omega_1 \cup \gamma_1 \cup \Omega_1^*$ на область $\Omega_2 \cup \gamma_2 \cup \Omega_2^*$.

Практическое применение принципа симметрии состоит в следующем. Допустим, нам надо найти конформное отображение области $\tilde{\Omega}_1$, симметричной относительно действительной оси, на область Ω_2 , также симметричную относительно действительной оси. Обозначив через Ω_1 и Ω_2 части областей $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$, расположенные в \mathbb{C}_+ , представим исходные области в виде $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \gamma_1 \cup \Omega_1^*$

и $\tilde{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \gamma_2 \cup \Omega_2^*$ (отрезки γ_1 и γ_2 называют разрезами областей $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$). В силу принципа симметрии достаточно построить конформное отображение области Ω_1 на область Ω_2 так, чтобы это отображение устанавливало взаимно-однозначное соответствие и между разрезами γ_1 и γ_2 . Построение конформного отображения для «половинок» двух областей может оказаться более простой задачей.

Нетрудно видеть, что принцип симметрии остается верным, если симметрию относительно действительной оси заменить на симметрию относительно произвольной прямой в комплексной плоскости. Более того, понятие симметрии относительно прямой распространяется и на любые окружности (две точки симметричны относительно данной окружности, если каждая из них получается из другой преобразованием симметрии относительно данной окружности). Принцип симметрии при этом сохраняет свою силу.

1.5. Основные задачи теории конформных отображений

После введения понятия конформного отображения и основных положений теории конформных отображений, можно перейти к формулировке задач, решаемых в этой области теории функций комплексного переменного. В данном курсе интерес представляют следующие две задачи:

- 1) нахождения образа заданной области при заданном конформном отображении;
- 2) отыскания конформного отображения одной заданной области на другую.

Практические пути решения этих задач основаны, как указано выше, на использовании прямого и обратного принципа соответствия границ, согласно которому конформное отображение одной заданной области на другую определяется непрерывным и биективным соответствием между их границами.

Для решения первой из задач достаточно найти образ границы заданной области, а для решения второй — аналитическую

функцию, устанавливающую биективное соответствие между границами двух рассматриваемых областей.

В теории конформных отображений нет универсального метода, обеспечивающего решение какой-либо из указанных задач. Нет общего алгоритма, позволяющего найти (точно) образ заданной области при заданном конформном отображении, а тем более нет алгоритма построения конформного отображения одной области на другую. Однако во многих случаях решение поставленной задачи можно найти, основываясь на конформных отображениях стандартных областей, осуществляемых элементарными функциями комплексного переменного. Другими словами, решение каждой конкретной задачи отыскания конформного отображения можно свести к последовательному решению стандартных задач и их модификаций.

Далее описаны основные элементарные функции комплексного переменного, их стандартные области однолиственности и конформные отображения, осуществляемые этими функциями (см. также [X, гл. 10]). Особая роль среди этих функций отводится дробно-линейным, свойства которых изложены весьма подробно. Значение дробно-линейных функций понятно из рассматриваемых примеров и их результатов (см. разд. 2 и 3). В конечном счете будет составлен своего рода атлас основных конформных отображений, полезный для нахождения отображений заданных областей на единичный круг или верхнюю полуплоскость (именно к таким задачам сводится построение конформного отображения для односвязных областей и именно они формулируются для решения в рамках курса по теории функций комплексного переменного).

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ИХ ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ

2.1. Дробно-линейная функция

Знакомство с отображениями, осуществляемыми основными элементарными функциями комплексного переменного, начнем с важного класса функций, называемых дробно-линейными.

Определение. *Дробно-линейная функция, или дробно-линейное отображение (ДЛЮ) — это функция вида*

$$W(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.1)$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$.

Условие $ad - bc \neq 0$ исключает вырожденный случай, когда $W(z) \equiv \text{const}$. Из этого же условия при $c = 0$ следует, что $a \neq 0$ и $d \neq 0$. В этом случае функция оказывается линейной:

$$W(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Дробно-линейная функция определена во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением точек $z = -d/c$ и $z = \infty$ (эти точки совпадают при $c = 0$). Доопределим ее в указанных точках следующим образом:

$$W\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad W(\infty) = \frac{a}{c}$$

(в случае $c = 0$ это равносильно условию $W(\infty) = \infty$).

Предложение 2.1. Дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.

Круговое свойство ДЛО. В геометрии вещественной плоскости \mathbb{R}^2 особую роль играют аффинные преобразования, которые переводят прямые на плоскости в прямые. В геометрии комплексной плоскости важно сохранение более общего объекта — *обобщенной окружности*. Этим термином далее называется любая окружность в \mathbb{C} или прямая в \mathbb{C} , дополненная бесконечно удаленной точкой.

Приведенный термин становится понятным, если учесть, что на римановой сфере (общепринятая модель для $\overline{\mathbb{C}}$) и окружности, и прямые изображаются окружностями. Различие состоит лишь в том, что окружности в \mathbb{C} , изображающие прямые, проходят через северный полюс римановой сферы (изображение бесконечно удаленной точки), а окружности в \mathbb{C} , изображающие окружности комплексной плоскости, не проходят. Этот факт — следствие свойств стереографической проекции [X, гл. 1].

Предложение 2.2. Каждое дробно-линейное отображение переводит любую обобщенную окружность в обобщенную окружность.

Чтобы понять, во что именно переходит обобщенная окружность, в окружность или прямую, достаточно выяснить, где находится точка, переходящая в точку ∞ . Пусть ДЛО имеет вид (2.1). Тогда точка ∞ является образом точки $-\frac{d}{c}$. Поэтому, если обобщенная окружность проходит через точку $-d/c$, то ее образ при отображении (2.1) есть прямая, а если она не проходит через точку $-d/c$, то — окружность.

Отметим, что если при отображении (2.1) окружность C_1 переходит в окружность C_2 , то центр окружности C_1 совсем не обязательно переходит в центр окружности C_2 . Подобным свойством обладают лишь линейные отображения, а при дробно-линейном отображении центр окружности C_1 может отобразиться в точку вообще за пределами окружности C_2 .

Свойство сохранения симметрии при ДЛО. Понятие точек, симметричных относительно прямой, хорошо известно из школьного курса геометрии. Распространим это понятие на произвольные обобщенные окружности.

Определение 1. Точки $z_1 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \in \mathbb{C}$ называют симметричными относительно окружности $\Gamma = \{|z - z_0| = R\}$, если $\text{Arg}(z_1 - z_0) = \text{Arg}(z_2 - z_0)$ (точки лежат на одном луче с началом в точке z_0) и $|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = R^2$ (рис. 2.1). Симметричными относительно окружности Γ также считают центр z_0 этой окружности и точку ∞ .

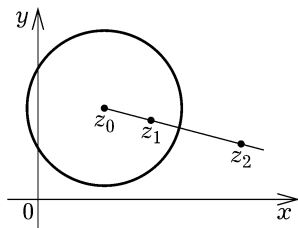


Рис. 2.1

Предложение 2.3. Любое дробно-линейное отображение $w = W(z)$ сохраняет симметрию относительно обобщенных окружностей: если точки $z_1 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \in \mathbb{C}$ симметричны относительно обобщенной окружности Γ , то точки $w_1 = W(z_1)$ и $w_2 = W(z_2)$ симметричны относительно обобщенной окружности $W(\Gamma)$.

Свойство трех точек. Параметры a, b, c, d дробно-линейной функции (2.1) не определяют ее однозначным образом: можно, не изменяя функции, умножить числитель и знаменатель дроби на любое ненулевое комплексное число. В то же время две дробно-линейные функции, которые не сводятся одна к другой указанным способом, — это разные функции. Поэтому можно сказать, что множество всех дробно-линейных функций описывается тремя комплексными параметрами.

Описание всех дробно-линейных функций на основе трех комплексных параметров можно строить по-разному. Один из вариантов состоит в следующем. Зафиксируем три различные точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. В качестве трех комплексных параметров можно рассматривать образы w_1, w_2, w_3 зафиксированных точек. Необходимым условием существования дробно-линейной функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям $w_j = f(z_j)$, $j = 1, 2, 3$, является

различие точек w_1, w_2, w_3 , поскольку любое дробно-линейное отображение биективно. Оказывается, что сформулированное условие также и достаточно.

Предложение 2.4. Для любых трех разных точек $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и любых трех разных точек $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ существует, и притом единственная, дробно-линейная функция f , удовлетворяющая условиям $w_j = f(z_j), j = 1, 2, 3$.

Из доказательства этого предложения (см. разд. 4) вытекает, что ДЛО $w = W(z)$, переводящее разные точки z_1, z_2, z_3 в разные точки w_1, w_2, w_3 можно записать в виде

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \quad (2.2)$$

В приведенном равенстве каждая точка входит в равенство (2.2) дважды: один раз в числителе и один раз в знаменателе соответствующего выражения.

Соотношение (2.2) сохраняет смысл и тогда, когда одна из трех точек z_1, z_2, z_3 и, возможно, одна из точек w_1, w_2, w_3 являются бесконечно удаленными. В этом случае все разности, в которые входят такие точки, следует заменить единицами. Например, при $z_1 = \infty$ и $w_2 = \infty$ равенство (2.2) следует интерпретировать как

$$\frac{1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{1} = \frac{w - w_1}{1} \cdot \frac{1}{w_3 - w_1},$$

что равносильно равенству

$$\frac{z_3 - z_2}{z - z_2} = \frac{w - w_1}{w_3 - w_1}.$$

ДЛО верхней полуплоскости на себя. Общее описание семейства ДЛО верхней полуплоскости на себя приведено ниже (см. разд. 4.1). Здесь же остановимся на задаче построения ДЛО W верхней полуплоскости на себя, которое заданную точку $z_0 \in \mathbb{C}_+$ переводит в заданную точку $w_0 \in \mathbb{C}_+$ и при этом дополнительно удовлетворяет условию нормировки $\arg W'(z_0) = \alpha$, где $\alpha \in (-\pi, \pi]$ — заданное число.

По условию $w_0 = W(z_0)$. Так как относительно действительной оси точка \bar{z}_0 симметрична точке z_0 , а точка \bar{w}_0 — точке w_0 и действительная ось при отображении W переходит в себя, то по свойству симметрии для ДЛО $\bar{w}_0 = W(\bar{z}_0)$ (рис. 2.2).

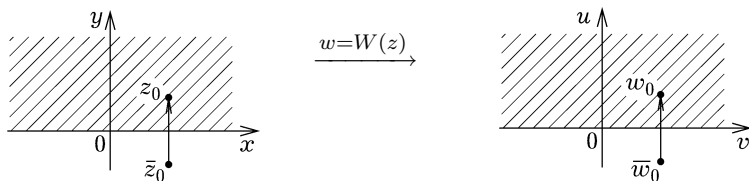


Рис. 2.2

Обозначив через z_3 и w_3 произвольную точку в $\bar{\mathbb{C}}$ и ее образ при отображении W , из (2.2) получим

$$\frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} = K \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad (2.3)$$

где

$$K = \frac{z_3 - \bar{z}_0}{z_3 - z_0} \cdot \frac{w_3 - w_0}{w_3 - \bar{w}_0}.$$

Выразим коэффициент K через параметр α . Полагая $z = x$ (т. е. выбирая точку z на действительной оси), заключаем, что $W(x) = u$ — точка на действительной оси. Следовательно,

$$|K| = \left| \frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0} \right| \left| \frac{u - w_0}{u - \bar{w}_0} \right| = 1.$$

Отсюда следует, что $K = e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg(K)$. С учетом $w = W(z)$ перепишем равенство (2.3) в следующем виде:

$$\frac{W(z) - w_0}{W(z) - \bar{w}_0} = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по z , получим

$$\frac{W'(z)(w_0 - \bar{w}_0)}{(W(z) - \bar{w}_0)^2} = e^{i\varphi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2},$$

откуда

$$W'(z) = e^{i\varphi} \frac{(W(z) - \bar{w}_0)^2}{w_0 - \bar{w}_0} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2}.$$

Из этого равенства находим

$$W'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{w_0 - \bar{w}_0}{z_0 - \bar{z}_0} = Re^{i\varphi}, \quad (2.4)$$

где

$$R = \frac{w_0 - \bar{w}_0}{z_0 - \bar{z}_0} = \frac{2 \operatorname{Im} w_0}{2 \operatorname{Im} z_0}$$

есть положительное действительное число (по условию $\operatorname{Im} z_0 > 0$, $\operatorname{Im} w_0 > 0$).

Таким образом, согласно равенству (2.4), $\arg W'(z_0) = \varphi = \arg K$ и $K = e^{i\alpha}$. Поэтому ДЛО $w = W(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

ДЛО верхней полуплоскости на круг. Рассмотрим задачу описания ДЛО W верхней полуплоскости на единичный круг, которое заданную точку z_0 верхней полуплоскости переводит в заданную точку w_0 единичного круга и удовлетворяет дополнительному условию нормировки $\arg W'(z_0) = \alpha$, где $\alpha \in (-\pi, \pi]$ — заданное число (рис. 2.3).

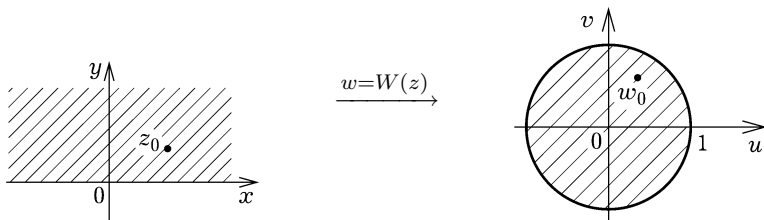


Рис. 2.3

Образом действительной оси при отображении W является единичная окружность. По свойству симметрии для ДЛО точка \bar{z}_0 , симметричная z_0 относительно действительной оси, при отображении W перейдет в точку $w_0^* = 1/\bar{w}_0$, симметричную w_0

относительно единичной окружности. Из равенства (2.2) следует соотношение

$$\frac{w - w_0}{w - w_0^*} = K_1 \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

эквивалентное равенству

$$\frac{w - w_0}{1 - w\bar{w}_0} = K \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Из этого равенства находим

$$K = \frac{w - w_0}{1 - w\bar{w}_0} \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}.$$

Точка $w = 1$ единичной окружности является образом некоторой точки $z = x$ действительной оси. Поэтому

$$K = \frac{1 - w_0}{1 - \bar{w}_0} \frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0}.$$

Из этого соотношения следует, что $|K| = 1$, т. е. $K = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

Таким образом, ДЛО W описывается равенством

$$\frac{W(z) - w_0}{1 - W(z)\bar{w}_0} = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Продифференцируем последнее выражение по z :

$$\frac{W'(z)(1 - w_0\bar{w}_0)}{(1 - W(z)\bar{w}_0)^2} = e^{i\varphi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2}.$$

При $z = z_0$ находим

$$W'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{1 - w_0\bar{w}_0}{z_0 - \bar{z}_0} = e^{i\varphi} \frac{1 - |w_0|^2}{2i \operatorname{Im} z_0} = e^{i(\varphi - \pi/2)} \frac{1 - |w_0|^2}{2 \operatorname{Im} z_0}.$$

Учитывая, что $\frac{1 - |w_0|^2}{2 \operatorname{Im} z_0}$ — положительное действительное число (поскольку $\operatorname{Im} z_0 > 0$ и $|w_0| < 1$), делаем вывод: $\varphi - \pi/2$ — одно из значений аргумента комплексного числа $W'(z_0)$. Следовательно,

$e^{ia} = e^{i(\varphi - \pi/2)}$ и $e^{i\varphi} = e^{ia + i\pi/2} = ie^{ia}$. Таким образом, отображение W удовлетворяет равенству

$$\frac{w - w_0}{1 - w\bar{w}_0} = ie^{ia} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

В частности, при $w_0 = 0$ получаем

$$W(z) = ie^{ia} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Задачи описания ДЛЮ полуплоскости на себя и полуплоскости на круг, разобранные достаточно подробно, показывают, как стандартная задача нахождения ДЛЮ по известным трем точкам плоскости и их образам может быть использована для построения ДЛЮ, удовлетворяющих требуемым условиям. Также показано, как можно использовать круговое свойство и свойство симметрии.

Описание ДЛЮ верхней полуплоскости на себя открывает возможность при построении конформных отображений обеспечивать выполнение условий нормировки. Действительно, рассмотрим, например, задачу отображения односвязной области Ω на верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ . Предположим, что мы построили какое-либо отображение W_0 области Ω на \mathbb{C}_+ . Выберем произвольные точки $z_0 \in \Omega$, $w_0 \in \mathbb{C}_+$ и число $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Пусть отображение W_0 переводит точку z_0 в некоторую точку w_* и $\arg W'_0(z_0) = \alpha_*$. Построим ДЛЮ W_1 , для которого $W_1(w_*) = w_0$, и $\arg W_1(w_*) = \alpha - \alpha_*$ (или отличается от этого значения на число, кратное 2π , если это значение не попадает в промежуток $(-\pi, \pi]$). Тогда функция $W(z) = W_1(W_0(z))$ конформно отображает Ω на верхнюю полуплоскость и удовлетворяет заданным условиям нормировки. В самом деле, $W(z_0)W_1(W_0(z_0)) = W_1(w_*) = w_0$. Кроме того, согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$\begin{aligned} W'(z_0) &= W'_1(w_*) W'_0(z_0) = \\ &= |W'_1(w_*)| e^{i(\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot |W'_0(z_0)| e^{i\alpha_*} = |W'_1(w_*)| |W'_0(z_0)| e^{i\alpha}, \end{aligned}$$

откуда $\arg W'(z_0) = \alpha$.

Примеры построения ДЛО. В отличие от линейных отображений ДЛО могут сильно менять внешний вид областей. Рассмотрим, например, куда могут переходить при ДЛО *круговые луночки*, т. е. области, ограниченные дугами окружностей.

Пример 1. Найдем отображение, конформно отображающее область $\{z: |z - i| > 1, |z - 2i| < 2\}$ на полосу $\{w: 0 < \operatorname{Im} w < \frac{1}{2}\}$ (рис. 2.4).

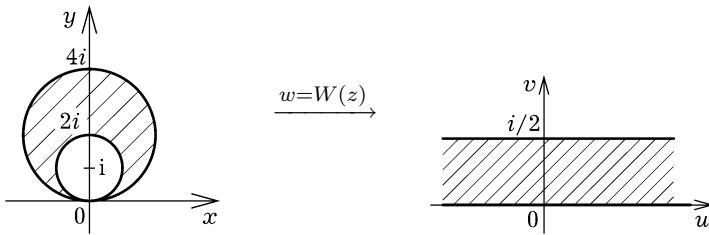


Рис. 2.4

Если мы переведем точку $z = 0$, через которую проходят обе окружности, ограничивающие первую область, в точку $w = \infty$, то обе окружности $|z - i| = 1$ и $|z - 2i| = 2$, согласно свойству ДЛО сохраняя обобщенные окружности, перейдут в прямые. В силу того, что окружности $|z - i| = 1$ и $|z - 2i| = 2$ в точке $z = 0$ образуют нулевой угол, их образами будут параллельные прямые. Далее, точку $z = 2i$ переведем в точку $w = 0$. Следовательно, согласно формуле (2.2), искомое отображение $w = W(z)$ будет удовлетворять соотношению

$$W(z) = K \frac{z - 2i}{z}.$$

Для того чтобы найти коэффициент K зададим образ одной граничной точки. Например, потребуем, чтобы точка $4i$, лежащая на окружности $|z - 2i| = 2$ перешла в точку $w = i/2$. При этом окружность $|z - 2i| = 2$ перейдет в прямую $\{\operatorname{Im} w = 1/2\}$ в плоскости (w). Итак

$$\frac{i}{2} = K \frac{4i - 2i}{4i} = \frac{K}{2},$$

отсюда $K = i$, т. е. $W(z) = \frac{iz + 2}{z}$. Остается заметить, что образом исходной луночки будет именно полоса $\left\{w: 0 < \operatorname{Im} w < \frac{1}{2}\right\}$, а не внешность этой полосы (проверка этого факта предлагается в качестве простого упражнения).

Пример 2. Найдем ДЛО области G , являющейся пересечением кругов $\{z: |z| < 1\}$ и $\{z: |z - i| = 1\}$, на сектор $\left\{w: 0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}\right\}$ (рис. 2.5).

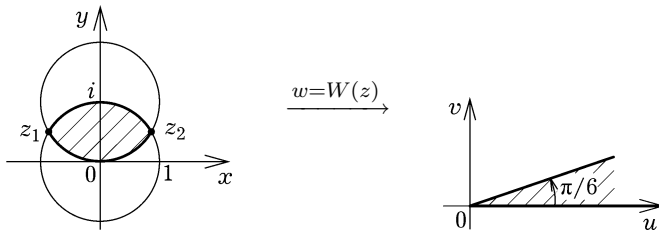


Рис. 2.5

Окружности $|z| = 1$ и $|z - i| = 1$ пересекаются в точках $z_1 = (-\sqrt{3} + i)/2$ и $z_2 = (\sqrt{3} + i)/2$. Найдем ДЛО, переводящее точку z_1 в 0, а точку z_2 — в ∞ . Это, как следует из (2.2), будет отображение вида

$$W(z) = K \frac{2z - (i - \sqrt{3})}{2z - (i + \sqrt{3})},$$

где коэффициент K определяется числами z_3 и w_3 . Можно, например, выбрать $z_3 = 0$, $w_3 = 1$, т. е. задать дополнительное условие $w(0) = 1$. Получим отображение $w = W(z)$, которое переводит точки z_1 , 0 и z_2 в точки 0, 1 и ∞ соответственно. В частности, окружность $|z - i| = 1$ перейдет в действительную ось. Угол между окружностями $|z - i| = 1$ и $|z| = 1$ в точке z_1 (от первой из названных окружностей до второй против часовой стрелки) равен $\frac{2\pi}{3}$. Поскольку $W(z_1) = 0$, $W(z_2) = \infty$, окружность $|z| = 1$ перейдет в прямую, проходящую через точку 0, и эта прямая будет образовывать с действительной осью (образом окружности

$|z - i| = 1$) угол $\frac{2\pi}{3}$, отсчитываемый против часовой стрелки. Следовательно, $W(z)$ — искомое отображение. Найдем значение K , используя дополнительное условие $W(0) = 1$:

$$K = \frac{i + \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом,

$$W(z) = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2z - (i - \sqrt{3})}{2z - (i + \sqrt{3})}.$$

2.2. Целая степенная функция

При рассмотрении отображения $W(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, следует всегда помнить об областях ее однолистности. Напомним, что эта функция локально однолистка в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (так как $W'(z) = nz^{n-1}$ обращается в нуль только при $z = 0$), однако не является однолистной в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, поскольку сохраняет значение при повороте точки на угол, кратный $2\pi/n$ (она «склеивает» точки, которые совмещаются одна с другой при повороте на угол, кратный $2\pi/n$).

Максимальными областями однолистности (или областями конформности) для функции $W(z) = z^n$ являются, например, области

$$C_{\alpha,n} = \left\{ z \in \mathbb{C}: \alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n} \right\}, \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

представляющие собой угловые секторы, ограниченные лучами $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \alpha + \frac{2\pi}{n}$. Область $C_{0,n}$ при отображении $w = z^n$ переходит на всю плоскость с разрезом по положительной части действительной оси, причем лучу $\arg z = 0$ на границе сектора $C_{0,n}$ соответствует «верхний берег» разреза, а лучу $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ — «нижний берег» разреза (рис. 2.6).

Приведем другие примеры отображения при $n = 2$ (проверка соответствующих фактов предлагается в качестве упражнения). Области $C_{0,2}$ и $C_{\pi,2}$ при отображении $w = z^2$ переходят в плоскость с разрезом по положительной части действительной оси. Область

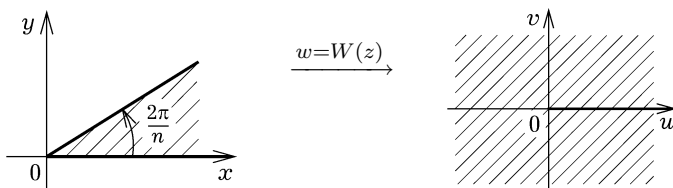


Рис. 2.6

$C_{3\pi/2,2}$ переходит при этом же отображении в плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси (рис. 2.7). Область $C_{\pi/4,2}$ перейдет в плоскость с разрезом по лучу $\arg w = \frac{\pi}{2}$, а область $C_{\pi/6,2}$ — в плоскость с разрезом по лучу $\arg w = \frac{\pi}{3}$.

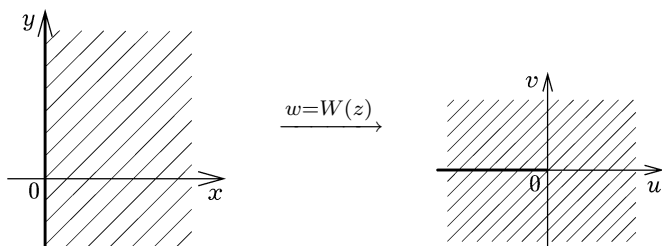


Рис. 2.7

Далее, область $C_{0,4}$ при отображении $w = z^4$ переходит в плоскость с разрезом по положительной части действительной оси (рис. 2.8), а область $C_{\pi,5}$ при отображении $w = z^5$ переходит в плоскость с разрезом по лучу $\arg w = \pi$.

Область $C_{0,4}$ при отображении $w = z^2$ переходит в верхнюю полуплоскость, при отображении $w = z^3$ — в угол $0 < \arg w < \frac{3\pi}{2}$, а отображение $w = z^5$ не является конформным в этой области.

Пример 3. Определим, куда при отображении $w = z^2$ переходит полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[0, ih]$ мнимой оси, $h > 0$.

Отображение $w = z^2$ переводит верхнюю полуплоскость в плоскость с разрезом по положительной части действительной

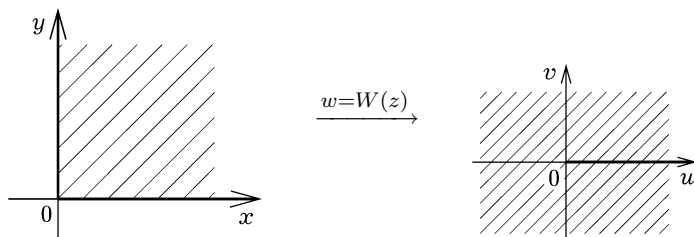


Рис. 2.8

оси. При этом отрезок $[0, ih]$ положительной части мнимой оси переходит в отрезок $[-h^2, 0]$ действительной оси. Таким образом, отображение $w = z^2$ переводит исходную область в плоскость с разрезом по лучу $[-h^2, +\infty)$ действительной оси (рис. 2.9).

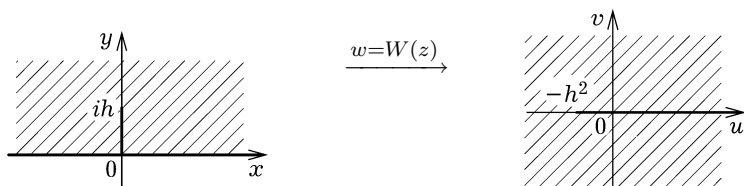


Рис. 2.9

В этом примере полезно обратить внимание на нарушение конформности (и локальной конформности) отображения $w = z^2$ в точке $z = 0$. В самом деле, вещественная прямая и отрезок $[0, ih]$ образуют в точке $z = 0$ угол $\pi/2$, а их образы — положительная действительная полуось и отрезок $[-h^2, 0]$ — образуют в точке $w = 0$ угол π .

2.3. Показательная функция

Рассмотрим теперь отображение, задаваемое функцией e^z . Напомним, что эта функция, которую можно определить равенством

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n,$$

удовлетворяет соотношению $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Из этого соотношения при $z = x + iy$ следует, что $|e^z| = e^x$, $y \in \text{Arg } e^z$, $\text{Re } e^z = e^x \cos y$ и $\text{Im } e^z = e^x \sin y$.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функция e^z аналитична во всей комплексной плоскости и $(e^z)' = e^z$. Таким образом, функция e^z локально-однолистка во всей комплексной плоскости. Однако в силу равенства $e^{z+2k\pi i} = e^z$ функция e^z не является однолистной в \mathbb{C} . Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием однолистности функции e^z в заданной области $G \in \mathbb{C}$ является отсутствие в G точек z_1 и z_2 , для которых $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

В соответствии с указанным критерием максимальными областями однолистности функции $w = e^z$ являются, например, горизонтальные полосы $S_{0,2\pi} = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \text{Im } z < 2\pi\}$ и $S_{-\pi,\pi} = \{z \in \mathbb{C}: -\pi < \text{Im } z < \pi\}$, определенные выше.

Выясним, как при отображении $w = e^z$ преобразуются некоторые характерные кривые. Рассмотрим горизонтальную прямую $\text{Im } z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Эту прямую можно задать параметрически в виде $z = x + i\alpha$, $x \in \mathbb{R}$. Так как $e^{x+i\alpha} = e^x(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, то образом указанной прямой является множество $\{e^{x+i\alpha}: x \in \mathbb{R}\}$, т. е. луч $\arg w = \alpha$, выходящий из точки 0. При этом значениям $x < 0$ соответствуют точки этого луча с модулем меньше 1, а значениям $x > 0$ — точки с модулем больше 1. Заметим, что образы прямых $\text{Im } z = \alpha$ и $\text{Im } z = \alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, совпадают.

Рассмотрим теперь вертикальную прямую $\text{Re } z = r$, $r \in \mathbb{R}$. Параметрически эта прямая задается в виде $z = r + iy$, $y \in \mathbb{R}$. Так как $e^{r+iy} = e^r(\cos y + i \sin y)$, то образ рассматриваемой прямой описывается параметрически уравнениями $u = e^r \cos y$, $v = e^r \sin y$, $y \in \mathbb{R}$ и представляет собой окружность с центром в точке 0 и радиусом e^r , которая проходится многократно: каждая точка этой окружности соответствует бесконечному числу точек исходной прямой, поскольку точки $r + iy$ и $r + i(y + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, переходят в одну и ту же точку $e^r(\cos y + i \sin y)$.

Далее рассмотрим пересечение вертикальной прямой $\text{Re } z = r$ с областью $S_{0,2\pi}$, являющейся максимальной областью конформности функции e^z . Этим пересечением является интервал $(r, r + 2\pi i)$,

а его образом при отображении $w = e^z$ — окружность с центром в точке 0 и радиусом e^r с выколотой точкой e^r .

Образ отрезка $[r + \pi i/2, r + \pi i]$ при отображении $w = e^z$ будет замкнутая дуга окружности с центром в точке 0, радиусом e^r , идущая от точки $e^r e^{\pi i/2}$ до точки $e^r e^{\pi i}$.

Анализируя характер линий, являющихся при отображении $w = e^z$ образами линий прямоугольной координатной сетки и их фрагментов, можно сделать вывод, что отображение $w = e^z$ переводит:

1) полосу $S_{0,2\pi} = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ в плоскость с разрезом по положительной части действительной оси (рис. 2.10);

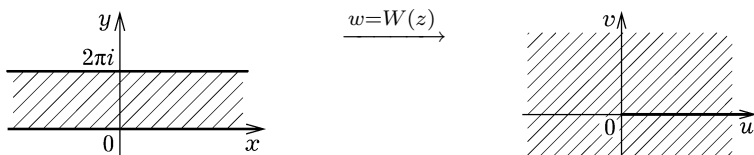


Рис. 2.10

2) полосу $S_{-\pi,\pi} = \{z \in \mathbb{C}: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ в плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси (рис. 2.11);

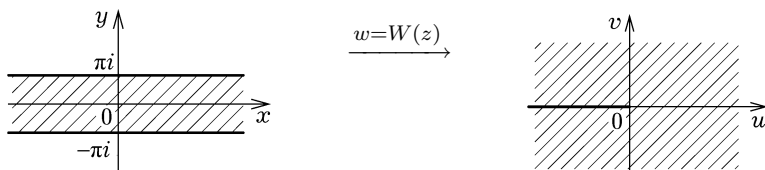


Рис. 2.11

3) полуполосу $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ во внешность единичного круга $|w| > 1$, разрезанную по положительной части действительной оси (рис. 2.12);

4) полуполосу $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ в единичный круг $|w| < 1$ с разрезом по отрезку $[0, 1)$ (рис. 2.13);

5) полосу $\{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ в верхнюю полуплоскость (рис. 2.14);

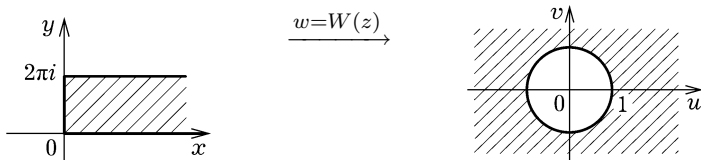


Рис. 2.12

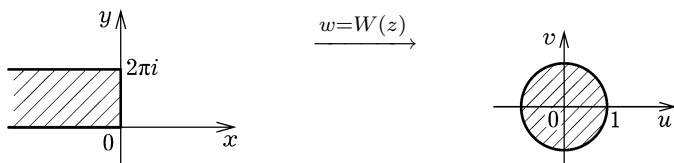


Рис. 2.13

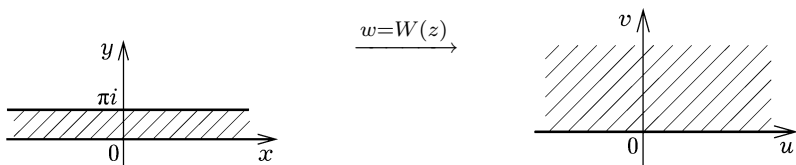


Рис. 2.14

6) полуполосу $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ в верхнюю часть $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ единичного круга (верхний единичный полукруг) (рис. 2.15);

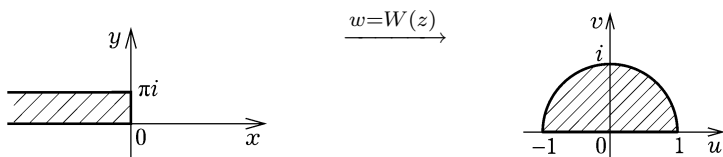


Рис. 2.15

7) полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ в верхнюю полуплоскость с вырезанным единичным полукругом (рис. 2.16).

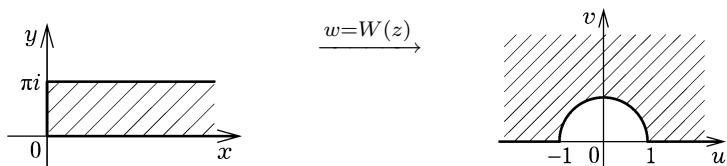


Рис. 2.16

2.4. Функция Жуковского

Функция Жуковского — это рациональная функция

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

которая часто используется в задачах построения различных конформных отображений, а также имеет важные применения в теории крыла самолета. Она аналитична всюду в \mathbb{C} , кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$, являющихся простыми полюсами функции. При этом $\mathcal{J}'(z) = 0$ лишь в точках $z = \pm 1$. Поэтому отображение $w = \mathcal{J}(z)$ локально конформно всюду, кроме точек ± 1 , т. е. в области $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

Выясним, при каких условиях на область $G \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{-1, 1\}$ отображение, осуществляемое функцией Жуковского, будет конформно в G . Для этого определим, в каких случаях две разные точки $z_1 \neq z_2$ имеют одинаковый образ. Полагая, что

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2},$$

получаем

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) - \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right) = (z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0.$$

Так как $z_1 \neq z_2$, последнее равенство равносильно условию $z_1 z_2 = 1$. Поэтому для однолистности функции Жуковского в G необходимо и достаточно, чтобы эта область не содержала пар точек, удовлетворяющих условию $z_1 z_2 = 1$. Такими областями

являются, например, единичный круг $|z| < 1$ (при этом $|z_1 z_2| < 1$) и его внешность $|z| > 1$ ($|z_1 z_2| > 1$).

Чтобы наглядно представить себе отображение $w = \mathcal{J}(z)$, выясним, во что оно переводит полярную координатную сетку. Пусть $z = r e^{i\varphi}$. Тогда

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{2} \left(r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \frac{i}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (2.5)$$

Рассмотрим образы окружностей $|z| = r_0$. Из равенств (2.5) получаем уравнения

$$u = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right) \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi],$$

которые описывают эллипс

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right)^2} = 1$$

с полуосями

$$a = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{1}{r_0} \right).$$

Заметим, что $a \rightarrow 1$, а $b \rightarrow 0$ при $r_0 \rightarrow 1$. Значит, эллипсы, являющиеся образами окружностей $|z| = r_0$, при $r_0 \rightarrow 1$ будут стягиваться к отрезку $[-1, 1]$ действительной оси. В то же время при больших радиусах r_0 полуоси a и b отличаются одна от другой на малую величину $1/r_0$. Таким образом, при больших значениях радиуса окружности r_0 ее образ — эллипс — мало отличается от окружности.

Найдем теперь образы лучей $\arg z = \varphi_0$ при отображении $w = \mathcal{J}(z)$, осуществляемом функцией Жуковского. Уравнения (2.5) приводят к параметрическим уравнениям образа луча $\arg z = \varphi_0$:

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi_0, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi_0, \quad r \in (0, +\infty).$$

Если φ_0 имеет значения 0 или π , то $v = 0$ и образом луча будет положительная часть действительной оси ($\varphi_0 = 0$) или отрицательная ($\varphi_0 = \pi$). Таким образом, функция Жуковского переводит положительную и отрицательную действительные полуоси в себя, но при этом если точка пробегает по лучу, образ луча проходится дважды: от бесконечно удаленной точки к нулю и обратно. Лучи $\arg z = \pm\pi/2$ функция Жуковского взаимно-однозначно отображает на мнимую ось.

Предположим, что параметр φ_0 имеет значение, не кратное $\pi/2$. Исключим из параметрических уравнений параметр r . Для этого уравнения запишем в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) = \frac{u}{\cos \varphi_0}, \quad \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) = \frac{v}{\sin \varphi_0}.$$

Отсюда, перемножив сумму и разность двух уравнений, получим уравнение

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1, \quad (2.6)$$

задающее гиперболу с полуосями $a = |\cos \varphi_0|$ и $b = |\sin \varphi_0|$ и фокальным параметром $c = 1$. Заметим, что знак переменной u совпадает со знаком величины $\cos \varphi_0$. Поэтому образом луча $\arg z = \varphi_0$ является не вся гипербола (2.6), а лишь одна ее ветвь. Итак, лучи $\arg z = \varphi_0$ функцией Жуковского отображаются в ветви гипербол, имеющих общие фокусы $f_1 = 1$ и $f_2 = -1$.

Анализируя образ полярной координатной сетки, можно сделать следующий вывод. Функция Жуковского конформно отображает и единичный круг, и внешность единичного круга на плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$.

И верхняя полуплоскость \mathbb{C}_+ , и нижняя \mathbb{C}_- , и единичный круг не содержат точек 1 и -1 нарушения локальной однолиственности функции Жуковского, а также не содержат каких-либо точек z_1 и z_2 , связанных соотношением $z_1 z_2 = 1$. Следовательно, \mathbb{C}_+ и \mathbb{C}_- являются областями однолиственности функции Жуковского.

Анализ образа полярной координатной сетки для функции Жуковского позволяет выявить несколько типовых конформных отображений для этой функции. Функция Жуковского $W(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ переводит:

1) верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ в плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (рис. 2.17);

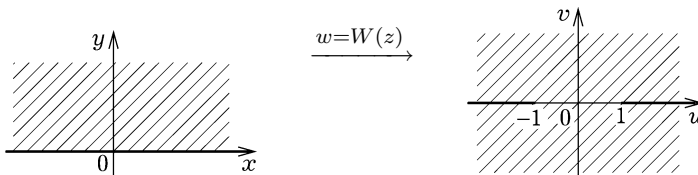


Рис. 2.17

2) нижнюю полуплоскость \mathbb{C}_- в плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (рис. 2.18);

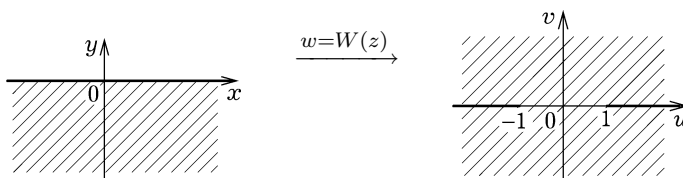


Рис. 2.18

3) единичный круг \mathbb{D} в плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 2.19);

4) внешность единичного круга (т. е. множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$) в плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 2.20);

5) полуокруг $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ в нижнюю полуплоскость \mathbb{C}_- (рис. 2.21);

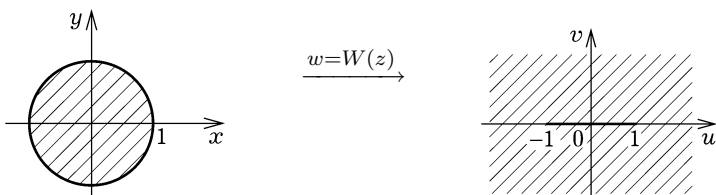


Рис. 2.19

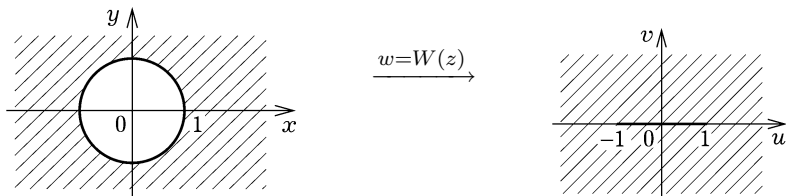


Рис. 2.20

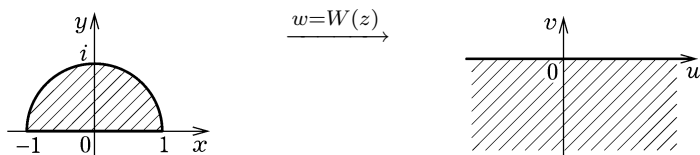


Рис. 2.21

6) полукруг $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ в верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ (рис. 2.22);

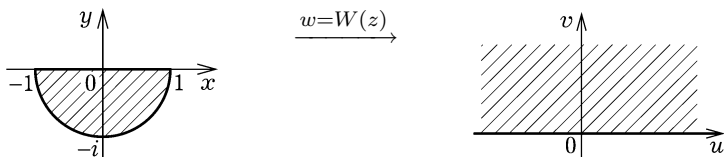


Рис. 2.22

7) круг \mathbb{D} с разрезами по отрезкам $[-1, -a]$ и $[b, 1]$, $a, b \in (0, 1)$, в плоскость \mathbb{C} с разрезом по отрезку $[-\mathcal{J}(a), \mathcal{J}(b)]$, содержащему отрезок $[-1, 1]$ (рис. 2.23).

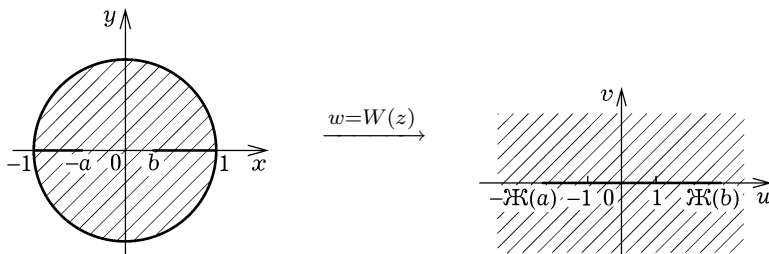


Рис. 2.23

2.5. Обратные функции и их однозначные ветви

Функции $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\text{Ln } z$ и $\mathcal{J}^{-1}(z)$ определяются как обратные функциям z^n , e^z и $\mathcal{J}(z)$. Поскольку функции z^n , e^z и $\mathcal{J}(z)$ не являются однолиственными в \mathbb{C} , обратные им функции $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\text{Ln } z$ и $\mathcal{J}^{-1}(z)$ будут *многозначными*.

Так, каждому комплексному числу $z = re^{i\theta}$, $z \neq 0$, соответствует n значений

$$w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2\pi ki}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

таких, что $w_k^n = z$. Однако числу 0 соответствует единственное значение «корня степени n », а именно 0. Таким образом, точка 0 является особой точкой для многозначной функции $\sqrt[n]{z}$.

Каждому комплексному числу $z = re^{i\theta}$, $z \neq 0$, соответствует бесконечно много значений

$$\ell_k = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

таких, что $e^{\ell_k} = z$. Точка 0 снова является особой точкой для соответствующей многозначной функции $\text{Ln } z$.

Из выражения для функции Жуковского $\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ следует, что функция $\mathcal{J}^{-1}(z)$, обратная функции Жуковского, выражается формулой

$$\mathcal{J}^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

где \sqrt{w} — это многозначная функция «корень квадратный из w », принимающая два значения в каждой точке $w \neq 0$. Таким образом, функция \mathcal{J}^{-1} является двузначной. Заметим, что особыми для функции \mathcal{J}^{-1} являются точки 1 и -1 , в которых подкоренное выражение $z^2 - 1$ обращается в нуль.

Предположим, что в некоторой области G комплексной плоскости заданы многозначная функция F и голоморфная функция f . Если для любой точки $z \in G$ значение $f(z)$ функции f в точке z принадлежит множеству $F(z)$ значений многозначной функции F в точке z , то говорят, что функция f называется *голоморфной ветвью* многозначной функции F в области G .

Существование ветвей корня и логарифма в односвязной области. Многозначные функции $\operatorname{Ln} z$ (логарифм) и $\sqrt[n]{z}$ (корень n -й степени) имеют однозначные голоморфные ветви $L(z)$ и $V_n(z)$ в любой односвязной области G , не включающей точку 0, т. е. в случае $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. При этом

$$L'(z) = \frac{1}{z}, \quad V_n'(z) = \frac{V_n^{1-n}(z)}{n}, \quad z \in G.$$

В частности, при $n = 2$

$$V'(z) = \frac{1}{2V(z)}.$$

Однозначные голоморфные ветви обратных функций можно выделять на основе областей однолиственности прямых функций. Ясно, что если голоморфная функция $f(z)$ однолистна в области G , то существует обратная функция, отображающая $f(G)$ на область G , которая является однозначной ветвью многозначной (в общем случае) функции $f^{-1}(z)$.

Однозначная ветвь обратной функции определяется неоднозначно. Поэтому необходимы дополнительные условия, фиксирующие конкретную однозначную ветвь данной обратной функции. В качестве такого условия достаточно задать значение обратной функции хотя бы в одной точке.

Ранее были найдены основные области однолиственности функций z^n , e^z и $\mathcal{J}(z)$, а также их образы. Все эти образы как раз и

представляют собой односвязные области в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Существуют однозначные голоморфные ветви функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$ и \mathcal{W}^{-1} , осуществляющие соответствующие обратные отображения. Приведем ряд таких обратных отображений, полезных при решении конкретных задач. Выделение однозначной ветви многозначной функции проводится заданием значения функции в какой-либо точке рассматриваемой области.

1. Функция $f(z) = \sqrt{z}$, $f(-1) = i$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ (рис. 2.24).

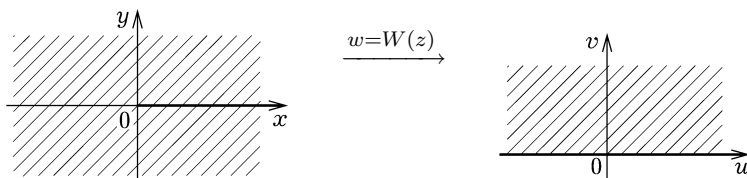


Рис. 2.24

2. Функция $f(z) = \sqrt{z}$, $f(-1) = -i$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на нижнюю полуплоскость \mathbb{C}_- (рис. 2.25).

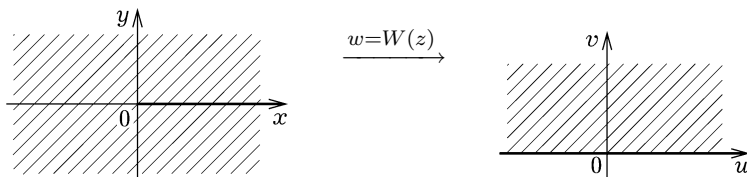


Рис. 2.25

3. Функция $f(z) = \sqrt{z}$, $f(1) = 1$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, -\infty)$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ (рис. 2.26).

4. Функция $f(z) = \sqrt{z}$, $f(1) = -1$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, -\infty)$ на левую полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$ (рис. 2.27).

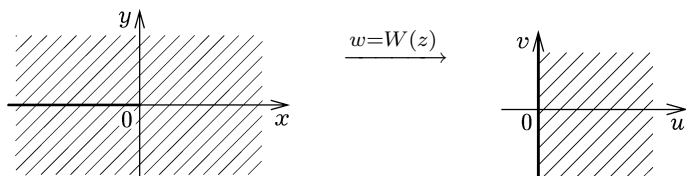


Рис. 2.26

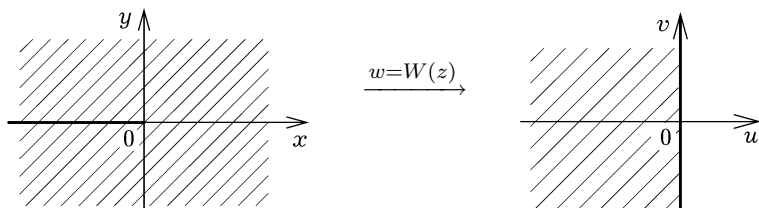


Рис. 2.27

5. Функция $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $f(-1) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на угол $0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}$ (рис. 2.28).

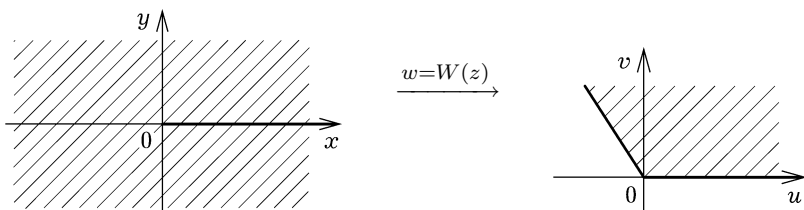


Рис. 2.28

6. Функция $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $f(-1) = -1$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на угол $\frac{2\pi}{3} < \arg w < \frac{4\pi}{3}$ (рис. 2.29).

7. Функция $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $f(-1) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на угол $\frac{4\pi}{3} < \arg w < 2\pi$ (рис. 2.30).

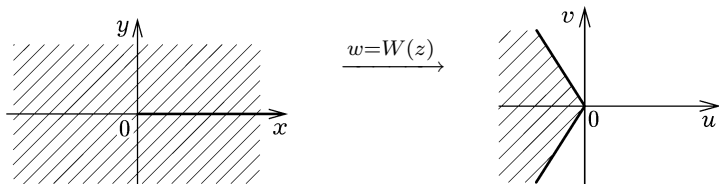


Рис. 2.29

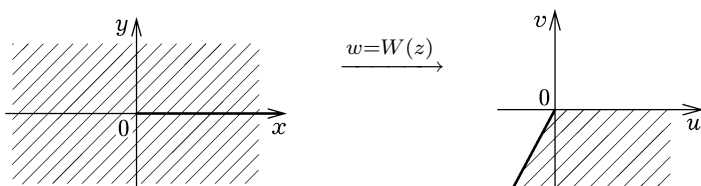


Рис. 2.30

8. Функция $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(-1) = \pi i$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi i$ (рис. 2.31).

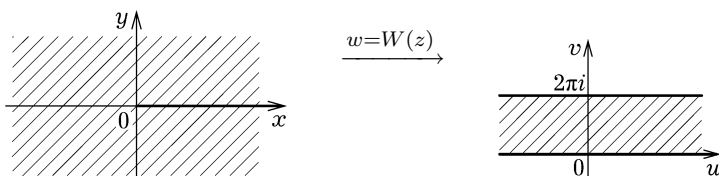


Рис. 2.31

9. Функция $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(-1) = 3\pi i$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на полосу $2\pi i < \operatorname{Im} w < 4\pi i$ (рис. 2.32).

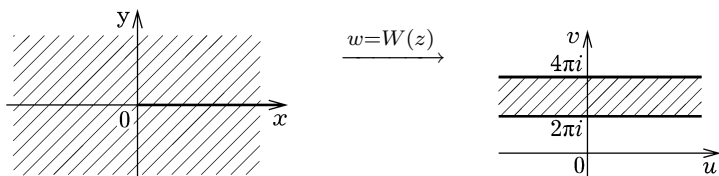


Рис. 2.32

10. Функция $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(-1) = -\pi i$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на полосу $-2\pi i < \operatorname{Im} w < 0$ (рис. 2.33).

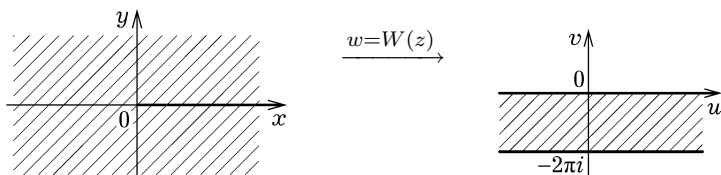


Рис. 2.33

11. Функция $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(1) = 0$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, -\infty)$ на полосу $-\pi i < \operatorname{Im} w < \pi i$ (рис. 2.34).

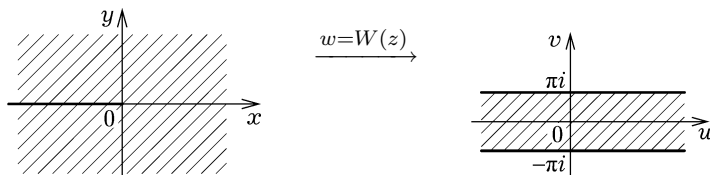


Рис. 2.34

12. Функция $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $f(1) = 2\pi i$, отображает плоскость \mathbb{C} с разрезом по лучу $[0, -\infty)$ на полосу $\pi i < \operatorname{Im} w < 3\pi i$ (рис. 2.35).

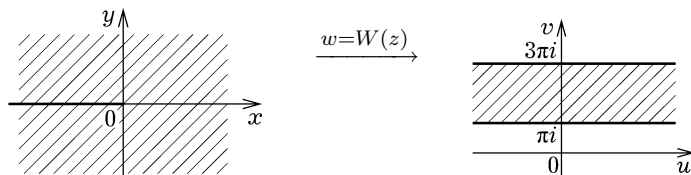


Рис. 2.35

13. Функция $f(z) = \mathcal{J}^{-1}(z)$, $f(0) = i$, отображает плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезами по лучам $[-1, -\infty)$ и $[1, \infty)$ на верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ (рис. 2.36).

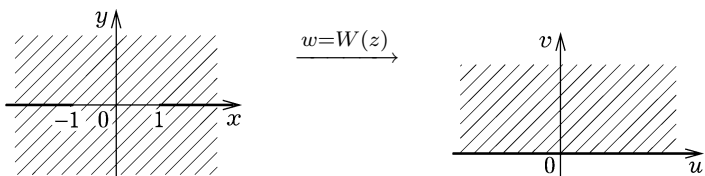


Рис. 2.36

14. Функция $f(z) = \mathcal{J}^{-1}(z)$, $f(0) = -i$, отображает плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезами по лучам $[-1, -\infty)$ и $[1, \infty)$ на нижнюю полуплоскость \mathbb{C}_- (рис. 2.37).

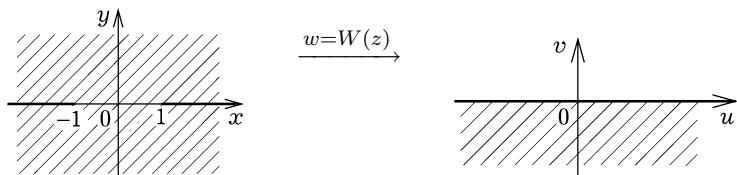


Рис. 2.37

15. Функция $f(z) = \mathcal{J}^{-1}(z)$, $f(2) = 2 - \sqrt{3}$, отображает плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на единичный круг \mathbb{D} (рис. 2.38).

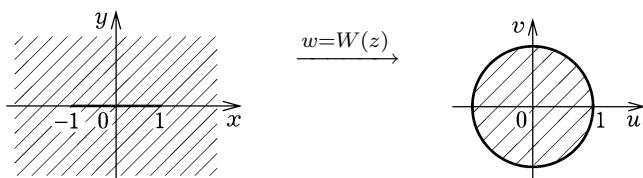


Рис. 2.38

16. Функция $f(z) = \mathcal{J}^{-1}(z)$, $f(2) = 2 + \sqrt{3}$, отображает плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внешность единичного круга (рис. 2.39).

17. Функция $f(z) = \mathcal{J}^{-1}(z)$, $f(i) = i(1 - \sqrt{2})$, отображает верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ на нижний полукруг $\mathbb{D}_- = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$ (рис. 2.40).

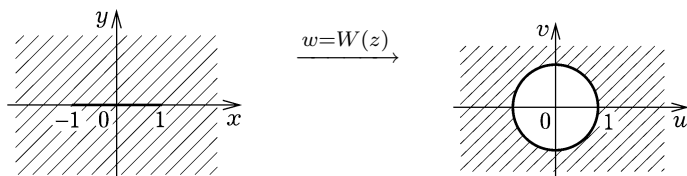


Рис. 2.39

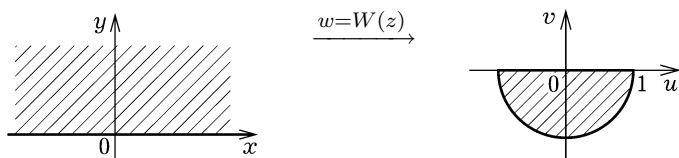


Рис. 2.40

18. Функция $f(z) = \mathcal{J}^{-1}(z)$, $f(i) = i(1 + \sqrt{2})$, отображает верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ на область $\{w \in \mathbb{C}: |w| > 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ — верхнюю полуплоскость с вырезанным единичным полукругом (рис. 2.41).

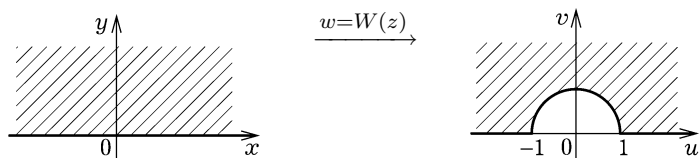


Рис. 2.41

3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЗАДАНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В этом разделе приведены примеры построения конформных отображений конкретных областей. Показан ряд простых методов решения соответствующих задач, не претендующих на общность подхода.

3.1. Последовательности отображений

Основная идея решения многих задач на построение конформного отображения состоит в формировании последовательности отображений, осуществляемых подходящими элементарными функциями.

Итак, если необходимо найти конформное отображение f области Ω_1 на область Ω_2 , то решение будем искать, строя последовательность областей

$$G_0 = \Omega_1, \quad G_1, \quad \dots, \quad G_{N-1}, \quad G_N = \Omega_2,$$

где N — некоторое натуральное число, и соответствующую последовательность элементарных функций комплексного переменного

$$\varphi_k: G_k \rightarrow G_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

конформно отображающих G_k на G_{k+1} . Каждая из функций φ_k может быть дробно-линейной, степенной, показательной, функцией Жуковского и другими, а также обратной одной из них. Искомая функция f , конформно отображающая область Ω_1 на область Ω_2 , может быть представлена в виде

$$f = \varphi_{N-1} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ \varphi_0.$$

В большинстве случаев, решая конкретные задачи, не будем строить всю последовательность отображений $\{\varphi_k\}$. Убедившись

в том, что начиная с какого-то момента задача свелась к некоторой стандартной или одной из уже решенных, будем просто отмечать этот факт.

Задача 1. Отобразить область $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{D}_\ell \cup \mathbb{R}_+)$ (рис. 3.1) на верхнюю полуплоскость $\Omega_2 = \mathbb{C}_+$.

Решение. Положив $G_0 = \Omega_1$, применим дробно линейное отображение

$$\varphi_0(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

при котором область G_0 перейдет в область G_1 , представляющую собой угол $\arg z \in (-\pi/2, \pi)$ с разрезом по дуге единичной окружности, идущей из точки -1 в точку 1 (рис. 3.2).

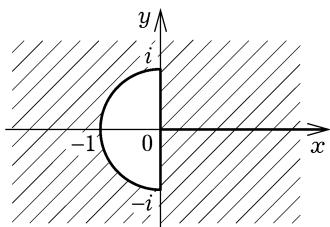


Рис. 3.1

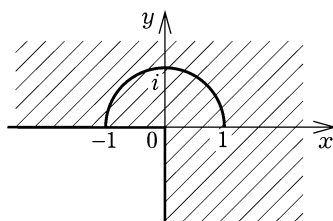


Рис. 3.2

Функция $\varphi_1(z) = (iz)^{2/3}$, $\varphi(-i) = 1$ конформно отображает область G_1 на область G_2 — верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ с разрезом по дуге единичной окружности, идущей из точки -1 в точку $e^{\pi i/3}$ (рис. 3.3).

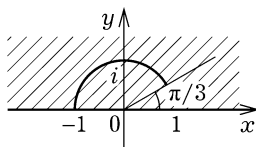


Рис. 3.3

Дробно-линейная функция

$$\varphi_2(z) = \frac{z + 1}{z - 1}$$

отображает область G_2 на область G_3 — верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ с разрезом по отрезку $[0, i\sqrt{3}]$ мнимой оси (рис. 3.4).

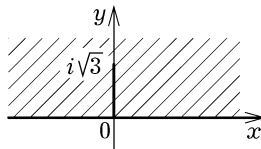


Рис. 3.4

Область G_3 отображается на $G_4 = \Omega_2 = \mathbb{C}_+$ стандартно, при помощи отображения $\varphi_3(z) = \sqrt{z^2 + 3}$ (см. § 2.2, пример 3).

Итак, искомая функция f , конформно отображающая область Ω_1 на область Ω_2 , получена в виде композиции четырех функций:

$$f(z) = \varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(\varphi_0(z)))).$$

Задача 2. Отобразить область Ω_1 , полученную удалением из первого координатного угла $0 < \arg z < \pi/2$ замкнутого круга $|z - i| \leq 1$ (рис. 3.5), на верхнюю полуплоскость $\Omega_2 = \mathbb{C}_+$.

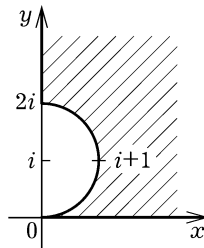


Рис. 3.5

Решение. Дробно-линейная функция

$$\varphi_0(z) = \frac{z - 2i}{z}$$

осуществляет конформное отображение области $G_0 = \Omega_1$ на полуполосу $G_1 = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ (рис. 3.6).

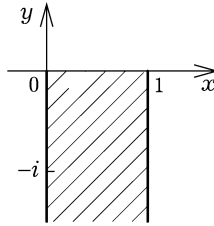


Рис. 3.6

На следующем шаге можно применить функцию

$$\varphi_1(z) = e^{\pi iz},$$

которая конформно отображает область G_1 на область G_2 , получающуюся, если из верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ вырезать замкнутый полукруг $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ (рис. 3.7).

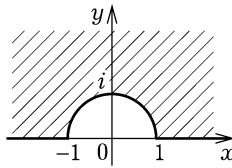


Рис. 3.7

Чтобы отобразить область G_2 на нужную область $G_3 = \Omega_2 = \mathbb{C}_+$, достаточно воспользоваться функцией Жуковского $\varphi_2(z) = \mathcal{J}(z)$.

В результате искомая функция f , отображающая область Ω_1 на область Ω_2 , получена как композиция трех функций:

$$f(z) = \varphi_2(\varphi_1(\varphi_0(z))).$$

Задача 3. Отобразить область Ω_1 , представляющую собой полуполосу $\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < 2ih$ ($h > 0$) с разрезом по лучу $\operatorname{Re} z \geq h, \operatorname{Im} z = h$ (рис. 3.8), на полосу $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ (рис. 3.9).

Решение. Функция $\varphi_0(z) = \pi(h - z)$ отображает область $G_0 = \Omega_1$ на область G_1 , представляющую из себя полуполосу

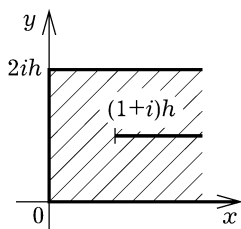


Рис. 3.8

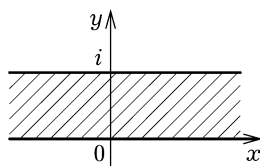


Рис. 3.9

$\operatorname{Re} z < 0$, $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом по лучу $\operatorname{Re} z \leq -\pi$, $\operatorname{Im} z = 0$ (рис. 3.10).

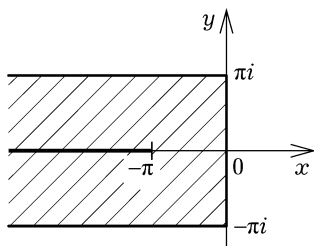


Рис. 3.10

При помощи функции $\varphi_1(z) = \exp(z)$ (она однолистка в G_1) область G_1 отображается на область G_2 — единичный круг с разрезом по отрезку $[-1, e^{-\pi}]$ действительной оси (рис. 3.11).

Функция Жуковского $\varphi_2(z) = \mathcal{J}(z)$ переводит область G_2 в область G_3 — плоскость \mathbb{C} с двумя разрезами: по лучу $\operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z = 0$ и лучу $\operatorname{Re} z \geq \cosh \pi$, $\operatorname{Im} z = 0$ (рис. 3.12). При

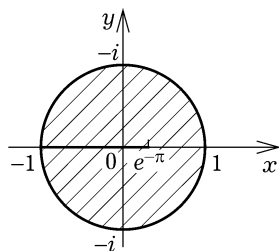


Рис. 3.11

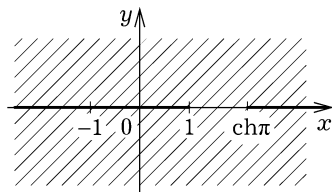


Рис. 3.12

этом единичная окружность перейдет в отрезок $[-1, 1]$, отрезок $[-1, 0]$ — в луч $\operatorname{Re} z \leq -1, \operatorname{Im} z = 0$, а отрезок $[0, e^\pi]$ — в луч $\operatorname{Re} z \geq \cosh \pi, \operatorname{Im} z = 0$.

Остается применить дробно-линейную функцию, отображающую область G_3 на область G_4 — комплексную плоскость с разрезом по лучу $\{z: \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ (построение этого ДЛЮ предлагаем в качестве упражнения) — и подходящую ветвь логарифма, отображающую область G_4 на $G_5 = \Omega_2$ (см. § 2.5).

3.2. Применение принципа симметрии

Ряд задач на построение конформных отображений требует применения принципа симметрии Римана — Шварца. Исходные область-прообраз и область-образ разрезают по дугам окружностей или отрезкам прямых на несколько симметричных подобластей. После этого строят конформное отображение какой-либо части прообраза на часть образа. При этом граница подобласти прообраза переходит в границу подобласти образа так, что устанавливается соответствие между разрезами. Тогда, согласно принципу симметрии, построенное конформное отображение продолжается на всю область.

Из сказанного следует, что недостаточно разделить исходные области на симметричные доли. Конформное отображение доли прообраза в долю образа следует строить, контролируя отображение границ этих областей.

Рассмотрим применение принципа симметрии на примерах.

Задача 4. Построить конформное отображение плоскости с разрезами по отрезку $[-1, 2]$ действительной оси и по отрезку $[-i, i]$ мнимой оси (внешность «креста», рис. 3.13) на верхнюю полуплоскость.

Решение. Решение этой задачи — первый пример использования принципа симметрии Римана — Шварца.

Обозначим через $G_0 = \Omega_1$ исходную область $\mathbb{C} \setminus ([-1, 2] \cup [-i, i])$. Проведем в G_0 разрез по расположенной в этой области части действительной оси. Тогда область G_0 разделится на две

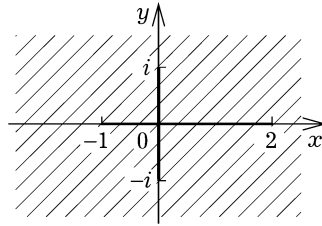


Рис. 3.13

симметричные (относительно разреза) области G_1 и G'_1 , где область G_1 — это верхняя полуплоскость с разрезом $[0, i]$, а область G'_1 — это нижняя полуплоскость с разрезом $[-i, 0]$. При этом граница области G_1 состоит из двух частей — из отрезков $[-1, 2]$ и $[0, i]$, которые остались от границы исходной области G_0 , и из лучей $(-\infty, -1]$ и $[2, \infty)$, относящихся к разрезу (рис. 3.14).

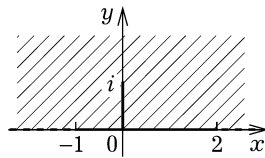


Рис. 3.14

Функция $\varphi_1(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ отображает область G_1 на верхнюю полуплоскость, причем части границы области G_1 , оставшиеся от границы области G_0 (сплошная часть), переходят в отрезок $[-\sqrt{2}, \sqrt{5}]$, а части границы области G_1 , возникшие из-за разрезов (штриховая часть), переходят в лучи $(\infty, -\sqrt{2}]$ и $[\sqrt{5}, \infty)$ (рис. 3.15).

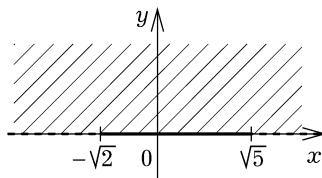


Рис. 3.15

Выберем дробно-линейную функцию φ_2 , отображающую верхнюю полуплоскость на себя, которая обеспечивает следующее соответствие границ: отрезок $[-\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ переходит в луч $[0, \infty)$, а объединение лучей $(\infty, -\sqrt{2}]$ и $[\sqrt{5}, \infty)$ — в луч $(-\infty, 0]$ (рис. 3.16). Отыскание функции φ_2 предлагаем в качестве упражнения.

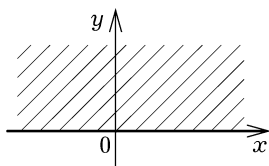


Рис. 3.16

Пусть G_2 — образ области G_1 при отображении φ_2 . Однозначная ветвь $\varphi_3(z)$ многозначной функции \sqrt{z} , определяемая условием $\varphi_3(1) = 1$, отображает область G_2 на область G_3 , представляющую собой 1-й квадрант плоскости: $G_3 = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. При этом сплошная часть границы отображается на положительную часть действительной оси, а штриховая часть — на положительную часть мнимой оси (рис. 3.17).

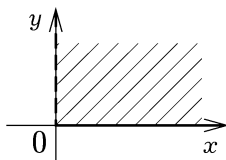


Рис. 3.17

Итак, построена функция $f_1(z) = \varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(z)))$, которая конформно отображает область G_1 на область G_3 , причем штриховая часть границы G_1 переходит в мнимую полуось, а сплошная часть — в действительную. Чтобы получить требуемое в задаче конформное отображение области G_0 на верхнюю полуплоскость, достаточно применить к функции f_1 принцип симметрии: восстановить область G_0 добавлением к G_1 симметричной ей относительно разреза области и самого разреза, а также расширить область G_3

добавлением к ней области, симметричной G_3 относительно штриховой части границы и самой штриховой части границы.

Задача 5. Найти функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость область Ω_1 , получающуюся из полуполосы $\operatorname{Re} z > 0$, $-2 < \operatorname{Im} z < 2$ разрезами по отрезкам $[i, i+1]$, $[-i, -i+1]$ и по лучу $[1, \infty)$ (рис. 3.18).

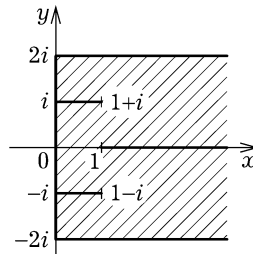


Рис. 3.18

Решение. Проведем в области $G_0 = \Omega_1$ разрез по отрезку $[0, 1]$, который разделяет G_0 на симметричные области G_1 и G'_1 . К области G_1 применим отображение $z \mapsto \pi z$, причем получившийся образ снова обозначим символом G_1 (рис. 3.19).

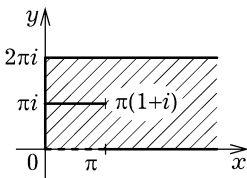


Рис. 3.19

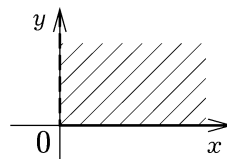


Рис. 3.20

Далее работаем с областью G_1 , которую мы должны отображать на область $\Omega'_2 = \{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ так, чтобы сплошная часть границы отображалась на положительную часть действительной оси, а штриховая — на положительную часть мнимой оси (рис. 3.20).

Если это отображение удастся осуществить, то требуемое в задаче конформное отображение можно будет получить при помощи

принципа симметрии (проверить, как в этом случае применяется соответствующая теорема).

Для построения конформного отображения области G_1 на область Ω'_2 можно, например, применить следующую цепочку отображений.

На первом шаге используем отображение, осуществляемое функцией $\varphi_1(z) = \exp(z)$. Образ G_2 области G_1 показан на рис. 3.21.

Следующий шаг — применение функции Жуковского $\varphi_2(z) = \mathcal{J}(z)$, в результате которого получим область G_3 , показанную на рис. 3.22.

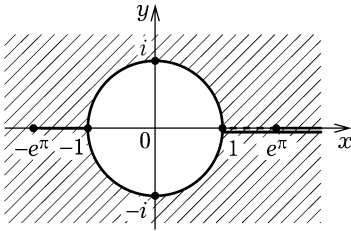


Рис. 3.21

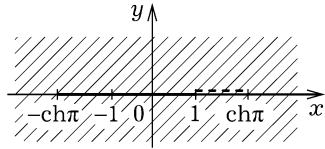


Рис. 3.22

На третьем шаге используем однозначную ветвь функции $\varphi_3(z) = \sqrt{z + \operatorname{ch} \pi}$, определяемую условием, например, $\varphi_3(0) = \sqrt{\operatorname{ch} \pi}$. Получим область G_4 — верхнюю полуплоскость с указанным соответствием границ (рис. 3.23).

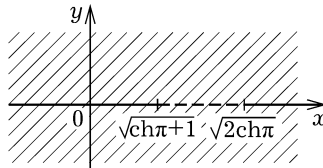


Рис. 3.23

После этого отображение области G_5 на область Ω'_2 с нужным соответствием границ находится так же, как и в предыдущей задаче.

Задача 6. Построить конформное отображение на единичный круг области, показанной на рис. 3.24.

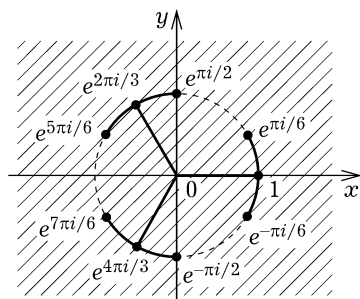


Рис. 3.24

Эта задача предлагается в качестве самостоятельного упражнения. Симметрия данной области указывает на то, что применять принцип симметрии придется в следующей ситуации: после разрез-зов (они, как обычно, показаны штриховыми линиями) мы получим область, показанную на рис. 3.25, которую надо отобразить на область, изображенную на рис. 3.26, с указанным соответствием границ. После этого останется правильно применить принцип сим-метрии.

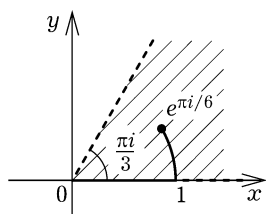


Рис. 3.25

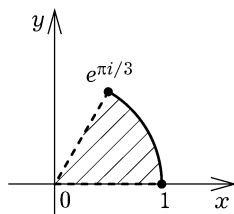


Рис. 3.26

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Этот раздел посвящен основам теории конформных отображений. Приведены доказательства ключевых свойств ДЛО (это сделано в силу их важности в теории функций комплексного переменного и теории конформных отображений) и описаны конформные автоморфизмы основных областей: расширенной комплексной плоскости (сферы Римана), плоскости, единичного круга. Также сформулированы в разумной общности и обсуждены три важнейшие теоремы теории конформных отображений — теорема Римана, прямой и обратный принципы соответствия границ.

Материал данного раздела, за исключением основных свойств ДЛО, предназначен для студентов, которые хотят более глубоко, нежели это предусмотрено базовой программой курса теории функций комплексного переменного, понять тематику конформных отображений.

Всюду далее мы следуем определению конформного отображения, приведенному выше (см. § 1.4) и считаем известными основные свойства конформных отображений.

4.1. Основные свойства дробно-линейных отображений

Напомним, что дробно-линейная функция (ДЛО) — это функция вида

$$W(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4.1)$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$. Условие $ad - bc \neq 0$ исключает вырожденный случай постоянной функции $W(z) \equiv \text{const}$.

Если $c = 0$, то условие $ad - bc \neq 0$ эквивалентно условию $ad \neq 0$, из которого вытекает, что $a \neq 0$ и $d \neq 0$. Соответствующая функция в этом случае является линейной: $W(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \alpha z + \beta$.

Конформность дробно-линейной функции. Если $c \neq 0$, выражение $\frac{az+b}{cz+d}$ не определено при $z = -\frac{d}{c}$. В этой точке существует предел функции $W(z)$, равный ∞ . Введя в рассмотрение бесконечно удаленную точку, т. е. переходя от комплексной плоскости к расширенной комплексной плоскости, получаем непрерывную в точке $-\frac{d}{c}$ функцию. Эта функция будет непрерывной и в точке ∞ , поскольку существует $\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \frac{a}{c}$. Если $c = 0$, то $\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = \infty$. Добавление бесконечно удаленной точки и в этом случае сохраняет непрерывность дробно-линейной функции.

В дальнейшем будем предполагать, что дробно-линейная функция (4.1) доопределена с помощью бесконечно удаленной точки.

Согласно предложению 2.1, доопределенная дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Докажем это утверждение.

◀ Предположим, что $c \neq 0$. Уравнение

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (4.2)$$

разрешимо относительно переменной z :

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Видно, что исходное уравнение относительно z при $w \neq \frac{a}{c}$ имеет единственное решение. При $w = \frac{a}{c}$ уравнение (4.2) не имеет решений в комплексной плоскости, но, как сказано выше, точка $\frac{a}{c}$ $z = \infty$. Следовательно, отображение $w = W(z)$ имеет обратное отображение

$$z = W^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

(это отображение, как и $W(z)$, доопределено в точках $\frac{a}{c}$ и ∞).

Несложно показать, что дробно-линейная функция является аналитической во всех точках комплексной плоскости, кроме точки $-\frac{d}{c}$ (в случае $c \neq 0$). В силу того, что функция $W(z)$ биективна,

ее производная не обращается в нуль, так что функция $W(z)$ однолистка в плоскости с выколотой точкой $-\frac{d}{c}$. В этой точке функция $W(z)$ имеет простой полюс, а функция $\frac{1}{W(z)}$ — простой нуль. Следовательно, $W(z)$ конформна в точке $z = -\frac{d}{c}$.

Функция

$$W\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a + bz}{c + dz}$$

в силу условия $c \neq 0$ определена и однолистка в точке $z = 0$ (это дробно-линейная функция, а для всех таких функций конформность в неособых точках уже доказана). Поэтому функция $W(z)$ конформна в точке ∞ . Тем самым доказано, что при $c \neq 0$ функция $W(z)$ конформна в \mathbb{C} .

Рассмотрим случай $c = 0$. В этом случае функция $W(z)$ является линейной и осуществляет биективное отображение комплексной плоскости на себя. Добавление бесконечно удаленной точки сохраняет свойство биективности. Линейная функция аналитична во всех точках плоскости, следовательно, с учетом свойства биективности, конформна в этих точках. Остается проверить конформность линейной функции в бесконечно удаленной точке.

Рассмотрим функцию

$$W\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a + bz}{dz}.$$

Эта функция в точке $z = 0$ имеет простой полюс, а следовательно, конформна в этой точке. Значит, функция $W(z)$ конформна в точке $z = \infty$. ►

Круговое свойство дробно-линейной функции. Согласно предложению 2.2, каждая дробно-линейная функция обладает следующим круговым свойством: образ любой обобщенной окружности является обобщенной окружностью. Докажем это.

◄ Для линейных функций $W(z) = az + b$ круговое свойство очевидно. Поэтому предполагаем, что $c \neq 0$.

Заметим, что дробно-линейную функцию $W(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ можно представить в виде

$$W(z) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{A}{z + B} + C,$$

где $A = \frac{bc - ad}{c^2}$, $B = \frac{d}{c}$, $C = \frac{a}{c}$. Отсюда следует, что функция $W(z)$ есть композиция функций

$$W_1(z) = z + b, \quad W_2(z) = \frac{1}{z}, \quad W_3(z) = Az + C,$$

т. е. двух линейных функций и функции $W_2(z) = 1/z$. Поскольку для линейной функции круговое свойство установлено, можно ограничиться проверкой этого свойства для функции $W_2(z)$.

Любую обобщенную окружность на комплексной плоскости (z) можно записать в виде

$$A(x^2 + y^2) + B_1x + B_2y + C = 0, \quad (4.3)$$

где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. В зависимости от выбранных коэффициентов $A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$, хотя бы один из которых отличен от нуля, уравнение (4.3) описывает либо обобщенную окружность (окружность при $A \neq 0$, прямую при $A = 0$), либо единственную точку (вырожденная окружность), либо пустое множество.

Уравнение (4.3) можно путем замены $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ преобразовать в следующую эквивалентную форму:

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0, \quad (4.4)$$

где $B = B_1 + iB_2$.

Пусть произвольно выбранная обобщенная окружность задана уравнением (4.4). При отображении $w = 1/z$ эта обобщенная окружность переходит в множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$A + \bar{B}\bar{w} + Bw + C|w|^2 = 0,$$

которое после переобозначений сводится к уравнению (4.4). Следовательно, образом обобщенной окружности может быть либо обобщенная окружность, либо точка, либо пустое множество. Однако в силу взаимной однозначности функции $W_2(z)$ второй и третий вариант исключаются. Значит, образом обобщенной окружности является обобщенная окружность. ►

Отметим, что в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ возникает новая геометрия, объектами которой являются обобщенные окружности, а роль их преобразований играют ДЛЮ. Такая геометрия $\overline{\mathbb{C}}$ называется *конформной геометрией*.

Сохранение симметрии при ДЛЮ. Согласно предложению 2.3, точки, симметричные относительно обобщенной окружности, при ДЛЮ переходят в точки, симметричные относительно образа этой обобщенной окружности. Для доказательства этого свойства требуется следующий критерий симметричности точек относительно обобщенной окружности.

Предложение 4.1. Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ симметричны относительно обобщенной окружности Γ , заданной уравнением

$$Az\bar{z} + \overline{B}z + B\bar{z} + C = 0, \quad (4.5)$$

если и только если

$$Az_1\bar{z}_2 + \overline{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0. \quad (4.6)$$

◄ Рассмотрим сначала случай, когда Γ является обычной окружностью в \mathbb{C} , т. е. $\Gamma = \{z - z_0 \mid |z - z_0| = R\}$. Из определения вытекает, что точки z_1 и z_2 симметричны относительно Γ , если и только если

$$z_1 - z_0 = \frac{R^2}{\bar{z}_2 - \bar{z}_0},$$

что эквивалентно уравнению

$$z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_0z_1 - z_0\bar{z}_2 + (|z_0|^2 - R^2) = 0. \quad (4.7)$$

В то же время уравнение окружности $|z - z_0| = R$ после возведения в квадрат и использования тождества $|z|^2 = z\bar{z}$ приводится к виду

$$z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + (|z_0|^2 - R^2) = 0. \quad (4.8)$$

Остается сравнить уравнения (4.7) и (4.8) с уравнениями (4.5) и (4.6) (при этом $A = 1$, $B = -z_0$, $C = |z_0|^2 - R^2$).

Пусть теперь Γ — прямая, заданная уравнением $\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$. В частном случае $B = i$, $C = 0$ утверждение предложения очевидно, поскольку в этом случае прямая описывается уравнением $-iz + i\bar{z} = 0$, т. е. представляет собой действительную ось, а соотношение (4.6) сводится к уравнению $z_1 - \bar{z}_2 = 0$, т. е. условию сопряжения, которое геометрически и есть условие симметричности точек относительно действительной оси.

Общий случай прямой сводится к рассмотренному частному случаю линейным преобразованием плоскости $iw = \bar{B}z + C/2$, сохраняющим симметрию точек относительно прямых, поскольку это преобразование сводится к композиции преобразований сдвига, поворота и гомотетии (растяжения). При указанном преобразовании уравнение прямой перейдет в уравнение $iw - i\bar{w} = 0$, а условие $\bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0$ — в условие $iw_1 - iw_2 = 0$. ►

Докажем теперь свойство сохранения симметрии при ДЛЮ (предложение 2.3).

◄ Как и раньше, представим отображение W как композицию отображений вида $W_1(z) = az + b$ и $W_2 = 1/z$ и докажем утверждение каждого типа по отдельности.

Рассмотрим отображение $W_1(z) = az + b$. Предположим, что точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ симметричны относительно обобщенной окружности Γ , заданной уравнением (4.5). Тогда они связаны соотношением (4.6). Поскольку образы w_1 и w_2 точек z_1 и z_2 удовлетворяют соотношениям $z_1 = \frac{w_1 - b}{a}$, $z_2 = \frac{w_2 - b}{a}$, из уравнения (4.6) получаем

$$A \frac{(w_1 - b)(\bar{w}_2 - \bar{b})}{|a|^2} + \bar{B} \frac{w_1 - b}{a} + B \frac{\bar{w}_2 - \bar{b}}{\bar{a}} + C = 0,$$

или

$$Aw_1\bar{w}_2 + (\bar{a}\bar{B} - A\bar{b})w_1 + (aB - Ab)\bar{w}_2 + (C - b\bar{b} - \bar{a}\bar{B}b - aB\bar{b}) = 0.$$

В силу этого соотношения точки w_1 и w_2 симметричны относительно обобщенной окружности

$$Aw\bar{w} + (\bar{a}\bar{B} - A\bar{b})w + (aB - Ab)\bar{w} + (C - b\bar{b} - \bar{a}\bar{B}b - aB\bar{b}) = 0,$$

которая является образом Γ . Таким образом, утверждение доказано для функции $W_1(z)$.

Для функции $W_2(z)$ утверждение доказывается аналогично. Остается рассмотреть случай, когда одна из двух точек является бесконечно удаленной (предлагаем его в качестве упражнения). ►

Свойство трех точек. Согласно предложению 2.4, для любых трех разных точек $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ и любых трех различных точек $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ существует, и притом единственная, дробно-линейная функция W , для которой $w_j = W(z_j)$, $j = 1, 2, 3$. Докажем это свойство.

◀ Сначала докажем существование дробно-линейной функции в частном случае, когда $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$. Если ни одна из точек z_1, z_2, z_3 не является бесконечно удаленной, то требуемое отображение имеет вид

$$W_0(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Если одна из точек z_i является бесконечно удаленной, то из представления $W_0(z)$ достаточно убрать два множителя, содержащих эту точку. Например, при $z_1 = \infty$

$$W_0(z) = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2}.$$

В общем случае рассмотрим функцию W_1 , переводящую точки z_1, z_2, z_3 в точки $0, \infty, 1$, и функцию W_2 , переводящую точки w_1, w_2, w_3 в точки $0, \infty, 1$. Функция $W_2^{-1}(w_1(z))$ переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 .

Доказательство единственности также начнем с частного случая $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$. Допустим, что функции $W_a(z)$ и $W_b(z)$ переводят точки z_1, z_2, z_3 в указанные точки $0, \infty, 1$. Тогда функция $W_s(Z) = W_b(W_a^{-1}(z))$ переводит точки $0, \infty, 1$ в себя. Покажем, что функция $W_s(z)$ есть тождественное отображение. Действительно, из условия $W_s(\infty) = \infty$ вытекает, что функция $W_s(z)$ является линейной, т. е. имеет вид $W_s(z) = az + b$. Далее, из условия $W_s(0) = 0$ находим $b = 0$, а из условия $w_s(1) = 1$ заключаем, что $a = 1$, т. е. $W_s(z) = z$.

Поскольку функция W_s есть тождественное отображение, функции W_b и W_a^{-1} взаимно-обратные. Следовательно, $W_a = W_b$.

Общий случай сводится к частному. Если функция $W(z)$ переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 , то функция $W_b(W(z))$, где W_b определена выше, переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки $0, \infty, 1$. Следовательно, в силу уже доказанной единственности этой функции имеем $W_b(W(z)) = W_a(z)$ и $W(z) = W_b^{-1}(W_a(z))$, т. е. функция $W(z)$ определена однозначно. ►

Дробно-линейные автоморфизмы основных областей. Любое ДЛЮ области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ на себя называют *дробно-линейным автоморфизмом* этой области. Опишем множества дробно-линейных автоморфизмов основных областей $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{C}_+$.

Обозначим через Λ множество всех ДЛЮ, а через $\Lambda(G)$ — множество всех дробно-линейных автоморфизмов заданной области G .

Согласно свойствам дробно-линейных функций, любая дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя, т. е. $\Lambda(\overline{\mathbb{C}}) = \Lambda$.

Если дробно-линейная функция $W(z)$ осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя, то $W(\infty) = \infty$, поскольку иначе в ∞ переводится некоторая конечная точка, а это будет нарушением условия, что $W(z)$ — биективное отображение плоскости на себя. Следовательно, дробно-линейный автоморфизм комплексной плоскости является линейной функцией. Ясно, что верно и обратное: любая линейная функция есть дробно-линейный автоморфизм комплексной плоскости, т. е.

$$\Lambda(\mathbb{C}) = \{W(z): W(z) = az + b, a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}.$$

Опишем теперь множество $\Lambda(\mathbb{D})$ дробно-линейных автоморфизмов единичного круга.

Предложение 4.2. Дробно-линейная функция $W(z)$ является дробно-линейным автоморфизмом единичного круга тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде

$$W(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]. \quad (4.9)$$

◀ Пусть функция $W(z)$ имеет представление (4.9). Тогда при $z \in \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{z: |z| = 1\}$ — единичная окружность, имеем $|z| = 1$, откуда $z\bar{z} = 1$ и

$$|W(z)| = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \left| \frac{(z - a)\bar{z}}{\bar{z} - \bar{a}} \right| = \left| \frac{z - a}{\bar{z} - \bar{a}} \right| = 1.$$

Это означает, что $W(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Так как \mathbb{T} — обобщенная окружность, то $W(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Остается убедиться в том, что образом единичного круга не является внешность единичного круга. Для этого достаточно проверить, куда попадает образ какой-либо точки круга. Например, заметим, что $W(a) = 0$.

Допустим, что функция $W(z)$ есть дробно-линейный автоморфизм. Тогда некоторая точка $a \in D$ отображается в точку $0 \in D$. Точка $a^* = 1/\bar{a}$, симметричная точке a относительно единичной окружности \mathbb{T} , отображается в точку ∞ , симметричную точке 0 относительно окружности $\mathbb{T} = W(\mathbb{T})$. Следовательно,

$$W(z) = \lambda \frac{z - a}{z - a^*} = \lambda \frac{z - a}{z - 1/\bar{a}} = \lambda_1 \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Так как $W(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$, то $W(1) \in \mathbb{T}$, откуда $|W(1)| = 1$. Но

$$|W(1)| = |\lambda_1| \left| \frac{1 - a}{1 - \bar{a}} \right| = |\lambda_1|.$$

Поэтому $|\lambda_1| = 1$ и параметр λ_1 можно записать в виде $\lambda_1 = e^{i\theta}$, где $\theta = \arg \lambda_1 \in (-\pi, \pi]$. ►

Согласно доказанному предложению, множество дробно-линейных автоморфизмов единичного круга можно записать в следующем виде:

$$\Lambda(\mathbb{D}) = \left\{ W(z): W(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{D}, \quad \theta \in (-\pi, \pi] \right\}.$$

Предложение 4.3. Дробно-линейная функция $W(z)$ является дробно-линейным автоморфизмом верхней полуплоскости тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде

$$W(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0. \quad (4.10)$$

◀ Если функция $W(z)$ имеет вид (4.10), то любое действительное число (включая ∞) преобразуется в действительное число, т. е. $W(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Но расширенная прямая \mathbb{R} есть обобщенная окружность. Поэтому $W(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Остается проверить, что верхняя полуплоскость не переходит в нижнюю. Полагая $z = i$, получаем

$$W(i) = \frac{b + ai}{d + ci} = \frac{(b + ai)(d - ci)}{d^2 + c^2} = \frac{(bd + ac) + (ad - bc)i}{d^2 + c^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} W(i) = \frac{ad - bc}{d^2 + c^2} > 0$$

и $W(i) \in \mathbb{C}_+$.

Пусть $W(z)$ — дробно-линейный автоморфизм верхней полуплоскости. Тогда W и W^{-1} переводят расширенную вещественную ось $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в себя. При этом точки $x_1 := W^{-1}(0)$, $x_2 := W^{-1}(\infty)$ и $x_3 := W^{-1}(1)$ принадлежат \mathbb{R} . Допустим, что ни одна из точек x_1, x_2, x_3 не равна ∞ . Тогда в силу свойства трех точек

$$W(z) = \frac{z - x_1}{z - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = \frac{az + b}{cz + d}$$

для некоторых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Далее, так как $i \in \mathbb{C}_+$, то и $W(i) \in \mathbb{C}_+$. Следовательно,

$$\operatorname{Im}(W(i)) = \operatorname{Im}\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} > 0,$$

откуда $ad - bc > 0$. Таким образом, доказано, что в случае, когда ни одна из точек x_1, x_2, x_3 не равна ∞ , функция W имеет требуемый вид. Случай с бесконечно удаленной точкой рассматривается аналогично и предлагается в качестве упражнения. ►

Согласно доказанному предложению множество дробно-линейных автоморфизмов верхней полуплоскости можно записать в следующем виде:

$$\Lambda(\mathbb{C}_+) = \left\{ W(z): W(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}.$$

Аналогично доказательству предложений 4.2, 4.3 можно показать (рассмотрите это в качестве упражнения), что множество всех ДЛЮ верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ на единичный круг \mathbb{D} имеет вид

$$\left\{ e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}: a \in \mathbb{C}_+, \theta \in (-\pi, \pi] \right\}.$$

Групповое свойство дробно-линейных функций. Это свойство состоит в том, что множество Λ всех ДЛЮ образует группу относительно операции композиции отображений.

Для доказательства этого свойства необходимо проверить, что:

- 1) композиция дробно-линейных функций есть дробно-линейная функция;
- 2) функция, обратная дробно-линейной функции, является дробно-линейной.

Пусть заданы дробно-линейные функции

$$W_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{и} \quad W_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2},$$

где $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ и $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$. Тогда

$$W_1(W_2(z)) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)},$$

причем эта функция не постоянна, поскольку является композицией биективных отображений. Поэтому $W_1(W_2(z))$ есть дробно-линейная функция. Аналогично можно показать (см. выше), что

функция, обратная дробно-линейной, также является дробно-линейной.

Изучим группу Λ несколько более детально. Напомним, что через $GL(n, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, обозначают группу квадратных комплексных матриц порядка n , имеющих ненулевой определитель, а через $SL(2, \mathbb{C})$ — группу квадратных комплексных матриц порядка n , определитель которых равен ± 1 . Определим отображение ψ группы $GL(2, \mathbb{C})$ в группу Λ следующим образом: каждой матрице

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

поставим в соответствие дробно-линейную функцию

$$W(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Из полученных выше формул для композиции ДЛЮ и для отображения, обратного ДЛЮ, следует, что введенное отображение $\psi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda$ является гомоморфизмом групп. Очевидно, что этот гомоморфизм сюръективен. Однако он не является инъективным, поскольку дробно-линейная функция параметрами a, b, c, d определяется с точностью до числового множителя. При этом $\ker \psi = \{\lambda E : \lambda \in \mathbb{C}_*\} \cong \mathbb{C}_*$, где E — единичная 2×2 матрица, а $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Далее, отображение $\psi' : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda$, которое является ограничением ψ на подгруппу $SL(2, \mathbb{C})$, также представляет собой сюръективный гомоморфизм групп $SL(2, \mathbb{C})$ и Λ , причем $\ker \psi' = \{E, -E\}$. Из теоремы о гомоморфизме, излагаемой в курсе алгебры вытекает, что имеет место изоморфизм групп

$$\Lambda \cong \frac{GL(2, \mathbb{C})}{\mathbb{C}_*} \cong \frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{E, -E\}}$$

(здесь символ дроби означает факторгруппу).

Заметим, что группа Λ не коммутативна, а линейные отображения образуют в ней подгруппу Λ_0 , состоящую в точности из ДЛЮ, которые оставляют точку $z = \infty$ неподвижной.

В приведенной выше матричной реализации ДЛО отображения из группы Λ_0 изображаются верхнетреугольными матрицами из $GL(2, \mathbb{C})$ или $SL(2, \mathbb{C})$.

Для любой области G совокупность $\Lambda(G)$ всех дробно-линейных автоморфизмов области G является подгруппой группы Λ всех ДЛО. При этом

$$\dim \Lambda(\overline{\mathbb{C}}) = 6, \quad \dim \Lambda(\mathbb{C}) = 4, \quad \dim \Lambda(\mathbb{D}) = 3,$$

где \dim — вещественная размерность соответствующей группы.

4.2. Обратный принцип соответствия границ

На обратном принципе соответствия границ базируется один из наиболее действенных методов построения конформных отображений. Суть этого метода — установление соответствия областей на основании соответствия их границ.

Напомним, что если Γ — замкнутая жорданова кривая в \mathbb{C} , то множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ несвязно. Оно является объединением двух областей $\Omega_0(\Gamma)$ (также обозначается $D(\Gamma)$) и $\Omega_\infty(\Gamma)$, вторая из которых примыкает к бесконечно удаленной точке ∞ . Обе области имеют общую границу, совпадающую с кривой Γ . Приведенное утверждение составляет содержание известной (и весьма нетривиальной) *теоремы Жордана*.

Рассмотрим кратко вопрос об ориентации кривой. Для произвольной кривой $\gamma \in \mathbb{C}$ и точки $a \notin \gamma$ определим число

$$\text{ind}_a(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \text{Arg}(z - a),$$

т. е. приращение функции $\text{Arg}(z - a)$ вдоль кривой γ , деленное на 2π . Это число называется *индексом* кривой γ относительно точки a . Для замкнутой кривой γ индекс есть целое число, поскольку представляет собой деленную на 2π разность двух значений аргумента в одной точке комплексной плоскости. Можно показать (предлагается в качестве упражнения), что величина $\text{ind}_a(\gamma)$ как функция точки a постоянна в каждой связной компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Можно доказать, что если γ — замкнутая жорданова кривая, то:

1) величина $\text{ind}_a(\gamma)$ в области $D(\gamma)$ постоянна и может принимать значение 1 или -1 ;

2) величина $\text{ind}_a(\gamma)$ в области $\Omega_\infty(\gamma)$ равна нулю.

Значение $\text{ind}_a(\gamma)$ в области $D(\gamma)$ определяет ориентацию кривой γ . Скажем, что кривая γ *ориентирована положительно*, если при всех $a \in D(\gamma)$ справедливо равенство $\text{ind}_a(\gamma) = 1$. При обходе положительно ориентированной кривой γ ограниченная ею область $D(\gamma)$ остается слева.

Теорема 4.1 (обратный принцип соответствия границ). Пусть $G = D(\gamma)$ — жорданова область в \mathbb{C} , ограниченная положительно ориентированной кривой γ , функция f голоморфна в области G и непрерывна в \overline{G} , причем она взаимно-однозначна на γ . Тогда $\Sigma = f(\gamma)$ — положительно ориентированная жорданова замкнутая кривая, а f конформно отображает область G на область $\Omega = D(\Sigma)$.

◀ Поскольку кривая γ замкнутая жорданова, а функция f взаимно-однозначна, кривая $\Sigma = f(\gamma)$, как гомеоморфный образ γ , является замкнутой жордановой. По теореме Жордана кривая Σ ограничивает некоторую область $\Omega = D(\Sigma)$. Пусть $b \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Тогда $f(\zeta) - b \neq 0$ при $\zeta \in \gamma$. По принципу аргумента количество нулей $N(f - b, G)$ функции $f(z) - b$ в области G вычисляется по формуле

$$N(f - b, G) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \text{Arg}(f(z) - b) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Sigma \text{Arg}(w - b),$$

т. е. совпадает с индексом точки $w = f(b)$ относительно кривой Σ . Если $b \in \Omega$, то $N(f - b, G) = 1$, поскольку случай $N(f - b, G) = -1$ исключается. Следовательно, функция $f(z)$ в области G принимает значение b и притом только один раз. Если же $b \notin \Omega \cup \Sigma$, то $b \in \Omega_\infty(\Sigma)$ и $N(f - b, G) = 0$, так как индекс точки во внешней области равен нулю. Это означает, что в области G функция $f(z)$ не принимает значений из внешней области.

Остается убедиться в том, что функция f не принимает в G значений на кривой Σ . Этот следует, например, из принципа сохранения области, согласно которому для голоморфной функции образ любой области является областью. В соответствии с этим

принципом, если функция f в некоторой точке $z_0 \in G$ принимает значение $f(z) \in \Sigma$, то она в G принимает и все значения из некоторой окрестности точки $f(z)$. Но по предположению $f(z)$ — граничная точка области $\Omega_\infty(\Sigma)$. Следовательно, функция f принимает в G какие-то значения из области $\Omega_\infty(\Sigma)$. Однако уже доказано, что это не так. Поэтому функция f в G не принимает значений на кривой Σ .

Таким образом, в условиях теоремы функция $f(z)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между областями G и Ω и, следовательно, конформно отображает G на Ω . ►

Обратный принцип соответствия границ не распространяется на случай неограниченных областей: для таких областей он может нарушаться, даже если области имеют очень хорошую границу.

Пример. Рассмотрим верхнюю полуплоскость \mathbb{C}_+ и функцию $f(z) = z^3$, которая голоморфна в \mathbb{C}_+ , непрерывна (более того, голоморфна) в $\overline{\mathbb{C}}_+$ и гомеоморфно отображает $\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}_+$ на \mathbb{R} . Однако $f(z)$ не является однолистной в \mathbb{C}_+ , а образ $f(\mathbb{C}_+)$ в этом случае есть область $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которой действительная прямая \mathbb{R} границей не является.

Чтобы распространить обратный принцип соответствия границ на неограниченные области, необходимы дополнительные условия, касающиеся или вида областей, или свойств функции. Следующее утверждение можно рассматривать как один из вариантов принципа обратного соответствия границ для неограниченных областей.

Предложение 4.4. Пусть G — жорданова область в \mathbb{C} , функция f голоморфна в верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ и непрерывна в ее замыкании $\overline{\mathbb{C}}_+$ на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Если f гомеоморфно отображает $\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}_+$ на ∂G , то f является конформным изоморфизмом \mathbb{C}_+ на G .

◄ Заметим, что ДЛО

$$\varphi(\zeta) := i \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$$

отображает единичный круг \mathbb{D} на \mathbb{C}_+ . Тогда отображение $g := f \circ \varphi$ единичного круга \mathbb{D} на область G удовлетворяет всем условиям

обратного принципа соответствия границ. Следовательно, отображение g является конформным изоморфизмом \mathbb{D} на G , а так как φ — дробно-линейный изоморфизм \mathbb{D} на \mathbb{C}_+ , то и отображение $f = g \circ \varphi^{-1}$ будет конформным изоморфизмом \mathbb{C}_+ на G . ►

4.3. Принцип симметрии Римана — Шварца

Пусть на множестве $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ определена функция $f_0: E \rightarrow \mathbb{C}$ и задана некоторая область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащая E . Функция f , аналитическая (голоморфная) в D , совпадающая с f_0 в E , т.е. $f|_E = f_0$, называется *аналитическим (голоморфным) продолжением* функции f_0 с E на D .

Задача аналитического продолжения состоит в отыскании условий на области E , D и функцию f_0 , необходимых и достаточных для существования аналитического продолжения, а также в описании процедуры аналитического продолжения.

Например, рассмотрим функцию $f_0(x) = e^x$, определенную на действительной оси \mathbb{R} . Она имеет аналитическое продолжение $f(z) = e^z$ в комплексную плоскость \mathbb{C} . Аналогично функции $\sin x$ и $\cos x$, определенные в \mathbb{R} , имеют аналитические продолжения $f(z) = \cos z$ и $f(z) = \sin z$ в \mathbb{C} .

Непосредственным следствием теоремы единственности для аналитических функций является следующий *принцип аналитического продолжения*: если множество $E \subset \mathbb{C}$ имеет предельную точку в \mathbb{C} , то для любой области $D \supset E$ любая функция f_0 , определенная в E , имеет не более одного аналитического продолжения в D .

Следующая теорема весьма важна в приложениях. Встречающиеся в литературе упрощенные формулировки на деле приводят к неточностям или даже ошибкам.

Теорема 4.2 (принцип симметрии Римана — Шварца). Пусть G и Ω — области в $\overline{\mathbb{C}}$, границы которых содержат (открытые) дуги γ и σ обобщенных окружностей Γ и Σ соответственно; G^* и Ω^* — области, симметричные G и Ω относительно Γ и Σ , причем $G \cap G^* = \emptyset$, $\Omega \cap \Omega^* = \emptyset$, множества $\tilde{G} = G \cup \gamma \cup G^*$ и $\tilde{\Omega} = \Omega \cup \sigma \cup \Omega^*$ являются областями.

Функция $f: G \rightarrow \Omega$, осуществляющая конформный изоморфизм областей G и Ω , непрерывная в $\Omega \cup \gamma$ и *гомеоморфно* отображающая γ на σ , имеет, и притом единственное, аналитическое продолжение \tilde{f} на область \tilde{G} , которое осуществляет конформный изоморфизм \tilde{G} на $\tilde{\Omega}$. При этом точки области \tilde{G} , симметричные относительно Γ , переходят в точки, симметричные относительно Σ (в частности, $\tilde{f}(G^*) = \Omega^*$).

◀ Сначала рассмотрим случай, когда дуги γ и σ являются интервалами действительной оси, т. е. $\Gamma = \Sigma = \mathbb{R}$. В этом случае функция

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup \gamma; \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in G^*, \end{cases}$$

осуществляет конформное отображение области \tilde{G} на область $\tilde{\Sigma}$. Действительно, функция $\tilde{f}(z)$ голоморфна в области G , поскольку совпадает в этой области с $f(z)$, и в области G^* , поскольку двойное отрицание сохраняет дифференцируемость функции (в этом проще всего убедиться, используя представление функции в окрестности точки степенным рядом). Кроме того, функция $\tilde{f}(z)$ непрерывна в точках дуги γ . Аналитичность $\tilde{f}(z)$ в точках γ вытекает из теоремы Мореры. Таким образом, функция $\tilde{f}(z)$ аналитична в \tilde{G} и при этом устанавливает биективное соответствие между областями \tilde{G} и $\tilde{\Sigma}$. Из этого следует, что \tilde{f} — конформный изоморфизм областей \tilde{G} и $\tilde{\Sigma}$.

Теперь перейдем к общему случаю. Существует дробно-линейная функция φ , которая переводит дугу γ в некоторый интервал γ_1 действительной оси. При этом области G и G^* , симметричные относительно Γ , перейдут в области G_1 и G_1^* , симметричные относительно \mathbb{R} . Аналогично существует дробно-линейная функция ψ , которая переводит дугу σ в некоторый интервал $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, а области Σ и Σ^* , симметричные относительно σ — в области Σ_1 и Σ_1^* , симметричные относительно \mathbb{R} . Функция $f_1 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, как композиция трех конформных отображений, осуществляет конформное отображение области G_1 на область Σ_1 .

Для функции f_1 и областей G_1, Σ_1 выполнены все условия теоремы. Поэтому, согласно доказанному, функция f_1 имеет

аналитическое продолжение \tilde{f}_1 на область $\tilde{G}_1 = G_1 \cup \gamma_1 \cup G_1^*$, осуществляющее конформный изоморфизм области \tilde{G}_1 и области $\tilde{\Sigma}_1 = \Sigma_1 \cup \sigma_1 \cup \Sigma_1^*$.

Функция $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ \tilde{f}_1 \circ \varphi$ осуществляет конформный изоморфизм областей \tilde{G} и $\tilde{\Sigma}$ и, кроме того, совпадает с функцией f в $G \cup \gamma$. Тем самым доказан и общий случай теоремы. ►

4.4. Конформные автоморфизмы основных областей

По аналогии с дробно-линейными изоморфизмами и автоморфизмами областей вводят понятия конформного изоморфизма и конформного автоморфизма. Назовем *конформным изоморфизмом* областей $G_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ и $G_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ любое (взаимно-однозначное) *конформное* отображение области G_1 на область G_2 . Конформный изоморфизм области G на себя называется *конформным автоморфизмом* области G . Отметим два простых свойства конформных изоморфизмов и автоморфизмов областей в $\overline{\mathbb{C}}$.

Во-первых, множество $\text{Aut}(G)$ всех конформных автоморфизмов области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ с операцией композиции отображений образует группу. Действительно, это множество замкнуто относительно указанной операции, поскольку композиция конформных отображений есть биективное локально конформное отображение, т. е. является конформным. Тожественное отображение конформно, т. е. множество $\text{Aut}(G)$ имеет единицу. Наконец, отображение, обратное конформному является конформным (свойство биективности обратного отображения очевидно, а локальная конформность обратного отображения следует из теоремы об обратной функции).

Во-вторых, если f_0 — произвольный конформный изоморфизм области G_1 на область G_2 , то любой конформный изоморфизм f этих областей может быть представлен в виде $f = \varphi_2 \circ f_0$, где $\varphi_2 \in \text{Aut}(G_2)$ — некоторый конформный автоморфизм области G_2 , а также в виде $f = f_0 \circ \varphi_1$, где $\varphi_1 \in \text{Aut}(G_1)$ — некоторый конформный автоморфизм области G_1 .

Наша ближайшая цель состоит в вычислении групп $\text{Aut}(\mathbb{D})$, $\text{Aut}(\mathbb{C})$ и $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$. Для этого нам потребуется следующее утверждение, представляющее, впрочем, и самостоятельный интерес.

Предложение 4.5 (лемма Шварца). Пусть функция f , голоморфная в единичном круге \mathbb{D} , удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$. Тогда для всех $z \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство $|f(z)| \leq |z|$, причем если в этом неравенстве в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ достигается равенство, то $f(z) = e^{i\theta}z$ для некоторой константы $\theta \in \mathbb{R}$.

◀ Определим функцию $g(z)$ при $z \in \mathbb{D}$ следующим образом:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}; \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Эта функция голоморфна в \mathbb{D} , поскольку она голоморфна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, как отношение двух голоморфных функций, и непрерывна в точке 0.

Пусть точка $z_0 \in \mathbb{D}$ выбрана произвольно. Выберем произвольное значение r , удовлетворяющее условию $|z_0| < r < 1$. Из неравенства $|f(z)| \leq 1$ вытекает, что $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$ при $|z| = r$.

Согласно принципу максимума, $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ при $|z| \leq r$ и, в частности, $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r}$.

Итак, для любого r из интервала $(|z_0|, 1)$ выполняется неравенство $|g(z_0)| \leq 1/r$, т. е. число $|g(z_0)|$ не превышает любое положительное число, большее 1. Значит, $|g(z_0)| \leq 1$.

Если $|f(z_0)| = |z_0|$ в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, то функция $g(z)$ достигает максимума модуля $|g(z_0)| = 1$ во внутренней точке круга \mathbb{D} . Следовательно, g — постоянная функция: $g(z) \equiv g(z_0)$. Из представления $g(z_0) = e^{i\theta}$ заключаем, что $f(z) = zg(z) = e^{i\theta}z$. ►

У п р а ж н е н и е. Доказать лемму Шварца с помощью неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора.

Существует одно интересное обобщение леммы Шварца. Для точек $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ введем характеристику

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2|}.$$

Если функция f , голоморфная в \mathbb{D} , удовлетворяет неравенству $|f(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$, то

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

При этом, если это неравенство при некоторых $z_1 \neq z_2$ превращается в равенство, то функция f является дробно-линейной.

Заметим, что при $z_2 = 0$ и $f(z_2) = 0$ это утверждение сводится к лемме Шварца.

У п р а ж н е н и е. Доказать сформулированное обобщение леммы Шварца.

Группы конформных автоморфизмов основных областей.

Под *основными областями* мы понимаем единичный круг \mathbb{D} , комплексную плоскость \mathbb{C} и расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Описание конформных автоморфизмов в \mathbb{D} и \mathbb{C} сводится к случаю расширенной комплексной плоскости. Поэтому описание групп конформных автоморфизмов основных областей начнем с расширенной комплексной плоскости.

Теорема 4.3. Любой конформный автоморфизм расширенной комплексной плоскости является ДЛЮ.

◀ Пусть $\varphi \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ — конформный автоморфизм. Он переводит в ∞ некоторую точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ (не исключается случай $z_0 = \infty$), причем других точек, переходящих в ∞ , нет. Поэтому функция φ голоморфна всюду в $\overline{\mathbb{C}}$, кроме точки z_0 , в которой функция имеет полюс. Проверим, что этот полюс имеет 1-й порядок. Порядок полюса в точке z_0 функции φ совпадает с порядком нуля в этой точке функции $1/\varphi$. Если порядок нуля выше 1, то функция $1/\varphi$ (а значит, и функция φ) не является однолистной в окрестности точки z_0 , что противоречит предположениям о функции φ .

Итак, функция φ имеет в точке z_0 полюс первого порядка. Других особенностей у функции нет. Вычитая из функции φ главную часть $\frac{a}{z - z_0}$ (az в случае $z_0 = \infty$) лорановского разложения функции φ в точке z_0 , получим функцию φ_0 , которая не имеет

особых точек, включая и точку ∞ . Согласно теореме Лиувилля функция φ_0 постоянна: $\varphi_0 \equiv b$. Таким образом, при $z_0 \neq \infty$

$$\varphi(z) = \frac{a}{z - z_0} + b,$$

а при $z_0 = \infty$

$$\varphi(z) = az + b.$$

Тем самым доказано, что функция φ является дробно-линейной. ►

Теорема 4.4. Любой конформный автоморфизм комплексной плоскости является линейным отображением.

◄ Пусть φ — конформный автоморфизм \mathbb{C} . Рассмотрим поведение $\varphi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Возможны три варианта поведения при $z \rightarrow \infty$: существует конечный предел $\varphi(z)$; существует бесконечный предел $\varphi(z)$; предела $\varphi(z)$ при $z \rightarrow \infty$ не существует. В данном случае первый вариант невозможен, так как, согласно теореме Лиувилля, к нему относятся только постоянные функции. Последний вариант также невозможен, поскольку, согласно теореме Сохоцкого, функции, относящиеся к этому варианту, не являются однолиственными. Остается второй вариант, т. е. существует $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \infty$. Доопределим функцию φ в бесконечно удаленной точке, положив $\varphi(\infty) = \infty$. Тогда получим конформный автоморфизм расширенной комплексной плоскости, который, согласно теореме 4.3, есть дробно-линейная функция. Более того, из условия $\varphi(\infty) = \infty$ вытекает, что φ — линейная функция. ►

Теорема 4.5. Любой конформный автоморфизм единичного круга является ДЛЮ.

◄ Пусть $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ — произвольный конформный автоморфизм единичного круга \mathbb{D} . Согласно принципу соответствия границ, функция φ продолжается до гомеоморфизма замкнутого единичного круга $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ на себя. Согласно принципу симметрии, конформное отображение φ можно продолжить до конформного отображения области $\mathbb{D} \cup \mathbb{T} \cup \mathbb{D}_e$ на себя, т. е. до конформного автоморфизма

расширенной комплексной плоскости. Согласно теореме 4.3, φ — дробно-линейная функция. ►

У п р а ж н е н и е. Доказать теорему 4.5 с помощью леммы Шварца.

Утверждение теоремы 4.5 кратко можно сформулировать так: конформный автоморфизм единичного круга является дробно-линейным автоморфизмом этой области. Отсюда получаем полное описание группы $\text{Aut } \mathbb{D}$ как семейства всех дробно-линейных автоморфизмов \mathbb{D} .

Доказанные теоремы о конформных автоморфизмах основных областей позволяют дать полное описание групп этих отображений:

$$\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \Lambda(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\};$$

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \Lambda(\mathbb{C}) = \{az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\};$$

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \Lambda(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} : a \in \mathbb{D}, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Так как $\dim \text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = 6$, $\dim \text{Aut}(\mathbb{C}) = 4$, а $\dim \text{Aut}(\mathbb{D}) = 3$, то три эти группы не изоморфны и, следовательно, все основные области не являются конформно изоморфными. Отметим, что все основные области, хотя и односвязны, отличаются одна от другой в топологическом смысле: граница области $\overline{\mathbb{C}}$ пуста, граница области \mathbb{C} состоит из одной точки, граница круга \mathbb{D} — это единичная окружность \mathbb{T} (одномерное множество).

ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Во всех вариантах требуется найти конформное отображение заданной области на верхнюю полуплоскость. Символ $[a, b]$ обозначает отрезок, соединяющий точки $a, b \in \mathbb{C}$. Если $a = \infty$ или $b = \infty$, то $[a, b]$ обозначает луч от конечной точки по прямой, проходящей через 0. В частности, $[i, \infty] = \{iy: y \geq 1\}$ и $[\infty, -i] = \{iy: y \leq -1\}$.

Вариант 1.

1. Сегмент круга $|z + i| < \sqrt{2}$ с разрезом $[0, (2 - \sqrt{3})i]$.
2. Полуполоса $-1 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0$ с разрезом $[0, i]$.

Вариант 2.

1. Внешность луночки, ограниченной окружностями $|z| = 1$ и $|z + i| = \sqrt{2}$, с разрезом $[0, (\sqrt{2} - 1)i]$.
2. Полоса $-1 < \operatorname{Re} z < 1$ с разрезами $[i, \infty]$ и $[\infty, -i]$.

Вариант 3.

1. Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезами $[0, i]$ и $[2i, \infty]$.
2. Полоса $-1 < \operatorname{Re} z < 1$ с разрезом $[-1, 0]$.

Вариант 4.

1. Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезами по двум дугам окружностей $|z| = 1$ от -1 до $(-1 + i)/\sqrt{2}$ и от $(1 + i)/\sqrt{2}$ до 1 .
2. Плоскость \mathbb{C} с разрезами по отрезку $[-2i, 0]$ и по дуге окружности $|z| = 1$ от $(-1 + i)/\sqrt{2}$ до $(1 + i)/\sqrt{2}$.

Вариант 5.

1. Первый квадрант $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ с разрезами по окружности $|z| = 1$ от i до $(1 + i\sqrt{3})/2$ и от $(\sqrt{3} + i)/2$ до 1 .
2. Плоскость \mathbb{C} с разрезами $[-2i, i]$ и $[-1, 1]$.

Вариант 6.

1. Сектор $\frac{\pi}{2} < \text{Arg } z < 2\pi$ с разрезом по окружности $|z| = 1$ от -1 до 1 .

2. Область между окружностями $|z - 1| = 1$ и $|z - 2| = 2$ с разрезом $[3, 4]$.

Вариант 7.

1. Полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с вырезанным полукругом $|z| \leq 1$ и разрезом $[i, 2i]$.

2. Плоскость с вырезанными кругами $|z - 1| \leq 1$ и $|z + 1| \leq 1$ и разрезом $[-2i, i]$.

Вариант 8.

1. Полуплоскость $\text{Im } z > 0$ с вырезанным полукругом $|z| \leq 1$ и разрезом $[i, 2i]$.

2. Плоскость с вырезанными кругами $|z - 1| \leq 1$ и $|z + 1| \leq 1$ и разрезом $[-2i, i]$.

Вариант 9.

1. Круг $|z| < 1$ с разрезом $[0, 1]$.

2. Полуплоскость с вырезанными полукругами $|z - 1| \leq 1$, $|z + 1| \leq 1$, $\text{Im } z \geq 0$ и разрезом $[0, i]$.

Вариант 10.

1. Полукруг $|z| < 1$, $\text{Im } z > 0$ с разрезом $\left[\frac{1}{2}i, i\right]$.

2. Первый квадрант $\text{Re } z > 0$, $\text{Im } z > 0$ с вырезанным полукругом $|z - 1| \leq 1$, $\text{Im } z \geq 0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Понятие о конформных отображениях	5
1.1. Предварительные сведения	5
1.2. Геометрическая интерпретация функций комплексного переменного	6
1.3. Однолистные функции и отображения	11
1.4. Конформные отображения и их свойства	15
1.5. Основные задачи теории конформных отображений	20
2. Элементарные функции комплексного переменного и их области однолистности	22
2.1. Дробно-линейная функция	22
2.2. Целая степенная функция	32
2.3. Показательная функция	34
2.4. Функция Жуковского	38
2.5. Обратные функции и их однозначные ветви	43
3. Методы построения конформных отображений заданных областей	51
3.1. Последовательности отображений	51
3.2. Применение принципа симметрии	56
4. Элементы теории конформных отображений	62
4.1. Основные свойства дробно-линейных отображений	62
4.2. Обратный принцип соответствия границ	74
4.3. Принцип симметрии Римана — Шварца	77
4.4. Конформные автоморфизмы основных областей	79
Типовые варианты домашних заданий	84

Учебное издание

Канатников Анатолий Николаевич
Красновский Евгений Ефимович
Морозова Валентина Дмитриевна
Федоровский Константин Юрьевич

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Редактор *В.М. Царев*
Корректор *Р.В. Царева*
Компьютерная верстка *А.Н. Канатникова*

Подписано в печать 30.10.2013. Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 5,12. Изд. № 3.
Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Для заметок