А. Ю. Эвнин, Задачи по математическому анализу на студенческих олимпиадах, *Матем. обр.*, 2020, выпуск 2(94), 55–76

Задачи по математическому анализу на студенческих олимпиадах

А. Ю. Эвнин

В статье рассматриваются задачи по математическому анализу, предлагавшиеся в последние годы на различных студенческих олимпиадах, а также на вступительном экзамене в Школу анализа данных. Некоторые задачи — подготовительного характера.

Эта подборка задач продолжает серию аналогичных публикаций [3–5] в журнале «Математическое образование».

Условия задач

Последовательности. Пределы. Непрерывность

1. Последовательность (a_n) задаётся рекуррентным соотношением

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1} + 1}{a_k}$$

с начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 2013$. Найдите a_{2013}.

2. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

3. Постройте график функции

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (x^2/2)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

4. Решите уравнение $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(nx) = 1$.

5. Вычислите $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{50}}{2}\right)^n$.

6. Последовательность (a_n) задана так:

$$a_0 = 2011, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = a_{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Сходится ли эта последовательность? Если сходится, то найдите её предел.

7. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

8. Пусть $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2(a_n - 3)}{4}$ $(n \in \mathbb{N})$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

9. Пусть $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + na_{n-1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

10. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)^n$.

11. Найдите предел последовательности (x_n), заданной рекуррентно:

$$x_0 = 10, \quad x_{n+1} = x_n + \sin x_n \;\; n \in \mathbb{N}.$$

12. Пусть a_n — произведение всех чисел в n-й строке треугольника Паскаля, т. е. $a_n = \prod\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}$.

13. Последовательность задана так: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Исследуйте её на сходимость в зависимости от a.

14. Найдите предел последовательности (c_n), определяемой рекуррентным соотношением $c_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})c_n + \beta_n$, где (β_n) — любая последовательность со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\beta_n = 0$.

15. Последовательность (a_n) такова, что все $a_n \in (0;1)$ и $a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$. Верно ли, что эта последовательность сходится? Найдите множество всех возможных пределов таких последовательностей.

16. Пусть функция f определена, непрерывна и ограничена на промежутке $(x_0; +\infty)$. Докажите, что для любого числа T существует последовательность (x_n) такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \lim_{n\to\infty}(f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

17. Функция f непрерывна на положительной полуоси. Известно, что при любом $x > 0$ последовательность $f(x+n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Следует ли отсюда, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

18. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;2]$ и $f(0) = f(2)$. Докажите, что для какого-то $x \in [1;2]$ выполняется равенство $f(x) = f(x-1)$.

19. Может ли непрерывная на всей числовой прямой функция принимать каждое своё значение 1) дважды; 2) трижды?

20. Существует ли непрерывная функция $y = f(x)$, для которой справедливо тождество $f(f(x)) = 1 - x^3$?

21. Существуют ли такие непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, что

$$f(g(x)) = \operatorname{arctg} x, \quad g(f(x)) = \operatorname{arcctg} x?$$

Производная. Интегралы

22. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2+17}{x^4 - 5x^2 + 4}$. Вычислите $f^{(319)}(0)$.

23. Пусть $f(x)$ — гладкая вещественная функция, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Докажите, что найдутся различные $x_1, x_2 \in [0;1]$, для которых

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2.$$

24. Пусть $a < b$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx \geqslant e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

25. Определите знак числа $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{3^x-1}{3^x+1}\,dx$.

26. Вычислите $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\,dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$.

27. Вычислите сумму интегралов

$$\int\limits_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} \sin(x^2)\,dx + \int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{\arcsin x}\,dx.$$

28. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + 2015x)\,dx$.

29. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x))dx$.

30. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x}\,dx$.

31. Вычислите интеграл $I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\operatorname{tg}^a x}$.

32. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin^8 x\,dx$.

33. Вычислите интеграл $\int\limits_{1/3}^{3} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2-x+1}\,dx$.

34. Пусть $I_m = \int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(mx)\,dx$. Для каких m интеграл I_m не равен нулю?

35. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 e^{\{nx\}} x^{2016}\,dx$, где $\{t\}$ — дробная часть числа t.

36. Известно, что $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Докажите, что многочлен $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

37. Коэффициенты многочлена $P(x) = a_0x^{2012} + a_1x^{2011} + \dots + a_{2012}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{a_0}{2013} + \frac{a_2}{2011} + \frac{a_4}{2009} + \dots + \frac{a_{2010}}{3} + a_{2012} = 0.$$

Докажите, что многочлен $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

38. Пусть $f(x)$ — положительная непрерывная функция, определённая на $\mathbb{R}$, причём $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Пусть $\alpha \in (0;1)$, а отрезок $[a;b]$ имеет минимальную длину из тех отрезков, по которым интеграл от функции f равен α. Покажите, что $f(a) = f(b)$.

39. Определите, сколько корней на отрезке $[0;3]$ имеет уравнение

$$\int\limits_{x}^{x+1/2} \cos\left(\frac{t^2}{3}\right)\,dt = 0.$$

40. Существует ли непрерывная на промежутке $(1;+\infty)$ функция $f(x)$ такая, что

$$\forall x > 1 \quad \int\limits_{x}^{x^3} f(t)\,dt = 1?$$

41. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция, причём $f(0) = 0$ и $0 < f'(x) \leqslant 1$ при всех x. Докажите, что при $x \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{0}^{x} f^3(t)\,dt \leqslant \left(\int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt\right)^2.$$

42. Найдите все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$ такие, что для любых действительных чисел a и b выполняется равенство

$$(a+b)\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = 2\int\limits_{a}^{b} xf(x)\,dx.$$

43. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1} \int\limits_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

44. Пусть функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[0;1]$. Докажите неравенство

$$\left(\int\limits_{0}^{1} f(x)dx\right)^2 + \left(\int\limits_{0}^{1} g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_{0}^{1} \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx\right)^2.$$

45. Докажите, что для произвольного $a_0 \in (0;2\pi)$ последовательность, заданная условием

$$a_{n+1} = \int\limits_{0}^{a_n} (1 + \frac{1}{4}\cos^{2n+1} t)\,dt,$$

сходится, и найдите её предел.

46. Вычислите интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \sin(x^2)\cos(y^2)\,dx\,dy$.

47. Пусть фигура G задаётся неравенствами $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Вычислите интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{x+y}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz.$$

48. 1) Для непрерывной функции $f(x)$ найдите

$$\frac{d}{da}\iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy.$$

2) Опишите все непрерывные функции $f(x)$, для которых $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

49. Пусть $\alpha > 0$. Вычислите $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$, если

$$A(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x+1}\,dx, \quad B(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x-1}\,dx.$$

50. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 \ldots \int\limits_0^1 \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n$.

Ряды

51. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{n!}$.

52. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

53. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (\ln\ln n)^{-\ln n}$?

54. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

55. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$.

56. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{8}{2^6} + \frac{13}{2^7} + \frac{21}{2^8} + \frac{34}{2^9} + \ldots$$

(в числителях дробей — числа Фибоначчи, а в знаменателях — степени двойки).

57. Вычислите сумму ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} - \ldots$$

58. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}$, где $f(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n.

59. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Для каждого целого $n \geqslant 0$ обозначим через a_n расстояние от a до ближайшего числа вида $\frac{m}{2^n}$, где $m \in \mathbb{Z}$. Найдите наибольшую возможную сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

60. Существует ли последовательность (a_n) такая, что ряд с общим членом $(\sin(a_n))$ сходится, а ряд с общим членом $(\sin(2a_n))$ расходится?

61. Докажите, что из любого множества положительных чисел мощности континуума можно выбрать счётное подмножество с бесконечной суммой.

62. Для каждого натурального n у нас есть одна гиря массой $1/n^2$ г. Никаких других гирь у нас нет. Какие массы мы можем взвесить на чашечных весах с помощью этих гирь? Гири (их может быть и бесконечное число) помещаются на одну чашку, а груз — на другую.

63. Существует ли биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}?$$

64. Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — расходящиеся положительные ряды. Известно, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant \ldots; \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k \geqslant b_{k+1} \geqslant \ldots.$$

Может ли сходиться ряд $\sum \min(a_n, b_n)$?

65. Можно ли расставить все рациональные числа в клетки бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы каждое число появлялось только один раз и при этом суммы по всем строкам были равны минус бесконечности, а по всем столбцам плюс бесконечности?

Ответы, указания и решения

1. 1007.

Решение. Обозначим $x = a_1$, $y = a_2$. Вычисления по рекуррентной формуле дают следующие выражения членов последовательности через x и y (проверьте!):

$$a_3 = \frac{y+1}{x}; \quad a_4 = \frac{x+y+1}{xy}; \quad a_5 = \frac{x+1}{y}; \quad a_6 = x; \quad a_7 = y.$$

Отсюда понятно, что последовательность периодическая: $\forall n \quad a_{n+5} = a_n$. Поэтому $a_{2013} = a_3 = \frac{y+1}{x} = 1007$.

2. $a_n = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}$.

Решение. Перепишем рекуррентное соотношение в виде

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + na_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n.$$

Теперь видно, что удобно перейти к последовательности с общим членом $b_n = \dfrac{1}{a_n}$. Для неё рекуррентное соотношение принимает вид $b_{n+1} = b_n + n$. Имеем

$$b_0 = b_1 = 1, \quad b_2 = 1 + 1, \quad b_3 = 1 + 1 + 2, \ldots, \quad b_n = 1 + (1 + 2 + \cdots + (n-1)).$$

Значит, $b_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$, а $a_n = \frac{2}{n^2-n+2}$.

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

4. $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(nx) = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+2)x - \sin x) = 0.$$

Но при $n \to +\infty$

$$\sin(n+2)x - \sin x = 2\sin x \cos(n+1)x \to 2\sin x.$$

Значит, $\sin x = 0$ и $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Подстановка в исходное уравнение показывает, что число m должно быть чётным.

5. 10.

Решение. Используя второй замечательный предел, имеем

$$a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{50}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1+\sqrt[n]{25}}{2}\right)^n = 2\left(1 + \frac{\sqrt[n]{25}-1}{2}\right)^n =$$

$$= 2\left(1 + \frac{\sqrt[n]{25}-1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{25}-1}\cdot\frac{n(\sqrt[n]{25}-1)}{2}}.$$

Как известно, $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$ при $\alpha \to 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{25}-1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\frac{1}{n}\ln 25}{2} = \frac{1}{2}\ln 25.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2e^{\frac{1}{2}\ln 25} = 2\cdot 5 = 10.$$

Замечание. Точно так же доказывается, что предел среднего степенного двух положительных чисел равен их среднему геометрическому:

$$\lim_{\alpha\to 0} \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{ab}.$$

6. Последовательность сходится к нулю.

Решение. Умножим обе части рекуррентного соотношения на $(n+1)^2$:

$$(n+1)^2 a_n = n^2 a_{n-1} + 1.$$

Пусть $b_n = (n+1)^2 a_n$. Тогда для любого n имеем $b_n = b_{n-1} + 1$, откуда

$$b_n = b_0 + n = a_0 + n, \quad a_n = \frac{b_n}{(n+1)^2} = \frac{a_0 + n}{(n+1)^2}.$$

7. $\frac{a+2b}{3}$.

Решение. Для решения линейного рекуррентного соотношения $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$. Его корни 1 и $-\frac{1}{2}$. Общее решение рекуррентного соотношения $x_n = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Из начальных условий находим $c_1 = \frac{a+2b}{3}$, $c_2 = \frac{4(b-a)}{3}$.

8. 0.

Докажите, что последовательность возрастает и ограничена сверху нулём. По теореме Вейерштрасса, она имеет предел. Обозначим его через x. Теперь нужно перейти к пределу в рекуррентном соотношении, получив уравнение относительно x, и учесть, что $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$.

9. $\ln 2$.

По индукции можно доказать, что $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

10. e^2.

Решение. Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{C_n^k} = 1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Действительно,

$$\frac{1}{C_n^n} = 1; \quad \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} = \frac{2}{n}; \quad \frac{1}{C_n^2} + \frac{1}{C_n^{n-2}} = \frac{4}{n(n-1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

а каждое из остальных $n-5$ слагаемых не больше $\frac{1}{C_n^3}$, поэтому

$$\sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{C_n^k} \leqslant \frac{(n-5)\cdot 3!}{n(n-1)(n-2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее, используя второй замечательный предел, получаем, что при $n \to \infty$

$$\left(1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \to e^2.$$

11. 3π.

Решение. Пусть (для каждого n) $y_n = x_n - 3\pi$. Тогда $y_0 = 10 - 3\pi$ и

$$y_{n+1} = y_n - \sin y_n. \tag{$*$}$$

По индукции легко доказывается, что для любого n выполнено двойное неравенство $0 < y_{n+1} < y_n$. Значит, последовательность (y_n) убывает и ограничена снизу нулём. По теореме Вейерштрасса, существует предел этой последовательности. Обозначим его a. Переход к пределу в рекуррентном соотношении $(*)$ даёт $a = a - \sin a$, откуда $\sin a = 0$ и $a = \pi k$ для некоторого целого k. В то же время для любого n имеем $0 < y_n < y_0 = 10 - 3\pi$, и $a \in [0; 10 - 3\pi]$. Стало быть, $a = 0$, а

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (y_n + 3\pi) = 3\pi.$$

12. e.

Решение. Выразим a_n через a_{n-1}:

$$a_n = \prod_{k=0}^{n} C_n^k = \prod_{k=1}^{n} C_n^k = \prod_{k=1}^{n} \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{n^n}{n!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = \frac{n^n}{n!} a_{n-1}.$$

Отсюда

$$a_{n-1} = \frac{n!}{n^n} a_n; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} a_n;$$

$$\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{n! \cdot (n+1)^{n+1}}{n^n \cdot (n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

13. При $0 \leqslant a \leqslant 1$ последовательность сходится к 1; при остальных a последовательность расходится.

Решение. Поскольку $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geqslant 0$, последовательность (x_n) неубывающая.

Если последовательность сходится, и её предел равен b, то, перейдя к пределу в рекуррентном соотношении, получим $b = b^2 - b + 1$, откуда $b = 1$. Если $x_1 = a > 1$, то предел неубывающей последовательности (x_n) не может быть равен единице. Значит, при $a > 1$ последовательность расходится. Если $a < 0$, то $x_2 > 1$, и делаем тот же вывод.

Пусть теперь $0 \leqslant a \leqslant 1$. Если $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, то

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1 = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant 1.$$

Стало быть, последовательность ограниченная (снизу нулём, сверху единицей). Из монотонности и ограниченности вытекает существование предела последовательности.

14. 0.

Решение. Поскольку $nc_{n+1} = (n-1)c_n + n\beta_n$, уместно рассмотреть последовательность с общим членом $a_n = (n-1)c_n$. Для неё выполняется соотношение $a_{n+1} = a_n + n\beta_n$. Кроме того, $a_2 = c_2 = \beta_1$. Отсюда легко получить, что $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\beta_k$. Значит, $c_n = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\beta_k$. Из определения последовательности (β_k) следует, что для некоторого положительного числа A и для любого k выполнено неравенство $|\beta_k| \leqslant \frac{A}{k^2}$. Тогда $|c_n| \leqslant \frac{A}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \sim A\cdot\frac{\ln(n-1)}{n-1}$ и $\lim c_n = 0$.

15. Верно. Множество всех возможных значений предела $[0;1)$.

Решение. Элемент a_k назовём *красным*, если $a_k > a_{k-1}$. Остальные элементы последовательности назовём *синими*. Заметим, что за красным элементом всегда следует меньший элемент. Действительно, если $a_k > a_{k-1}$, то $a_{k+1} < \dfrac{a_{k-1}+a_k}{2} < a_k$. Если количество красных элементов конечно, то, начиная с какого-то места, последовательность невозрастающая, к тому же, по условию, она ограниченная, поэтому сходится.

Пусть теперь красных элементов бесконечно много. Докажем, что последовательность из красных элементов убывает. Действительно, если a_k и a_m — два соседних красных элемента, где $k < m$, то

$$a_k > a_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant a_{m-1} < a_m \qquad (*)$$

и

$$a_m < \frac{a_{m-1}+a_{m-2}}{2} \leqslant \frac{a_k + a_{k+1}}{2} < a_k.$$

Следовательно, красная подпоследовательность сходится. Обозначим её предел через r. Покажем, что если два соседних красных элемента a_k и a_m попали в ε-окрестность точки r ($r < a_m < a_k < r+\varepsilon$), то синие элементы, расположенные между ними, также будут в этой окрестности (отсюда и будет вытекать сходимость исходной последовательности). Учитывая $(*)$, имеем

$$a_m < \frac{a_{m-1}+a_{m-2}}{2} \leqslant \frac{a_{m-1}+a_k}{2}, \quad a_{m-1} \geqslant 2a_m - a_k > 2a_m - (r+\varepsilon) > r - \varepsilon.$$

Итак, последовательность (a_n) сходится. Поскольку $0 < a_n < 1$ (для любого n), предел не может быть вне отрезка $[0;1]$. Пусть $\alpha \in [0;1)$. Выберем число q таким, что $\alpha + \frac{q}{2} < 1$. Тогда последовательность с общим членом $a_n = \alpha + \frac{q}{2^n}$ удовлетворяет условию задачи, и её предел равен α. Докажем, наконец, что 1 не может быть значением предела. В этом легко убедиться, исходя из того наблюдения, что (при $k > 2$) $a_k < \max(a_1, a_2)$. Последнее следует из неравенств

$$a_k < \frac{a_{k-1} + a_{k-2}}{2} \leqslant \max(a_{k-1}, a_{k-2}).$$

Если $a_k > 1 - \varepsilon$, то $\max(a_1, a_2) > 1 - \varepsilon$. В силу того, что положительное число ε может быть сколь угодно малым, $\max(a_1, a_2) = 1$, что противоречит условию задачи.

16. Без ограничения общности можно считать, что $T > 0$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x+T) - f(x)$. Она непрерывна и ограничена на $(x_0; +\infty)$. Если у данной функции бесконечное число нулей, то их можно взять в качестве искомой последовательности. В противном случае рассмотрим промежуток от последнего нуля до плюс бесконечности. На нём функция $g(x)$ знакопостоянная. Для определённости, пусть $g(x) > 0$ при $x > a$. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = a + nT$. Последовательность $f(x_n)$ возрастающая и ограниченная. Поэтому у неё есть конечный предел. Но тогда

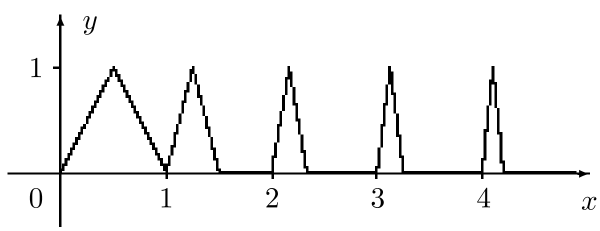
$$\lim_{n\to\infty}(f(x_{n+1}) - f(x_n)) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

17. Нет, не следует.

Решение. Определим функцию f на отрезках $[n; n+1]$, где $n \in \mathbb{N}_0$, так:

$$f(n) = f\left(n + \frac{1}{n+1}\right) = 0, \quad f\left(n + \frac{1}{2(n+1)}\right) = 1,$$

функция f линейна на отрезках $\left[n; n + \frac{1}{2(n+1)}\right]$ и $\left[n + \frac{1}{2(n+1)}; n + \frac{1}{n+1}\right]$ и равна нулю на отрезке $\left[n + \frac{1}{n+1}; n+1\right]$. График функции f — на рисунке.



Требование, предъявляемое к функции f, выполняется, так как в целых точках функция равна нулю, а для каждого нецелого x существует такое $N = \frac{1}{\{x\}} + 1$, что при натуральном $n > N$ выполняется равенство $f(x+n) = 0$.

С другой стороны, функция f не стремится к 0, т. к. для любого числа $x_0 > 0$ существует такое число $x > x_0$, что $f(x) = 1$.

18. Положим $A = f(0) = f(2)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - f(x-1)$. Заметим, что $g(1) = f(1) - A$, а $g(2) = A - f(1)$. Значит, на концах отрезка $[1; 2]$ непрерывная функция $g(x)$ принимает значения разных знаков. Следовательно, в некоторой точке этого отрезка функция $g(x)$ равна нулю. Это и требовалось доказать.

19. а) Нет; б) да.

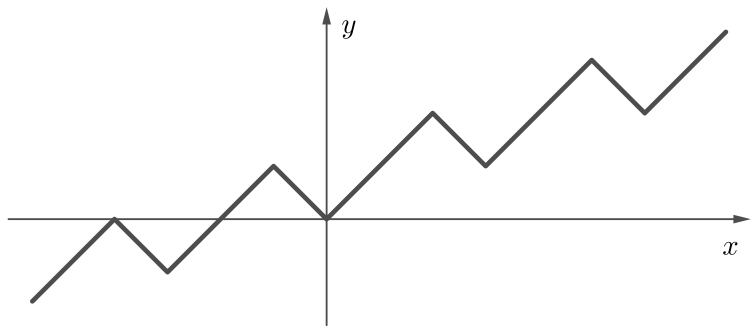
Решение. а) Пусть $f(x)$ — непрерывная функция и $f(a) = f(b) = q$, где $a < b$. Тогда на интервале $(a; b)$ значения $f(x)$ либо всюду больше q, либо всюду меньше q, иначе значение q принимается функцией $f(x)$ не менее чем в трёх точках. Рассмотрим первую альтернативу (для второй альтернативы рассуждения аналогичные).

Положим $Q = \max\limits_{[a;b]} f(x)$. Очевидно, $Q > q$.

Если значение Q достигается в двух точках, скажем, $f(c) = f(d) = Q$, где $a < c < d < b$, то значение $m = \min\limits_{[c;d]} f(x)$ достигается не менее чем в трёх точках.

Если же значение Q достигается только в одной точке интервала $(a; b)$, скажем, $f(c) = Q$, то все значения из промежутка $(q; Q)$ достигаются функцией $f(x)$ хотя бы дважды. Но тогда $f(x) < q < Q$ при $x \notin [a; b]$ и значение Q принимается функцией $f(x)$ только в одной точке.

б) См. рисунок.



20. Нет.

Решение. Функция, удовлетворяющая условию задачи, должна быть обратимой. Действительно,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow 1 - x_1^3 = 1 - x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Обратимая непрерывная функция должна быть строго монотонной. Но тогда $f(f(x))$ — возрастающая функция.

21. Нет.

22. 0.

Решение. Функция $\dfrac{\cos(\sin x)}{x^4 - 5x^2 + 4}$ — чётная и бесконечное число раз дифференцируемая в окрестности нуля. Как известно, производная чётной функции нечётна, а нечётной чётна. Отсюда следует, что производная нечётного порядка от чётной функции будет нечётной функцией. Поэтому $f^{(2019)}(0) = 0$.

23. Рассмотрим функцию $g(x) = f'(x)$. По условию, она непрерывная, а 1 — её среднее значение на отрезке $[0; 1]$, поскольку $\int_0^1 g(x)\,dx = f(1) - f(0) = 1$. Если $g(x) = 1$ всюду на отрезке $[0; 1]$, то доказывать нечего. Иначе множество значений этой функции на данном отрезке есть некоторый отрезок $[a; b]$, причём $a < 1 < b$. Если зафиксировать $\alpha \neq -1$, то из условия $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} = 1$ число β определится однозначно. Из соображений непрерывности получаем, что α можно выбрать столь близким к 1, что $a \leqslant \alpha < 1 < \beta \leqslant b$.

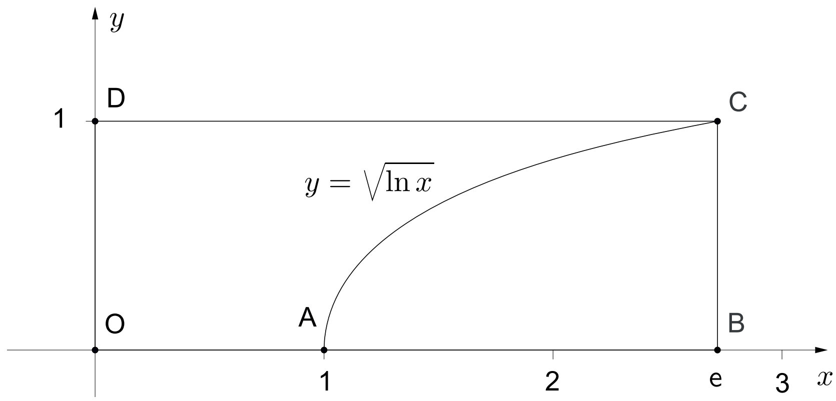
24. Поскольку $x^2 + 1 \geqslant 2x$, имеем

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geqslant \int_a^b 2xe^{-x^2}dx = -\int_a^b d\left(e^{-x^2}\right) = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

25. Это число равно нулю. Подынтегральная функция является нечётной.

26. e.

Подынтегральные функции взаимно обратны. Поэтому два интеграла из условия выражают площади фигур ABC и $ODCA$ (см. рисунок), образующих разбиение прямоугольника $[0; 1] \times [0; e]$.



27. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

28. 0.

Решение. Подынтегральная функция нечётная и имеет период 2π. Как известно, интеграл от периодической функции по промежутку, чья длина равна периоду этой функции, не зависит от расположения этого промежутка на числовой прямой. Интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ равен нулю из-за нечётности функции $f(x)$.

29. $\frac{\pi}{2}$.

Если f — непрерывная функция, то $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

30. $\frac{\pi}{2}$.

31. $I(a) = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^a x} = \left[\begin{array}{cc} x = \frac{\pi}{2} - t; & \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} t; \\ x = 0; & t = \frac{\pi}{2}; \\ x = \frac{\pi}{2}; & t = 0 \end{array}\right] = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \operatorname{ctg}^a t}.$$

Отсюда

$$2I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^a t} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^a t}\right) dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^a t} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^a t} = \frac{2 + \operatorname{tg}^a t + \operatorname{ctg}^a t}{1 + 1 + \operatorname{tg}^a t + \operatorname{ctg}^a t} = 1,$$

имеем $2I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$.

32. $\frac{7!!}{8!!} \cdot 2\pi$.

Решение. Обозначим $I_n = \int\limits_0^{2\pi} \sin^n x\,dx$. Несложно видеть, что при нечётном n интеграл I_n равен нулю. В дальнейшем считаем, что $n = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$.

1-й способ. (Рекуррентное соотношение для I_n.)

$$I_n = \int\limits_0^{2\pi} \sin^n x\,dx = -\int\limits_0^{2\pi} \sin^{n-1} x\,d\cos x = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \cos x\,d(\sin^{n-1} x) =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx = (n-1)\int\limits_0^{2\pi} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Из равенства $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ выражаем I_n через I_{n-2}: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Отсюда $I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot 2\pi$.

2-й способ. (Формула Эйлера и бином Ньютона.) Поскольку $\sin x = -\frac{1}{2} i(e^{ix} - e^{-ix})$, имеем

$$\sin^{2k} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j e^{ixj} e^{-ix(2k-j)} (-1)^j = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j (-1)^j e^{2(j-k)ix}.$$

Если $j \neq k$, то $\int\limits_0^{2\pi} e^{2(j-k)ix}\,dx = 0$. Поэтому

$$I_{2k} = \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2k} x\,dx = \frac{1}{2^{2k}} \int\limits_0^{2\pi} C_{2k}^k\,dx = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \cdot 2\pi.$$

33. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$.

Решение.

$$I = \int\limits_{1/3}^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\,dx = \left[x = \frac{1}{t}\right] = \int\limits_{3}^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1} \frac{dt}{-t^2} =$$

$$= \int\limits_{1/3}^{3} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{t^2 - t + 1}\,dt = \int\limits_{1/3}^{3} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t}{t^2 - t + 1}\,dt = \frac{\pi}{2} \int\limits_{1/3}^{3} \frac{dt}{t^2 - t + 1}\,dt - I. \quad (1)$$

В этих выкладках использовалось тождество $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, имеющее место при $t > 0$. Его легко получить, рассмотрев прямоугольный треугольник с катетами длиной 1 и t. Острые углы этого треугольника равны $\operatorname{arctg} t$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{t}$.

Из равенства (1) получаем

$$I = \frac{\pi}{4} \int\limits_{1/3}^{3} \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}.$$

34. Для m вида $m = 4k$ и $m = 4k + 3$.

Решение. Обозначим $q = e^{ix}$. Тогда $\cos x = \frac{q+q^{-1}}{2}$, $\cos kx = \frac{q^k + q^{-k}}{2}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} \cos kx = \frac{1}{2^m} (q + q^{-1})(q^2 + q^{-2}) \dots (q^m + q^{-m}).$$

После раскрытия скобок получаются слагаемые вида $q^{\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm m}$. Заметим, что при целом k

$$\int_0^{2\pi} q^k\,dx = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 0, \text{ если } k \neq 0\ ; \\ 2\pi, \text{ если } k = 0. \end{cases}$$

Поэтому $I_m \neq 0$ тогда и только тогда, когда можно так расставить знаки плюс и минус в выражении $g(m) = \pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm m$, чтобы оно стало равным нулю. Заметим, что количество нечётных слагаемых в указанной сумме будет нечётным, если m имеет вид $m = 4k+1$ или $m = 4k+2$; при этом $g(m)$ нечётно и, значит, не равно нулю. Если же $m = 4k$ или $m = 4k+3$, то знаки можно расставить нужным образом. Например,

$$1-2-3+4+5-6-7+8+\cdots+(4k-3)-(4k-2)-(4k-1)+4k=0;$$
$$1+2-3+4-5-6+7+\cdots+4k-(4k+1)-(4k+2)+(4k-3)=0.$$

Замечание. Сам интеграл равен $\frac{2\pi}{2^m}\cdot a_m$, где a_m — количество способов расставить знаки в выражении $g(m)$, чтобы оно стало равным нулю. Последовательность (a_m) в энциклопедии OEIS имеет номер A063865. Вот её начало:

$$0, 0, 2, 2, 0, 0, 8, 14, 0, 0, 70, 124, 0, 0, 722, 1314, 0, 0, 8220, 15272, 0, 0, 99820, 187692, \ldots$$

35. $\frac{e-1}{2017}$. Подробное решение см. в [10, 4.06.2016].

36. Интеграл от многочлена по отрезку $[0;1]$ равен нулю.

37. Вычислите $\int\limits_{-1}^{1} P(x)\,dx$.

38. 1-й способ. Доказательство от противного. Пусть $f(b) > f(a)$ (случай $f(b) < f(a)$ вполне аналогичен данному). Сдвинем точки a и b вправо (т. е. заменим a на $a+\varepsilon_1$, а b на $b+\varepsilon_2$) так, чтобы интеграл от функции f по отрезку не изменился. Тогда $\int\limits_a^{a+\varepsilon_1} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+\varepsilon_2} f(x)\,dx$. Заметим, что ε_2 определяется по ε_1 однозначно. Выберем ε_1 столь малым, чтобы на отрезке $[b; b+\varepsilon_2]$ значения функции $f(x)$ были больше, чем на отрезке $[a; a+\varepsilon_1]$. Тогда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, и длина нового отрезка меньше исходного: $a-b+\varepsilon_1-\varepsilon_2 < a-b$. Противоречие!

2-й способ. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx > \alpha$. Тогда однозначно определено число b, для которого $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \alpha$. Тем самым задана функция $b = g(a)$. Продифференцируем по a тождество

$$\int_a^{g(a)} f(x)\,dx = \alpha.$$

Получим $f(g(a))\cdot g'(a) - f(a) = 0$. Если функция $g(a)-a$ принимает наименьшее значение в некоторой точке, то в этой точке $g'(a) = 1$. Поэтому $f(b) = f(g(a)) = f(a)$.

39. Один корень.

Решение. Рассмотрим функции $g(t) = \cos\left(\frac{t^2}{3}\right)$ и $I(x) = \int\limits_x^{x+1/2} g(t)\,dt$. Легко проверить, что на отрезке $[0; 1/2]$ функция $g(t)$ положительна, а на отрезке $[3; 3\frac{1}{2}]$ функция $g(t)$ отрицательна. Поэтому

$I(0) > 0$, $I(3) < 0$. Кроме того,

$$I'(x) = \cos\left(\frac{(x+1/2)^2}{3}\right) - \cos\left(\frac{x^2}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{x+1/4}{6}\right)\sin\left(\frac{2x^2+x+1/4}{6}\right).$$

В полученном произведении синусов первый положителен на отрезке $[0;3]$, а второй меняет знак с плюса на минус. Поэтому функция $I(x)$ сначала убывает, а потом возрастает. Учитывая знаки $I(x)$ на концах данного промежутка, получаем ответ.

40. Да.

Решение. Продифференцировав по переменной x интеграл с переменными пределами интегрирования, получим функциональное уравнение

$$3x^2 f(x^3) - f(x) = 0,$$

откуда $3x^3 f(x^3) = xf(x)$. Относительно функции $g(x) = xf(x)$ возникает более простое уравнение

$$3g(x^3) = g(x),$$

к которому подбирается решение $g(x) = \frac{C}{\ln x}$. Найдём подходящее значение C:

$$\int\limits_x^{x^3} \frac{C dt}{t \ln t} = C \int\limits_x^{x^3} \frac{d \ln t}{\ln t} = C \ln(\ln t)\Big|_x^{x^3} = C \ln 3 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\ln 3}.$$

Итак, нашлась функция, удовлетворяющая условию задачи: $f(x) = \dfrac{1}{\ln 3 \cdot x \ln x}$.

41. Подробное решение см. в [10, 7.06.2015].

42. $f = const$.

Решение. Продифференцировав тождество из условия задачи по переменной a, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx - (a+b)f(a) = -2af(a),$$

откуда

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(a).$$

Теперь дифференцируем по переменной b и получаем $f(b) = f(a)$. Поскольку a и b произвольны, отсюда и следует, что $f = const$. С другой стороны, функция $f(x) = c$, где $c = \mathrm{const}$, удовлетворяет условию задачи (это проверяется непосредственной подстановкой).

43. $\ln 2$.

Решение. Разобьём интеграл на два интеграла, а затем ко второму из них применим обобщённую теорему о среднем:

$$A(x) = \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int\limits_x^{x^2} \frac{t\, d \ln t}{\ln t} = \int\limits_x^{x^2} \frac{d \ln t}{\ln t} + \int\limits_x^{x^2} \frac{(t-1) d \ln t}{\ln t} = \ln 2 + (\mu - 1) \int\limits_x^{x^2} \frac{d \ln t}{\ln t} = \mu \ln 2,$$

где число μ лежит между x и x^2. Отсюда $\lim_{x \to 1} A(x) = \ln 2$.

44. 1-й способ. Введём функции $x(t)=\int\limits_0^t f(u)\,du$ и $y(t)=\int\limits_0^t g(u)\,du$. Из непрерывности функций $f(u)$ и $g(u)$ следует, что функции $x(t)$ и $g(t)$ непрерывно дифференцируемы, причём $x'(t)=f(t)$, $y'(t)=g(t)$. Рассмотрим на плоскости Oxy кривую L, заданную параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$. Концы этой кривой — точки $A(0;0)$ и $B(x(1);y(1))$. Теперь в правой части неравенства можно увидеть квадрат длины кривой L, а в левой — квадрат длины отрезка, соединяющего её концы. Неравенство становится очевидным.

2-й способ. Пусть $a=\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, $b=\int\limits_0^1 g(x)\,dx$. По неравенству Коши–Буняковского,

$$af(x)+bg(x)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}.$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[0;1]$, получим

$$a^2+b^2\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\int\limits_0^1\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx.$$

Отсюда

$$\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\int\limits_0^1\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx.$$

Если возвести последнее неравенство в квадрат, получится то неравенство, которое требовалось доказать.

45. π. Решение см. в [6, с. 81–86].

46. $\frac12\pi(1-\cos(R^2))$.
Решение. Пусть D — круг $x^2+y^2\leqslant R^2$, $f(x,y)=\sin(x^2)\cos(y^2)$, а $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Заметим, что область интегрирования D не изменится, если поменять местами x и y. Поэтому

$$2I=\iint\limits_D(f(x,y)+f(y,x))dxdy=\iint\limits_D(\sin(x^2)\cos(y^2)+\sin(y^2)\cos(x^2))dxdy=$$
$$=\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r\sin(r^2)dr=$$
$$=\pi\int\limits_0^R\sin(r^2)d(r^2)=\pi(1-\cos(R^2)).$$

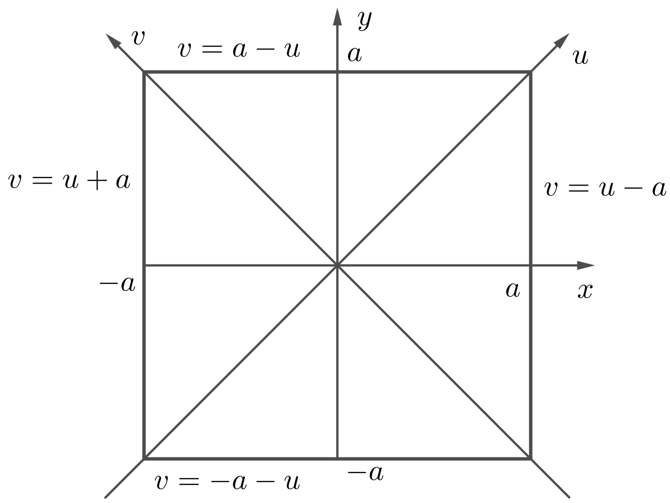
47. $\frac{\pi}{9}$.
Решение. В силу симметрии области интегрирования имеем

$$I=\iiint\limits_G\frac{x+y}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_G\frac{y+z}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_G\frac{z+x}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда $3I=\iiint\limits_G 2\,dx\,dy\,dz=2\cdot\frac18\cdot\frac{4\pi}{3}$.

48. 1) $4\int\limits_{-a}^{a} f(u)\,du$; 2) нечётные функции.

Решение. 1) Перейдём к новым переменным $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{y-x}{2}$. Тогда $x = u - v$, $y = u + v$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.



$$I(a) = \iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,dx\,dy = 2\iint\limits_{D_{uv}} f(u)\,du\,dv =$$

$$= 2\int\limits_{-a}^{0} du \int\limits_{-u-a}^{u+a} f(u)\,dv + 2\int\limits_{0}^{a} du \int\limits_{u-a}^{a-u} f(u)\,dv = 4\int\limits_{-a}^{0}(u+a)f(u)\,du + 4\int\limits_{0}^{a}(a-u)f(u)\,du.$$

Отсюда

$$\frac{dI}{da} = 0 + 4\int\limits_{-a}^{0} f(u)\,du + 0 + 4\int\limits_{0}^{a} f(u)\,du = 4\int\limits_{-a}^{a} f(u)\,du.$$

2) Из 1) следует, что $I'(a) = 4I(a)$. Отсюда $I(a) = ce^{4a}$. Поскольку $I(0) = 0$, имеем $c = 0$ и $I(a) = 0$. Значит,

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad (*)$$

Продифференцировав данное тождество по переменной a, получим, что для любого a верно равенство $f(a) + f(-a) = 0$. Значит, функция f нечётная. С другой стороны, для любой нечётной непрерывной функции равенство $(*)$ имеет место.

49. $1 - \dfrac{1}{2^\alpha}$.

Решение. В этой задаче отношение интегралов легко найти, если предварительно получить выражение для их разности. Имеем:

$$B(\alpha) - A(\alpha) = \int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{x^\alpha}{e^x - 1} - \frac{x^\alpha}{e^x + 1}\right)dx = \int\limits_{0}^{\infty}\frac{2x^\alpha}{e^{2x} - 1}\,dx = [t = 2x] = \frac{1}{2^\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^\alpha\,dt}{e^t - 1} = \frac{1}{2^\alpha}B(\alpha).$$

Итак, $B(\alpha)-A(\alpha)=\frac{1}{2^\alpha}B(\alpha)$. Отсюда $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}=1-\frac{1}{2^\alpha}$.

50. $\frac{1}{n+1}$.

Решение. Пусть D_i — та область n-мерного куба $[0;1]^n$, в которой $x_i=\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Пересечения этих областей имеют меру нуль, поэтому интеграл по всему кубу равен сумме интегралов по этим областям. Из соображений симметрии, интегралы по указанным n областям равны между собой. Интеграл по области D_1 равен

$$\int\limits_0^1 x_1dx_1\int\limits_{x_1}^1 dx_2\ldots\int\limits_{x_1}^1 dx_n=\int\limits_0^1 x(1-x)^{n-1}dx=[t=1-x]=\int\limits_0^1(1-t)t^n\,dt=\frac{1}{n(n+1)}.$$

После умножения на n (количество областей) получится ответ.

51. $-\frac{1}{e}$.

52. Ряд сходится условно.

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

53. Сходится.

Решение. Запишем общий член ряда в более удобном виде:

$$a_n=e^{\ln a_n}=e^{-\ln n\cdot\ln\ln\ln n}=\frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}.$$

Показатель степени $\ln\ln\ln n$ с ростом n стремится (пусть и неторопливо!) к $+\infty$. Значит, для достаточно больших n этот показатель больше, например, числа 2. Из сравнения исходного ряда со сходящимся обобщённым гармоническим рядом $\sum\frac{1}{n^2}$ получаем сходимость нашего ряда.

54. Расходится. По индукции докажите, что $a_n\geqslant\frac{1}{n}$. Вам может пригодиться неравенство $\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{6}$, справедливое для положительных x.

55. $\frac{1}{2}$.

Решение. Преобразуем общий член ряда:

$$\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=\frac{n+2}{n!(1+(n+1)+(n+1)(n+2))}=$$
$$=\frac{n+2}{n!(n+2)^2}=\frac{1}{n!(n+2)}=\frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{(n+2)-1}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}.$$

Частичную сумму ряда теперь найдём с помощью телескопического суммирования:

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(k+2)!}.$$

Сумма ряда равна

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{1}{2}.$$

56. 2.

Решение. Пусть f_k — k-е число Фибоначчи:

$$f_1 = f_2 = 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Имеем:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{k-1} + f_{k-2}}{2^k} =$$
$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{k-1}}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{k-2}}{2^k} = \frac{3}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_k}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2^{k+2}} =$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_k}{2^k} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2^k} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(S - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}S.$$

Итак, $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}S$. Отсюда $S = 2$.

Замечание. Другие решения можно получить, используя производящую функцию чисел Фибоначчи

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

которую нужно вычислить при $x = \frac{1}{2}$, и формулу Бинэ

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

которая позволяет представить суммируемый ряд в виде суммы двух геометрических прогрессий.

57. $\dfrac{\pi - 3}{4}$.

Решение. Рассмотрим частичную сумму ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{2}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right).$$

Её несложно привести к виду $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)}$. Как известно, при $|x| \leqslant 1$ имеет место разложение

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4} - 1$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi-3}{4}$.

58. $2\ln 2$. Решение см. в [10, 2.06.2013].

59. $\frac{2}{3}$. Решение можно найти здесь: `https://habr.com/en/post/264941/`.

60. Существует. Пример такой последовательности: $a_n = \pi n + \frac{1}{n}$.

Действительно, здесь $\sin(a_n) = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$, и соответствующий ряд сходится по признаку Лейбница. При этом $\sin(2a_n) = \sin(\frac{2}{n})$. Соответствующий ряд расходится по предельному признаку сравнения (сравниваем ряд с гармоническим рядом).

61. Пусть A — исходное множество, а $A_n = A \cap \left[\frac{1}{n}; +\infty\right)$, где $n \in \mathbb{N}$. Хотя бы одно из множеств A_n континуально, иначе объединение этих множеств не будет иметь мощность континуума. Элементы этого множества ограничены снизу положительной константой. Поэтому подойдёт любое счётное подмножество указанного множества.

62. Можно взвесить m г, если $m \in \left(0; \frac{\pi^2}{6} - 1\right] \cup \left[1; \frac{\pi^2}{6}\right]$.

Решение. Ключевым соображением для решения задачи является следующее. Если гири упорядочить по убыванию веса, то каждая гиря, начиная со второй, весит меньше, чем все последующие, вместе взятые, т. е. при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $\frac{1}{n^2} < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Действительно, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}$, а при $n \geqslant 2$ справедливо $n^2 > n+1$.

Отдельно рассмотрим случаи, когда на чашке весов отсутствует или присутствует гирька в 1 г.

Как известно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Убрав гирьку в 1 г, с помощью всех остальных мы взвесим груз в $\frac{\pi^2}{6} - 1$ г. Покажем, как взвесить любой меньший груз.

Пусть $m < \frac{\pi^2}{6} - 1$ и число m не представимо конечной суммой различных величин, обратных квадратам натуральных чисел. Будем на чашку весов последовательно ставить гирьки весом в $\frac{1}{2^2}$ г, $\frac{1}{3^2}$ г,... до тех пор, пока общий их вес не превзойдёт m, после чего последнюю гирьку уберём. Мы найдём такое l, что

$$\sum_{k=2}^{l} \frac{1}{k^2} < m < \sum_{k=2}^{l+1} \frac{1}{k^2}.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=l+2}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{(l+1)^2}$, без гирьки весом $\frac{1}{(l+1)^2}$ г можно обойтись, а задача свелась к аналогичной: с помощью гирек весом в $\frac{1}{(l+2)^2}$ г, $\frac{1}{(l+3)^2}$ г,... взвесить груз в $m - \sum\limits_{k=2}^{l} \frac{1}{k^2}$ г.

Фактически, для взвешивания груза (в m г) мы применяем *жадный алгоритм*: каждый раз на чашку весов ставим гирьку наибольшего веса такую, чтобы общий вес гирь не превзошёл m.

Если же гирька в 1 г используется при взвешивании, то, рассуждая точно так же, можно взвесить любой груз от 1 до $\pi^2/6$ г.

63. Не существует.

Решение. Рассмотрим n-ю частичную сумму ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi(k)}{k^2}$. При замене $\pi(k)$ на k, $k = 1, 2, \ldots, n$, данная сумма не увеличивается (по транснеравенству). Значит, $S_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Получилось, что S_n не меньше частичной суммы гармонического ряда. Отсюда и вытекает расходимость рассматриваемого ряда.

64. Может.

Решение. Выберем какое-нибудь число q, $0 < q < 1$ и будем строить такие последовательности, что $\min(a_n, b_n) = q^n$. Этим будет обеспечена сходимость ряда $\sum \min(a_n, b_n)$.

Для обеспечения расходимости рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, будем в каждом из них чередовать участки из возрастающих степеней q и стационарные участки:

n	1	2	...	m_1	m_1+1	...	m_1+m_2
a_n	q	q	...	q	q^{m_1+1}	...	$q^{m_1+m_2}$
b_n	q	q^2	...	q^{m_1}	q^{m_1}	...	q^{m_1}

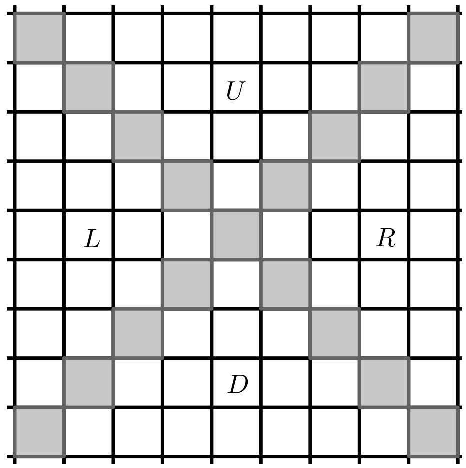
n	m_1+m_2+1	$\ldots$	$m_1+m_2+m_3$	$m_1+m_2+m_3+1$	$\ldots$
a_n	$q^{m_1+m_2}$	$\ldots$	$q^{m_1+m_2}$	$q^{m_1+m_2+m_3+1}$	$\ldots$
b_n	$q^{m_1+m_2+1}$	$\ldots$	$q^{m_1+m_2+m_3}$	$q^{m_1+m_2+m_3}$	$\ldots$

Длины стационарных участков m_1, m_2, $\ldots$ можно брать сколь угодно большими, добиваясь этим расходимости рядов. Например, достаточно выполнения неравенств

$$m_1q > 1; \quad m_2q^{m_1} > 1; \quad m_3q^{m_1+m_2} > 1; \quad \ldots.$$

65. Можно. Приведём пример требуемой расстановки чисел.

Две перпендикулярные друг другу клетчатые диагонали, выделенные цветом на рисунке, делят остальную клетчатую плоскость на 4 части: левую L, правую R, верхнюю U и нижнюю D.



Расставим в L и R все отрицательные целые числа, в U и D все положительные целые числа, а по диагоналям все остальные числа. Возможность такой расстановки обеспечивается счётностью соответствующих множеств.

Любая строка содержит бесконечное число отрицательных целых чисел и лишь конечное число других чисел (они расположены от одной диагонали до другой диагонали). Поэтому сумма по любой строке равна $-\infty$. В то же время любой столбец содержит бесконечное число натуральных чисел и лишь конечное число других чисел (они вновь расположены от одной диагонали до другой диагонали). Значит, сумма по любому столбцу равна $+\infty$.

Источники задач

Вступительные экзамены в Школу анализа данных Яндекса [10]: 2–4, 7–9, 14–16, 18–20, 22, 23, 27, 30, 33–36, 38, 39, 41, 45, 48, 51–54, 58, 61.

Олимпиады, проводящиеся в Южно-Уральском университете [6–9]: 1, 5, 6, 10–13, 24–26, 28, 29, 31, 37, 40, 42–44, 46, 47, 49, 50, 55–57, 60, 62–65.

Турнир математических боёв ФПМИ МФТИ: 10, 49, 60, 65.

Всероссийский студенческий турнир математических боёв (организатор Тульский педагогический университет им. Л. Н. Толстого [1, 2]: 21, 56.

Открытая международная студенческая Интернет-олимпиада (ОИО — Open International Internet-Olympiad) по математике (Поволжский технический университет, Йошкар-Ола, Ариэльский университет, Израиль): 26, 31.

Литература

[1] Игнатов Ю.А. *Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002 – 2015* В 2-х ч. Часть I / Ю.А. Игнатов, В.А. Шулюпов, И.Ю. Реброва и др. — Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2016. – 148 с.

[2] Игнатов Ю.А. *Задачи студенческих математических боёв* / Ю.А. Игнатов, В.А. Шулюпов, А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. – 43 с.

[3] Эвнин А.Ю. *Метод масс в задачах* // Математическое образование. – 2015. – № 1(73). – С. 27–47.

[4] Эвнин А.Ю. *Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах* / А.Ю. Эвнин, Э.Ю. Лернер, Ю.А. Игнатов, И.С. Григорьева // Математическое образование. – 2017. – № 4(84). – С. 45–62.

[5] Эвнин А.Ю. *Задачи по линейной алгебре на студенческих олимпиадах* / А.Ю. Эвнин, Ю.А. Игнатов // Математическое образование. – 2019. – № 3(91). – С. 26–48.

[6] Эвнин А.Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ 2017–2019 гг.* / А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2019. – 108 с.

[7] Эвнин А.Ю. *Математические олимпиады в ЮУрГУ 2010–2015 гг.* / А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 63 с.

[8] Эвнин А.Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков* / А.Ю. Эвнин. — М.: ЛЕНАНД, 2018. – 224 с.

[9] Эвнин А.Ю. *Ещё 150 красивых задач для будущих математиков* / А.Ю. Эвнин. — М.: ЛЕНАНД, 2018. – 216 с.

[10] *Решения вступительных испытаний в ШАД*
URL: `https://efiminem.github.io/supershad/`

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
и программирования Южно-Уральского
государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru