Вариант 1

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** Найдите все значения параметра $t \in [0; 2\pi)$, при которых расстояние от графика функции $y = e^x$ до кривой $\left(x - 1 - \frac{\cos t}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sin t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ является минимальным.

   Ответ: $t = \frac{3\pi}{4}$.

   Решение. Семейство кривых состоит из окружностей с центрами $\left(1 + \frac{\cos t}{2}; \frac{\sin t}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{2}$. Их объединение – это круг единичного радиуса с центром в точке $A(1; 0)$. Следовательно, наименьшее возможное расстояние от графика до кривой семейства равно расстоянию между графиком и окружностью ω с уравнением $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

   Очевидно, что для любой точки $M(x; y)$, лежащей вне ω, расстояние от неё до ω равно $MA - R = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} - 1$. Так как нас интересуют точки M, лежащие на кривой $y = e^x$, т.е. с координатами $M(x; e^x)$, расстояние принимает вид $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + e^{2x}} - 1$. Минимум этой функции достигается при минимальном подкоренном выражении. Рассматриваем $g(x) = (x-1)^2 + e^{2x}$. Тогда $g'(x) = 2(x-1) + 2e^{2x}$. Несложно видеть, что функция $g'(x)$ строго возрастает, а $g'(0) = 0$. Следовательно, $g_{\min} = g(0)$. Таким образом, ближайшая к ω точка M имеет координаты $M(0; 1)$, а ближайшая к точке M точка окружности – это её точка пересечения с отрезком AM (назовём её B).

   Нас интересует значения параметра t такое, при котором окружность данного в условии семейства проходит через точку B. Для этого центр этой окружности должен лежать на отрезке AM. Отсюда $t = \frac{3\pi}{4}$.

2. **(2 балла)** Матрица B размера 4×4 является матрицей положительно полуопределённой квадратичной формы $k(x)$. На диагонали матрицы B в некотором порядке стоят числа $2, 2^3, 2^5, 2^7$. Какой наибольший недиагональный элемент может быть у матрицы B?

   Ответ: 64.

   Решение. Если квадратичная форма положительно полуопределена, то она положительно полуопределена и на любом подпространстве. Пусть в матрице B наибольшие недиагональные элементы b стоят на местах ij и ji, а элементы $b_{ii} = 2^a$, $b_{jj} = 2^c$ (без ограничения общности $i < j$). Тогда на подпространстве, натянутом на базисные векторы с номерами i и j, матрица квадратичной формы имеет вид $B' = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ b & 2^c \end{pmatrix}$. Если $\det B' = 2^{a+c} - b^2 < 0$, то тогда форма не является знакоопределённой. Значит, $2^{a+c} - b^2 \geqslant 0$, поэтому $b^2 \leqslant 2^{a+c} \leqslant 2^{5+7}$ и $|b| \leqslant 2^6$, а наибольшее возможное значение b не превосходит 2^6.

   Покажем, что равенство $b = 2^6$ возможно. Пусть в матрице B элементы $b_{ii} = 2^{2i-1}$ $(i = 1, \ldots, 4)$, $b_{34} = b_{43} = 2^6$, а остальные недиагональные элементы равны 0. Тогда $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5x_3^2 + 2^7x_4^2 + 2 \cdot 2^6 x_3 x_4 = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5(x_3 + 2x_4)^2 \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x}$.

3. **(3 балла)** Вычислите $I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1 + 2x^2 - 2xy + 2y^2)^{100}}$.

   Ответ: $\frac{\pi}{99\sqrt{3}}$.

   Решение. Приводим квадратичную форму в знаменателе дроби к диагональному виду с помощью ортогонального линейного преобразования. Получаем $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 3u^2 + v^2$ (коэффициенты при квадратах равны собственным значениям матрицы квадратичной формы). При этом модуль якобиана замены равен 1. Значит, интеграл равен

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{du\,dv}{(1 + 3u^2 + v^2)^{100}}.$$

   В полученном интеграле переходим к полярным координатам $u = \frac{r}{\sqrt{3}}\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$. Получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \frac{r}{(1 + r^2)^{100}}\,dr = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^{100}} = \frac{\pi}{99\sqrt{3}}.$$

4. **(2 балла)** При каком минимальном n уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$ с непрерывно дифференцируемой функцией f на множестве $(0; +\infty)$ может иметь среди своих решений две функции $y_1 = 2 - x$, $y_2 = \frac{1}{x}$.

Ответ: $n = 3$.

Решение. Заметим, что $y_1(1) = 1 = y_2(1)$, $y_1'(1) = y_2'(1)$ и $y_1''(1) = y_2''(1)$, поэтому $n \geqslant 3$. Иначе задачи Коши $y' = f\left(x, y\right)$, $y(1) = 1$ и $y'' = f\left(x, y'\right)$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$ имели бы не единственное решение, что противоречит теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Построим уравнение третьего порядка, у которого есть решения $y_1 = 2 - x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$, в виде приведённого линейного однородного с общим решением $y = C_1 + C_2 x + \frac{C_3}{x}$. Из последнего равенства следует, что решения $y(x)$, 1, x и $\frac{1}{x}$ искомого уравнения линейно зависимы на множестве $x \in (0; +\infty)$, что равносильно равенству нулю определителя Вронского от этих функций на $(0; +\infty)$. Так как $W\left[y(x), 1, x, \frac{1}{x}\right] = y'''\frac{2}{x^3} - y''\frac{6}{x^4}$ и вронскиан равен нулю, получаем $y''' = -\frac{3y''}{x}$, а это и есть искомое уравнение.

5. **(3 балла)** Вычислите $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{t}} \sin\left(x\sqrt{2}\right)\, dx$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Интегрируем по частям, а затем делаем замену $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ в получившемся интеграле:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{t}} \sin\left(x\sqrt{2}\right) dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{t}} \cos\left(x\sqrt{2}\right)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{2x}{t} e^{-\frac{x^2}{t}} \cos\left(x\sqrt{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \int\limits_0^{+\infty} y e^{-y^2} \cos\left(y\sqrt{2t}\right) dy.$$

По лемме Римана об осцилляции $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} y e^{-y^2} \cos\left(y\sqrt{2t}\right) dy = 0$. Следовательно, предел равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. **(3 балла)** Пусть φ_1 и φ_2 – повороты трёхмерного векторного пространства вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат, на углы α и 2α соответственно (повороты осуществляются в одном направлении). Известно, что в некотором базисе φ_1 и φ_2 задаются матрицами A_1 и A_2 соответственно. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма диагональных элементов матрицы A_2, если сумма диагональных элементов матрицы A_1 равна 2,2?

Ответ: 0,44.

Решение. Выберем правый ортонормированный базис, связанный с поворотами следующим образом: вектор $\mathbf{e}_3$ направим вдоль оси вращения так, чтобы с его конца вращение в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ было видно против часовой стрелки. В таком базисе поворот на угол α имеет матрицу

$$A_1' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

След (сумма диагональных элементов) этой матрицы равен $\mathrm{tr} A_1' = 2\cos\alpha + 1$. Однако след матрицы инвариантен, поэтому $2\cos\alpha + 1 = 2{,}2$ и $\cos\alpha = 0{,}6$. Значит, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -0{,}28$. И тогда, аналогично, сумма диагональных элементов матрицы A_2 определяется однозначно и равна $\mathrm{tr} A_2' = 2\cos 2\alpha + 1 = 0{,}44$.

7. **(3 балла)** В пространстве непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций задан оператор $\varphi[f(x)](x) = f'(x) + f(x)$. Найдите $\varphi^{2021}\left[\frac{\sin x + x\cos x}{2^{1010}}\right]\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $-\frac{2023}{\sqrt{2}}$.

Решение. Данный оператор является линейным в линейном четырёхмерном пространстве с базисом $\mathbf{e} = \begin{pmatrix}\sin x & \cos x & x\sin x & x\cos x\end{pmatrix}$.

$\varphi[\sin x](x) = \cos x + \sin x = 1\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[\cos x](x) = -\sin x + \cos x = (-1)\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[x\sin x](x) = \sin x + x\cos x + x\sin x = 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos x + 1\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[x\cos x](x) = \cos x - x\sin x + x\cos x = 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + (-1)\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$.

Поэтому матрица преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 & 0\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{C}.$$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{2}}B$ – это блочно-диагональная матрица, на диагоналях которой стоят матрицы поворота на угол $\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$B^n = 2^{n/2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4} & 0 & 0\\ \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4}\\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4}\end{pmatrix}.$$

$A^n = (B+C)^n = B^n + nB^{n-1}C$, так как $C^2 = 0$. Итак,

$$A^n = 2^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4} & -n\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & n\sin\frac{\pi(n-1)}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4}\end{pmatrix}.$$

$$\varphi^{2021}\left[\frac{\sin x + x\cos x}{2^{1010}}\right](x) = \mathbf{e}\cdot 2^{-1010}A^{2021}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4} - 2021\sin\frac{2020\pi}{4}\\ \sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4} + 2021\cos\frac{2020\pi}{4}\\ -\sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4}\\ \sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4}\end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-1\\-2022\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Итого $\varphi^{2021}\left[\dfrac{\sin x + x\cos x}{2^{1010}}\right]\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = (-1)\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} + (-2022)\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + 1\cdot\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4} - 1\cdot\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{2023}{\sqrt{2}}$.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(2 балла)** На отрезке $[0;5]$ наудачу выбираются точки a, b и c. Какова вероятность того, что любое решение $(x;y)$ неравенства $x^2+y^2-6ax-8ay+25a^2 \leqslant b^2$ является решением неравенства $x^2+y^2 \geqslant c^2$?

Ответ: $P = 0{,}8$.

Решение. Первое неравенство можно записать в виде $(x-3a)^2+(y-4a)^2 \leqslant b^2$ – оно задаёт круг Ω с центром в точке $M(3a;4a)$ радиуса b. Второе неравенство задаёт внешность окружности ω с центром в точке $O(0;0)$ радиуса c. Круг Ω принадлежит множеству точек, заданному вторым неравенством, тогда и только тогда, когда он лежит вне окружности ω (или касается её), т.е. при $b+c \leqslant MO \Leftrightarrow b+c \leqslant 5a$.

Вероятностное пространство представляет собой множество точек куба $0 \leqslant a \leqslant 5$, $0 \leqslant b \leqslant 5$, $0 \leqslant c \leqslant 5$. Значит, искомая вероятность равна отношению меры μ_1 множества точек куба, удовлетворяющих условию $b+c \leqslant 5a$, к мере μ всего куба. Очевидно, $\mu = 5^3 = 125$. Находим μ_1:

$$\mu_1 = \iint\limits_{0\leqslant b\leqslant 5;0\leqslant c\leqslant 5}\left(5-\frac{b+c}{5}\right)db\,dc = \int\limits_0^5\left(5b-\frac{b^2}{10}-\frac{bc}{5}\right)\Bigg|_{b=0}^{5}dc = \int\limits_0^5\left(\frac{45}{2}-c\right)dc = 100.$$

Значит, искомая вероятность есть $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{4}{5}$.

9. **(2 балла)** По кругу равномерно лежат 32 десятирублёвые монеты орлом вверх. Сколькими способами можно выбрать 3 монеты так, чтобы после того как их перевернули, нашлись бы две монеты, лежащие решками вверх такие, что на меньшей дуге между ними находилось бы ровно 5 монет (лежащих либо орлом, либо решкой вверх)?

Ответ: 928.

Решение. Выберем сначала пару монет так, чтобы между ними находилось ровно 5 монет – это можно осуществить 32 способами. После этого третью монету можно выбрать любой из оставшихся 30. Таким образом, получаем $32 \cdot 30$ троек монет. Однако при приведённом выше подсчёте некоторые тройки оказались учтены дважды, а именно, те, в которых есть две пары монет, находящиеся на расстоянии 5 друг от друга. Легко понять, что количество таких троек равно 32. И правда, чтобы получить такую тройку, надо взять произвольную монету (это можно сделать 32 способами), а затем выбрать одну монету на расстоянии 5 монет с одной стороны, а вторую монету – на расстоянии 5 монет с другой стороны. Окончательно имеем $32 \cdot 30 - 32 = 32 \cdot 29 = 928$ троек монет.

10. **(3 балла)** Прилетев на Луну, Незнайка спустя некоторое время увлёкся игрой на рынке акций гигантских растений. Пусть состояние $(k; n)$ означает, что у Незнайки есть k фертингов (используемые на Луне деньги) и n акций. В самом начале у Незнайки состояние $(0; 0)$, т.е. у него нет ни денег, ни акций. Каждую минуту с ним происходит одно из следующих событий:

- если Незнайка в состоянии $(0; 0)$, то он с вероятностью 1 переходит в состояние $(0; 1)$;
- если Незнайка в состоянии $(k; 0)$, где $k > 0$, то с вероятностью 0,9 он переходит в состояние $(k - 1; 0)$, а с вероятностью 0,1 он переходит в состояние $(0; k + 1)$;
- если Незнайка в состоянии $(0; k)$, где $k > 0$, то с вероятностью 0,9 он переходит в состояние $(k; 0)$, а с вероятностью 0,1 – в состояние $(0; k + 1)$.

Вероятности перехода из одного состояния в другое зависят лишь от того, в каком состоянии Незнайка находится в данный момент времени. Существует ли стационарное распределение? Если да, то укажите вероятность состояния $(0; 0)$ в этом распределении. Количество денег и количество акций на руках у Незнайки ничем не ограничено.

Ответ: $\frac{71}{261}$.

Решение. Обозначим вероятности перехода:

– из состояния $(k; 0)$ в состояние $(k - 1; 0)$ через p,

– из состояния $(0; k)$ в состояние $(k; 0)$ через p,

– из состояния $(k; 0)$ в состояние $(0; k + 1)$ через q,

– из состояния $(0; k)$ в состояние $(0; k + 1)$ через q.

По условию $p = 0{,}9$, а $q = 0{,}1$. Пусть $\pi(a; b)$ – вероятности состояний, соответствующие стационарному распределению. Получаем систему

$$\begin{cases} \pi(0;0) = p\pi(1;0), \\ \pi(k;0) = p\pi(k+1;0) + p\pi(0;k), \\ \pi(0;k) = q\pi(0;k-1) + q\pi(k-1;0), \\ \pi(0;1) = \pi(0;0). \end{cases}$$

Обозначим $\pi(0; 0) = x$. Тогда $\pi(0; 1) = x$, $\pi(1; 0) = \frac{x}{p}$, $\pi(0; 2) = x \cdot \frac{1-p^2}{p}$, $\pi(2; 0) = \frac{x}{p} \cdot \frac{1-p^2}{p}$. По индукции несложно доказать, что

$$\pi(0;k) = \left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} x, \quad \pi(k;0) = \left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} \frac{x}{p}.$$

Складывая вероятности всех состояний, имеем

$$x + x\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} + \frac{x}{p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} = 1.$$

Так как $p = 0{,}9$, то знаменатели прогрессии в полученной формуле по модулю меньше 1, ряды сходятся и стационарное распределение существует. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, находим $x \cdot \frac{p^2+2p}{p^2+p-1} = 1$, $x = \frac{p^2+p-1}{p^2+2p} = \frac{71}{261}$.

Вариант 2

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** Найдите все значения параметра $t \in [0; 2\pi)$, при которых расстояние от графика функции $y = \ln x$ до кривой $\left(x + \frac{\sin t}{2}\right)^2 + \left(y - 1 + \frac{\cos t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ является минимальным.

   Ответ: $t = \frac{7\pi}{4}$.

   Решение. Семейство кривых состоит из окружностей с центрами $\left(-\frac{\sin t}{2}; 1 - \frac{\cos t}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{2}$. Их объединение – это круг единичного радиуса с центром в точке $A(0; 1)$. Следовательно, наименьшее возможное расстояние от графика до кривой семейства равно расстоянию между графиком и окружностью ω с уравнением $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

   Очевидно, что для любой точки $M(x; y)$, лежащей вне ω, расстояние от неё до ω равно $MA - R = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 1$. Так как нас интересуют точки M, лежащие на кривой $y = \ln x$, т.е. с координатами $M(x; \ln x)$, расстояние принимает вид $f(x) = \sqrt{x^2 + (\ln x - 1)^2} - 1$. Минимум этой функции достигается при минимальном подкоренном выражении. Рассматриваем $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$. Тогда $g'(x) = 2x + 2\ln x - 2$. Несложно видеть, что функция $g'(x)$ строго возрастает, а $g'(1) = 0$. Следовательно, $g_{\min} = g(1)$. Таким образом, ближайшая к ω точка M имеет координаты $M(1; 0)$, а ближайшая к точке M точка окружности – это её точка пересечения с отрезком AM (назовём её B).

   Нас интересует значения параметра t такое, при котором окружность данного в условии семейства проходит через точку B. Для этого центр этой окружности должен лежать на отрезке AM. Отсюда $t = \frac{7\pi}{4}$.

2. **(2 балла)** Матрица B размера 5×5 является матрицей положительно полуопределённой квадратичной формы $k(x)$. На диагонали матрицы B в некотором порядке стоят числа 2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^9. Какой наибольший недиагональный элемент может быть у матрицы B?

   Ответ: 256.

   Решение. Если квадратичная форма положительно полуопределена, то она положительно полуопределена и на любом подпространстве. Пусть в матрице B наибольшие недиагональные элементы b стоят на местах ij и ji, а элементы $b_{ii} = 2^a$, $b_{jj} = 2^c$ (без ограничения общности $i < j$). Тогда на подпространстве, натянутом на базисные векторы с номерами i и j, матрица квадратичной формы имеет вид $B' = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ b & 2^c \end{pmatrix}$. Если $\det B' = 2^{a+c} - b^2 < 0$, то тогда форма не является знакоопределённой. Значит, $2^{a+c} - b^2 \geqslant 0$, поэтому $b^2 \leqslant 2^{a+c} \leqslant 2^{9+7}$ и $|b| \leqslant 2^8$, а наибольшее возможное значение b не превосходит 2^8.

   Покажем, что равенство $b = 2^8$ возможно. Пусть в матрице B элементы $b_{ii} = 2^{2i-1}$ $(i = 1, \ldots, 5)$, $b_{45} = b_{54} = 2^8$, а остальные недиагональные элементы равны 0. Тогда $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5x_3^2 + 2^7x_4^2 + 2^9x_5^2 + 2 \cdot 2^8 x_4 x_5 = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5x_3^2 + 2^7\left(x_4 + 2x_5\right)^2 \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x}$.

3. **(3 балла)** Вычислите $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1 + 3x^2 - 4xy + 3y^2)^{100}}$.

   Ответ: $\frac{\pi}{99\sqrt{5}}$.

   Решение. Приводим квадратичную форму в знаменателе дроби к диагональному виду с помощью ортогонального линейного преобразования. Получаем $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 5u^2 + v^2$ (коэффициенты при квадратах равны собственным значениям матрицы квадратичной формы). При этом модуль якобиана замены равен 1. Значит, интеграл равен

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{du\,dv}{(1 + 5u^2 + v^2)^{100}}.$$

   В полученном интеграле переходим к полярным координатам $u = \frac{r}{\sqrt{5}}\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$. Получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \frac{r}{(1 + r^2)^{100}}\,dr = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t)^{100}} = \frac{\pi}{99\sqrt{5}}.$$

4. **(2 балла)** При каком минимальном n уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$ с непрерывно дифференцируемой функцией f на множестве $(0; +\infty)$ может иметь среди своих решений две функции $y_1 = 4 - 2x$, $y_2 = \frac{2}{x}$.

Ответ: $n = 3$.

Решение. Заметим, что $y_1(1) = 1 = y_2(1)$, $y_1'(1) = y_2'(1)$ и $y_1''(1) = y_2''(1)$, поэтому $n \geqslant 3$. Иначе задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(1) = 1$ и $y'' = f(x, y')$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$ имели бы не единственное решение, что противоречит теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Построим уравнение третьего порядка, у которого есть решения $y_1 = 2 - x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$, в виде приведённого линейного однородного с общим решением $y = C_1 + C_2 x + \frac{C_3}{x}$. Из последнего равенства следует, что решения $y(x)$, 1, x и $\frac{1}{x}$ искомого уравнения линейно зависимы на множестве $x \in (0; +\infty)$, что равносильно равенству нулю определителя Вронского от этих функций на $(0; +\infty)$. Так как $W\left[y(x), 1, x, \frac{1}{x}\right] = y''' \frac{2}{x^3} - y'' \frac{6}{x^4}$ и вронскиан равен нулю, получаем $y''' = -\frac{3y''}{x}$, а это и есть искомое уравнение.

5. **(3 балла)** Вычислите $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^3}{t}} \sin\left(x\sqrt[3]{3}\right)\, dx$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Решение. Интегрируем по частям, а затем делаем замену $y = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$ в получившемся интеграле:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^3}{t}} \sin\left(x\sqrt[3]{3}\right) dx = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} e^{-\frac{x^3}{t}} \cos\left(x\sqrt[3]{3}\right)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{3x^2}{t} e^{-\frac{x^3}{t}} \cos\left(x\sqrt[3]{3}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[3]{9} \int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y^3} \cos\left(y\sqrt[3]{3t}\right) dy.$$

По лемме Римана об осцилляции $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y^3} \cos\left(y\sqrt[3]{3t}\right) dy = 0$. Следовательно, предел равен $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

6. **(3 балла)** Пусть φ_1 и φ_2 – повороты трёхмерного векторного пространства вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат, на углы α и 2α соответственно (повороты осуществляются в одном направлении). Известно, что в некотором базисе φ_1 и φ_2 задаются матрицами A_1 и A_2 соответственно. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма диагональных элементов матрицы A_2, если сумма диагональных элементов матрицы A_1 равна 2,4?

Ответ: 0,96.

Решение. Выберем правый ортонормированный базис, связанный с поворотами следующим образом: вектор $\mathbf{e}_3$ направим вдоль оси вращения так, чтобы с его конца вращение в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ было видно против часовой стрелки. В таком базисе поворот на угол α имеет матрицу

$$A_1' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

След (сумма диагональных элементов) этой матрицы равен $\mathrm{tr} A_1' = 2\cos\alpha + 1$. Однако след матрицы инвариантен, поэтому $2\cos\alpha + 1 = 2{,}4$ и $\cos\alpha = 0{,}7$. Значит, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -0{,}02$. И тогда, аналогично, сумма диагональных элементов матрицы A_2 определяется однозначно и равна $\mathrm{tr} A_2' = 2\cos 2\alpha + 1 = 0{,}96$.

7. **(3 балла)** В пространстве непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций задан оператор $\varphi[f(x)](x) = f'(x) + f(x)$. Найдите $\varphi^{2021}\left[\dfrac{\sin x + x\sin x}{2^{1010}}\right]\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $-\frac{2023}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Решение. Данный оператор является линейным в линейном четырёхмерном пространстве с базисом $\mathbf{e} = \begin{pmatrix}\sin x & \cos x & x\sin x & x\cos x\end{pmatrix}$.

$\varphi[\sin x](x) = \cos x + \sin x = 1\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[\cos x](x) = -\sin x + \cos x = (-1)\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[x\sin x](x) = \sin x + x\cos x + x\sin x = 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos x + 1\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[x\cos x](x) = \cos x - x\sin x + x\cos x = 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + (-1)\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$.

Поэтому матрица преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 & 0\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{C}.$$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{2}}B$ – это блочно-диагональная матрица, на диагоналях которой стоят матрицы поворота на угол $\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$B^n = 2^{n/2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4} & 0 & 0\\ \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4}\\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4}\end{pmatrix}.$$

$A^n = (B+C)^n = B^n + nB^{n-1}C$, так как $C^2 = 0$. Итак,

$$A^n = 2^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4} & -n\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & n\sin\frac{\pi(n-1)}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4}\end{pmatrix}.$$

$$\varphi^{2021}\left[\frac{\sin x + x\sin x}{2^{1010}}\right](x) = \mathbf{e}\cdot 2^{-1010}A^{2021}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4} + 2021\cos\frac{2020\pi}{4}\\ \sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4} + 2021\sin\frac{2020\pi}{4}\\ \sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4}\\ \sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4}\end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-2022\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Итого $\varphi^{2021}\left[\dfrac{\sin x + x\sin x}{2^{1010}}\right]\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = (-2022)\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} + (-1)\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + (-1)\cdot\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4} + (-1)\cdot\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{2023}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(2 балла)** На отрезке $[0;25]$ наудачу выбираются точки a, b и c. Какова вероятность того, что любое решение $(x;y)$ неравенства $x^2+y^2-14ax-48ay+625a^2 \leqslant b^2$ является решением неравенства $x^2+y^2 \geqslant c^2$?

Ответ: $P = 0{,}96$.

Решение. Первое неравенство можно записать в виде $(x-7a)^2 + (y-24a)^2 \leqslant b^2$ – оно задаёт круг Ω с центром в точке $M(7a;24a)$ радиуса b. Второе неравенство задаёт внешность окружности ω с центром в точке $O(0;0)$ радиуса c. Круг Ω принадлежит множеству точек, заданному вторым неравенством, тогда и только тогда, когда он лежит вне окружности ω (или касается её), т.е. при $b+c \leqslant MO \Leftrightarrow b+c \leqslant 25a$.

Вероятностное пространство представляет собой множество точек куба $0 \leqslant a \leqslant 25$, $0 \leqslant b \leqslant 25$, $0 \leqslant c \leqslant 25$. Значит, искомая вероятность равна отношению меры μ_1 множества точек куба, удовлетворяющих условию $b + c \leqslant 25a$, к мере μ всего куба. Очевидно, $\mu = 25^3$. Находим μ_1:

$$\mu_1 = \iint\limits_{0\leqslant b\leqslant 25; 0\leqslant c\leqslant 25} \left(25 - \frac{b+c}{25}\right) db\, dc = \int\limits_0^{25} \left(25b - \frac{b^2}{50} - \frac{bc}{25}\right)\Bigg|_{b=0}^{25} dc = \int\limits_0^{25} \left(\frac{1225}{2} - c\right) dc = 15\,000.$$

Значит, искомая вероятность есть $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{24}{25}$.

9. **(2 балла)** По кругу равномерно лежат 36 десятирублёвых монет орлом вверх. Сколькими способами можно выбрать 3 монеты так, чтобы после того как их перевернули, нашлись бы две монеты, лежащие решками вверх такие, что на меньшей дуге между ними находилось бы ровно 6 монет (лежащих либо орлом, либо решкой вверх)?

   Ответ: 1 188.

   Решение. Выберем сначала пару монет так, чтобы между ними находилось ровно 6 монет – это можно осуществить 36 способами. После этого третью монету можно выбрать любой из оставшихся 34. Таким образом, получаем $36 \cdot 34$ троек монет. Однако при приведённом выше подсчёте некоторые тройки оказались учтены дважды, а именно, те, в которых есть две пары монет, находящиеся на расстоянии 6 друг от друга. Легко понять, что количество таких троек равно 36. И правда, чтобы получить такую тройку, надо взять произвольную монету (это можно сделать 36 способами), а затем выбрать одну монету на расстоянии 6 монет с одной стороны, а вторую монету – на расстоянии 6 монет с другой стороны. Окончательно имеем $36 \cdot 34 - 36 = 36 \cdot 33 = 1\,188$ троек монет.

10. **(3 балла)** Прилетев на Луну, Незнайка спустя некоторое время увлёкся игрой на рынке акций гигантских растений. Пусть состояние $(k; n)$ означает, что у Незнайки есть k фертингов (используемые на Луне деньги) и n акций. В самом начале у Незнайки состояние $(0; 0)$, т.е. у него нет ни денег, ни акций. Каждую минуту с ним происходит одно из следующих событий:

    - если Незнайка в состоянии $(0; 0)$, то он с вероятностью 1 переходит в состояние $(0; 1)$;
    - если Незнайка в состоянии $(k; 0)$, где $k > 0$, то с вероятностью 0,8 он переходит в состояние $(k-1; 0)$, а с вероятностью 0,2 он переходит в состояние $(0; k+1)$;
    - если Незнайка в состоянии $(0; k)$, где $k > 0$, то с вероятностью 0,8 он переходит в состояние $(k; 0)$, а с вероятностью 0,2 – в состояние $(0; k+1)$.

    Вероятности перехода из одного состояния в другое зависят лишь от того, в каком состоянии Незнайка находится в данный момент времени. Существует ли стационарное распределение? Если да, то укажите вероятность состояния $(0; 0)$ в этом распределении. Количество денег и количество акций на руках у Незнайки ничем не ограничено.

    Ответ: $\frac{11}{56}$.

    Решение. Обозначим вероятности перехода:

    – из состояния $(k; 0)$ в состояние $(k-1; 0)$ через p,

    – из состояния $(0; k)$ в состояние $(k; 0)$ через p,

    – из состояния $(k; 0)$ в состояние $(0; k+1)$ через q,

    – из состояния $(0; k)$ в состояние $(0; k+1)$ через q.

    По условию $p = 0{,}8$, а $q = 0{,}2$. Пусть $\pi(a; b)$ – вероятности состояний, соответствующие стационарному распределению. Получаем систему

$$\begin{cases} \pi(0;0) = p\pi(1;0), \\ \pi(k;0) = p\pi(k+1;0) + p\pi(0;k), \\ \pi(0;k) = q\pi(0;k-1) + q\pi(k-1;0), \\ \pi(0;1) = \pi(0;0). \end{cases}$$

Обозначим $\pi(0;0) = x$. Тогда $\pi(0;1) = x$, $\pi(1;0) = \frac{x}{p}$, $\pi(0;2) = x \cdot \frac{1-p^2}{p}$, $\pi(2;0) = \frac{x}{p} \cdot \frac{1-p^2}{p}$. По индукции несложно доказать, что

$$\pi(0;k) = \left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} x, \quad \pi(k;0) = \left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} \frac{x}{p}.$$

Складывая вероятности всех состояний, имеем

$$x + x\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} + \frac{x}{p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} = 1.$$

Так как $p = 0{,}8$, то знаменатели прогрессии в полученной формуле по модулю меньше 1, ряды сходятся и стационарное распределение существует. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, находим $x \cdot \frac{p^2+2p}{p^2+p-1} = 1$, $x = \frac{p^2+p-1}{p^2+2p} = \frac{11}{56}$.

Вариант 3

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** Найдите все значения параметра $t \in [0; 2\pi)$, при которых расстояние от графика функции $y = e^{-x}$ до кривой $\left(x + 1 + \frac{\sin t}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\cos t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ является минимальным.

   Ответ: $t = \frac{5\pi}{4}$.

   Решение. Семейство кривых состоит из окружностей с центрами $\left(-1 - \frac{\sin t}{2}; -\frac{\cos t}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{2}$. Их объединение – это круг единичного радиуса с центром в точке $A(-1; 0)$. Следовательно, наименьшее возможное расстояние от графика до кривой семейства равно расстоянию между графиком и окружностью ω с уравнением $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

   Очевидно, что для любой точки $M(x; y)$, лежащей вне ω, расстояние от неё до ω равно $MA - R = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - 1$. Так как нас интересуют точки M, лежащие на кривой $y = e^{-x}$, т.е. с координатами $M\left(x; e^{-x}\right)$, расстояние принимает вид $f(x) = \sqrt{(x + 1)^2 + e^{-2x}} - 1$. Минимум этой функции достигается при минимальном подкоренном выражении. Рассматриваем $g(x) = (x+1)^2 + e^{-2x}$. Тогда $g'(x) = 2(x+1) - 2e^{-2x}$. Несложно видеть, что функция $g'(x)$ строго возрастает, а $g'(0) = 0$. Следовательно, $g_{\min} = g(0)$. Таким образом, ближайшая к ω точка M имеет координаты $M(0; 1)$, а ближайшая к точке M точка окружности – это её точка пересечения с отрезком AM (назовём её B).

   Нас интересует значения параметра t такое, при котором окружность данного в условии семейства проходит через точку B. Для этого центр этой окружности должен лежать на отрезке AM. Отсюда $t = \frac{5\pi}{4}$.

2. **(2 балла)** Матрица B размера 6×6 является матрицей положительно полуопределённой квадратичной формы $k(x)$. На диагонали матрицы B в некотором порядке стоят числа 2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^9, 2^{11}. Какой наибольший недиагональный элемент может быть у матрицы B?

   Ответ: 1024.

   Решение. Если квадратичная форма положительно полуопределена, то она положительно полуопределена и на любом подпространстве. Пусть в матрице B наибольшие недиагональные элементы b стоят на местах ij и ji, а элементы $b_{ii} = 2^a$, $b_{jj} = 2^c$ (без ограничения общности $i < j$). Тогда на подпространстве, натянутом на базисные векторы с номерами i и j, матрица квадратичной формы имеет вид $B' = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ b & 2^c \end{pmatrix}$. Если $\det B' = 2^{a+c} - b^2 < 0$, то тогда форма не является знакоопределённой. Значит, $2^{a+c} - b^2 \geqslant 0$, поэтому $b^2 \leqslant 2^{a+c} \leqslant 2^{9+11}$ и $|b| \leqslant 2^{10}$, а наибольшее возможное значение b не превосходит 2^{10}.

   Покажем, что равенство $b = 2^{10}$ возможно. Пусть в матрице B элементы $b_{ii} = 2^{2i-1}$ $(i = 1, \ldots, 6)$, $b_{56} = b_{65} = 2^{10}$, а остальные недиагональные элементы равны 0. Тогда $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5x_3^2 + 2^7x_4^2 + 2^9x_5^2 + 2^{11}x_6^2 + 2 \cdot 2^{10}x_5x_6 = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5x_3^2 + 2^7x_4^2 + 2^9\left(x_5 + 2x_6\right)^2 \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x}$.

3. **(3 балла)** Вычислите $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{\left(1 + 4x^2 - 6xy + 4y^2\right)^{100}}$.

   Ответ: $\frac{\pi}{99\sqrt{7}}$.

   Решение. Приводим квадратичную форму в знаменателе дроби к диагональному виду с помощью ортогонального линейного преобразования. Получаем $4x^2 - 6xy + 4y^2 = 7u^2 + v^2$ (коэффициенты при квадратах равны собственным значениям матрицы квадратичной формы). При этом модуль якобиана замены равен 1. Значит, интеграл равен

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{du\,dv}{\left(1 + 7u^2 + v^2\right)^{100}}.$$

   В полученном интеграле переходим к полярным координатам $u = \frac{r}{\sqrt{7}}\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$. Получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{7}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \frac{r}{\left(1 + r^2\right)^{100}}\,dr = \frac{\pi}{\sqrt{7}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t)^{100}} = \frac{\pi}{99\sqrt{7}}.$$

4. **(2 балла)** При каком минимальном n уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$ с непрерывно дифференцируемой функцией f на множестве $(0;+\infty)$ может иметь среди своих решений две функции $y_1 = -6+3x$, $y_2 = -\frac{3}{x}$.

Ответ: $n = 3$.

Решение. Заметим, что $y_1(1) = 1 = y_2(1)$, $y_1'(1) = y_2'(1)$ и $y_1''(1) = y_2''(1)$, поэтому $n \geqslant 3$. Иначе задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(1) = 1$ и $y'' = f(x, y')$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$ имели бы не единственное решение, что противоречит теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Построим уравнение третьего порядка, у которого есть решения $y_1 = 2-x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$, в виде приведённого линейного однородного с общим решением $y = C_1 + C_2 x + \frac{C_3}{x}$. Из последнего равенства следует, что решения $y(x)$, 1, x и $\frac{1}{x}$ искомого уравнения линейно зависимы на множестве $x \in (0;+\infty)$, что равносильно равенству нулю определителя Вронского от этих функций на $(0;+\infty)$. Так как $W\left[y(x), 1, x, \frac{1}{x}\right] = y'''\frac{2}{x^3} - y''\frac{6}{x^4}$ и вронскиан равен нулю, получаем $y''' = -\frac{3y''}{x}$, а это и есть искомое уравнение.

5. **(3 балла)** Вычислите $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^4}{t}} \sin\left(x\sqrt{2}\right)\,dx$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Интегрируем по частям, а затем делаем замену $y = \frac{x}{\sqrt[4]{t}}$ в получившемся интеграле:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^4}{t}} \sin\left(x\sqrt{2}\right)dx = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^4}{t}} \cos\left(x\sqrt{2}\right)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{4x^3}{t} e^{-\frac{x^4}{t}} \cos\left(x\sqrt{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\int\limits_0^{+\infty} y^3 e^{-y^4} \cos\left(y\sqrt[4]{4t}\right)dy.$$

По лемме Римана об осцилляции $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} y^3 e^{-y^4} \cos\left(y\sqrt[4]{4t}\right)dy = 0$. Следовательно, предел равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. **(3 балла)** Пусть φ_1 и φ_2 – повороты трёхмерного векторного пространства вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат, на углы α и 2α соответственно (повороты осуществляются в одном направлении). Известно, что в некотором базисе φ_1 и φ_2 задаются матрицами A_1 и A_2 соответственно. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма диагональных элементов матрицы A_2, если сумма диагональных элементов матрицы A_1 равна 1,6?

Ответ: $-0{,}64$.

Решение. Выберем правый ортонормированный базис, связанный с поворотами следующим образом: вектор $\mathbf{e}_3$ направим вдоль оси вращения так, чтобы с его конца вращение в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ было видно против часовой стрелки. В таком базисе поворот на угол α имеет матрицу

$$A_1' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

След (сумма диагональных элементов) этой матрицы равен $\mathrm{tr}A_1' = 2\cos\alpha + 1$. Однако след матрицы инвариантен, поэтому $2\cos\alpha + 1 = 1{,}6$ и $\cos\alpha = 0{,}3$. Значит, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -0{,}82$. И тогда, аналогично, сумма диагональных элементов матрицы A_2 определяется однозначно и равна $\mathrm{tr}A_2' = 2\cos 2\alpha + 1 = -0{,}64$.

7. **(3 балла)** В пространстве непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций задан оператор $\varphi[f(x)](x) = f'(x) + f(x)$. Найдите $\varphi^{2021}\left[\dfrac{\cos x + x\sin x}{2^{1010}}\right]\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $-\frac{2021}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Решение. Данный оператор является линейным в линейном четырёхмерном пространстве с базисом $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & x\sin x & x\cos x \end{pmatrix}$.

$\varphi\left[\sin x\right](x) = \cos x + \sin x = 1\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi\left[\cos x\right](x) = -\sin x + \cos x = (-1)\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi\left[x\sin x\right](x) = \sin x + x\cos x + x\sin x = 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos x + 1\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$;

$\varphi\left[x\cos x\right](x) = \cos x - x\sin x + x\cos x = 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + (-1)\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$.

Поэтому матрица преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}.$$

Заметим, что $B/\sqrt{2}$ – это блочно-диагональная матрица, на диагоналях которой стоят матрицы поворота на угол $\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$B^n = 2^{n/2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4} & 0 & 0 \\ \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4} \end{pmatrix}.$$

$A^n = (B+C)^n = B^n + nB^{n-1}C$, так как $C^2 = 0$. Итак,

$$A^n = 2^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4} & -n\sin\frac{\pi(n-1)}{4} \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & n\sin\frac{\pi(n-1)}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\varphi^{2021}\left[\frac{\cos x + x\sin x}{2^{1010}}\right](x) = \mathbf{e}\cdot 2^{-1010}A^{2021}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4} + 2021\cos\frac{2020\pi}{4} \\ \sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4} + 2021\sin\frac{2020\pi}{4} \\ \sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4} \\ \sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4} \end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-2020\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Итого $\varphi^{2021}\left[\dfrac{\cos x + x\sin x}{2^{1010}}\right]\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = (-2020)\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} + (-1)\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + (-1)\cdot\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4} + (-1)\cdot\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{2021}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(2 балла)** На отрезке $[0;10]$ наудачу выбираются точки a, b и c. Какова вероятность того, что любое решение $(x;y)$ неравенства $x^2+y^2-8ax-6ay+25a^2 \leqslant b^2$ является решением неравенства $x^2+y^2 \geqslant c^2$?

Ответ: $P = 0{,}8$.

Решение. Первое неравенство можно записать в виде $(x-4a)^2+(y-3a)^2 \leqslant b^2$ – оно задаёт круг Ω с центром в точке $M(4a;3a)$ радиуса b. Второе неравенство задаёт внешность окружности ω с центром в точке $O(0;0)$ радиуса c. Круг Ω принадлежит множеству точек, заданному вторым неравенством, тогда и только тогда, когда он лежит вне окружности ω (или касается её), т.е. при $b+c \leqslant MO \Leftrightarrow b+c \leqslant 5a$.

Вероятностное пространство представляет собой множество точек куба $0 \leqslant a \leqslant 10$, $0 \leqslant b \leqslant 10$, $0 \leqslant c \leqslant 10$. Значит, искомая вероятность равна отношению меры μ_1 множества точек куба, удовлетворяющих условию $b + c \leqslant 5a$, к мере μ всего куба. Очевидно, $\mu = 10^3 = 1000$. Находим μ_1:

$$\mu_1 = \iint\limits_{0\leqslant b\leqslant 10;0\leqslant c\leqslant 10} \left(10 - \frac{b+c}{5}\right) db\, dc = \int\limits_0^{10} \left(10b - \frac{b^2}{10} - \frac{bc}{5}\right)\Bigg|_{b=0}^{10} dc = \int\limits_0^{10} (90 - 2c) dc = 800.$$

Значит, искомая вероятность есть $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{4}{5}$.

9. **(2 балла)** По кругу равномерно лежат 34 десятирублёвые монеты орлом вверх. Сколькими способами можно выбрать 3 монеты так, чтобы после того как их перевернули, нашлись бы две монеты, лежащие решками вверх такие, что на меньшей дуге между ними находилось бы ровно 7 монет (лежащих либо орлом, либо решкой вверх)?

   Ответ: 1 054.

   Решение. Выберем сначала пару монет так, чтобы между ними находилось ровно 7 монет – это можно осуществить 34 способами. После этого третью монету можно выбрать любой из оставшихся 32. Таким образом, получаем $34 \cdot 32$ троек монет. Однако при приведённом выше подсчёте некоторые тройки оказались учтены дважды, а именно, те, в которых есть две пары монет, находящиеся на расстоянии 7 друг от друга. Легко понять, что количество таких троек равно 34. И правда, чтобы получить такую тройку, надо взять произвольную монету (это можно сделать 34 способами), а затем выбрать одну монету на расстоянии 7 монет с одной стороны, а вторую монету – на расстоянии 7 монет с другой стороны. Окончательно имеем $34 \cdot 32 - 34 = 34 \cdot 31 = 1\,054$ троек монет.

10. **(3 балла)** Прилетев на Луну, Незнайка спустя некоторое время увлёкся игрой на рынке акций гигантских растений. Пусть состояние $(k; n)$ означает, что у Незнайки есть k фертингов (используемые на Луне деньги) и n акций. В самом начале у Незнайки состояние $(0; 0)$, т.е. у него нет ни денег, ни акций. Каждую минуту с ним происходит одно из следующих событий:

    - если Незнайка в состоянии $(0; 0)$, то он с вероятностью 1 переходит в состояние $(0; 1)$;
    - если Незнайка в состоянии $(k; 0)$, где $k > 0$, то с вероятностью $\frac{8}{9}$ он переходит в состояние $(k-1; 0)$, а с вероятностью $\frac{1}{9}$ он переходит в состояние $(0; k + 1)$;
    - если Незнайка в состоянии $(0; k)$, где $k > 0$, то с вероятностью $\frac{8}{9}$ он переходит в состояние $(k; 0)$, а с вероятностью $\frac{1}{9}$ – в состояние $(0; k + 1)$.

    Вероятности перехода из одного состояния в другое зависят лишь от того, в каком состоянии Незнайка находится в данный момент времени. Существует ли стационарное распределение? Если да, то укажите вероятность состояния $(0; 0)$ в этом распределении. Количество денег и количество акций на руках у Незнайки ничем не ограничено.

    Ответ: $\frac{55}{208}$.

    Решение. Обозначим вероятности перехода:

    – из состояния $(k; 0)$ в состояние $(k - 1; 0)$ через p,

    – из состояния $(0; k)$ в состояние $(k; 0)$ через p,

    – из состояния $(k; 0)$ в состояние $(0; k + 1)$ через q,

    – из состояния $(0; k)$ в состояние $(0; k + 1)$ через q.

    По условию $p = \frac{8}{9}$, а $q = \frac{1}{9}$. Пусть $\pi(a; b)$ – вероятности состояний, соответствующие стационарному распределению. Получаем систему

$$\begin{cases} \pi(0; 0) = p\pi(1; 0), \\ \pi(k; 0) = p\pi(k + 1; 0) + p\pi(0; k), \\ \pi(0; k) = q\pi(0; k - 1) + q\pi(k - 1; 0), \\ \pi(0; 1) = \pi(0; 0). \end{cases}$$

Обозначим $\pi(0;0)=x$. Тогда $\pi(0;1)=x$, $\pi(1;0)=\frac{x}{p}$, $\pi(0;2)=x\cdot\frac{1-p^2}{p}$, $\pi(2;0)=\frac{x}{p}\cdot\frac{1-p^2}{p}$. По индукции несложно доказать, что

$$\pi(0;k)=\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1}x,\quad \pi(k;0)=\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1}\frac{x}{p}.$$

Складывая вероятности всех состояний, имеем

$$x+x\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1}+\frac{x}{p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1}=1.$$

Так как $p=\frac{8}{9}$, то знаменатели прогрессии в полученной формуле по модулю меньше 1, ряды сходятся и стационарное распределение существует. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, находим $x\cdot\frac{p^2+2p}{p^2+p-1}=1$, $x=\frac{p^2+p-1}{p^2+2p}=\frac{55}{208}$.

Вариант 4

Теоретические задачи

1. **(2 балла)** Найдите все значения параметра $t \in [0; 2\pi)$, при которых расстояние от графика функции $y = -\ln x$ до кривой $\left(x - \frac{\cos t}{2}\right)^2 + \left(y + 1 - \frac{\sin t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ является минимальным.

   Ответ: $t = \frac{\pi}{4}$.

   Решение. Семейство кривых состоит из окружностей с центрами $\left(\frac{\cos t}{2}; -1 + \frac{\sin t}{2}\right)$ радиуса $\frac{1}{2}$. Их объединение – это круг единичного радиуса с центром в точке $A(0; -1)$. Следовательно, наименьшее возможное расстояние от графика до кривой семейства равно расстоянию между графиком и окружностью ω с уравнением $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

   Очевидно, что для любой точки $M(x; y)$, лежащей вне ω, расстояние от неё до ω равно $MA - R = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} - 1$. Так как нас интересуют точки M, лежащие на кривой $y = -\ln x$, т.е. с координатами $M\,(x; -\ln x)$, расстояние принимает вид $f(x) = \sqrt{x^2 + (-\ln x + 1)^2} - 1$. Минимум этой функции достигается при минимальном подкоренном выражении. Рассматриваем $g(x) = x^2 + (\ln x - 1)^2$. Тогда $g'(x) = 2x + 2\ln x - 2$. Несложно видеть, что функция $g'(x)$ строго возрастает, а $g'(1) = 0$. Следовательно, $g_{\min} = g(1)$. Таким образом, ближайшая к ω точка M имеет координаты $M(1; 0)$, а ближайшая к точке M точка окружности – это её точка пересечения с отрезком AM (назовём её B).

   Нас интересует значения параметра t такое, при котором окружность данного в условии семейства проходит через точку B. Для этого центр этой окружности должен лежать на отрезке AM. Отсюда $t = \frac{\pi}{4}$.

2. **(2 балла)** Матрица B размера 7×7 является матрицей положительно полуопределённой квадратичной формы $k(x)$. На диагонали матрицы B в некотором порядке стоят числа 2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^9, 2^{11}, 2^{13}. Какой наибольший недиагональный элемент может быть у матрицы B?

   Ответ: 4096.

   Решение. Если квадратичная форма положительно полуопределена, то она положительно полуопределена и на любом подпространстве. Пусть в матрице B наибольшие недиагональные элементы b стоят на местах ij и ji, а элементы $b_{ii} = 2^a$, $b_{jj} = 2^c$ (без ограничения общности $i < j$). Тогда на подпространстве, натянутом на базисные векторы с номерами i и j, матрица квадратичной формы имеет вид $B' = \begin{pmatrix} 2^a & b \\ b & 2^c \end{pmatrix}$. Если $\det B' = 2^{a+c} - b^2 < 0$, то тогда форма не является знакоопределённой. Значит, $2^{a+c} - b^2 \geqslant 0$, поэтому $b^2 \leqslant 2^{a+c} \leqslant 2^{13+11}$ и $|b| \leqslant 2^{12}$, а наибольшее возможное значение b не превосходит 2^{12}.

   Покажем, что равенство $b = 2^{12}$ возможно. Пусть в матрице B элементы $b_{ii} = 2^{2i-1}$ $(i = 1, \ldots, 7)$, $b_{67} = b_{76} = 2^{12}$, а остальные недиагональные элементы равны 0. Тогда $k(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5x_3^2 + 2^7x_4^2 + 2^9x_5^2 + 2^{11}x_6^2 + 2^{13}x_7^2 + 2 \cdot 2^{12}x_6x_7 = 2x_1^2 + 2^3x_2^2 + 2^5x_3^2 + 2^7x_4^2 + 2^9x_5^2 + 2^{11}\left(x_6 + 2x_7\right)^2 \geqslant 0$ для любого $\mathbf{x}$.

3. **(3 балла)** Вычислите $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{\left(1 + \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2\right)^{100}}$.

   Ответ: $\frac{\pi}{99\sqrt{2}}$.

   Решение. Приводим квадратичную форму в знаменателе дроби к диагональному виду с помощью ортогонального линейного преобразования. Получаем $2x^2 - 2xy + 2y^2 = 2u^2 + v^2$ (коэффициенты при квадратах равны собственным значениям матрицы квадратичной формы). При этом модуль якобиана замены равен 1. Значит, интеграл равен

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{du\,dv}{\left(1 + 2u^2 + v^2\right)^{100}}.$$

   В полученном интеграле переходим к полярным координатам $u = \frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$. Получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \frac{r}{\left(1 + r^2\right)^{100}}\,dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^{100}} = \frac{\pi}{99\sqrt{2}}.$$

4. **(2 балла)** При каком минимальном n уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$ с непрерывно дифференцируемой функцией f на множестве $(0;+\infty)$ может иметь среди своих решений две функции $y_1 = -8 + 4x$, $y_2 = -\frac{4}{x}$.

Ответ: $n = 3$.

Решение. Заметим, что $y_1(1) = 1 = y_2(1)$, $y_1'(1) = y_2'(1)$ и $y_1''(1) = y_2''(1)$, поэтому $n \geqslant 3$. Иначе задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(1) = 1$ и $y'' = f(x, y')$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$ имели бы не единственное решение, что противоречит теореме о существовании и единственности решения задачи Коши.

Построим уравнение третьего порядка, у которого есть решения $y_1 = 2 - x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$, в виде приведённого линейного однородного с общим решением $y = C_1 + C_2 x + \frac{C_3}{x}$. Из последнего равенства следует, что решения $y(x)$, 1, x и $\frac{1}{x}$ искомого уравнения линейно зависимы на множестве $x \in (0;+\infty)$, что равносильно равенству нулю определителя Вронского от этих функций на $(0;+\infty)$. Так как $W\left[y(x), 1, x, \frac{1}{x}\right] = y'''\frac{2}{x^3} - y''\frac{6}{x^4}$ и вронскиан равен нулю, получаем $y''' = -\frac{3y''}{x}$, а это и есть искомое уравнение.

5. **(3 балла)** Вычислите $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^5}{t}} \sin\left(x\sqrt[5]{5}\right) dx$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

Решение. Интегрируем по частям, а затем делаем замену $y = \frac{x}{\sqrt[5]{t}}$ в получившемся интеграле:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^5}{t}} \sin\left(x\sqrt[5]{5}\right) dx = -\frac{1}{\sqrt[5]{5}} e^{-\frac{x^5}{t}} \cos\left(x\sqrt[5]{5}\right)\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt[5]{5}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{5x^4}{t} e^{-\frac{x^5}{t}} \cos\left(x\sqrt[5]{5}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{5}} - 5^{\frac{4}{5}} \int\limits_0^{+\infty} y^4 e^{-y^5} \cos\left(y\sqrt[5]{5t}\right) dy.$$

По лемме Римана об осцилляции $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} y^4 e^{-y^5} \cos\left(y\sqrt[5]{5t}\right) dy = 0$. Следовательно, предел равен $\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.

6. **(3 балла)** Пусть φ_1 и φ_2 – повороты трёхмерного векторного пространства вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат, на углы α и 2α соответственно (повороты осуществляются в одном направлении). Известно, что в некотором базисе φ_1 и φ_2 задаются матрицами A_1 и A_2 соответственно. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма диагональных элементов матрицы A_2, если сумма диагональных элементов матрицы A_1 равна 1,8?

Ответ: $-0{,}36$.

Решение. Выберем правый ортонормированный базис, связанный с поворотами следующим образом: вектор $\mathbf{e}_3$ направим вдоль оси вращения так, чтобы с его конца вращение в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ было видно против часовой стрелки. В таком базисе поворот на угол α имеет матрицу

$$A_1' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

След (сумма диагональных элементов) этой матрицы равен $\mathrm{tr} A_1' = 2\cos\alpha + 1$. Однако след матрицы инвариантен, поэтому $2\cos\alpha + 1 = 1{,}8$ и $\cos\alpha = 0{,}4$. Значит, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -0{,}68$. И тогда, аналогично, сумма диагональных элементов матрицы A_2 определяется однозначно и равна $\mathrm{tr} A_2' = 2\cos 2\alpha + 1 = -0{,}36$.

7. **(3 балла)** В пространстве непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций задан оператор $\varphi[f(x)](x) = f'(x) + f(x)$. Найдите $\varphi^{2021}\left[\dfrac{\cos x + x\cos x}{2^{1010}}\right]\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $-\frac{2021}{\sqrt{2}}$.

Решение. Данный оператор является линейным в линейном четырёхмерном пространстве с базисом $\mathbf{e} = \begin{pmatrix}\sin x & \cos x & x\sin x & x\cos x\end{pmatrix}$.

$\varphi[\sin x](x) = \cos x + \sin x = 1\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[\cos x](x) = -\sin x + \cos x = (-1)\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + 0\cdot x\sin x + 0\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[x\sin x](x) = \sin x + x\cos x + x\sin x = 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos x + 1\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$;

$\varphi[x\cos x](x) = \cos x - x\sin x + x\cos x = 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x + (-1)\cdot x\sin x + 1\cdot x\cos x = \mathbf{e}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$.

Поэтому матрица преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 & 0\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{C}.$$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{2}}B$ – это блочно-диагональная матрица, на диагоналях которой стоят матрицы поворота на угол $\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$B^n = 2^{n/2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4} & 0 & 0\\ \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi n}{4} & -\sin\frac{\pi n}{4}\\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi n}{4} & \cos\frac{\pi n}{4}\end{pmatrix}.$$

$A^n = (B+C)^n = B^n + nB^{n-1}C$, так как $C^2 = 0$. Итак

$$A^n = 2^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4} & -n\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & n\sin\frac{\pi(n-1)}{4} & n\cos\frac{\pi(n-1)}{4}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4} & -\sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\sin\frac{\pi n}{4} & \sqrt{2}\cos\frac{\pi n}{4}\end{pmatrix}.$$

$$\varphi^{2021}\left[\frac{\cos x + x\cos x}{2^{1010}}\right](x) = \mathbf{e}\cdot 2^{-1010}A^{2021}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4} - 2021\sin\frac{2020\pi}{4}\\ \sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4} + 2021\cos\frac{2020\pi}{4}\\ -\sqrt{2}\sin\frac{2021\pi}{4}\\ \sqrt{2}\cos\frac{2021\pi}{4}\end{pmatrix} = \mathbf{e}\begin{pmatrix}1\\-2022\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Итого $\varphi^{2021}\left[\dfrac{\cos x + x\cos x}{2^{1010}}\right]\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1\cdot\sin\dfrac{\pi}{4} + (-2022)\cdot\cos\dfrac{\pi}{4} + 1\cdot\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{4} + (-1)\cdot\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{2021}{\sqrt{2}}$.

Задачи от индустриальных партнёров

8. **(2 балла)** На отрезке $[0;50]$ наудачу выбираются точки a, b и c. Какова вероятность того, что любое решение $(x;y)$ неравенства $x^2+y^2-48ax-14ay+625a^2 \leqslant b^2$ является решением неравенства $x^2+y^2 \geqslant c^2$?

Ответ: $P = 0{,}96$.

Решение. Первое неравенство можно записать в виде $(x-24a)^2 + (y-7a)^2 \leqslant b^2$ – оно задаёт круг Ω с центром в точке $M(24a;7a)$ радиуса b. Второе неравенство задаёт внешность окружности ω с центром в точке $O(0;0)$ радиуса c. Круг Ω принадлежит множеству точек, заданному вторым неравенством, тогда и только тогда, когда он лежит вне окружности ω (или касается её), т.е. при $b+c \leqslant MO \Leftrightarrow b+c \leqslant 25a$.

Вероятностное пространство представляет собой множество точек куба $0 \leqslant a \leqslant 50$, $0 \leqslant b \leqslant 50$, $0 \leqslant c \leqslant 50$. Значит, искомая вероятность равна отношению меры μ_1 множества точек куба, удовлетворяющих условию $b+c \leqslant 25a$, к мере μ всего куба. Очевидно, $\mu = 50^3$. Находим μ_1:

$$\mu_1 = \iint\limits_{0\leqslant b\leqslant 50;0\leqslant c\leqslant 50}\left(50 - \frac{b+c}{25}\right)db\,dc = \int\limits_0^{50}\left(50b - \frac{b^2}{50} - \frac{bc}{25}\right)\Bigg|_{b=0}^{50}dc = \int\limits_0^{50}(2450-2c)dc = 120\,000.$$

Значит, искомая вероятность есть $\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{24}{25}$.

9. **(2 балла)** По кругу равномерно лежат 38 десятирублёвых монеты орлом вверх. Сколькими способами можно выбрать 3 монеты так, чтобы после того как их перевернули, нашлись бы две монеты, лежащие решками вверх такие, что на меньшей дуге между ними находилось бы ровно 8 монет (лежащих либо орлом, либо решкой вверх)?

Ответ: 1 330.

Решение. Выберем сначала пару монет так, чтобы между ними находилось ровно 8 монет – это можно осуществить 38 способами. После этого третью монету можно выбрать любой из оставшихся 36. Таким образом, получаем $38 \cdot 36$ троек монет. Однако при приведённом выше подсчёте некоторые тройки оказались учтены дважды, а именно, те, в которых есть две пары монет, находящиеся на расстоянии 8 друг от друга. Легко понять, что количество таких троек равно 38. И правда, чтобы получить такую тройку, надо взять произвольную монету (это можно сделать 38 способами), а затем выбрать одну монету на расстоянии 8 монет с одной стороны, а вторую монету – на расстоянии 8 монет с другой стороны. Окончательно имеем $38 \cdot 36 - 38 = 38 \cdot 35 = 1\,330$ троек монет.

10. **(3 балла)** Прилетев на Луну, Незнайка спустя некоторое время увлёкся игрой на рынке акций гигантских растений. Пусть состояние $(k; n)$ означает, что у Незнайки есть k фертингов (используемые на Луне деньги) и n акций. В самом начале у Незнайки состояние $(0; 0)$, т.е. у него нет ни денег, ни акций. Каждую минуту с ним происходит одно из следующих событий:

- если Незнайка в состоянии $(0; 0)$, то он с вероятностью 1 переходит в состояние $(0; 1)$;
- если Незнайка в состоянии $(k; 0)$, где $k > 0$, то с вероятностью $\frac{9}{11}$ он переходит в состояние $(k-1; 0)$, а с вероятностью $\frac{2}{11}$ он переходит в состояние $(0; k+1)$;
- если Незнайка в состоянии $(0; k)$, где $k > 0$, то с вероятностью $\frac{9}{11}$ он переходит в состояние $(k; 0)$, а с вероятностью $\frac{2}{11}$ – в состояние $(0; k+1)$.

Вероятности перехода из одного состояния в другое зависят лишь от того, в каком состоянии Незнайка находится в данный момент времени. Существует ли стационарное распределение? Если да, то укажите вероятность состояния $(0; 0)$ в этом распределении. Количество денег и количество акций на руках у Незнайки ничем не ограничено.

Ответ: $\frac{59}{279}$.

Решение. Обозначим вероятности перехода:

– из состояния $(k; 0)$ в состояние $(k-1; 0)$ через p,

– из состояния $(0; k)$ в состояние $(k; 0)$ через p,

– из состояния $(k; 0)$ в состояние $(0; k+1)$ через q,

– из состояния $(0; k)$ в состояние $(0; k+1)$ через q.

По условию $p = \frac{9}{11}$, а $q = \frac{2}{11}$. Пусть $\pi(a; b)$ – вероятности состояний, соответствующие стационарному распределению. Получаем систему

$$\begin{cases} \pi(0;0) = p\pi(1;0), \\ \pi(k;0) = p\pi(k+1;0) + p\pi(0;k), \\ \pi(0;k) = q\pi(0;k-1) + q\pi(k-1;0), \\ \pi(0;1) = \pi(0;0). \end{cases}$$

Обозначим $\pi(0;0) = x$. Тогда $\pi(0;1) = x$, $\pi(1;0) = \frac{x}{p}$, $\pi(0;2) = x \cdot \frac{1-p^2}{p}$, $\pi(2;0) = \frac{x}{p} \cdot \frac{1-p^2}{p}$. По индукции несложно доказать, что

$$\pi(0;k) = \left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} x, \quad \pi(k;0) = \left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} \frac{x}{p}.$$

Складывая вероятности всех состояний, имеем

$$x + x\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} + \frac{x}{p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-p^2}{p}\right)^{k-1} = 1.$$

Так как $p = \frac{9}{11}$, то знаменатели прогрессии в полученной формуле по модулю меньше 1, ряды сходятся и стационарное распределение существует. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, находим $x \cdot \frac{p^2+2p}{p^2+p-1} = 1$, $x = \frac{p^2+p-1}{p^2+2p} = \frac{59}{279}$.