

ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982, 384 стр.

Книга содержит изложение ряда основных комбинаторных методов современной дискретной математики в систематизированном виде. Предпочтение отдается тем методам, которые носят перечислительный характер, наиболее отработаны теоретически и имеют наибольшее число приложений.

Книга предназначена для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Прикладная математика" и "Кибернетика", а также для научных работников, работающих в области прикладной математики и кибернетики.

Содержание

Предисловие	5
Глава I. Основные понятия и элементарные методы	7
§ 1. Множества	7
§ 2. Отображения, соответствия, функции	13
§ 3. Отношения, операции, алгебры	23
§ 4. Числа, многочлены, операторы	34
§ 5. Преобразования	46
§ 6. Булевы функции	52
Задачи	58
Глава II. Формулы обращения и метод включения — исключения	62
§ 1. Метод включения — исключения	62
§ 2. Неравенства Бонферрони	67
§ 3. Формулы обращения для частично упорядоченных множеств	70
Задачи	81
Глава III. Производящие функции	83
§ 1. Формальные степенные ряды	83
§ 2. Производящие функции	99
§ 3. Метод дифференциальных уравнений	113
§ 4. Метод линейных функционалов	120
§ 5. Асимптотические разложения	131
§ 6. Числа Каталана	137
Задачи	145
Глава IV. Графы и преобразования	150
§ 1. Графы	150
§ 2. Деревья	161
§ 3. Циклы подстановок	171
§ 4. Графы преобразований	182
§ 5. Блоки	193
Глава V. Общая комбинаторная схема и теория Пойа	200
§ 1. Группы и эквивалентность отображений	200
§ 2. Общая комбинаторная схема	207
§ 3. Коммутативный несимметричный n -базис	210

§ 4. Некоммутативный несимметричный n -базис	219
§ 5. Коммутативный симметричный n -базис	225
§ 6. Некоммутативный симметричный n -базис	234
§ 7. Теорема Пойа	240
Глава VI. Вероятностные методы в комбинаторном анализе	251
§ 1. Вероятностные распределения и случайные величины	251
§ 2. Моменты случайных величин	255
§ 3. Неотрицательные целочисленные матрицы	263
§ 4. Покрытия множеств	268
§ 5. Производящие функции и предельные теоремы	277
§ 6. Разбиения конечных множеств	292
§ 7. Конечные топологии	300
§ 8. Разделяющие системы множеств	306
Задачи	316
Глава VII. Перманенты и трансверсали	317
§ 1. Свойства перманентов	317
§ 2. Перманенты и трансверсали	330
§ 3. Неразложимые и вполне неразложимые матрицы	339
§ 4. Оценки перманента	352
Задачи	359
Глава VIII. Системы инцидентности и блок-схемы	362
§ 1. Системы инцидентности	362
§ 2. Блок-схемы	364
§ 3. Ортогональные латинские квадраты и конечные проективные плоскости	374
Задачи	380
Литература	381
Предметный указатель	383

Предметный указатель

Алгоритм Прюфера 163	Возрастание (убывание)
Аппелево множество 104	перестановки 114, 286
Асимптотический ряд степенной 133	Гиперграф 12
Базисная последовательность 99	Граф 12, 111
Блок 193	- двудольный 15
- покрытия 9, 269	- корневой 194
- связного графа 193	- однородный 150
Блок-схема 363	- плоский 150
- - полная (неполная) 364	- Пойа 170
- - сбалансированная 364	- полный 150
Булеан 21	- преобразования 182
Вес конфигураций 241	- с помеченными вершинами 153
- фигур 241	- связный 151
Весовая спецификация 241	- Ферре 229
	- частичный 151

- четный 156
 - Группа знакопеременная 52
 - подстановок 47
 - симметрическая 47
 - степенная 202
 - Групповые проверочные процедуры 140
 - Декомпозиция матрицы 349
 - Декремент 52, 181
 - Денумерант 231
 - Дерево 111, 161
 - корневое 111, 163
 - оствное 162
 - свободное 113
 - с помеченными вершинами 111
 - Дзета-функция 72
 - Дихотомия 25
 - Дуга 15, 152
 - Задача Андре 96
 - об ожерельях 246
 - о циклических последовательностях 75
 - поиска 315
 - Законы де Моргана 9
 - Инверсия 284
 - Инволюция 106, 178
 - Индекс покрытия 342
 - Индикатор 21
 - Инцидентные вершины 150
 - Класс графов го, го, рода, 1, 2, 153, 154
 - транзитивности 48
 - Комбинаторная схема 207
 - Коммутативный несимметричный п-базис 209
 - симметричный п-базис 209
 - Компонента преобразования 182
 - связности 151, 182
 - Конгруэнтные циклы 180
 - Конечная проективная плоскость 378
 - Контур 152, 183
 - Конфигурация 240
 - Коэффициент биномиальный 35
 - полиномиальный 35
- Коэффициенты Гаусса 120
 - Кронекерово произведение 372
 - Латинский квадрат 82, 338, 374
 - прямоугольник 82, 338
 - Латинское свойство матрицы 376
 - Лемма Бернсайда 201
 - Лес 162
 - Линия 342
 - матрицы 263
 - Матрица Адамара 370
 - вполне неразложимая 341
 - дважды стохастическая 346
 - импримитивная 340
 - инцидентности 23, 337, 362
 - неотрицательная 335
 - неразложимая 339
 - k-неразложимая 360
 - нормальная 368
 - положительная 335
 - почти разложимая 356
 - примитивная 340
 - разложимая 339
 - смежности графа 150
 - стохастическая 345
 - теплицева 326
 - частично разложимая 341
 - Место 240
 - Метод включения — исключения 62
 - Многочлен Аппеля 107
 - Бернулли 104
 - Лежандра 109
 - Моргана 136
 - Моноид 27
 - Мультиграф 153
 - Мультимножество 18
 - Некоммутативный несимметричный п-базис 209
 - симметричный п-базис 209
 - Неравенства Бонферрони 69
 - Неравенство Фишера 366
 - Нумератор 175, 211, 220, 226, 237
 - Область транзитивности 201
 - Ожерелье 246
 - Орбита 48

- группы 201
- подстановки 171
- Орграф 152
- Период вектора 75
- Перманент 317
- Петля 183
- Подграф 151
- Подстановка 47
 - противоречивая 81
 - четная (нечетная) 181
- Покрытие матрицы 342
 - минимальное 271
 - множества 9, 268
- Правило произведения 17
 - суммы 10
- Производящая функция 99, 100
 - Эйлера 123
- Путь 152, 182
- Разбиение множества 9, 128, 269
 - случайное 297
 - совершенное 233
 - сопряженное 230
 - упорядоченное 10
 - числа 21, 103
- Разделяющая система множеств 307
 - функций 312, 315
- Разложение Лапласа 321
 - перманента 321
- Размещение 226
- Расстояние Хэмминга 66
- Рекуррентное уравнение 89, 327
- Решетка матрицы 335
- Серия 215
- Сигнатура 25
- Система инцидентности 362
 - образующих 170, 307, 309
 - представителей 209
 - троек 367
 - Штейнера 367
- Слой дерева 161
- Спецификация первичная (вторичная) 18, 163
- Стабилизатор 201, 205
- Схема без возвращения 311
- Теорема Куртисса 280
 - Пойа 242
 - Фробениуса 340
 - Шпернера 11
- Точка сочленения 193
- Трансверсал 337
- Транспозиция 48, 169
- Урновая схема 207
- Уровневое множество 312
- Усиленная независимость 155
- Фигура 240
- Формальные тригонометрические функции 95
- Формальный степенной ряд 85
- Формула Бине — Коши 324
 - биномиальная 34
 - Гаусса 81
 - Добинского 45, 131, 238
- Формула обращения 38
 - полиномиальная 35
 - Райзера 328
 - Сильвестра 78
 - Стирлинга 133
- Функция Мёбиуса 72
 - Шура 318
 - Эйлера 80
- Характеристика 241
- Цепь 111, 151
 - простая 151
- Цикл 111, 151, 171
 - подстановки 48
 - простой 151
- Циклическая вершина 183
 - (v, k, λ) -конфигурация 369
- Циклический индекс 51
 - элемент 183
- Цикловый индикатор 172
 - класс 49
- Цикломатическое число 162
- Числа Белла 129, 238
 - Бернулли 97, 104
 - Галуа 121
 - Каталана 139
 - Лаха 147

- Моргана 42
- Стирлинга 43, 240
- Фибоначчи 22, 326
- Эйлера 98
- Эйлеров граф 157
- Энтропия 314
- А-подстановка 177
- В-преобразование 184
- AB-преобразование 189
- E-подстановка 95
- G-эквивалентность 202
- GH-эквивалентность 202
- H-эквивалентность 203
- перестановка, 95
- m-выборка 209, 225, 235
- m-ка 16
- m-мультимножество 18
- m-последовательность 16
- m-размещение 17
- - с повторением 17
- m-сочетание 11, 210
- - с повторением 18
- n-базис 209
- n-множество 8
- n-перестановка 18
- (n, m)-граф 153
- q-биномиальная формула 127
- q-ичное разложение 34
- t-схема 373
- (v, k, \lambda)-конфигурация 367
- (v, k, \lambda)-разностное множество 369
- \Lambda-граф 154
- \Lambda-подстановка 176
- матрица, 1, 266

ПРЕДИСЛОВИЕ

Значительное место в современной дискретной математике занимают комбинаторные методы, развитие которых за последние десятилетия нашло отражение не только в многообразных научных публикациях, но и в подготовке математиков и инженеров кибернетического направления. Развитие этих методов обусловлено появлением разнообразных задач дискретной математики, связанных с существованием, алгоритмами построения и подсчетом числа некоторых конфигураций из элементов данного множества. Такие конфигурации строятся в соответствии с определенными правилами и называются обычно комбинаторными. Круг задач, в которых необходимо определять число комбинаторных конфигураций данного класса или давать их классификацию, связанную с перечислением, обычно называют перечислительными задачами комбинаторного анализа.

Предлагаемое учебное пособие имеет целью систематически изложить в первую очередь перечислительные методы комбинаторного анализа, нашедшие незначительное отражение в учебной литературе по дискретной математике. В главе I изложены элементарные комбинаторные методы и приведены без доказательств ряд основных сведений из других разделов математики, применяемых в последующем изложении. В основном эти сведения даются студентам факультетов прикладной математики на первых курсах их обучения. В качестве основного инструмента в решении перечислительных задач используется метод производящих функций. Различным аспектам данного метода, связанным с использованием как аналитических функций, так и формальных степенных рядов, посвящена глава III. Главную роль производящие функции играют в решении перечислительных задач теории графов, излагаемых в главе IV.

Наряду с теорией групп метод производящих функций применяется в теории перечисления Пойа и в построении общей комбинаторной схемы, включающей в себя целый ряд конкретных комбинаторных схем. Эти вопросы излагаются в главе V. Весьма эффективным в решении комбинаторных задач, в особенности связанных с получением асимптотических формул, является применение вероятностных методов, которым посвящена глава VI. В этой области метод производящих функций, наряду с известными предельными теоремами, также предоставляет большие возможности в решении достаточно сложных задач.

Другие методы перечисления связаны с использованием пермашентов в главе VII и формул обращения на частично упорядоченных множествах, которым посвящена глава II. В главе VIII излагаются основы теории блок-схем.

Основная цель учебного пособия состоит в изложении методов решения комбинаторных задач. Решение конкретных задач служит прежде всего для иллюстрации комбинаторных методов. Для наибольшей наглядности задачи часто рассматриваются не в максимальной общности, причем нередко для решения одной и той же задачи в различных главах применяются различные методы. Сравнение сложности решения одной и той же задачи различными методами в процессе обучения поможет выработать умение правильно использовать арсенал комбинаторных методов в конкретной ситуации.

Изложение в книге построено по принципу нарастающей сложности, подавляющее большинство результатов приводится с подробными доказательствами. В конце глав и некоторых параграфов содержатся задачи и упражнения. Главы имеют определенную автономность, что при необходимости обеспечивает их независимое изучение. Такое построение книги позволяет на основе приведенного в ней материала строить разнообразные учебные курсы и организовывать занятия семинаров в зависимости от целей подготовки студентов.

По традиции, сложившейся при написании учебных пособий, изложение, за редкими исключениями, не сопровождается точными ссылками на источники приводимых результатов. С учетом целей книги она не содержит в ряде случаев исчерпывающего изложения современного состояния известных комбинаторных проблем. Для восполнения этих пробелов в информации читателю следует обратиться к списку литературы, приведенному в конце книги. Этот список содержит названия монографий и статей из журналов, в которых указанные вопросы изложены с большей степенью детализации и содержат сведения о первоисточниках.

В. Н. Сачков

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Множества

1. Понятие множества. Множество есть совокупность объединенных по некоторым признакам различных объектов, называемых элементами множества. Если x является элементом множества X или, что то же самое, x принадлежит множеству X , то применяют запись $x \in X$; в противном случае пишут $x \notin X$. Два множества X и Y равны, т. е. $X = Y$, если они состоят из одинаковых элементов. Если множества X и Y не равны, то применяется запись $X \neq Y$.

Для описания множества X , состоящего из элементов x_1, x_2, \dots, x_n , обычно применяется запись $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где порядок элементов в фигурных скобках несуществен и определяется соображениями наглядности. Так, в записи множества первых n натуральных чисел $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ удобно располагать числа в возрастающем порядке, хотя при этом надо иметь в виду, что, например, $N_3 = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

Другой способ задания множества состоит в описании свойств, однозначно определяющих принадлежность элементов данному множеству. Такому способу задания множества X отвечает запись следующего вида:

$$X = \{x: x \text{ обладает свойством } P(x)\}.$$

Выражение в фигурных скобках читается следующим образом: множество всех элементов x , которые обладают свойством $P(x)$. Например, множество четных чисел M может быть задано следующим образом:

$$M = \{i: i \text{ — целое число, делящееся на 2}\}.$$

Возможно также рекурсивное задание множества, при котором осуществляется последовательное описание элементов через предыдущие. Так, множество натуральных чисел $N = \{1, 2, \dots\}$ может быть описано следующим образом:

$$N = \{i: \text{если целое } i \in N, \text{ то } i + 1 \in N, i \geq 1\}.$$

Во всех указанных случаях описания множества с помощью некоторого свойства необходимо следить за тем, чтобы каждый элемент был четко определен, во избежание трудностей типа парадокса Б. Рассела. Наглядно такой парадокс можно проил-

люстрировать в виде затруднения парикмахера, определившего множество людей, которых он бреет, в виде совокупности всех лиц некоторого населенного пункта, не бреющихся самостоятельно. При таком определении остается неясным, принадлежит ли сам парикмахер этому множеству.

Недостаточно четким является, например, и определение множества X как множества слов русского языка, если нет ссылки на какой-нибудь толковый словарь.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным*; в противном случае множество является *бесконечным*. Число элементов конечного множества X обозначается через $|X|$. Множество X , содержащее n элементов, будем называть *n -множеством*. Ясно, что все элементы n -множества X можно нумеровать числами $1, 2, \dots, n$ и записать в виде списка $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

2. Операции над множествами. Если каждый элемент x множества Y , $x \in Y$, является элементом множества X , $x \in X$, то Y называется *подмножеством* множества X . Для обозначения этого свойства используется знак включения \subseteq и применяется запись $Y \subseteq X$. Включение обладает свойствами рефлексивности: $X \subseteq X$ — и транзитивности: если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$. Кроме того, из двух включений $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$ следует, что $X = Y$. Если $Y \subseteq X$, $Y \neq X$, то этому соответствует запись $Y \subset X$ и Y называется *собственным подмножеством* X . Очевидно, что если $|X| = n$ и $|Y| = m$, то из $Y \subseteq X$ следует $m \leq n$, а из $Y \subset X$ вытекает $m < n$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым множеством* и обозначается \emptyset . Будем считать, что пустое множество является подмножеством любого множества и $|\emptyset| = 0$.

Для каждой пары множеств X и Y можно определить операцию *объединения* двух множеств: $X \cup Y = \{x: x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

Пример: $X = \{0, 1, 3, 5\}$, $Y = \{0, 3, 4, 7, 9\}$, $X \cup Y = \{0, 1, 3, 5, 4, 7, 9\}$.

Очевидно, что объединение обладает свойствами коммутативности: $X \cup Y = Y \cup X$ — и ассоциативности: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$, что позволяет записывать без скобок объединение любого количества множеств: $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = \{x: x \in X_1 \text{ или } \dots \text{ или } x \in X_k\}$.

Операция *пересечения* множеств X и Y определяется следующим образом: $X \cap Y = \{x: x \in X \text{ и } x \in Y\}$.

Пример: $X = \{0, 2, 4, 8\}$, $Y = \{0, 4, 3\}$, $X \cap Y = \{0, 4\}$.

Если X и Y не имеют общих элементов, то $X \cap Y = \emptyset$. Из определения следует, что пересечение коммутативно: $X \cap Y = Y \cap X$ — и ассоциативно: $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$. Это позволяет записывать без скобок также и пересечение множеств: $X_1 \cap \dots \cap X_k = \{x: x \in X_1 \text{ и } \dots \text{ и } x \in X_k\}$.

Операции объединения и пересечения связаны законами дистрибутивности: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, $X \cup (Y \cap Z) =$

$= (X \cup Y) \cap (X \cap Z)$. Первый закон доказывается следующим образом. Если $x \in X \cap (Y \cup Z)$, то $x \in X$ и одновременно $x \in Y$, или $x \in Z$. Следовательно, либо $x \in X$ и одновременно $x \in Y$, либо $x \in X$ и одновременно $x \in Z$. Таким образом, $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Отсюда следует, что $X \cap (Y \cup Z) \subseteq (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Пусть теперь $x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$. Тогда или $x \in X$ и одновременно $x \in Y$, либо $x \in X$ и одновременно $x \in Z$. Отсюда вытекает, что $x \in X \cap (Y \cup Z)$. Значит, $(X \cap Y) \cup (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y \cup Z)$, и первый закон дистрибутивности доказан. Аналогично доказывается и второй закон.

Разность множеств X и Y определяется следующим образом: $X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ и } x \notin Y\}$.

Пример: $X = \{1, 2, 7\}$, $Y = \{2, 7, 8, 9\}$, $X \setminus Y = \{1\}$.

Из определения разности следует, что $(X \setminus Y) \cup (X \cap Y) = X$, так как для любого $x \in X$ справедливо, что либо $x \in X$, но $x \notin Y$, либо $x \in X$ и $x \in Y$. Используя понятие разности множеств, при $Y \subseteq X$ определим дополнение \bar{Y} для Y в множестве X : $\bar{Y} = X \setminus Y$.

Пример: $X = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $Y = \{1, 5, 7\}$, $\bar{Y} = \{3, 8\}$.

Используя операции объединения, пересечения и дополнения множеств, сформулируем законы де Моргана: если X , Y — подмножества некоторого множества U , то

$$(\overline{X \cap Y}) = \overline{X} \cup \overline{Y}, \quad (\overline{X \cup Y}) = \overline{X} \cap \overline{Y}. \quad (1.1)$$

Докажем первое из этих равенств. Если $x \in (\overline{X \cap Y})$, то $x \notin X \cap Y$. Следовательно, или $x \in \overline{X}$, или $x \in \overline{Y}$, т. е. $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$. Таким образом, $(\overline{X \cap Y}) \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$. Обратно, если $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$, то или $x \in \overline{X}$, или $x \in \overline{Y}$, и, значит, $x \notin X \cap Y$. Следовательно, $x \in (\overline{X \cap Y})$ и $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq (\overline{X \cap Y})$. Из двух включений следует первый закон де Моргана. Второй закон доказывается аналогичным образом.

Семейство множеств $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ называется покрытием множества X , если имеет место равенство $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$. Множества X_1, X_2, \dots, X_k называются блоками покрытия. Важным примером покрытия является разбиение. Семейство множеств $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k\}$ называется разбиением множества с блоками X_1, X_2, \dots, X_k , если $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, $|X_i| > 0$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$.

Пример. Множества $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 2, 7\}$ образуют покрытие множества $\{1, 2, 3, 5, 7\}$. Множества $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 3, 9\}$, $\{5, 6, 8\}$ представляют собой блоки разбиения множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Из определения разбиения следует, что порядок записи блоков, в силу коммутативности операции объединения множеств, может быть произвольным. Например, два разбиения $\{1, 2\} \cup \{5, 7\} = \{5, 7\} \cup \{1, 2\}$ множества $\{1, 2, 5, 7\}$ считаются совпадающими. В некоторых случаях удобно рассматривать разбиения, в которых порядок записи блоков фиксирован, т. е. любая пере-

становка блоков дает новое разбиение. Такие разбиения будем называть *упорядоченными* (поблочно).

3. Правило суммы. Для любого разбиения конечного множества $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, справедливо равенство

$$|X| = |X_1| + \dots + |X_k|, \quad (1.2)$$

которое называется *правилом суммы*. При $k = 2$ это правило очевидно. Предполагая, что оно выполнено для $k - 1$ блоков, и применяя математическую индукцию, получаем равенство $|X| = |X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}| + |X_k|$, из которого в силу предположения индукции следует выполнение правила суммы для k блоков.

Для покрытия конечного множества $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ справедливо неравенство

$$|X| \leq |X_1| + \dots + |X_k|, \quad (1.3)$$

называемое *обобщенным правилом суммы*. Для $k = 2$ это правило следует из правила суммы. Действительно, если $X = X_1 \cup X_2$, то $X_1 \cup X_2 = X_1 \cup W$, где $W = X_2 \setminus X_1$, $X_1 \cap W = \emptyset$. Поскольку $|W| \leq |X_2|$, то $|X| = |X_1 \cup X_2| = |X_1| + |W| \leq |X_1| + |X_2|$. Теперь обобщенное правило суммы следует из неравенства $|X| \leq |X_1 \cup \dots \cup X_{k-1}| + |X_k|$ путем применения математической индукции.

4. Число подмножеств. Фундаментальную роль правило суммы играет при выводе рекуррентных соотношений, выражающих мощности конечных множеств или классов, зависящих от некоторых параметров, через соответствующие мощности при меньших значениях параметров. В качестве примера, иллюстрирующего методику такого вывода, получим рекуррентное соотношение для числа m -подмножеств n -множества. Обозначим это число через $\binom{n}{m}$. Все m -подмножества n -множества X разделим на два класса: C_1 — класс m -подмножеств, каждое из которых содержит фиксированный элемент $x \in X$; C_2 — класс m -подмножеств, не содержащих этот элемент. Если C — класс всех m -подмножеств n -множества X , то $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Каждое m -подмножество из C_1 получается присоединением фиксированного элемента x к определенному $(m-1)$ -подмножеству $(n-1)$ -множества $X' = X \setminus \{x\}$, поэтому $|C_1| = \binom{n-1}{m-1}$. Класс C_2 совпадает с классом m -подмножеств $(n-1)$ -множества X' ; следовательно, $|C_2| = \binom{n-1}{m}$. Таким образом, при $1 \leq m \leq n$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}, \quad (1.4)$$

причем $\binom{1}{1} = \binom{n}{n} = 1$. Полагая $\binom{n}{0} = 1$ и $\binom{n}{m} = 0$ при $m > n$,

можно распространить это соотношение на все натуральные значения m и n .

Используя математическую индукцию по n и начальные значения для величин $\binom{n}{m}$, из рекуррентного соотношения можно получить формулу для числа m -подмножеств n -множества:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & 0 \leq m \leq n, \\ 0, & m > n, \end{cases} \quad (1.5)$$

где функция $n!$ определена для натуральных значений n равенством $n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$; $0! = 1$. Действительно, при $n=1$ формула верна, так как $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Предположим, что она верна для $n=r-1$ и для всех целых значений m . Тогда

$$\binom{r}{m} = \frac{(r-1)!}{m!(r-m-1)!} + \frac{(r-1)!}{(m-1)!(r-m)!} = \frac{r!}{m!(r-m)!}.$$

Из полученной формулы и комбинаторного смысла величины $\binom{n}{m}$ следует равенство

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n. \quad (1.6)$$

В комбинаторном анализе m -подмножество n -множества часто называют m -сочетанием из n различных предметов. Таким образом, число таких сочетаний равно $\binom{n}{m}$.

5. Теорема Шпернера. Рассмотрим n -множество X и семейство $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ его различных подмножеств $A_i \subseteq X$, $1 \leq i \leq m$. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть семейство $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ различных подмножеств n -множества X удовлетворяет условию

$$A_i \not\subseteq A_j, \quad i \neq j, \quad (1.7)$$

т. е. A_i не является собственным подмножеством A_j . Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^m 1/\binom{n}{|A_i|} \leq 1. \quad (1.8)$$

Для доказательства рассмотрим так называемую *полную цепочку* подмножеств $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_k \subset \dots \subset C_n = X$. Такая цепочка является *неуплотняющей* (или *насыщенной*), т. е. между ее элементами нельзя вставить дополнительного множества и, кроме того, $|C_k| = k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Число полных цепочек в n -множестве X равно $n!$.

Рассмотрим теперь полную цепочку, «проходящую через» подмножество A_i , $1 \leq i \leq m$, при $|A_i| = r$; это будет цепочка вида $C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_{r-1} \subset A_i \subset C_{r+1} \subset \dots \subset C_n$. Число подцепочек $C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_{r-1}$ равно $|A_i|! = r!$, а число подцепочек $C_{r+1} \subset \dots \subset C_n$ равно $(n - |A_i|)! = (n - r)!$; значит, общее число полных цепочек, проходящих через A_i , равно $|A_i|!(n - |A_i|)!$. При $i \neq j$ полные цепочки, проходящие соответственно через A_i и A_j , различны. Действительно, если A_i, A_j , $i \neq j$, принадлежат одной полной цепочке, то найдутся такие ее элементы C_k и C_l , что $A_i = C_k, A_j = C_l$. Полагая для определенности, что $C_k \subset C_l$, имеем $A_i = C_k \subset C_l = A_j$, что противоречит условию (1.7) теоремы.

Таким образом, общее число полных цепочек, проходящих через все подмножества семейства A , равно $\sum_{i=1}^m |A_i|!(n - |A_i|)!$. Но эта величина не превосходит общего числа полных цепочек, поэтому $\sum_{i=1}^m |A_i|!(n - |A_i|)! \leq n!$, откуда следует неравенство (1.8).

В качестве следствия из теоремы 1 получим теорему, принадлежащую Шпернеру.

Теорема 2. Пусть $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ — семейство не вложенных друг в друга подмножеств n -множества X . Тогда число m удовлетворяет неравенству

$$m \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}, \quad (1.9)$$

где $\lfloor x \rfloor$ есть целая часть от x .

Неравенство (1.9) следует из неравенства (1.8) в силу оценки (см. упражнение 5)

$$\binom{n}{|A_i|} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

В заключение отметим, что при заданном множестве X и семействе его различных подмножеств $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ пару (X, A) иногда называют гиперграфом. При этом X — множество вершин, A — множество ребер. Если $|A_i| = 2$, $1 \leq i \leq m$, то гиперграф называется просто графом.

6. Делимость чисел. Известно, что всякое целое положительное n имеет единственное представление вида $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, $1 < p_1 < \dots < p_r$, где p_1, p_2, \dots, p_r — простые числа, называемое каноническим разложением n . Если d есть делитель n , то пишут $d|n$ и d должно иметь представление

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}, \quad \beta_i \leq \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Пусть каноническое разложение числа n имеет вид $n = p_1 p_2 \dots p_r$, и m — максимальное число делителей числа n ,

которые не делят друг друга. Покажем, что

$$m \leq \binom{r}{[r/2]}. \quad (1.10)$$

Возьмем $X = \{1, 2, \dots, r\}$. Каждому делителю вида $p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_s}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq r$, поставим в соответствие подмножество $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ множества X . Получим семейство подмножеств (A_1, A_2, \dots, A_n) . Так как делители не делят друг друга, то $A_i \subsetneq A_j$, $i \neq j$, и, следовательно, (1.10) вытекает из теоремы Шпернера.

Упражнение 1. Доказать, что при $0 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} n \binom{n}{k} &= (k+1) \binom{n}{k+1} + k \binom{n}{k}; \quad n \binom{n}{k} = k \binom{n+1}{k+1} + \binom{n}{k+1}; \\ \binom{n}{2} \binom{n}{k} &= \binom{k}{2} \binom{n+2}{k+2} + 2k \binom{n+1}{k+2} + \binom{n}{k+2}; \\ \binom{n}{2} \binom{n}{k} &= \binom{k+2}{2} \binom{n}{k+2} + 2 \binom{k+1}{2} \binom{n}{k+1} + \binom{k}{2} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

2. Вывести рекуррентные соотношения:

$$\binom{n}{k} = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n-j}{k-1}; \quad \binom{n}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n-j-1}{k-j}.$$

3. Для простого p доказать, что величина $\binom{p}{n}$, $1 \leq n \leq p-1$, делится на p .

4. Доказать неравенства:

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \dots < \binom{2n}{n}; \quad \binom{2n-1}{0} < \binom{2n-1}{1} < \dots < \binom{2n-1}{n-1}, \quad n > 2.$$

5. Доказать, что: а) $\binom{n}{k}$ при фиксированном n и при $k \leq [n/2]$ возрастает, а при $k \geq [n/2]$ убывает; б) $\binom{n}{k}$ при фиксированном k возрастает с ростом n , $1 \leq k \leq n$.

§ 2. Отображения, соответствия, функции

1. Отображения. Будем говорить, что задано *отображение* φ множества X в множество Y , если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. При отображении φ соответствие между x и y записывается равенством $y = \varphi(x)$, а самому отображению соответствует запись $\varphi: X \rightarrow Y$. Множество X есть область определения отображения, а Y — область его значений. Два отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ и $\varphi': X' \rightarrow Y'$ равны, если $X = X'$, $Y = Y'$ и $\varphi(x) = \varphi'(x)$ для всех $x \in X$. Отображение $\varphi': X' \rightarrow Y$ называется *сужением* или

ограничением на X' отображения $\varphi: X \rightarrow Y$, если $X' \subseteq X$ и $\varphi'(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in X'$.

Множество $\varphi^{-1}(y) = \{x: y = \varphi(x), x \in X\}$ называется полным прообразом элемента y при отображении φ . Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ может быть представлено в виде двусторонней записи:

$$\varphi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \dots & \varphi(x_n) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(x_i) \in Y$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим, например, отображение $\varphi: X \rightarrow Y$, где $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & a & b & c & a \end{pmatrix}$. Выпишем полные прообразы: $\varphi^{-1}(a) = \{1, 2, 5\}$, $\varphi^{-1}(b) = \{3\}$, $\varphi^{-1}(c) = \{4\}$. Если $X' = \{1, 3, 4, 5\}$, то сужение на X' отображения φ имеет вид $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & a \end{pmatrix}$.

Совокупность образов элементов множества $X' \subseteq X$ при отображении $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *образом* X' и обозначается $\varphi(X')$. Например, для отображения $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ y_1 & y_2 & y_1 & y_3 \end{pmatrix}$ имеем $\varphi(\{1, 3, 4\}) = \{y_1, y_3\}$. Отображение $\varphi: X \rightarrow X$ множества X в себя называется *преобразованием* множества X . Двусторонняя запись некоторого преобразования φ множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ выглядит следующим образом:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим некоторые свойства отображений. Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *сюръективным*, если любой элемент $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз при этом отображении. Иными словами, для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $y = \varphi(x)$. В этом случае иногда говорят, что φ отображает X на Y . Если φ — сюръективное отображение, то $\varphi(X) = Y$ и для любого $y \in Y$ справедливо условие $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$. Для конечных множеств X и Y сюръективность отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ означает, что $|X| \geq |Y|$.

Например, отображение $\varphi: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$, такое, что $\varphi(1) = \varphi(2) = y_1$, $\varphi(3) = y_2$, $\varphi(4) = y_3$, сюръективно. Отображение φ' тех же множеств с условиями $\varphi'(1) = \varphi'(3) = y_1$, $\varphi'(2) = \varphi'(4) = y_2$ не является сюръективным.

Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *инъективным*, если для любого $y \in Y$ его полный прообраз $\varphi^{-1}(y)$ содержит не более одного элемента. Иными словами, отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ инъективно, если для любых $x \neq x'$, $x, x' \in X$, $\varphi(x) \neq \varphi(x')$. Если X и Y конечны, то инъективность отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ означает, что $|X| \leq |Y|$.

Например, для $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ инъективно, если $\varphi(1) = y_1$, $\varphi(2) = y_3$, $\varphi(3) = y_4$.

Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ называется биективным, если оно одновременно сюръективно и инъективно. Из сюръективности следует, что $|\varphi^{-1}(y)| \geq 1$ для любого $y \in Y$; из инъективности вытекает условие $|\varphi^{-1}(y)| \leq 1$ для каждого $y \in Y$. Следовательно, биективность отображения φ означает, что $|\varphi^{-1}(y)| = 1$ для любого $y \in Y$, т. е. условие $y = \varphi(x)$ для каждого $y \in Y$ однозначно определяет единственное значение $x \in X$. В этом случае говорят, что биективное отображение φ устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между множествами X и Y . Когда X и Y конечны, это означает равенство $|X| = |Y|$.

Например, отображение φ множества $X = \{1, 2, 3\}$ в множество $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ биективно, если $\varphi(1) = y_3$, $\varphi(2) = y_1$, $\varphi(3) = y_2$.

2. Двудольные графы. Рассмотрим два конечных множества точек на плоскости, помеченных элементами множества X и множества Y соответственно. Помеченные точки будем называть *вершинами*. Рассмотрим отображение $\varphi: X \rightarrow Y$. Из каждой точки $x \in X$ проведем стрелку в точку $y \in Y$, если $y = \varphi(x)$. Каждую стрелку будем ориентировать от x к y и называть *дугой*, выходящей из вершины x и входящей в вершину y . Совокупность вершин и инцидентных им дуг будем называть *двудольным графом* отображения $\varphi: X \rightarrow Y$.

Отметим некоторые свойства двудольных графов отображений. Из каждой вершины множества X выходит одна и только одна дуга. В частности, если отображение сюръективно, то в каждую вершину множества Y выходит по крайней мере одна дуга. Если отображение инъективно, то в любую вершину множества Y выходит не более одной дуги. При биективном отображении в каждую вершину множества Y выходит одна и только одна дуга.

С помощью двудольных графов нетрудно показать, что при $|X| = |Y|$ из сюръективности отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ следует инъективность, и обратно. Действительно, из сюръективности отображения вытекает, что в каждую вершину Y соответствующего двудольного графа выходит по крайней мере одна дуга. Но так как число дуг равно $|X| = |Y|$, то в любую вершину Y выходит единственная дуга, т. е. отображение инъективно. Аналогично доказывается обратное утверждение. Таким образом, при $|X| = |Y|$ из сюръективности отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ следует является биективным.

3. Векторы. Возьмем множества $X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ и рассмотрим двусторочную запись отображения $\varphi: X \rightarrow Y$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(m) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(i) \in Y$, $i = 1, 2, \dots, m$. Упорядоченная нижняя строка этой записи $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(m))$ называется *m-мерным вектором* над

множеством Y или просто m -вектором, соответствующим отображению φ . Величина $\varphi(i)$ называется *значением* i -й координаты или просто i -й координатой m -вектора. В отличие от элементов множества, значения координат могут совпадать и порядок расположения различных значений координат существен. Иногда m -векторы называют *m -последовательностями*, или *m -ками* (элементами).

Из определения следует, что между отображениями $\varphi: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, и m -мерными векторами над множеством Y имеется взаимно однозначное соответствие.

4. Декартово произведение. Понятие вектора позволяет ввести еще одну операцию над множествами. *Декартовым произведением* множеств X_1, X_2, \dots, X_m будем называть множество всех m -векторов (x_1, x_2, \dots, x_m) , где $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, m$. Иными словами, декартово произведение X_1, X_2, \dots, X_m представляет собой множество вида

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in X_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Для декартова произведения $X \times \dots \times X$ с m сомножителями, называемого *m -й декартовой степенью* множества X , введем обозначение $X^{(m)}$. Например, если $X_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $X_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, то декартово произведение $X_1 \times X_2 = \{(a, 1), (a, 2), \dots, (h, 8)\}$ представляет собой систему координат шахматной доски, которые используются для записи позиций.

5. Соответствия и функции. Любое подмножество $R \subseteq X \times Y$ называется *соответствием* между множествами X и Y . Если $(x, y) \in R$, то говорят, что y соответствует x при соответствии R , и записывают: xRy ; при этом y называется *образом* x , а x — *прообразом* y при этом соответствии. Если для каждого x , такого, что $(x, y) \in R$, имеется единственный образ, то соответствие называется *функциональным* и определяет некоторую функцию f на множестве X со значениями в множестве Y . Задание функции означает, что определено отображение $f: X' \rightarrow Y$, где $X' \subseteq X$, а для элементов множества $X \setminus X'$ отображение f , а значит, и соответствующая функция не определены. Функцию, соответствующую этому отображению, также обозначают $f: X \rightarrow Y$. Две функции равны, если равны соответствующие им отображения. Ясно, что любая функция $f: X \rightarrow Y$ является сужением некоторого отображения на некоторое подмножество $X' \subseteq X$. Отсюда следует, что на функцию переносится все рассмотренные свойства отображений. При этом считаем, что функция обладает некоторым свойством, если этим свойством обладает соответствующее отображение.

Соответствие R определяет биективное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$, если каждый элемент x имеет единственный образ, а каждый элемент y — единственный прообраз для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Такое соответствие, как уже было упомянуто, называется вза-

имно однозначным. Установление взаимно однозначного соответствия между множествами играет важную роль в комбинаторном анализе. Так, определение числа элементов конечного множества Y , т. е. установление равенства $|Y| = n$ при некотором n , фактически сводится к отысканию некоторого взаимно однозначного соответствия между множествами $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и Y .

6. Правило произведения. Фундаментальную роль в решении перечислительных задач комбинаторного анализа играет *правило произведения*, которое утверждает, что для любых конечных множеств X_1, X_2, \dots, X_n имеет место равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \dots |X_n|. \quad (2.1)$$

Доказательство этого равенства проводится индукцией по m . При $m = 1, 2$ равенство очевидно. Используя равенство, очевидное соотношение $X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ и предположение индукции, получаем

$$\begin{aligned} |X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n| &= |X_1 \times \dots \times X_{n-1}| \cdot |X_n| = \\ &= |X_1| \dots |X_{n-1}| \cdot |X_n|. \end{aligned}$$

Из правила произведения в качестве следствия вытекает, что число всех m -векторов с координатами из n -множества X , называемых иногда *m-размещениями с повторениями* из n -множества, равно

$$U(n, m) = n^m. \quad (2.2)$$

Действительно, $U(n, m) = |X^{(m)}| = |X|^m = n^m$.

Так как каждому отображению $\varphi: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, ставится во взаимно однозначное соответствие m -вектор с координатами из множества Y , то число отображений m -множества в n -множество равно $U(n, m) = n^m$.

Число m -векторов с различными координатами из n -множества, называемых иногда *m-размещениями* из n элементов, равно $(n)_m$, где

$$(n)_m = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-m+1), & m \leq n, \\ 0 & , m > n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для доказательства применим математическую индукцию. При $m = 1$ имеем очевидное равенство $(n)_1 = n$. Каждый m -вектор рассматриваемого вида может быть получен из $(m-1)$ -вектора путем добавления m -й координаты, являющейся элементом исходного n -множества и не совпадающей с $m-1$ предыдущими координатами. Стало быть, при $m \leq n$ имеем $(n)_m = (n)_{m-1}(n-m+1) = n(n-1)\dots(n-m+2)(n-m+1)$. Ясно, что $(n)_m = 0$ при $m > n$.

При $m = n$ размещение из n различных элементов называется n -перестановкой. Число n -перестановок равно

$$(n)_n = n!.$$

Заметим, что фиксированному m -подмножеству n -множества X соответствуют $m!$ различных m -векторов с различными координатами из этого m -подмножества. Эти m -векторы отличаются только перестановкой своих координат. Отсюда следует формула

$$\binom{n}{m} = \frac{(n)_m}{m!}, \quad (2.4)$$

которая вытекает также и из формул, дающих выражения для $\binom{n}{m}$ и $(n)_m$.

7. Мультимножества. Рассмотрим n -множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и n -вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ с целыми координатами, такими, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Совокупность из m элементов множества X , в которой элемент x_i встречается α_i раз, называется m -мультимножеством *первичной спецификации* $[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}]$, порожденным множеством X , и записывается $\hat{X} = \langle x_1, \dots, x_1; x_2, \dots, x_2; \dots; x_n, \dots, x_n \rangle$, где x_i повторяется α_i раз, а при $\alpha_i = 0$ не встречается вовсе. Иногда полезно использовать и другую запись: $\hat{X} = \langle \alpha_1(x_1), \alpha_2(x_2), \dots, \alpha_n(x_n) \rangle$. Числа α_i , $i = 1, \dots, n$, называются *показателями* первичной спецификации m -мультимножества \hat{X} . Если среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ имеется β_0 нулей, β_1 единиц, ..., β_m значений m , то символ $[[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \dots m^{\beta_m}]]$, $1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$, называется *вторичной спецификацией* m -мультимножества \hat{X} , а числа $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ — ее *показателями*. Часто m -мультимножество, соответствующее n -множеству, называют m -сочетанием с *повторением* из n элементов. Максимальное подмножество X' множества X , элементы которого входят в соответствующее мультимножество \hat{X} , называется *носителем* этого мультимножества. Очевидно, что носитель представляет собой совокупность таких элементов x_i множества X , для которых соответствующие показатели первичной спецификации α_i положительны. Например, пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Тогда мультимножество с первичной спецификацией $[x_1^2 x_2^0 x_3^1 x_4^3]$ имеет вид $\hat{X} = \langle x_1, x_1; x_3, x_4, x_4, x_4 \rangle$. Вторичная спецификация этого мультимножества выглядит следующим образом: $[[0^1 1^2 2^3]]$. Носителем \hat{X} является множество $X' = \{x_1, x_3, x_4\}$.

Рассмотрим над множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ m -вектор (y_1, y_2, \dots, y_m) , в котором элемент x_i используется α_i раз в качестве значения некоторых координат, $i = 1, 2, \dots, n$, причем $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$. Вектору (y_1, y_2, \dots, y_m) можно поставить в со-

ответствие единственное m -мультимножество \hat{X} первичной спецификации $[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$.

Рассмотрим обратную задачу определения количества m -векторов над множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, которые можно построить по m -мультимножству первичной спецификации $[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$. Один m -вектор можно построить, рассматривая в качестве его координат элементы m -мультимножства в принятом порядке записи. Остальные m -векторы получаются путем всевозможных перестановок элементов m -мультимножества. Обозначим через $P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ число таких перестановок, т. е. искомое число m -векторов. Ясно, что перестановка α_i элементов x_1, x_2, \dots, x_i не дает новых вариантов m -векторов. Если все эти элементы сделать различными, например путем введения специальных пометок: $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(\alpha_i)}$, то число таких перестановок равно $\alpha_i!$. Таким образом, если операция введения пометок будет проделана для всех $i = 1, 2, \dots, n$, то общее число различных перестановок элементов m -мультимножества становится равным $\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Так как в результате введения пометок все элементы m -мультимножества будут различны, то общее число перестановок равно $m!$. Отсюда следует формула для числа m -векторов, отвечающих m -мультимножеству заданной первичной спецификации $[x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}]$:

$$P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m. \quad (2.5)$$

Суммируя по всевозможным значениям показателей первичной спецификации правую часть этого равенства, получим общее число m -векторов над n -множеством, т. е.

$$\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_i \geq 0}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} = n^m. \quad (2.6)$$

Определим теперь $V(n, m)$ — общее число m -мультимножеств, порожденных заданным n -множеством. Так как каждое m -мультимножество, порожденное множеством $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, однозначно определяется своей первичной спецификацией $[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, то $V(n, m)$ равно числу решений уравнения $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$ в целых неотрицательных числах, представляющих собой n -векторы $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Положим для простоты $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и заметим, что каждое k -подмножество множества X имеет вид $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Любое m -мультимножество \hat{X} , порожденное X , можно записать в виде $\langle j_1, j_2, \dots, j_m \rangle$, где $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n$. Привольному m -мультимножеству рассматриваемого вида $\langle j_1, j_2, \dots, j_m \rangle$

можно поставить в соответствие совокупность элементов $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, где $i_1 = j_1, i_2 = j_2 + 1, \dots, i_m = j_m + m - 1$. Очевидно, что $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n + m - 1$, и, следовательно, $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ представляет собой m -подмножество множества $X' = \{1, 2, \dots, n + m - 1\}$. Так как число таких m -подмножеств равно $\binom{n+m-1}{m}$, то отсюда вытекает неравенство $V(n, m) \leq \binom{n+m-1}{m}$. Возьмем теперь m -подмножество множества X' вида $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n + m - 1$, и рассмотрим совокупность элементов $\langle j_1, j_2, \dots, j_m \rangle$, где $j_1 = i_1, j_2 = i_2 - 1, \dots, j_m = i_m - m + 1$. Эта совокупность удовлетворяет условию $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n$ и образует m -мульти множество, соответствующее множеству $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, $V(n, m) \geq \binom{n+m-1}{m}$. Из двух полученных неравенств вытекает формула

$$V(n, m) = \binom{n+m-1}{m}. \quad (2.7)$$

8. Сюръективные мульти множества. Мульти множество $\hat{X} = \langle \alpha_1(x_1), \alpha_2(x_2), \dots, \alpha_n(x_n) \rangle$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$, с носителем $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и первичной спецификацией $[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}]$ называется *сюръективным*. Таким образом, для сюръективного мульти множества все показатели первичной спецификации $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — положительные числа. Например, множеству $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ соответствует сюръективное мульти множество вида $\hat{X}_1 = \langle x_1; x_2, x_3; x_3, x_3; x_4 \rangle$, для которого показатели первичной спецификации имеют вид $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \alpha_4 = 2$. Мульти множество $\hat{X}_2 = \langle x_1; x_2, x_2; x_4 \rangle$ не является сюръективным, так как $\alpha_1 = \alpha_4 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 0$.

Определим $W(n, m)$ — число сюръективных m -мульти множеств, носителем которых является заданное n -множество. Ясно, что $W(n, m)$ равно числу решений $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ уравнения $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$ в целых положительных числах. Возьмем такое уравнение и сделаем замену переменных $\alpha'_i = \alpha_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Получим уравнение $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots + \alpha'_n = m - n$, число решений которого равно в целых неотрицательных числах $\binom{(m-n)+n-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1}$. Так как каждому решению уравнения $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_i > 0$, ставится в соответствие решение уравнения $\alpha'_1 + \dots + \alpha'_n = m - n$, $\alpha'_i \geq 0$, то $W(n, m) \leq \binom{m-1}{n-1}$. Беря уравнение $\alpha'_1 + \dots + \alpha'_n = m - n$, $\alpha'_i \geq 0$, и делая замену $\alpha_i = \alpha'_i + 1$, приходим к уравнению $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_i > 0$. Следовательно, $W(n, m) \geq \binom{m-1}{n-1}$. Из двух полученных неравенств

следует формула

$$W(n, m) = \binom{m-1}{n-1}. \quad (2.8)$$

Выше было отмечено, что каждому отображению $\varphi: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, можно поставить во взаимно однозначное соответствие m -вектор $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(m))$. Этому вектору соответствует некоторое m -мульти множество над Y , которое сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективно отображение φ .

Рассмотрим теперь совокупность сюръективных m -мульти множеств, носителями которых являются k -подмножества заданного n -множества. Число таких m -мульти множеств равно $\binom{n}{k} \binom{m-1}{k-1}$. Суммируя по k , получаем общее число m -мульти множеств, соответствующих заданному n -множеству. Следовательно, имеет место тождество

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \binom{m-1}{1} + \dots + \binom{n}{k} \binom{m-1}{k-1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{m-1}{n-1} = \\ = \binom{n+m-1}{m}. \end{aligned}$$

Разбиение натурального числа n есть представление его в виде неупорядоченной суммы натуральных чисел: $n = n_1 + \dots + n_r$. Каждое такое разбиение (n_1, \dots, n_r) можно рассматривать как мульти множество с носителем $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ и первичной спецификацией $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$, где α_i — число слагаемых, равных i в разбиении (n_1, \dots, n_r) . Разбиение можно представлять и как сюръективное мульти множество с носителем, состоящим из тех чисел, которые фигурируют в этом разбиении, и первичной спецификацией, указывающей число вхождений каждого элемента носителя в это разбиение.

9. Булеан. Множество всех подмножеств множества X , включая пустое множество \emptyset и само множество X , называется *булеаном* и обозначается 2^X . Например, булеан множества $X = \{0, 1\}$ состоит из множеств $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$.

Описание элементов булеана конечного множества X удобно проводить с использованием понятия индикатора подмножеств. Индикатором подмножества X' множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется такой n -вектор $\delta(X') = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, что

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & x_i \in X', \\ 0, & x_i \notin X'. \end{cases}$$

Ясно, что между элементами булеана n -множества X и n -мерными индикаторами подмножеств имеется взаимно однозначное со-

ответствие, при котором $\delta(\emptyset) = (0, \dots, 0)$, $\delta(X) = (1, 1, \dots, 1)$. Общее число таких индикаторов равно $2^{|X|}$. Отсюда следует формула

$$|2^X| = 2^{|X}|. \quad (2.9)$$

Упражнение 1. Методом разбиения на классы вывести рекуррентное соотношение для $V(n, m)$ — числа m -мульти множеств, порожденных n -множеством:

$$V(n, m) = V(n, m - 1) + V(n - 1, m).$$

С учетом начальных значений $V(n, 1) = n$, $V(1, m) = 1$ индукцией получить из этого соотношения формулу

$$V(n, m) = \binom{n+m-1}{m}.$$

2. Вывести соотношения:

$$(n)_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (m)_{k-j} (n-m)_j; \quad 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k};$$

$$2^{n-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{2r} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{2r+1};$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}; \quad \binom{n-r}{k-r} / \binom{n}{k} = \frac{(k)_r}{(n)_r};$$

$$\frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} = \binom{m}{\alpha_1} \binom{m-\alpha_1}{\alpha_2} \dots \binom{m-\alpha_1-\dots-\alpha_{n-1}}{\alpha_n};$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{n-k}{n-m} \binom{n}{k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

3. Используя по n доказать формулы:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

4. Показать, что если $f(m)$ — число m -векторов над множеством $X = \{-1, 1\}$, у которых две соседние координаты не являются нулевыми, то

$$f(m) = f(m-1) + f(m-2), \quad m > 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 3.$$

Числа $f(m)$ называются числами Фибоначчи.

Вывести формулу

$$f(m) = \sum_{k=0}^{\lceil (m+1)/2 \rceil} \binom{m-k+1}{k},$$

где $\lceil x \rceil$ — целая часть числа x .

§ 3. Отношения, операции, алгебры

1. Отношения. Рассмотрим $X^{(k)} = X \times \dots \times X = k$ -ю декартову степень множества X . Подмножество $R \subseteq X^{(k)}$ будем называть *k-местным отношением*, заданным на множестве X . Будем считать, что упорядоченные элементы $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ находятся в отношении R , если $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in R$. Одноместные отношения, называемые иногда *унарными*, соответствуют подмножествам множества X . В дальнейшем особое внимание будет уделено двуместным, или *бинарным*, отношениям, которые для краткости называются просто *отношениями*. Если на множестве X задано отношение $R \subseteq X^{(2)}$, то запись xRx' означает, что x и x' находятся в отношении R , т. е. $(x, x') \in R$.

Простейшим примером бинарного отношения, заданного на множестве натуральных чисел \mathbb{N} , является отношение \leqslant . Ясно, например, что упорядоченные пары чисел $(3, 7)$ и $(5, 5)$ принадлежат этому отношению, а пара $(4, 1)$ не принадлежит. Другим примером отношения, заданного на булевом 2^X множестве X , является включение \subseteq . Для множества $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ пары подмножеств $(\{1, 3\}, \{1, 3, 9\})$ и $(\{5, 7, 9\}, \{5, 7, 9\})$ принадлежат этому отношению, а пара подмножеств $(\{1, 5, 7\}, \{3, 5, 9\})$ не принадлежит.

Каждому бинарному отношению R на n -множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ можно поставить в соответствие $0, 1$ -матрицу $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i R x_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица A называется *матрицей инцидентности* бинарного отношения. Заметим, что бинарному отношению равенства, заданному на n -множестве, соответствует единичная матрица (δ_{ij}) , где δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Отношение R на множестве X называется *рефлексивным*, если xRx для любого $x \in X$. Матрица инцидентности рефлексивного отношения на конечном множестве X имеет на главной диагонали только единичные элементы. Например, отношение \leqslant на множестве \mathbb{N} является рефлексивным. Отношение R *антирефлексивно*, если xRx не выполняется ни для какого $x \in X$. В этом случае матрица инцидентности имеет нулевую главную диагональ. Примером антирефлексивного отношения может служить отношение $<$, заданное на множестве \mathbb{N} .

Отношение R на множестве X называется *симметричным*, если из xRx' следует, что $x'Rx$ для любой пары $(x, x') \in X^{(2)}$. До-

пустим, что элементы некоторой матрицы находятся в отношении R , если они принадлежат одной и той же строке матрицы. Ясно, что в данном случае отношение R симметрично. Матрица инцидентности $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, симметричного отношения, заданного на n -множестве, обладает свойством симметрии относительно главной диагонали, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$. Отношение R называется *антисимметричным*, если из xRx' и $x'Rx$ следует $x' = x$. Примером антисимметричного отношения может служить отношение \leqslant , так как из $x \leqslant x'$ и $x' \leqslant x$ следует, что $x' = x$.

Отношение R на множестве X называется *транзитивным*, если из xRx' и $x'Rx''$ следует, что xRx'' . Пример транзитивного отношения — отношение включения \subseteq , заданное на булеане 2^X множества X . Другой пример — отношение \leqslant , заданное на множестве натуральных чисел. Для матрицы инцидентности $A = -(a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, транзитивного отношения, заданного на n -множестве, справедливо условие: из равенства $a_{ik} = 0$ для всех j следует, что $a_{ij}a_{jk} = 0$. Любому отношению R , заданному на множестве X , можно поставить в соответствие отношение \bar{R} , которое определяется так: $x\bar{R}x$ для x , $x' \in X$, если существуют такие $x_1, \dots, x_n \in X$, что $xRx_1, x_1Rx_2, \dots, x_nRx'$. Отношение \bar{R} называется *транзитивным замыканием* отношения R . Если R транзитивно, то $\bar{R} = R$.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве X называется *отношением эквивалентности*. Обычно это отношение обозначается символом \sim . Отношение эквивалентности на множестве X индуцирует некоторое разбиение этого множества, блоки которого называются *классами эквивалентности*. Любые два элемента из одного класса связаны отношением эквивалентности, т. е. эквивалентны; любые два элемента из различных классов не эквивалентны.

Построим разбиение множества X , соответствующее отношению эквивалентности на этом множестве. Для $x \in X$ обозначим через $K(x)$ подмножество, состоящее из элементов, эквивалентных x , т. е. $K(x) = \{y: y \sim x; y \in X\}$. Пусть x и x' не эквивалентны. Покажем, что $K(x) \cap K(x') = \emptyset$. Допустим, что $z \in (K(x) \cap K(x'))$. Тогда $z \sim x$ и $z \sim x'$. Отсюда, используя симметричность и транзитивность, получаем, что $x \sim x'$, т. е. приходим к противоречию.

Ясно, что и обратно каждому разбиению множества X соответствует некоторое отношение эквивалентности. Каждый блок разбиения представляет собой подмножество множества X , состоящее из элементов, эквивалентных некоторому фиксированному элементу подмножества. Множество всех классов эквивалентности называется *фактормножеством* по данному отношению эквивалентности.

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением частичного порядка*. Если на множестве

Х задан частичный порядок, то множество называется *частично упорядоченным*. Очевидно, что отношение включения \subseteq , заданное на булевом 2^X множестве X , определяет частичный порядок.

Отношение R на множестве X обладает свойством *дихотомии*, если для любых $x, x' \in X$ либо xRx' , либо $x'Rx$. Отношение частичного порядка, удовлетворяющее свойству дихотомии, называется *отношением линейного порядка* или просто *отношением порядка*. Отношение $<$, заданное на множестве натуральных чисел, является отношением порядка.

Рассмотрим множество X , на котором задано отношение порядка $<$. На декартовой степени $X^{(r)}$ этого множества также можно установить отношение порядка R , при котором $(x_1, \dots, x_r) R (x'_1, \dots, x'_r)$ для $(x_1, \dots, x_r), (x'_1, \dots, x'_r) \in X^{(r)}$, если для наименьшего индекса i со свойством $x_i < x'_i$ имеет место отношение $x_i < x'_i$. Такой порядок R называется *лексикографическим*, так как используется для определения расположения слов в словарях.

2. Операции и алгебры. Будем говорить, что на множестве X задана *n-местная операция* ψ , если задано отображение $\psi: X^{(n)} \rightarrow X$, которое вектору $(x_1, \dots, x_n) \in X^{(n)}$ ставит в соответствие единственный элемент $x \in X$. Этот факт записывается следующим образом: $x = \psi(x_1, \dots, x_n)$. Таких операций на множестве X можно задать несколько. Множество операций, заданных на X , называется его *сигнатурой* и обозначается $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots\}$.

Множество X вместе с его сигнатурой Ψ будем называть *алгеброй* и обозначать $A(X; \Psi)$. Множество X называется *основным множеством* алгебры. Наиболее распространенными являются двухместные, или *бинарные*, операции, которые в дальнейшем будем называть просто *операциями*. Для записи бинарной операции вместо функциональной употребляется запись, при которой пары элементов соединяются специальным значком. Так, вместо $\psi(x, y) = z$ записывают $x \top y = z$. Операция \top называется *ассоциативной*, если для любых $x, y, z \in X$ выполнено

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z).$$

Операция \top *коммутативна*, если для любых $x, y \in X$ выполнено условие

$$x \top y = y \top x.$$

Операция \top *дистрибутивна* относительно операции \perp , если для любых $x, y, z \in X$ справедливы равенства

$$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z),$$

$$(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x).$$

Элемент e является *нейтральным*, или *единичным*, относитель-

но операции \top , если для любого $x \in X$

$$x \top e = e \top x = x.$$

Если такой элемент существует, то он единственен. Действительно, если бы существовал нейтральный элемент $e' \neq e$, то из равенств $e' = e' \top e = e \top e' = e$ следовало бы противоречие.

Элемент x^{-1} называется обратным к элементу $x \in X$ относительно операции \top , если

$$x \top x^{-1} = x^{-1} \top x = e.$$

Рассмотрим в качестве основного множества множество действительных чисел R , на котором заданы хорошо известные операции умножения \top и сложения \perp , обозначаемые обычно · и + соответственно. Обозначим соответствующую алгебру через $A(R, \cdot, +)$. В этой алгебре обе операции ассоциативны и коммутативны и операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения. Нейтральными элементами при умножении и сложении являются соответственно числа 1 и 0.

3. Гомоморфизм и изоморфизм. Рассмотрим алгебры $A(X; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $B(Y; \psi_1, \dots, \psi_k)$, у которых операции φ_i и ψ_i являются одинаково n_i -местными, $i = 1, \dots, k$. Отображение $\gamma: X \rightarrow Y$ с условием

$$\gamma(\varphi_i(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_i}})) = \psi_i(\gamma(x_{j_1}), \dots, \gamma(x_{j_{n_i}}))$$

для всех $i = 1, \dots, k$ и всех $x_{j_s} \in X$ называется гомоморфизмом алгебры $A(X; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ в алгебру $B(Y; \psi_1, \dots, \psi_k)$. Взаимно однозначный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Возьмем алгебры $A(Q; +)$, $B(Q'; +)$, где Q и Q' — соответственно множества целых и четных чисел, а $+$ означает обычное сложение чисел. Отображение $\gamma: Q \rightarrow Q'$ такое, что $\gamma(n) = 2n$, является изоморфизмом.

Множество $Y \subseteq X$ называется замкнутым относительно n -местной операции φ на X , если $\varphi(Y^{(n)}) \subseteq Y$. Если $Y \subseteq X$ замкнуто относительно всех операций алгебры $A(X; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$, ему соответствует алгебра $B(Y; \psi_1, \dots, \psi_k)$, которая называется подалгеброй алгебры $A(X; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$. Гомоморфизм алгебры в некоторую подалгебру называется гомоморфизмом в себя. Изоморфизм алгебры в себя называется автоморфизмом.

4. Группоиды, квазигруппы, полугруппы. Алгебра $A(X, \top)$ с операцией \top называется группоидом. Группоид, в котором уравнения $a \top x = b$ и $y \top a = b$ однозначно разрешимы относительно x и y для любых $a, b \in X$, называется квазигруппой. Это свойство эквивалентно условию, что в соотношении $a \top b = c$ любые два элемента однозначно определяют третий для любых $a, b, c \in X$.

Группоид, в котором операция \top ассоциативна, называется *полугруппой*. Полугруппа, содержащая нейтральный элемент, никогда называется *моноидом*. Если операция \top коммутативна, то полугруппа называется *абелевой*.

В дальнейшем операции \perp и \top мы для удобства будем обозначать знаками сложения $+$ и умножения \cdot соответственно.

В полугруппе с операцией произведение $x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ с k сомножителями называется *k -й степенью* x и обозначается x^k . Полагаем $x^0 = e$, где e — нейтральный элемент (если e существует). Полугруппа, состоящая из степеней одного и того же элемента, называется *циклической*. Циклическая полугруппа абелева. Совокупность всех целых чисел с обычной операцией умножения образует абелеву полугруппу. Множество матриц данного порядка, замкнутое относительно операции матричного умножения, также является полугруппой. Эта полугруппа, вообще говоря, не абелева.

5. Группы. Полугруппа с нейтральным элементом e , в которой для каждого элемента g существует обратный g^{-1} , такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, называется *группой*. Элемент e называется *единицей* группы. Совокупность H элементов группы G , замкнутая относительно операции в группе, и такая, что из $g \in H$ следует $g^{-1} \in H$, называется *подгруппой*. Группа, в которой операция коммутативна, называется *абелевой*.

Например, множество всех рациональных чисел, не содержащее нуля, с операцией обычного умножения образует абелеву группу. Множество всех матриц данного порядка с отличным от нуля определителем и операцией матричного умножения образует группу. Если группа G конечна, то число ее элементов обозначается $|G|$ и называется *порядком* группы.

Рассмотрим непустое подмножество M группы G . Совокупность всех элементов G , представимых в виде $g_{i_1}^{e_1} g_{i_2}^{e_2} \cdots g_{i_v}^{e_v}$, где $g_{i_1}, \dots, g_{i_v} \in M$, а e_1, \dots, e_v принимают всевозможные целые значения, образует подгруппу группы G . Она называется *подгруппой, порожденной* множеством M , и обозначается $\langle M \rangle$. Множество M называется *системой образующих* подгруппы $\langle M \rangle$. Если $G = \langle M \rangle$, то M — система образующих всей группы G .

Подгруппа группы G , порожденная элементом $g \in G$, называется *циклической* и обозначается $\langle g \rangle$. Если для элемента g группы G существует натуральное число p , такое, что $g^p = e$, то говорят, что g имеет конечный порядок. Наименьшее число p , удовлетворяющее этому свойству, называется *порядком* g . Циклическая группа, порожденная элементом $g \in G$ порядка p , имеет вид $\langle g \rangle = \{e, g, \dots, g^{p-1}\}$. Действительно, для любого натурального k имеем $k = lp + r$, $0 \leq r \leq p - 1$, используя деление k на p с остатком. Поэтому для любого элемента из $\langle g \rangle$ получаем $g^k = (g^p)^l g^r = g^r$.

6. Смежные классы. Пусть H — подгруппа группы G . Левым смежным классом группы G по подгруппе H называется множество gH элементов вида gh , где h пробегает все элементы подгруппы H , а g — фиксированный элемент из G , называемый представителем смежного класса. Аналогично определяется правый смежный класс Hg .

Рассмотрим покрытие группы G левыми смежными классами: $G = H \cup g_1H \cup \dots$. Покажем, что это покрытие является разбиением, т. е. $g_iH \cap g_jH = \emptyset$, $i \neq j$. Допустим, что $g \in g_iH \cap g_jH$. Тогда $g = gh_1 = gh_2$, и, следовательно, $g = gh_1h_2^{-1}$. Значит, любой элемент из класса g_iH имеет вид $gh_1h_2^{-1}h = gh'$, $h' \in H$. Отсюда вытекает, что $g_iH \subseteq g_jH$. Аналогично доказывается, что $g_jH \subseteq g_iH$. Следовательно, $g_iH = g_jH$. Таким образом, блоки покрытия либо не пересекаются, либо совпадают, т. е. покрытие является разбиением. Существует аналогичное разбиение группы G и на правые смежные классы: $G = H \cup Hg_1 \cup \dots$. Множество левых смежных классов группы G по подгруппе H обозначим через G/H .

Если группа G конечна, то из ее разбиения на смежные классы следует теорема Лагранжа, состоящая в том, что $|G| = |H||G/H|$. Отсюда следует, что порядок конечной группы делится на порядок каждой ее подгруппы. Таким образом, порядок любого элемента группы делит порядок группы. Если порядок группы — простое число, то группа — циклическая.

Подгруппа H группы G называется нормальным делителем, если

$$gH = Hg, \quad g \in G.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\gamma: G \rightarrow G'$, где G и G' — некоторые группы. Ядром гомоморфизма γ называется множество

$$\ker \gamma = \{g \in G: \gamma(g) = e'\},$$

где e' — единица группы G' . Ясно, что $H = \ker \gamma$ является подгруппой G , обладающей следующим свойством: $gH = Hz$, $g \in G$. Действительно, из равенства $\gamma(ghg^{-1}) = e'$, $h \in H$, $g \in G$, следует, что $gHg^{-1} \subseteq H$. Заменив g на g^{-1} , получаем $H \subseteq gHg^{-1}$. Таким образом, $gHg^{-1} = H$, $g \in G$, и подгруппа H является нормальным делителем в группе G .

Из совпадения соответствующих левых и правых смежных классов группы G по нормальному делителю H следует, что $gH \cdot g'H = gg'H$. Совокупность смежных классов образует группу, если операцию их умножения определить с помощью этого равенства. Эта группа называется факторгруппой группы G поциальному делителю H и обозначается G/H .

Нормализатором подгруппы G' в группе G называется множество

$$N(G') = \{g \in G: gG'g^{-1} = G'\}.$$

Если $G' = H$, где H — нормальный делитель группы G , то $N(H) = G$.

7. Кольца и поля. Множество с двумя операциями $+$ и \cdot называется *кольцом*, если относительно операции $+$ оно образует абелеву группу, а операция \cdot дистрибутивна относительно операции $+$. Нейтральные элементы 0 — относительно операции $+$ и 1 — относительно операции \cdot (если он существует) называют обычно *нулем* и *единицей* кольца. Если операция \cdot коммутативна, то кольцо называется *коммутативным*. Кольцо, в котором операция \cdot ассоциативна, называется *ассоциативным*. В дальнейшем мы будем рассматривать только ассоциативные кольца, поэтому под термином кольцо будем понимать именно ассоциативное кольцо.

Множество целых чисел \mathbf{Z} относительно обычных операций сложения и умножения образует коммутативное кольцо. Множество матриц заданного порядка с числовыми элементами представляет собой пример кольца, которое не является коммутативным. Сложение и умножение матриц определены обычным способом.

Говорят, что целые числа a и b *сравнимы по модулю* m , если их разность делится на m . В этом случае применяется следующая запись: $a \equiv b \pmod{m}$. На множестве целых чисел определим бинарное отношение, полагая $a \sim b$, если $a \equiv b \pmod{m}$. Это бинарное отношение является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются классами *вычетов* по модулю m . Каждый из классов K_0, K_1, \dots, K_{m-1} содержит в точности одно из чисел $0, 1, \dots, m-1$, которые являются их представителями и образуют полную систему наименьших неотрицательных вычетов.

На множестве классов K_0, K_1, \dots, K_{m-1} введем две операции, которые будем обозначать $+$ и \cdot и называть *сложением* и *умножением*. Будем полагать, что $K_i + K_j = K_l$, если $i + j = l \pmod{m}$, $K_i \cdot K_j = K_l$, если $i \cdot j = l \pmod{m}$. В результате получаем кольцо Z_m , которое называется кольцом *классов вычетов* по модулю m . Если в произвольном кольце произведение двух отличных от нуля элементов a и b равно нулю, $a \cdot b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то эти элементы называются *делителями нуля*. Кольцо без делителей нуля называется *областью целостности*.

В кольце вычетов Z_m делители нуля могут быть тогда и только тогда, когда m не является простым числом. Действительно, если $K_i \cdot K_j = K_0$, то $i \cdot j = 0 \pmod{m}$, что невозможно при m простом и $i \neq 0, j \neq 0$.

Если в кольце с единицей и с операциями $+$ и \cdot совокупность отличных от нуля элементов образует абелеву группу относительно операции \cdot , то кольцо называется *полем*.

Примером поля является множество всех действительных чисел, в котором определены обычные операции сложения и умножения.

жения. Поле, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. Если p — простое число, то совокупность классов вычетов по модулю p образует конечное поле из p элементов.

Возьмем фиксированный класс $K_i \neq K_0$ и покажем, что существует единственный класс K_i^{-1} такой, что $K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = K_1$. Рассмотрим совокупность наименьших неотрицательных вычетов по модулю p , соответствующих элементам $i1, i2, \dots, i(p-1)$. Все эти элементы не сравнимы по модулю p , так как из равенства $i\mu = iv \pmod{p}$ следует, что $\mu = v$. Таким образом, соответствующая система вычетов является полной и, в частности, находится единственный элемент $1 \leq t \leq p-1$ такой, что $i \cdot t = 1 \pmod{p}$. Поэтому $K_i K_t = K_1$, и, значит, $K_i^{-1} = K_t$.

8. Кольцо многочленов. Рассмотрим коммутативное кольцо K . **Многочленом** степени n от переменной x , с коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ называется выражение вида

$$a(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n \neq 0.$$

Два многочлена $a(x)$ и $b(x)$ равны, $a(x) = b(x)$, если их соответствующие коэффициенты совпадают: $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Степени разных многочленов одинаковы.

Для многочленов одинаковой степени определим их сумму $c(x) = a(x) + b(x)$ как многочлен с коэффициентами $c_k = a_k + b_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Если степени многочленов различны, скажем m и n , причем $m < n$, то, полагая $a_{m+1} = \dots = a_n = 0$, где 0 — нейтральный по сложению элемент из K , сводим определение сложения многочленов к рассмотренному случаю.

Произведение многочленов $a(x)$ и $b(x)$ определяется как многочлен $p(x) = a(x) \cdot b(x)$ с коэффициентами

$$p_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

где $0 \leq k \leq m+n$; m, n — степени многочленов $a(x)$ и $b(x)$ соответственно. Заметим, что это определение умножения многочленов совпадает с обычным почленным их перемножением с последующим приведением подобных членов.

Операции сложения и умножения многочленов с коэффициентами из коммутативного кольца K коммутативны, ассоциативны и связаны законом дистрибутивности. Следовательно, совокупность всех таких многочленов образует коммутативное кольцо $K[x]$, построенное над коммутативным кольцом K .

Возьмем теперь в качестве исходного коммутативное кольцо $K[x]$ и построим над ним $K[x, y]$ — кольцо многочленов от переменной y , коэффициенты которого будут многочленами от

переменной x . Элементы кольца $K[x, y]$ имеют вид

$$a(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j$$

и называются *многочленами от двух переменных x и y* над кольцом K .

Аналогичным образом можно построить кольцо многочленов от трех, четырех и т. д. переменных. *Многочлен от k переменных x_1, \dots, x_k* записывается следующим образом:

$$a(x_1, \dots, x_k) = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k},$$

где (i_1, \dots, i_k) пробегает некоторое конечное множество векторов с целыми неотрицательными координатами. Величина $i_1 + \dots + i_k$ называется *степенью члена* $a_{i_1 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$ многочлена $a(x_1, \dots, x_k)$. Многочлен, все члены которого имеют одну и ту же степень d , называется *формой d -й степени*. При $d = 1$ форма называется *линейной*, а при $d = 2$ — *квадратичной*.

9. Векторное пространство. Множество R с двумя операциями: сложения $+$ и умножения \cdot на элемент из поля P — образует *векторное пространство* над этим полем, если эти операции удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $x + y = y + x$, $x, y \in R$;
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $x, y, z \in R$;
- 3) $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$, $\alpha, \beta \in P$;
- 4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
- 5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

6) существует такой элемент $0' \in R$, что умножение нулевого элемента из P на любой элемент $x \in R$ дает $0'$.

Элементы из R называются *векторами*. Векторы x, y, \dots, z линейно зависимы, если существуют такие числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in P$, не равные все плюс, что $\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0'$. В противном случае векторы x, y, \dots, z называются *линейно независимыми*.

Векторное пространство R имеет *размерность n* , или является *n -мерным*, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Упорядоченная система из n линейно независимых векторов e_1, e_2, \dots, e_n называется *базисом n -мерного пространства R* . Любой вектор $x \in R$ однозначно выражается через векторы базиса:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n;$$

элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in P$ называются *координатами* вектора x в базисе e_1, e_2, \dots, e_n . Имеют место следующие формулы: если $x, y \in R$, $\alpha \in P$ и $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то

$$x + y = (x_1 + y_1) e_1 + \dots + (x_n + y_n) e_n,$$

$$\alpha x = \alpha x_1 e_1 + \dots + \alpha x_n e_n.$$

Если совокупность векторов $R' \subseteq R$ обладает свойствами: 1) $x + y \in R'$ для любых $x, y \in R'$, 2) $\alpha x \in R'$, $x \in R'$, $\alpha \in P$, то R' называется подпространством R .

Если R' и R'' являются подпространствами пространства R , причем $R' \cap R'' = 0'$ и для любого $x \in R$ имеет место представление $x = x' + x''$, $x' \in R'$, $x'' \in R''$, то говорят, что пространство R разлагается в прямую сумму подпространств R' и R'' , и записывают:

$$R = R' \oplus R''.$$

Если $e'_1, \dots, e'_{n'} — базис R'$ и $e''_1, \dots, e''_{n''} — базис R''$, то $e'_1, \dots, e'_{n'}, e''_1, \dots, e''_{n''}$ есть базис n -мерного пространства R и $n = n' + n''$.

10. Линейный оператор. Рассмотрим над одним и тем же полем два векторных пространства R и Q , имеющих базисы e_1, e_2, \dots, e_n и q_1, q_2, \dots, q_m . Зададим матрицу $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $a_{ij} \in P$, и рассмотрим отображение $A: R \rightarrow Q$, при котором каждому вектору $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ ставится в соответствие вектор $y = A(x) = y_1q_1 + \dots + y_mq_m$ такой, что

$$y_i = a_{1i}x_1 + \dots + a_{ni}x_n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Отображение A называется линейным оператором и обладает следующими свойствами:

- 1) $A(x + y) = Ax + Ay$;
- 2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Так как при фиксированных пространствах R и Q матрица A однозначно определяет линейный оператор, то будем обозначать их одной и той же буквой A . Заметим, что в матрице A , определяющей линейный оператор A , k -й столбец состоит из последовательных координат вектора Ae_k , $k = 1, \dots, m$, в базисе q_1, \dots, q_m :

$$Ae_k = a_{1k}q_1 + \dots + a_{mk}q_m, \quad k = 1, \dots, m.$$

Сумма линейных операторов A и B есть линейный оператор

$$Cx = Ax + Bx, \quad x \in R;$$

этому оператору отвечает матрица $C = A + B$. Произведение линейных операторов $A: Q' \rightarrow Q$ и $B: R \rightarrow Q'$ есть линейный оператор $C: R \rightarrow Q$, такой, что

$$Cx = A(Bx), \quad x \in R;$$

этому оператору отвечает матрица $C = AB$.

Если A — линейный оператор и $A: R \rightarrow Q$, то совокупность векторов Ax , $x \in R$, образует подпространство пространства Q и обозначается AR . Размерность подпространства AR называется рангом оператора A . Размерность подпространства Q , образованного векторами, удовлетворяющими условию $Ax = 0$, называется

*д*ефектом оператора A . Ранг линейного оператора совпадает с рангом определяющей его при фиксированных пространствах матрицы A . Если r — ранг оператора, а d — его дефект, то $r + d = m$, где m — размерность пространства R .

Линейный оператор A , отображающий n -мерное векторное пространство R в себя, называется *линейным преобразованием*. При фиксированном базисе e_1, e_2, \dots, e_n пространства R этому преобразованию ставится во взаимно однозначное соответствие квадратная матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_{ii} \in P$, такая, что

$$Ae_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Вектор $x \neq 0'$ называется *собственным вектором* линейного преобразования A : $R \rightarrow R$, если

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in P.$$

Число λ называется *собственным значением* преобразования A . Все собственные значения являются корнями *характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

где A — матрица, соответствующая преобразованию, а $I_n = (\delta_{ij})$ — единичная матрица. Собственные векторы, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Упражнения. 1. Показать, что булевая 2^X конечного множества X образует кольцо относительно операций объединения и пересечения множеств.

2. Пусть Θ_n есть совокупность преобразований n -множества X , на которой задана операция $*$, определяемая равенством

$$\sigma * \sigma'(x) = \sigma'[\sigma(x)], \quad \sigma \in \Theta_n$$

для всех $x \in X$. Показать, что при $n \geq 2$ Θ_n образует некоммутативную полугруппу.

3. Доказать, что для любых ненулевых целых чисел a и b имеет место равенство

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)},$$

где (a, b) — наибольший общий делитель, $[a, b]$ — наименьшее общее кратное чисел a и b .

4. Показать, что если $d = (a, b)$, то существуют такие целые числа x и y , что

$$d = ax + by.$$

5. Пусть q — натуральное число и $N = \{0, 1, \dots, q-1\}$. Показать, что каждое натуральное число m единственным образом представимо в виде

$$m = m_0 + m_1 q + m_2 q^2 + \dots + m_r q^r,$$

где $m_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, $m_r \neq 0$. Это представление называется *q-ичным разложением числа m*.

6. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как число элементов множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$, взаимно простых с n. Для случая $n = p^k$, где p — простое число, показать, что

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

§ 4. Числа, многочлены, операторы

В данном параграфе рассмотрим некоторые числа и многочлены, которые играют важную роль в решении комбинаторных задач.

1. **Биномиальная формула.** Число $\binom{m}{k}$, $0 \leq k \leq m$, равное количеству k-подмножеств m-множества, называется *биномиальным коэффициентом*. Основанием тому служит наличие этих чисел в качестве коэффициентов в так называемой *биномиальной формуле*, или формуле *Ньютона*:

$$(1+t)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} t^k, \quad (4.1)$$

где t — переменная, принимающая любые действительные значения.

Для доказательства формулы (4.1) рассмотрим множество отображений $\varphi: X \rightarrow Y$, $|X|=m$, $|Y|=t+1$, где t — натуральное число. Не ограничивая общности, положим $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_t\}$ и разобьем все множество отображений на $t+1$ классов. К k-му классу отнесем такие отображения, в которых y_0 в точности $m-k$ раз используется в качестве образа, $0 \leq k \leq m$. Число отображений в k-м классе равно $\binom{m}{k} t^k$, $0 \leq k \leq m$. Суммируя по всем k эти числа, получаем общее число отображений, равное $(1+t)^m$. Этим равенство (4.1) доказано для всех натуральных t. В левой и правой частях равенства (4.1) стоят многочлены, совпадение которых для всех натуральных значений t означает их равенство для всех действительных значений t.

Формула (4.1) является источником целого ряда полезных тождеств. Например, полагая соответственно $t=1$ и $t=-1$, получаем

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m, \quad (4.2)$$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} = 0, \quad m \geq 1. \quad (4.3)$$

Равенство (4.2) означает, что общее число подмножеств m-множества, включая пустое подмножество, равно 2^m . Иными словами

ми, число элементов в булеане 2^x множества X равно 2^{t^x} , что следует также из формулы (2.9).

Вычисляя коэффициенты при t^s в обеих частях равенства $(1+t)^m = (1+t)^s(1+t)^{m-s}$, $0 \leq s \leq m$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^s \binom{s}{k} \binom{m-s}{r-k} = \binom{m}{r}. \quad (4.4)$$

Аналогично из равенства $(1+t)^{2m} = (1+t)^m(1+t)^m$ следует тождество

$$\binom{2m}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2. \quad (4.5)$$

Интегрируя обе части равенства $\sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k = \frac{1}{t} [1 - (1-t)^n]$ и используя биномиальную формулу, можно установить тождество

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \binom{n}{k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}. \quad (4.6)$$

2. Полиномиальная формула. Используя биномиальную формулу, докажем справедливость следующей формулы:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^m = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_i \geq 0}} \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_n!} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}, \quad (4.7)$$

где суммирование осуществляется по всевозможным решениям уравнения $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ в целых неотрицательных числах. Под решением понимается вектор (k_1, k_2, \dots, k_n) с целыми неотрицательными координатами, удовлетворяющими равенству $k_1 + \dots + k_n = m$. Обычно формулу (4.7) называют *полиномиальной*, а выражения $\frac{m!}{k_1! \dots k_n!}$ — *полиномиальными коэффициентами*.

При $n = 2$ полиномиальная формула верна, так как она совпадает с биномиальной формулой. Применив формулу бинома Ньютона, имеем

$$(u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (u_1 + \dots + u_{n-1})^k u_n^{m-k}.$$

Используя предположение индукции о справедливости формулы

(4.7) для всех показателей степени $k < m$, получаем

$$(u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n)^m =$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} u_n^{m-k} \sum_{\substack{k_1+\dots+k_{n-1}=k \\ k_i \geq 0}} \frac{k!}{k_1! \dots k_{n-1}!} u_1^{k_1} \dots u_{n-1}^{k_{n-1}}.$$

Полагая $k_n = m - k$ и переходя от повторного суммирования к суммированию одновременно по всем индексам, приходим к формуле (4.7).

Полагая $u_1 = \dots = u_n = 1$ в формуле (4.7), получаем тождество

$$n^m = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m \\ k_i \geq 0}} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!}. \quad (4.8)$$

Комбинаторный смысл этого тождества состоит в том, что величина $m!(k_1! \dots k_n!)^{-1}$ согласно формуле (2.5) определяет число m -векторов с координатами из n -множества, у которых показатели первичной спецификации равны k_1, k_2, \dots, k_n . Суммирование по всем таким показателям дает общее число m -векторов, равное n^m .

3. Биномиальные коэффициенты и формулы обращения. Формулу для разложения бинома $(1+t)^{\alpha}$ можно обобщить на случай, когда показатель степени α есть производное действительное число. Для этого разложим функцию $(1+t)^{\alpha}$ в окрестности точки $t=0$ в ряд Тейлора:

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} t^m. \quad (4.9)$$

Биномиальный ряд, стоящий в правой части, сходится абсолютно и равномерно для всех $|t| \leq r < 1$. Его коэффициенты при t^m будем называть также *биномиальными коэффициентами* и обозначать

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{(\alpha)_m}{m!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} \quad (4.10)$$

для всех $m = 0, 1, \dots$ При $m < 0$ полагаем $\binom{\alpha}{m} = 0$. Приравнивая коэффициенты при t^m в обеих частях равенства $(1+t)^{\alpha} = (1+t)^{\alpha-1} + t(1+t)^{\alpha-1}$, получаем соотношение для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{\alpha}{m} = \binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1}, \quad (4.11)$$

аналогичное соотношению (4.4) для натуральных α . Так же приравнивая коэффициенты при t^m в обеих частях равенства $(1+t)^{\alpha+\beta} = (1+t)^\alpha(1+t)^\beta$, имеем

$$\binom{\alpha + \beta}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{m-k}. \quad (4.12)$$

Вычисление коэффициента при t^m в обеих частях равенства $(1+t)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} = (1+t)^{\alpha_1} \dots (1+t)^{\alpha_k}$ приводит к следующему тождеству:

$$\binom{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{m} = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = m \\ m_i \geq 0, 1 \leq i \leq k}} \binom{\alpha_1}{m_1} \dots \binom{\alpha_k}{m_k}, \quad (4.13)$$

где суммирование осуществляется по всем векторам (m_1, \dots, m_k) , таким, что $m_1 + \dots + m_k = m$, $m_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$.

Биномиальный ряд (4.9) при $t=1$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha > -1$, и его сумма равна 2^α . Отсюда следует тождество

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} = 2^\alpha, \quad \alpha > -1. \quad (4.14)$$

При $t=-1$ биномиальный ряд (4.9) сходится тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 0$, и его сумма равна 1 при $\alpha=0$ и равна нулю при $\alpha > 0$. Отсюда следует тождество

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} = \delta_{\alpha,0}, \quad \alpha \geq 0, \quad (4.15)$$

где $\delta_{\alpha,0}$ — символ Кронекера.

Если $\alpha > 0$, то из равенства (4.9) имеем

$$(1-t)^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+m-1}{m} t^m, \quad (4.16)$$

так как

$$(-1)^m \binom{-\alpha}{m} = \binom{\alpha+m-1}{m}. \quad (4.17)$$

Приравнивая коэффициенты при t^m в обеих частях равенства $(1-t)^{-\alpha}(1-t)^{\alpha} = 1$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \binom{\alpha}{m-k} = \delta_{m,0}. \quad (4.18)$$

Полученные соотношения для биномиальных коэффициентов служат источником для получения простейших формул обращения. Пусть элементы двух числовых последовательностей

$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ и $(b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ связаны соотношением

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

Тогда имеет место соотношение

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.20)$$

Формула (4.20) называется *формулой обращения* для формулы (4.19), и обратно.

Допустим, что справедливо равенство (4.19). Подставляя выражение для a_n в равенство (4.20), получаем

$$b_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} b_j \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{n-j-k} \binom{n-j}{k}.$$

Из равенства (4.3) следует, что данное равенство сводится к тождеству. Точно так же можно убедиться, что подстановка выражения для b_n вида (4.20) в формулу (4.19) приводит к тождеству.

Рассмотрим другой пример пары соотношений, которые являются взаимно формулами обращения:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+k-1}{k} b_{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.21)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} a_{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.22)$$

Подставляя выражение a_n из (4.21) в (4.22), получаем

$$b_n = \sum_{j=0}^n b_j \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{n-j-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \binom{\alpha}{n-j-k}.$$

Из (4.18) следует, что последнее равенство есть тождество. Аналогично показывается, что из равенства (4.22) следует равенство (4.21).

Несколько более сложный пример формул обращения дает пара соотношений

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-2k}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.23)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} a_{n-2k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.24)$$

В обоих случаях суммирование проводится до обращения в нуль.

слагаемых, при этом используется условие, что $\binom{n}{k} = 0$ при $n < k$, где n и k — натуральные числа.

Рассмотрим многочлены вида

$$b_n(x) = \sum_{2k \leq n} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} \quad (4.25)$$

с начальными значениями: $b_0(x) = 1$, $b_1(x) = x$, $b_2(x) = x^2 - 2$. Из очевидного соотношения для биномиальных коэффициентов $\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$ следует, что для $n = 3, 4, \dots$ имеет место равенство

$$b_n(x) = xb_{n-1}(x) - b_{n-2}(x). \quad (4.26)$$

Из этого равенства для $n = 2, 3, \dots$ имеем

$$xb_n(x) = b_{n+1}(x) + b_{n-1}(x). \quad (4.27)$$

Заметим также, что $xb_0(x) = b_1(x) + 2b_0(x)$, $xb_1(x) = b_2(x)$.

Рассмотрим теперь числа a_{nk} , $0 \leq k \leq [n/2]$, такие, что

$$x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{nk} b_{n-2k}(x).$$

Из равенства (4.27) следует, что $a_{nk} = a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1}$, $k < [n/2]$, $a_{2n,n} = 2a_{2n-1,n-1}$, $a_{2n+1,n} = a_{2n,n} + a_{2n,n-1}$. Из этих соотношений получаем $a_{nk} = \binom{n}{k}$, и, следовательно,

$$x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} b_{n-2k}(x). \quad (4.28)$$

Из равенств (4.25) и (4.28) вытекает тождество для биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \binom{n-2k}{m-k} = \delta_{m,n}. \quad (4.29)$$

Это тождество позволяет убедиться, что из равенства (4.24) следует равенство (4.23), и обратно.

4. Сюръективные отображения. Полиномиальные коэффициенты позволяют получить выражение для $D(n, m)$ — числа сюръективных отображений m -множества в n -множество. Это число записывается в следующем виде:

$$D(n, m) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = m \\ \alpha_i \geq 0}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!}, \quad (4.30)$$

где суммирование производится по всем векторам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ с целыми положительными координатами, удовлетворяющими

условию $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$. Действительно, каждому сюръективному отображению φ m -множества X в n -множество Y соответствует m -вектор $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_m))$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Этому m -вектору отвечает сюръективное m -мультимножество значений его координат из множества Y . Сюръективному m -мультимножеству \tilde{Y} первичной спецификации $[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, соответствует $m! (\alpha_1! \dots \alpha_n!)^{-1}$ различных m -векторов. Каждый из этих m -векторов определяет сюръективное отображение m -множества в n -множество, и все эти отображения различны. Поэтому, суммируя полиномиальные коэффициенты по всем $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, получаем общее число сюръективных отображений, т. е. правую часть равенства (4.30).

Для величины $D(n, m)$ можно получить рекуррентное соотношение. Для этого все отображения m -множества X в n -множество Y разобьем на классы. Если отображению φ отвечает m -вектор, для которого носитель соответствующего m -мультимножества является k -подмножеством Y , то отображение φ отнесем к k -му классу, $1 \leq k \leq n$. Число отображений в k -м классе равно $\binom{n}{k} D(k, m)$; поэтому, полагая $D(0, 0) = 1$ и $D(0, m) = 0$, $m \geq 1$, получаем

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D(k, m) = n^m. \quad (4.31)$$

Применяя формулы обращения (4.19) и (4.20), получаем выражение для $D(n, m)$:

$$D(n, m) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

5. Разбиения множеств. Определим теперь число разбиений m -множества $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, таких, что $|X_i| = \alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$. Обозначим это число через $T_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Ясно, что каждому разбиению рассматриваемого вида соответствуют $n!$ упорядоченных разбиений, получаемых всевозможными перестановками блоков. Таким образом, число упорядоченных разбиений данного вида равно $T_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n! T_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Для определения числа таких упорядоченных разбиений выберем $\binom{n}{\alpha_1}$ способами эле-

менты первого блока, затем $\binom{m - \alpha_1}{\alpha_2}$ способами — элементы второго блока и т. д. Элементы последнего блока определяются однозначно. Таким образом,

$$n! T_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \binom{m}{\alpha_1} \binom{m - \alpha_1}{\alpha_2} \dots \binom{m - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

Используя выражение величины $\binom{m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ впда (4.5) через факто-
риалы и проводя необходимые сокращения, приходим к формуле

$$T_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n!} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}, \quad (4.33)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда следует, что общее число разбиений m -множества на n блоков равно

$$T_{mn} := \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_i > 0}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (4.34)$$

Из выражений для $D(n, m)$ и T_{mn} следует, что

$$T_{mn} = \frac{1}{n!} D(n, m) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^m, \quad n = 1, 2, \dots, m. \quad (4.35)$$

Общее число разбиений m -множества равно

$$T_m = \sum_{n=0}^m T_{mn} = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^m (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.36)$$

где полагаем $T_0 = T_{00} = 1$, $T_{nn} = 0$ при $n > m$.

6. Операторы. Рассмотрим функцию $f(x)$ действительной пе-
ременной x , определенную в точке $x+1$, если она определена в
точке x . Оператор Δ взятия *конечной разности* определим ра-
венством

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad (4.37)$$

из которого следует, что оператор Δ удовлетворяет свойствам
линейности

$$\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x), \quad \Delta[f(x) + \varphi(x)] = \Delta f(x) + \Delta \varphi(x), \quad (4.38)$$

где c — постоянная.

Индуктивно, с помощью равенства $\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$, опре-
делим оператор Δ^n , действие которого на $f(x)$ заключается в
 n -кратном применении оператора Δ . Условимся считать $\Delta^0 f(x) =$
 $= f(x)$. Справедлива формула

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x+n-k), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.39)$$

При $n = 1$ формула (4.39) совпадает с формулой (4.37). Пред-
полагая, что она верна при $n = r - 1$, докажем ее при $n = r$. За-
нимем (4.39) при $n = r - 1$ и к обеим частям полученного

равенства применим оператор Δ . В результате получаем

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} f(x+r-k) - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \times \\ \times f(x+r-j-1).$$

Во второй сумме произведем замену переменной, положив $k = j+1$, и объединим обе суммы, воспользовавшись рекуррентным соотношением для биномиальных коэффициентов. В результате получим формулу (4.39) при $n=r$.

Используя формулы обращения (4.19) и (4.20), из равенства (4.39) находим

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(x). \quad (4.40)$$

Рассмотрим применения формул (4.39) и (4.40). Для степенной функции $f(x) = x^n$ эти формулы принимают вид

$$\Delta^n x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+n-k)^m, \quad (4.41)$$

$$(x+n)^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k x^m. \quad (4.42)$$

Полагая в этих равенствах $x=0$ и вводя обозначение $\Delta^0 0^n = \Delta^n x^n|_{x=0}$, получаем

$$\Delta^n 0^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m, \quad (4.43)$$

$$n^m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k 0^m. \quad (4.44)$$

Числа $\Delta^n 0^n$ называются *числами Моргана*. Из формул (4.30) и (4.31) следует комбинаторный смысл этих чисел, а именно, имеет место равенство

$$D(n, m) = \Delta^n 0^n, \quad (4.45)$$

где $D(n, m)$ — число сюръективных отображений m -множества в n -множество. Так как $D(n, m) = 0$ при $n > m$, то отсюда следует, что и $\Delta^n 0^n = 0$ при $n > m$.

Возьмем убывающую факториальную функцию

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Последовательное взятие конечной разности от этой функции приводит к формуле

$$\Delta^k (x)_n = (n)_k (x)_{n-k}, \quad (4.46)$$

где полагаем $(x)_0 = 1$ и $(n)_k = 0$ при $k > n$.

Аналогично для возрастающей факториальной функции

$$\{x\}_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$$

имеем

$$\Delta^k \{x\}_n := (n)_k \frac{\{x\}_n}{\{x\}_k}. \quad (4.47)$$

Из формул (4.46) и (4.47) следует, что при $k > n$ $\Delta^k \{x\}_n = \Delta^k \{x\}_n = 0$.

Рассмотрим теперь показательную функцию $f(x) = e^{ax}$, где a — некоторый параметр, не зависящий от x . Применяя n раз оператор Δ , получаем

$$\Delta^n e^{ax} = e^{ax} (e^a - 1)^n. \quad (4.48)$$

Этот же результат следует и из общей формулы (4.39).

Паряду с оператором Δ часто применяется также линейный оператор *сдвига* E , определяемый равенством

$$Ef(x) = f(x+1). \quad (4.49)$$

Применение k раз оператора E дает результат $E^k f(x) = f(x+k)$. Легко установить связь между операторами Δ и E . Из определений следует символическое равенство $\Delta = E - 1$, которому соответствуют два символических соотношения:

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E^k, \quad E^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k.$$

Применяя операторы, стоящие в обеих частях равенств, к функции $f(x)$, получаем уже доказанные соотношения (4.39) и (4.40).

7. Числа Стирлинга. Равенства

$$(x)_n := \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k, \quad (4.50)$$

$$x^n := \sum_{k=0}^n \sigma(n, k) (x)_k \quad (4.51)$$

определяют числа Стирлинга $s(n, k)$, $\sigma(n, k)$ соответственно первого и второго рода. Здесь $s(0, 0) = \sigma(0, 0) = 1$ и полагаем $s(n, k) = \sigma(n, k) = 0$ при $n < k$. Отметим, что числа $s(n, k)$ и $\sigma(n, k)$ равенствами (4.50) и (4.51) определяются однозначно, так как системы функций $1, x, x^2, \dots, x^n$ и $1, (x)_1, (x)_2, \dots, (x)_n$ линейно независимы.

Подставляя выражения x^k из равенства (4.51) в равенство (4.50), получаем соотношение ортогональности для чисел Стирлинга:

$$\sum_{j=k}^n s(n, j) \sigma(j, k) = \delta_{nk}, \quad (4.52)$$

где δ_{nk} — символ Кронекера. Из соотношения ортогональности вытекают формулы обращения

$$a_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) b_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n \sigma(n, k) a_k, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.53)$$

которые при любых последовательностях a_0, a_1, \dots и b_0, b_1, \dots взаимно обуславливают друг друга, т. е. из первой формулы следует вторая, и наоборот.

8. Блоки разбиений множества. Из формул (4.34) и (4.35) следуют выражения для $T_{m,k}$ — числа разбиений m -множества на k блоков. Выведем теперь рекуррентное соотношение. Для этого все разбиения m -множества разделим на два класса в зависимости от того, образует фиксированный элемент $x \in X$ единичный блок или не образует. Первый класс содержит $T_{m-1, k-1}$ разбиений, второй $kT_{m-1, k}$. Следовательно,

$$T_{m,k} = T_{m-1, k-1} + kT_{m-1, k}, \quad T_{0,0} = 1. \quad (4.54)$$

Введем многочлен

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^m T_{m,k} (x)_k. \quad (4.55)$$

Умножая обе части соотношения (4.54) на $(x)_k$ и суммируя полученные равенства по k от 0 до m , получаем

$$T_m(x) = xT_{m-1}(x), \quad m = 1, \dots$$

Отсюда с учетом равенства $T_0(x) = 1$ находим

$$T_m(x) = x^m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.56)$$

Сопоставляя (4.54) и (4.56), приходим к выводу, что

$$T_{m,k} = \sigma(m, k). \quad (4.57)$$

Это равенство определяет комбинаторный смысл чисел Стирлинга второго рода. Из этого равенства, с учетом соотношения (4.54), следует рекуррентное соотношение

$$\sigma(n, k) = \sigma(n-1, k-1) + k\sigma(n-1, k). \quad (4.58)$$

Найдем теперь выражение для чисел Стирлинга второго рода в виде формулы. От обеих частей равенства (4.51) возьмем r -ю конечную разность. С учетом (4.46) имеем

$$\Delta^r x^n = \sigma(n, r) r! + \sum_{k=r+1}^n \sigma(n, k) \cdot (k)_r (x)_{k-r}.$$

Полагая в обеих частях этого равенства $x = 0$, получаем

$$\sigma(n, r) = \frac{1}{r!} \Delta^r 0^n = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} (r-k)^n. \quad (4.59)$$

Эта формула с учетом (4.57) следует также из (4.35).

Упростим теперь формулу (4.36). Из (4.41) вытекает, что

$$\Delta^n 0^m = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^m = 0, \quad n > m.$$

Следовательно,

$$T_m = \sum_{r=0}^m \sigma(m, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^m. \quad (4.60)$$

Из абсолютной сходимости рядов $\frac{1}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!}$ следует возможность перестановки членов в их произведении, и, значит,

$$\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^m. \quad (4.61)$$

Из (4.60) и (4.61) следует *формула Добинского*:

$$T_m = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!}, \quad (4.62)$$

определяющая число разбиений m -множества.

Для чисел T_m справедливо также рекуррентное соотношение

$$T_{m+1} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} T_{m-k}, \quad T_0 = 1. \quad (4.63)$$

В самом деле, разделим все T_{m+1} разбиений множества X , $|X| = m + 1$, на m классов в зависимости от величины блока, содержащего фиксированный элемент $x \in X$. Число таких блоков величиной $k + 1$ равно $\binom{m}{k}$, а остальным $m - k$ элементам соответствуют T_{m-k} разбиений. Отсюда следует (4.63).

Упражнения. 1. Доказать тождества для целых положительных n и k :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0; \quad \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2};$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k} t^k = \binom{n}{r} (1+t)^r;$$

$$(-1)^n \binom{-1/2}{n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}; \quad \sum_{k=0}^r \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+r}{r}.$$

2. Для любого действительного α и целых неотрицательных n и r показать, что

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha - k}{r} = \binom{\alpha + 1}{r + 1} - \binom{\alpha - n}{r + 1}; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^n \binom{\alpha - 1}{n}.$$

3. Индукцией по n доказать, что

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} (n - k)^m = \begin{cases} m!, & m = n, \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

4. Вывести рекуррентное соотношение для чисел Моргана:

$$\Delta^k 0^{n+1} = k \Delta^k 0^n + k \Delta^{k-1} n,$$

§ 5. Преобразования

1. Полугруппы преобразований. Рассмотрим множество преобразований заданного множества X в себя. Для пары преобразований (σ_1, σ_2) определим операцию умножения \cdot , которая состоит в последовательном применении этих преобразований, т. е. $\sigma_1 \sigma_2(x) = \sigma_1(\sigma_2(x))$ для всех $x \in X$, где знак \cdot , как и всюду ниже, для простоты опускается. Эта операция ассоциативна, так как

$$\sigma_1[\sigma_2\sigma_3](x) = [\sigma_1\sigma_2]\sigma_3(x) = \sigma_3[\sigma_2[\sigma_1(x)]], \quad x \in X.$$

Роль нейтрального элемента играет преобразование e , при котором $e(x) = x$ для всех $x \in X$.

Например, для $X = \{1, 2, 3\}$, применяя двустрочную запись преобразований $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, имеем

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Отсюда следует, что}$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_3 = \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Совокупность преобразований множества X , замкнутая относительно операции умножения, называется *полугруппой* преобразований, действующих на множестве X . Множество элементов полугруппы, замкнутое относительно операции умножения, называется *подполугруппой*.

Если X есть n -множество, то полугруппа всех его преобразований называется *симметрической* полугруппой степени n и обозначается \mathfrak{S}_n . Любая полугруппа преобразований n -множества является подполугруппой \mathfrak{S}_n . Полугруппы преобразований играют особую роль при изучении полугрупп в силу следующей теоремы.

Теорема 1. *Любая полугруппа, содержащая нейтральный элемент, изоморфна некоторой полугруппе преобразований.*

Рассмотрим полугруппу, элементы которой образуют множество $X = \{e, x_1, x_2, \dots\}$. Каждому элементу $x_i \in X$ поставим в соответствие преобразование $\varphi_i(x) = xx_i$. При этом произведению

$x_i x_j$ соответствует преобразование $\varphi_i \varphi_j$, так как для любого $x \in X$ имеем $\varphi_i \varphi_j(x) = \varphi_i(\varphi_j(x)) = \varphi_i(x)x_j = x(x_i x_j)$. Ясно, что если $x_i \neq x_j$, то $\varphi_i \neq \varphi_j$, поскольку из равенства $\varphi_i(x) = \varphi_j(x)$ для всех $x \in X$ в силу наличия нейтрального элемента следует, что $x_i = x_j$. Совокупность всех преобразований φ_i обозначим через Φ . Указанное соответствие определяет отображение $\tau: X \rightarrow \Phi$, которое является изоморфизмом.

Следствие. Любая конечная полугруппа с нейтральным элементом изоморфна некоторой подполугруппе симметрической полугруппы.

2. Группы подстановок. Рассмотрим множество всех биективных преобразований n -множества X в себя. Эти преобразования, называемые *подстановками* степени n , образуют группу относительно операции последовательного осуществления преобразований. Эта группа называется *симметрической* группой степени n и обозначается S_n .

Каждой подстановке $s \in S_n$ соответствует единственная подстановка $s^{-1} \in S_n$, такая, что $s^{-1}s(x) = ss^{-1}(x) = e(x)$, $x \in X$, где e — единичная подстановка, т. е. $e(x) = x$ для всех $x \in X$. Положим $ss \dots s = s^k$, $s^{-1}s^{-1} \dots s^{-1} = s^{-k}$, где произведения содержат k сомножителей, и заметим, что $s^k s^{-k} = s^{-k} s^k = e$. Будем полагать $s^0 = e$. Множество подстановок степени n , замкнутое относительно операции умножения и взятия обратного для s элемента s^{-1} , называется *группой подстановок*. Любая группа подстановок степени n является подгруппой симметрической группы S_n .

Теорема 2. Любая конечная группа изоморфна группе подстановок, действующей на множестве ее элементов.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 и предоставляем читателю.

Если $X = \{1, 2, 3\}$, то группа S_3 состоит из подстановок:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя правило умножения подстановок, имеем, например:

$$s_2 s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = s_4, \quad s_1 s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = s_5,$$

$$s_1^{-1} = s_1, \quad s_2^{-1} = s_2, \quad s_3^{-1} = s_3, \quad s_4^{-1} = s_5.$$

3. Орбиты и циклы подстановок. Пусть подстановка s действует на n -множестве X . Определим на множестве X бинарное отношение. Будем считать, что $x \sim x'$ для $x, x' \in X$, если существует такое j , что $x' = s^j(x)$. Это бинарное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением экви-

валентности. Действительно, $x \sim x$, поскольку $x = s^0(x) = e(x)$; из $x \sim x'$ следует $x' \sim x$, так как из равенства $x' = s^1(x)$ вытекает, что $x = s^{-1}(x')$. Наконец, из $x \sim x'$, $x' \sim x''$ следует $x \sim x''$, ибо равенства $x' = s^1(x)$, $x'' = s^2(x')$ означают, что $x'' = s^2(s^1(x)) = = s^{1+2}(x)$.

Рассмотрим разбиение $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, соответствующее данному отношению эквивалентности. Блоки X_1, \dots, X_k этого разбиения будем называть *орбитами* или *классами транзитивности* подстановки $s \in S_n$. Очевидно, что $s(X_i) = X_i, \dots, s(X_k) = X_k$ и сужения подстановки s на орбиты X_1, \dots, X_k являются снова подстановками. Сужение s_i , $1 \leq i \leq k$, подстановки s на орбиту X_i называется *циклом* этой подстановки. Он является подстановкой степени $|X_i|$, действующей на множестве X_i . Ее можно записать в виде цикла длины $l_i := |X_i|$: $(x, s_i(x), s_i^2(x), \dots, s_i^{l_i-1}(x))$ с учетом того, что $s_i^{l_i}(x) = x$, $1 \leq i \leq k$. Это позволяет всю подстановку s разложить на циклы:

$$s = (x_1, s_1(x_1), \dots, s_1^{l_1-1}(x_1)) \dots (x_k, s_k(x_k), \dots, s_k^{l_k-1}(x_k)).$$

Если подстановки s_1, \dots, s_k доопределить до подстановок степени n , полагая $s_i(x) = x$, $x \in X \setminus X_i$, то эту запись можно рассматривать как разложение подстановки s в виде произведения независимых циклов: $s = s_1 s_2 \dots s_k$. Поскольку орбиты X_1, \dots, X_k не имеют общих элементов, то это произведение не зависит от порядка сомножителей. Отметим также, что запись цикла $s_i = (x, s_i(x), \dots, s_i^{l_i-1}(x))$ однозначна с точностью до циклического сдвига, т. е.

$$s_i = (s_i^r(x), s_i^{r+1}(x), \dots, s_i^{r+l_i-1}(x)), \quad 0 \leq r \leq l_i - 1.$$

Например, разложение следующей подстановки степени 7 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1) (2\ 3\ 7) (5\ 6\ 4).$$

Пусть подстановка $s \in S_n$ имеет порядок p , т. е. $s^p = e$, и пусть p — наименьшее из чисел, обладающих этим свойством. Тогда p равно наименьшему общему кратному длии циклов, входящих в разложение s . Действительно, если это разложение имеет вид $s = s_1 s_2 \dots s_k$, то $s^p = s_1^p s_2^p \dots s_k^p$. Поскольку $s_i^{l_i} = e$, $i = 1, \dots, k$, то p совпадает с наименьшим общим кратным чисел l_1, l_2, \dots, l_k .

Цикл длины 2 называется *транспозицией* и обозначается $\tau(x, y)$. Это есть подстановка, оставляющая на месте все символы, кроме x и y . Каждый цикл можно представить в виде произведения транспозиций, например, следующим образом:

$$(x_1, x_2, \dots, x_i) = (x_1, x_2)(x_1, x_3) \dots (x_1, x_{i-1})(x_1, x_i).$$

Отсюда следует, что каждая подстановка может быть представлена в виде произведения транспозиций. Иными словами, для группы S_n , действующей на множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, множество всех транспозиций является системой образующих, т. е.

$$S_n = \langle (x_1, x_2), \dots, (x_1, x_n), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n) \rangle.$$

Будем говорить, что подстановка $s \in S_n$ принадлежит цикловому классу $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, если она содержит α_j циклов длины j , $1 \leq j \leq n$, $1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$. Обозначим через $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ число подстановок в цикловом классе $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, $1\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n$. Покажем, что

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (5.1)$$

Рассмотрим разложение подстановки $s \in S_n$ из циклового класса $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$ в виде произведения независимых циклов:

$$s = (x_1) (x_2) \dots (x_{\alpha_1}) (y_1, z_1) (y_2, z_2) \dots (y_{\alpha_2}, z_{\alpha_2}) \dots$$

Путем всевозможных $n!$ перестановок элементов при сохранении скобок можно получить любую другую подстановку из этого класса. Перестановки, осуществляющие циклические сдвиги элементов внутри скобок, и перестановки, переводящие полностью элементы из одной скобки в скобки, содержащие такое же число элементов, очевидно, не дают новых подстановок. Число таких перестановок равно $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ Умножая эту величину на число различных подстановок в цикловом классе $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, получаем число всех перестановок. Таким образом,

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! = n!,$$

т. е. верна формула (5.1). Из нее вытекает тождество

$$\sum_{1\alpha_1+\dots+n\alpha_n=n} \frac{1}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} = 1, \quad (5.2)$$

где суммирование осуществляется по всем решениям уравнения $1\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n$, представляющим собой векторы $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Обозначим через $C(n, k)$ число подстановок степени n , имеющих k циклов. Из формулы (5.1) следует выражение этих чисел в виде суммы:

$$C(n, k) = \sum_{\substack{1\alpha_1+\dots+n\alpha_n=n \\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=k \\ \alpha_i \geq 0}} \frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (5.3)$$

Из комбинаторных соображений получим для чисел $C(n, k)$ рекуррентное соотношение

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + (n-1)C(n-1, k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Положим $C(0, 0) = 1$, $C(n, 0) = 0$, $n > 0$, и $C(n, k) = 0$ при $k > n$ или при n или k отрицательных. Тогда это соотношение можно распространить на все целочисленные значения k и n . Для доказательства (5.4) множество подстановок с k циклами, действующих на n -множестве X , разобьем на два класса: к первому отнесем подстановки, оставляющие фиксированный элемент x на месте, т. е. $s(x) = x$, а ко второму — все остальные подстановки с k циклами. Первый класс содержит $C(n-1, k-1)$ подстановок, второй $(n-1)C(n-1, k)$. Тем самым соотношение (5.4) доказано. Рассмотрим многочлен

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Умножив обе части соотношения (5.4) на x^k и просуммировав их по k от 0 до n , получим

$$C_n(x) = (n+x-1)C_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Применяя это соотношение многократно с учетом того, что $C_0(x) = 1$, имеем

$$C_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1). \quad (5.6)$$

Обратимся теперь к формуле (4.50): заменим в ней x на $-x$ и умножим обе части равенства на $(-1)^n$. В результате для чисел Стирлинга первого рода получаем равенство

$$x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} s(n, k) x^k. \quad (5.7)$$

Теперь из (5.5) — (5.7) имеем

$$C(n, k) = (-1)^{n+k} s(n, k). \quad (5.8)$$

Отсюда, помимо комбинаторного смысла для чисел Стирлинга первого рода, с учетом равенства (5.4) следует также рекуррентное соотношение для этих чисел:

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k). \quad (5.9)$$

4. Циклический индекс. Пусть G — группа подстановок степени n и $\alpha_i(g)$ — число циклов длины i в подстановке $g \in G$. Многочлен

$$Z(t_1, \dots, t_n; G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i(g)} \quad (5.10)$$

называется циклическим индексом группы подстановок.

Для симметрической группы S_n степени n он имеет вид

$$Z(t_1, \dots, t_n; S_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n} C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}, \quad (5.11)$$

где $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — число элементов в цикловом классе $\{t^{\alpha_1} \dots t^{\alpha_n}\}$, определяемое формулой (5.1). Суммирование проводится по всем решением $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ уравнения $\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n$.

Рассмотрим теперь циклическую группу C_n подстановок степени n , все элементы которой являются степенями единицы и той же подстановки C , являющейся циклическим сдвигом: $C = (1, 2, \dots, n)$. Эта группа имеет вид $C^0, C, C^2, \dots, C^{n-1}$. Ясно, что подстановка C^j имеет (n, j) циклон длины $n/(n, j)$, где (n, j) — общий наибольший делитель n и j . Циклический индекс группы C_n имеет вид

$$Z(t_1, \dots, t_n; C_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t_{n/(n,j)}^{(n,j)}.$$

Заметим, что при фиксированном k число целых j , $0 \leq j \leq n-1$, удовлетворяющих равенству $(n, j)k = n$, равно $\varphi(k)$, где $\varphi(k)$ — функция Эйлера, равная числу элементов из совокупности $0, 1, \dots, k-1$, взаимно простых с k . Таким образом,

$$Z(t_1, \dots, t_n; C_n) = \frac{1}{n} \sum_{k|n} \varphi(k) t_k^{n/k}. \quad (5.12)$$

Для циклического индекса произвольной группы подстановок G справедливо равенство $Z(1, \dots, 1; G) = 1$. Из этого равенства и из формулы (5.12) следует известное соотношение для функции Эйлера:

$$\sum_{k|n} \varphi(k) = n.$$

Упражнения. 1. Показать, что множество подстановок $\{(1)(2)(3), (1)(2)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ образует коммутативную группу, называемую группой Клейна.

2. Доказать, что симметрическая группа степени n порождается транспозициями $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$, т. е.

$$S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n) \rangle.$$

3. Доказать, что цикловый класс $\{t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n}\}$, $\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n$, содержащий наибольшее число подстановок, удовлетворяет условию

$$\alpha_1 = \alpha_{n-1} = 1; \quad \alpha_i = 0, \quad i \neq 1, n-1.$$

4. Декрементом подстановки x назовем число $n - k(x)$, где $k(x)$ — число циклов в разложении x . Подстановка x называется четной (нечетной), если $n - k(x)$ четно (нечетно). Показать, что если (i, j) — транспозиция, то подстановка x и $(i, j)x$ имеют разную четность.

5. Показать, что совокупность четных подстановок степени n образует группу, называемую *знакопеременной группой* A_n .

6. Доказать, что любая подстановка x степени n , имеющая $k(x)$ циклов, может быть представлена в виде произведения $n - k(x)$ транспозиций, причем подстановка не может быть представлена в виде произведения меньшего числа транспозиций.

7. Пусть $d(n, k)$ — число подстановок степени n с k циклами, ни один из которых не является единичным. Вывести рекуррентное соотношение

$$d(n+1, k) = nd(n, k) + nd(n-1, k-1).$$

8. Используя равенство $C_{n+1}(t) = (n+t)C_n(t)$ для $C_n(t) = t(t+1) \dots (t+n-1)$, индукцией по n доказать, что

$$C_{n+m}(t) = C_n(t)C_m(t) \pmod{n}.$$

9. Для чисел Стирлинга первого рода доказать равенство

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} k s(n, k) = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k}.$$

§ 6. Булевы функции

1. **Определения.** Рассмотрим множество B из двух элементов, которые будем обозначать 0, 1, т. е. $B = \{0, 1\}$. Элемент $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^{(n)}$, $B^{(n)} = B \times \dots \times B$, называется *булевым вектором*. Функция $f: B^{(n)} \rightarrow B$ называется *булевой функцией* от n переменных x_1, \dots, x_n , $x_i \in B$, и обозначается $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если $f(\bar{x}) = 1$, то булев вектор \bar{x} называется *единичным* относительно функции f ; если $f(\bar{x}) = 0$, то \bar{x} называется *нулевым* относительно функции f . Так как булева функция от n переменных вполне определена заданием единичных и нулевых булевых n -векторов, то число таких функций равно 2^{2^n} .

Для булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ переменная x_i , $1 \leq i \leq n$, называется *несущественной*, если выполнено равенство

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

для всех значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. В этом случае функция $f(x_1, \dots, x_n)$ фактически не зависит от переменной x_i и можно рассматривать функцию, зависящую от $n-1$ переменных, которая совпадает с исходной. Поэтому, по определению, считаем, что две функции f_1 и f_2 равны между собой, если f_2 может быть получена из f_1 добавлением или удалением несущественных переменных. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется

симметрической, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}),$$

где (i_1, \dots, i_n) — произвольная перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Ясно, что симметрическая функция определяется своими значениями на различных n -мультимножествах, соответствующих n -векторам из $B^{(n)}$. Согласно формуле (2.7) число таких n -мультимножеств равно $n+1$. Отсюда следует, что число симметрических функций от n переменных равно 2^{n+1} .

2. Простейшие функции и формулы. Рассмотрим сначала четыре булевы функции от одной переменной. Зададим их в виде таблицы

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

так под символом φ_i стоят значения функции φ_i , когда x принимает значения 0 и 1.

Для функций φ_1 и φ_3 x является несущественной переменной. Эти функции называют *константами*, соответственно 0 и 1. Функцию φ_2 называют *тождественной*, а функцию φ_0 — *отрицанием* x , и записывают $\varphi_0(x) = \bar{x}$, $\varphi_1(x) = \bar{x}$.

Перейдем теперь к рассмотрению 16 функций от двух переменных. Запишем их также в виде таблицы

x_1	x_2	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}	Ψ_{13}	Ψ_{14}	Ψ_{15}	Ψ_{16}
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	

Функции Ψ_1 и Ψ_2 являются константами, соответственно 0 и 1. Функцию Ψ_3 называют *конъюнкцией* x_1 и x_2 и обозначают $\Psi_3(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, где точку между x_1 и x_2 обычно опускают. Функция Ψ_4 называется *дизъюнкцией* x_1 и x_2 и обозначается $\Psi_4(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$. Функцию $\Psi_5(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ называют *сложением* x_1 и x_2 по модулю 2.

Некоторые из остальных функций также имеют специфические названия. Например, Ψ_{15} называется *импликацией* и обозначается $\Psi_{15}(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$. Функции, означающие отрицание, а также конъюнкцию и дизъюнкцию, определяют на множестве

$B = \{0, 1\}$ унарную и соответственно бинарные операции, которые называются так же, как и соответствующие функции. Эти операции обладают следующими свойствами.

1) Идемпотентность:

$$x = x, \quad x \cdot x = x, \quad x \vee x = x.$$

2) Свойства констант:

$$x \cdot 1 = x, \quad x \cdot 0 = 0; \quad x \vee 1 = 1, \quad x \vee 0 = x;$$

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0; \quad \bar{xz} = 0, \quad x \vee \bar{x} = 1,$$

3) Ассоциативность:

$$x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3; \quad (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3).$$

4) Коммутативность:

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1, \quad x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1.$$

5) Дистрибутивность:

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3, \quad x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3).$$

6) Законы де Моргана:

$$\overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2.$$

Функция f называется *суперпозицией* булевых функций f_1, \dots, f_k , если она получается некоторой подстановкой этих булевых функций друг в друга. Выражение, описывающее результат этой подстановки, называется *формулой*, задающей функцию f . Например, функция $\varphi_4(\Psi_1(x_1, x_2))$ задается формулой $x_1 \cdot x_2$, а функции $\Psi_1(\Psi_2(x_1, x_2), \Psi_3(x_1, x_2))$ соответствует формула $x_1 \cdot x_2 \vee (x_1 \oplus x_2)$. О формуле, задающей некоторую булеву функцию, говорят, что она *реализует* эту функцию.

3. Совершенная д. и. ф. Всякую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно разложить по переменной x_i :

$$f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_n) = x_i f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n) \vee \bar{x}_i f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n).$$

Справедливость этого равенства устанавливают непосредственной проверкой, полагая $x_i = 0, 1$. Проводя разложение по переменным x_1, x_2, \dots, x_m можно получить при $m \leq n$

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} f(\alpha_1, \dots, \alpha_m, x_{m+1}, \dots, x_n). \quad (6.1)$$

где полагаем $\alpha_i = 0, 1$ и $x_i^0 = \bar{x}_i$, $x_i^1 = x_i$, и дизъюнкция берется по всем 2^m булевым m -векторам.

Для доказательства формулы (6.1) вычислим значения обеих частей отвечающего ей равенства для произвольного, но фикси-

рованного вектора $(\beta_1, \dots, \beta_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n)$ значений аргументов. Заметим, что выражение $x_i^{\alpha_i}$ равно 1 только при $x_i = \alpha_i$. Поэтому среди 2^n конъюнкций $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ в правой части равенства (6.1) имеется только одна не обращающаяся в нуль при $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Поэтому

$$f(\beta_1, \dots, \beta_n) = \beta_1^{\alpha_1} \dots \beta_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n).$$

Так как $\beta_1^{\alpha_1} \dots \beta_n^{\alpha_n} = 1$, то формула (6.1) справедлива.

Из формулы (6.1) при $m = n$ имеем разложение

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (6.2)$$

где суммирование ведется по всем булевым векторам $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, для которых $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$. Это разложение называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Ввиду коммутативности конъюнкций и дизъюнкций для всякой булевой функции, кроме константы 0, соответствующая дизъюнктивная нормальная форма однозначно определяет саму функцию. Отсюда следует, что всякая булева функция может быть получена суперпозицией конъюнкций, дизъюнкций и отрицания.

4. Сокращенные, тупиковые и минимальные д. и. ф. Формула $K = K(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \dots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}}$, где $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_{i_k} = 0, 1$, $1 \leq k \leq r$, называется *элементарной конъюнкцией* ранга r от переменных x_1, x_2, \dots, x_n , если $i_k \neq i_l$ при $k \neq l$. Формула $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_r$, где $K_i \neq K_j$, $i \neq j$, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (д. и. ф.). Любая булева функция реализуется некоторой д. и. ф. При этом элементарные конъюнкции K_1, \dots, K_r называются *ищипикантами* соответствующей функции. В качестве такой д. и. ф. можно, например, взять соответствующую ей совершенную д. и. ф. Множество векторов $B^{(n)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}$, $\alpha_i = 0, 1$, $1 \leq i \leq n$, называется *булевым кубом*, а векторы $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — его *вершинами*. Множество $B_k^{(n)} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_{i_1} = \beta_1, \dots, \alpha_{i_k} = \beta_{i_k}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n\}$, где $\beta_{i_l} = 0, 1$, $1 \leq l \leq k$, называется $(n - k)$ -мерной гранью куба $B^{(n)}$.

Каждой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в булевом кубе $B^{(n)}$ можно поставить в соответствие множество его вершин

$$N_f = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1\},$$

которое однозначно определяет эту функцию. Если функция реализуется элементарной конъюнкцией $K(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}}$, то соответствующее множество N_K называется *интервалом* r -го

ранга. Ясно, что N_K является $(n - r)$ -мерной гранью. Очевидно, что если

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \vee \psi(x_1, \dots, x_n),$$

то $N_f = N_\varphi \cup N_\psi$. Следовательно, для функции f , реализуемой д. и. ф. $K_1 \vee \dots \vee K_s$, справедливо равенство

$$N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_s}. \quad (6.3)$$

Это означает, что множество N_f покрыто интервалами N_{K_1}, \dots, N_{K_s} соответствующими элементарным конъюнкциям K_1, \dots, K_s . Если

r_i — ранг K_i , то число $r = \sum_{i=1}^s r_i$ называется *рангом покрытия*.

Имплеканта K_i , $1 \leq i \leq s$ функции f , заданной д. и. ф. $K_1 \vee \dots \vee K_s$, называется *простой*, если после отбрасывания любого из входящих в нее сомножителей получается элементарная конъюнкция, не являющаяся имплекантой функции f . Если все имплеканты K_1, \dots, K_s простые, то соответствующая д. и. ф. $K_1 \vee \dots \vee K_s$ называется *сокращенной* д. и. ф. функции f . Интервал N_{K_i} , соответствующий простой имплеканте K_i , является максимальным в том смысле, что не существует интервала $N_{K'_i}$, такого, что $N_{K_i} \subset N_{K'_i} \subseteq N_f$. Покрытие множества N_f максимальными интервалами N_{K_1}, \dots, N_{K_s} называется *неприводимым*, если при выбрасывании любого из этих интервалов оно перестает быть покрытием. Д. и. ф., соответствующая неприводимому покрытию множества N_f , называется *туниковой*.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, для которой

$$N_f = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}. \quad (6.4)$$

Совершенная д. и. ф., реализующая эту функцию, выглядит следующим образом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3. \quad (6.5)$$

Используя свойства операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, д. и. ф., реализующую $f(x_1, x_2, x_3)$, можно представить в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2. \quad (6.6)$$

Очевидно, что входящие в д. и. ф. (6.6) имплеканты являются простыми, т. е. сама д. и. ф. является сокращенной. Более того, д. и. ф. (6.6) является и туниковой, так как покрытие

$$N_f = N_{\bar{x}_1 x_2} \cup N_{\bar{x}_2 x_3} \cup N_{x_2 \bar{x}_3} \cup N_{x_1 \bar{x}_2} \quad (6.7)$$

является неприводимым. Отметим, однако, что д. и. ф. (6.6) не является самой «экономной» ни с точки зрения числа используемых букв, обозначающих переменные, ни с точки зрения количества импликант.

Д. и. ф., реализующая функцию f и обладающая наименьшим числом букв, обозначающих переменные, с учетом их повторения, называется *минимальной*. Д. и. ф., реализующая функцию f и содержащая наименьшее число импликант, называется *кратчайшей*.

Для отыскания минимальных и кратчайших д. и. ф. удобно использовать геометрический подход. Рассмотрим булев куб $B^{(3)}$ (рис. 1). Для рассматриваемой в примере функции f множество N_f изображается вершинами $B^{(3)}$, которые отмечены точками. Интервалы $N_{x_2 \bar{x}_3}, N_{\bar{x}_1 x_3}, N_{x_1 \bar{x}_3}, N_{\bar{x}_2 x_3}$ представляют собой ребра куба, покрывающие вершины множества N_f . Можно указать два других покрытия множества N_f ребрами куба $B^{(3)}$, содержащие меньшее число ребер. Одно из таких покрытий содержит ребра $N_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}, N_{\bar{x}_2 x_3}, N_{x_2 \bar{x}_3}$, другое состоит из ребер $N_{\bar{x}_2 x_3}, N_{\bar{x}_1 x_2}, N_{x_1 \bar{x}_3}$. Этим покрытиям отвечают две минимальные и кратчайшие д. и. ф., реализующие функцию f :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3, \\ f(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3. \end{aligned}$$

Упражнение. 1. На множестве $B^{(n)}$ булевых n -мерных векторов зададим отношение порядка, полагая $\bar{x} \leqslant \bar{y}$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, если $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Булева функция $f(\bar{x})$ называется *монотонной*, если из условия $\bar{x} \leqslant \bar{y}$ следует, что $f(\bar{x}) \leqslant f(\bar{y})$. Показать, что суперпозиция двух монотонных функций дает снова монотонную функцию.

2. Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).$$

Показать, что суперпозиция двух самодвойственных функций приводит к самодвойственной функции.

3. Показать, что число булевых функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, таких, что для любых $(x_1, \dots, x_n) \in B^n$

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n),$$

где $i \neq j$, равно $2^{n-2} \cdot 2^{n-2}$.

4. Показать, что число функций, для которых фиксированная элементарная конъюнкция равна f является импликантой, равно $2^{n-1} \cdot 2^{n-2}$.

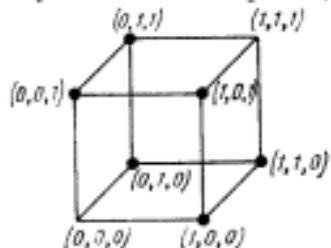


Рис. 1.

5. Показать, что любая булева функция от n переменных может быть реализована д. и. ф., содержащей не более 2^{n-1} конъюнкций.

6. Показать, что число k -мерных граней куба $B^{(n)} = B \times \dots \times B$, $B = \{0, 1\}$, равно $\binom{n}{k} 2^{n-k}$.

7. Показать, что число конъюнкций, которые можно записать, используя не более n переменных, равно 3^n .

8. Показать, что число конъюнкций в тупиковой д. и. ф. не превосходит 2^n .

9. Показать, что для числа тупиковых д. и. ф. $t(n)$ булевых функций от n переменных справедливо неравенство

$$t(n) \leq \sum_{k=0}^{2^n} \binom{3^n}{k}.$$

10. Показать, что число различных д. и. ф., составленных из n переменных, равно 2^{3^n} .

11. На множестве граней n -мерного куба $B^{(n)} = B \times \dots \times B$, $B = \{0, 1\}$, определим частичное упорядочение по отношению операции вложения граней друг в друга и рассмотрим неуплотняемые цепочки граней

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = B^{(n)},$$

каждая из которых соединяет нульмерную грань — вершину с n -мерной гранью. Доказать, что:

- а) размерность грани K_i равна i , $0 \leq i \leq n$;
- б) число всевозможных неуплотняемых цепочек равно $n! 2^n$;
- в) число цепочек, включающих в себя фиксированную грань размерности r , равно $2^r \cdot r!(n-r)!$;
- г) цепочки, отвечающие различным граням, различны;
- д) для сокращенной д. и. ф. $D_c(f)$ произвольной булевой функции f от n переменных имеет место неравенство

$$\sum_{K \in D_c(f)} \frac{1}{2^{n-r} \binom{n}{r}} \leq 1,$$

где r — размерность грани K , являющейся импликантой $D_c f$.

е) число конъюнкций $I_c(n)$ в сокращенной д. и. ф. произвольной функции от n переменных удовлетворяет неравенству

$$I_c(n) \leq 2^{n-\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{\lfloor n/3 \rfloor}.$$

Указание: Использовать доказательства теоремы 1 § 1.

ЗАДАЧИ

1. Доказать следующие тождества:

а) $\sum_{i=0}^m \binom{n}{s+i} \binom{m}{i} = \binom{m+n}{m+s};$

$$6) \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+1}{i} \binom{2n-2i}{n} = n+1, \quad k = \begin{cases} n/2, & n \text{ четно}, \\ (n-1)/2, & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

2. Для действительной переменной x при заданном k и $n = 1, 2, \dots$ вывести формулы:

$$a) \Delta^n \left(\frac{1}{x+k} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(x+k)(x+k+1) \dots (x+k+n)};$$

$$b) \Delta^n \ln x = \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! dt}{(x-t)(x-t+1) \dots (x-t+n-1)},$$

где Δ — оператор конечной разности по x .

3. Доказать, что если ε — первообразный корень степени k из единицы, степени которого $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}$ исчерпывают все корни из единицы $e^{2\pi i j/k}, j = 0, 1, \dots, k-1, i = \overline{j-1}$, то для $0 \leq h < k$

$$\sum_{k=0}^h \binom{n}{\lambda k + h} = \frac{1}{k} \sum_{s=0}^{k-1} e^{-sh} (1 + \varepsilon^s)^n.$$

4. Из предыдущего равенства вывести, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{\lambda k + h} = \frac{1}{k}.$$

$$5. \text{Доказать тождество } n! = \sum_{h=0}^n (-1)^{n-h} \binom{n}{h} k^n.$$

6. Доказать, что:

$$a) \frac{1}{(x+r)(x+r+1) \dots (x+r+n)} = \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} \frac{1}{(x+r+s)};$$

$$b) \sum_{s=0}^{2p} (-1)^s \binom{n}{2p-s} \binom{n}{s} = (-1)^p \binom{n}{p}, \quad 0 \leq p \leq n;$$

$$n) \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{1}{(x+r)(x+r+1) \dots (x+r+n)} =$$

$$= \frac{2^n}{x(x+2)(x+4) \dots (x+2n)}.$$

7. Показать, что число способов, которыми можно расположить на прямой a_1 единиц, a_2 двоек, \dots , a_k чисел n , так, чтобы числу $k+1$ предшествовало

по крайней мере одно из чисел k , $1 \leq k \leq n$, равно

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n - 1}{\alpha_k - 1} \right) = \frac{\left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j) \right)!}{\prod_{k=1}^n [(\alpha_k - 1)! \sum_{j=k}^n \alpha_j]}.$$

8. Для чисел Фибоначчи v_n , определяемых рекуррентным соотношением $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, $v_1 = v_2 = 1$, доказать, что:

- a) $v_m v_{m+2} - v_m v_{m+3} = (-1)^m$, m нечетно;
- b) $v_{n+1} v_{n-1} - v_n^2 = (-1)^n$;
- c) $v_{n+1} = v_n^2 - 2$, $n \geq 1$, $v_k = v_{2k+1}/v_{2k}$, $k \geq 1$.

9. Доказать, что постоянная Эйлера, определяемая равенством

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \ln n \right),$$

может быть представлена двойным рядом

$$C = \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}.$$

10. Доказать тождество

$$\binom{n}{r} = \frac{2^n}{n} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{\pi k}{n} \right)^n \cos \frac{\pi (n-2r)k}{k},$$

используя равенство $\binom{n}{r} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{-kr} (1 + e^k)^n$, $e = e^{2\pi i/n}$, $i = \sqrt{-1}$.

11. Пусть G — абелева группа и E — такое подмножество, содержащее n ее элементов, что из $g \in E$ следует $g^{-1} \in E$. Показать, что если D — множество n^2 произведений вида $g_i g_j$, где $g_i, g_j \in E$, то не более $\binom{n}{2}$ этих произведений принадлежит множеству E .

12. Доказать, что

$$\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p} \right] \pmod{p},$$

где p — простое число, $[k]$ — целая часть от k .

13. Доказать, что: а) n прямых разбивают плоскость на $1 + n + \binom{n}{2}$ частей, если никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке;

6) n плоскостями разбивают трехмерное пространство на $1 + n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{3}$ частей, если никакие четыре из них не проходят через одну точку, никакие три не пересекаются по одной прямой и никакие две не параллельны.

14. Показать, что число $a_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ делится на $n - 1$.

15. Доказать равенства:

$$5) \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k k}{\binom{2n}{k}} = \frac{n}{n+1}; \quad 6) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n}{n+1};$$

$$n) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

ГЛАВА II
ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ
И МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЯ — ИСКЛЮЧЕНИЯ

§ 1. Метод включения — исключения

1. Классическая формула. Для любых конечных множеств X , Y , применения правило суммы, получаем следующие равенства:

$$|X| = |X \cap Y| + |X \setminus (X \cap Y)|, \quad |Y| = |X \cap Y| + |Y \setminus (X \cap Y)|,$$

$$|X \cup Y| = |X \cap Y| + |X \setminus (X \cap Y)| + |Y \setminus (X \cap Y)|.$$

Из этих равенств следует, что

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|. \quad (1.1)$$

Если заданы произвольные множества X_1, X_2, \dots, X_n , то, полагая $X = X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}$, $Y = X_n$, из (1.1) получаем

$$|X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| = |X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}| + |X_n| - |(X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cap X_n|. \quad (1.2)$$

Используя это равенство, докажем следующую общую формулу:

$$\begin{aligned} |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n| &= \sum_{i=1}^n |X_i| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_k}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1} |X_1 \cap \dots \cap X_n|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эта формула является классической формулой метода *включения — исключения*. Докажем ее индукцией по n . При $n=2$ она совпадает с формулой (1.1), если положить $X = X_1$, $Y = X_2$. Допустим, что она верна для $n-1$ множеств. Тогда

$$\begin{aligned} |X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}| + |X_n| &= \sum_{i=1}^n |X_i| - \sum_{1 \leq i < i_2 \leq n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \dots \cap X_{i_k}| + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-2} |X_1 \cap \dots \cap X_{n-1}|. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} |(X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}) \cap X_n| &= |(X_1 \cap X_n) \cup \dots \cup (X_{n-1} \cap X_n)| = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |X_i \cap X_n| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_n| + \dots \end{aligned}$$

$$\dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k} \cap X_n| + \dots \\ \dots + (-1)^{n-2} |X_1 \cap \dots \cap X_n|. \quad (1.5)$$

Вычитая из (1.4) равенство (1.5), с учетом (1.2) и равенства

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n-1} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}| + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} |X_{i_1} \cap \dots \\ \dots \cap X_{i_{k-1}} \cap X_n| = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}|$$

убеждаемся в справедливости формулы (1.3). Заметим, что если $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, то формула (1.3) совпадает с правилом суммы.

2. Неподвижные элементы. Рассмотрим совокупность U всех возможных преобразований n -множества X . Будем говорить, что элемент $x \in X$ является *неподвижным* для преобразования $\varphi \in U$, если $\varphi(x) = x$. Обозначим через H_n число преобразований n -множества, не содержащих неподвижных элементов. Для определения H_n применим метод включения — исключения.

Положим $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и рассмотрим множества $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)$, где $U(x_i)$ — совокупность преобразований φ множества X , таких, что x_i является неподвижным элементом, т. е. $\varphi(x_i) = x_i$. Очевидно, что

$$|U(x_1) \cap \dots \cap U(x_k)| = (n-k)^{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

так как эта величина, равная числу отображений, у которых элементы x_{i_1}, \dots, x_{i_k} являются неподвижными, совпадает с числом преобразований $(n-k)$ -множества. Теперь, применяя формулу (1.3), получим выражения для числа преобразований n -множества, имеющих каждое хотя бы один неподвижный элемент:

$$|U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^{n-k}.$$

Так как $H_n = n^n - |U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)|$, то окончательно имеем

$$H_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n-k}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь совокупность биективных преобразований, т. е. подстановок n -множества. Определим h_n — число подстановок степени n без неподвижных элементов множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Обозначим через $V(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, совокупность подстановок X , для которых x_i является неподвижным элементом. Очевидно, что

$$|V(x_1) \cap \dots \cap V(x_k)| = (n-k)!,$$

так как эта величина, равная количеству подстановок с неподвижными элементами $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, совпадает с числом подстановок $(n-k)$ -множества. Таким образом, согласно формуле (1.3) число подстановок, имеющих хотя бы один неподвижный элемент, равно

$$|V(x_1) \cup \dots \cup V(x_n)| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!,$$

а поскольку $h_n = n! - |V(x_1) \cup \dots \cup V(x_n)|$, то находим

$$h_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \quad (1.7)$$

3. Сюръективные отображения. Пользуясь методом включения — исключения, дадим другой вывод формулы (4.11) гл. I для $D(n, m)$ — числа сюръективных отображений m -множества X в n -множество $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Обозначим через $W(y_k)$ совокупность отображений $\phi: X \rightarrow Y$, для которых $y_k, k = 1, \dots, n$, не используется в качестве образа. Тогда

$$|W(y_{i_1}) \cap \dots \cap W(y_{i_k})| = (n-k)^m, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Следовательно, согласно формуле (1.3)

$$|W(y_1) \cup \dots \cup W(y_n)| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Отсюда следует требуемая формула:

$$D(n, m) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \quad (1.8)$$

4. Общие формулы. Получим теперь общие формулы метода включения — исключения, из которых классическая формула следует в качестве частного случая. Рассмотрим N элементов a_1, a_2, \dots, a_N , которым соответственно приписаны веса $\omega(a_1), \omega(a_2), \dots, \omega(a_N)$, являющиеся элементами некоторого коммутативного кольца K . Каждый из заданных элементов может обладать или не обладать некоторыми свойствами A_1, A_2, \dots, A_n . Обозначим через $M(r)$ суммарный вес элементов, обладающих точно r свойствами A и через M_r — суммарный вес элементов, обладающих не менее чем r свойствами. Покажем, что

$$M(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

$$M_r = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k-1}{r-1} S_k, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (1.10)$$

где

$$S_0 := \sum_{i=1}^n \omega(a_i), \quad S_k := \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k < n} M(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$M(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})$ — суммарный вес элементов, обладающих фиксированными свойствами $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$.

Формулы (1.9), (1.10) называются *общими формулами* метода включения — исключения. Для доказательства этих формул покажем, что в правую часть равенства (1.9) входят все веса элементов, обладающих r свойствами, и только они.

Веса элементов, обладающих точно r свойствами, учитываются ровно один раз в сумме S_r и не входят в остальные суммы S_{r+1}, \dots, S_n . Веса элементов, обладающих $\mu > r$ свойствами, в сумме S_μ , $k > r$, учитываются $\binom{\mu}{k}$ раз. Поэтому в правых частях равенств (1.9) вес таких элементов входит с коэффициентом, равным

$$\sum_{k=r}^{\mu} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{\mu}{k} = \binom{\mu}{r} \sum_{j=0}^{\mu-r} (-1)^j \binom{\mu-r}{j} = 0.$$

Веса элементов, обладающих $\mu < r$ свойствами, не входят в правые части равенств (1.9). Этим формулы (1.9) доказаны.

Переходим к доказательству формул (1.10). Имеем

$$M_r := \sum_{j=r}^n M(j) = \sum_{k=r}^n S_k \sum_{j=r}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j}. \quad (1.11)$$

Заметим, что сумма

$$\sum_{j=r}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} = \sum_{j=0}^{k-r} (-1)^j \binom{k}{j}$$

есть коэффициент при x^{k-r} в выражении $(1-x^k)(1-x)^{-1}$. С другой стороны, этот коэффициент равен $(-1)^{k-r} \binom{k-1}{k-r}$. Поэтому из равенств (1.11) следуют формулы (1.10).

Если $\omega(a_1) = \dots = \omega(a_n) = 1$, то $M(r)$ представляет собой число элементов, обладающих ровно r свойствами из числа заданных A_1, A_2, \dots, A_n . Если \mathbb{A}_i — множество элементов, обладающих свойством A_i , $i = 1, \dots, n$, то число элементов, одновременно обладающих свойствами $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, равно $M(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) := |\mathbb{A}_{i_1} \cap \mathbb{A}_{i_2} \cap \dots \cap \mathbb{A}_{i_k}|$. Кроме того, число элементов, обладающих хотя бы одним из свойств A_1, A_2, \dots, A_n , равно $M_r := |\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \dots \cup \mathbb{A}_n|$, и, таким образом, из формул (1.10) следует классическая формула включения — исключения.

5. Расстояние Хэмминга. Рассмотрим множество U , элементами которого являются все m -векторы с координатами из n -множества X . На множество $U^{(2)} = U \times U$ зададим функцию со значениями из множества $N = \{0, 1, \dots, m\}$. Для любой пары $(u, v) \in U^{(2)}$ положим

$$\rho(u, v) = \sum_{i=1}^m (1 - \delta_{x_i, y_i}),$$

где $u = (x_1, \dots, x_m)$, $v = (y_1, \dots, y_m)$, $x_i, y_i \in X$; δ_{ij} — символ Кронекера. Таким образом, $\rho(u, v)$ равно числу несовпадающих координат векторов u , v . Это число называется *расстоянием Хэмминга* между векторами u и v .

Покажем, что функция $\rho(u, v)$ является *метрикой*, т. е. удовлетворяет условиям:

- 1) $\rho(u, v) \geq 0$ и $\rho(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;
- 2) $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ для всех $u, v \in U$;
- 3) $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ для всех $u, v, w \in U$ (*неравенство треугольника*).

Условия 1) и 2) очевидны, поэтому докажем только неравенство треугольника. Для фиксированных векторов $u = (x_1, \dots, x_m)$, $v = (y_1, \dots, y_m)$, $w = (z_1, \dots, z_m)$ рассмотрим множества $A = \{i : x_i = y_i\}$, $B = \{i : x_i = z_i\}$, $C = \{i : y_i = z_i\}$, $\bar{A} = N \setminus A$, $\bar{B} = N \setminus B$, $\bar{C} = N \setminus C$, $N_1 = \{1, 2, \dots, m\}$. Если $x_i = z_i$ и $y_i = z_i$, то отсюда следует, что $x_i = y_i$. Значит, $B \cap C \subseteq A$. Взяв от обеих частей включения дополнение и тем самым заменив включение на обратное, получим $\bar{A} \subseteq \bar{B} \cup \bar{C}$. Наконец, применяя первый закон де Моргана, имеем $\bar{A} \equiv \bar{B} \cup \bar{C}$. Отсюда $|\bar{A}| \leq |\bar{B}| + |\bar{C}|$. Наконец, заметим, что $\rho(u, v) = |\bar{A}|$, $\rho(u, w) = |\bar{B}|$, $\rho(w, v) = |\bar{C}|$.

Зафиксируем некоторый m -вектор $u = (x_1, \dots, x_m)$, $u \in U$. Множество m -векторов $v \in U$ с координатами из n -множества, таких, что $\rho(u, v) = m - r$, будем называть *сферой радиуса $m - r$* с центром в точке u . Множество векторов, принадлежащих сфере, обозначим через $S_r(u)$. Так как число m -векторов, принадлежащих $S_r(u)$, совпадает с числом способов выбора $m - r$ координат некоторого m -вектора v , не совпадающих с соответствующими координатами m -вектора u , то это число равно $\binom{m}{r}(n-1)^{m-r}$.

Рассмотрим теперь подмножество U' множества U , состоящее из векторов с различными координатами, принимающими значения из n -множества X . Сужение на U' метрики ρ , определенной на U , представляет собой также метрику, которую будем обозначать также ρ .

Определим $h_{mr}(n)$ — число m -векторов $v \in U'$ таких, что $\rho(u, v) = m - r$, где $u \in U'$ — фиксированный m -вектор. Положим $u = (x_1, \dots, x_m)$, $v = (y_1, \dots, y_m)$ и будем считать, что вектор v обладает свойством A_i , если $y_i = x_i$. Тогда $h_{mr}(n)$ равно числу m -векторов из U' , обладающих ровно r свойствами из заданной

совокупности A_1, A_2, \dots, A_m . Число m -векторов из U' , обладающих свойствами $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, равно $M(A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_k}) = (n - k)_{m-k}$. Теперь, применяя формулу (1.9) метода включения — исключения, имеем

$$h_{mr}(n) = \sum_{k=r}^m (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{m}{k} (n - k)_{m-k}.$$

Осуществляя очевидные преобразования, окончательно получаем

$$h_{mr}(n) = \frac{m!}{r!} \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n-r-k}{m-r-k}, \quad r = 0, 1, \dots, m.$$

Для случая $m = n$ необходимо рассматривать сужение метрики ρ на множестве U'' перестановок степени m ; тогда и $h_{mr} = h_{mr}(m)$ равно числу перестановок v степени m , таких, что $\rho(u, v) = m - r$, где u — фиксированная перестановка. Очевидно, что

$$h_{mr} = \frac{m!}{r!} \sum_{k=0}^{m-r} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad r = 0, 1, \dots, m.$$

Отсюда следует, что для любого $r = 0, 1, \dots$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_{mr}}{m!} = \frac{1}{r!} e^{-1}.$$

§ 2. Неравенства Бонферрони

1. Основные неравенства. Обратимся к общим формулам метода включения — исключения. При этом будем предполагать, что элементы коммутативного кольца K , определяющего веса элементов a_1, a_2, \dots, a_n , являются неотрицательными числами. В этом предположении выведем неравенства, которые в ряде случаев упрощают применение метода включения — исключения, так как в пределах допустимой точности позволяют ограничиться подсчетом в знакопеременной сумме (1.9) нескольких членов.

Из формулы (1.9) имеем для $r+1 \leq d \leq n$

$$M(r) - \sum_{k=r}^{d-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k = (-1)^{d-r} U(d, r), \quad (2.1)$$

где

$$U(d, r) = \sum_{k=d}^n (-1)^{k-d} \binom{k}{r} S_k. \quad (2.2)$$

Сначала найдем обращение формулы (1.9), выразив величины S_k , $k = 0, 1, \dots, n$, через величины $M(r)$, $r = 0, 1, \dots, n$. Умножая

обе части равенства (1.9) на $\binom{r}{k}$ и суммируя полученные выражения по r от k до n , имеем

$$\sum_{r=k}^n \binom{r}{k} M(r) = \sum_{l=k}^n S_l \sum_{r=k}^l (-1)^{l-r} \binom{r}{k} \binom{l}{r}. \quad (2.3)$$

Выражая биномиальные коэффициенты через факториалы, легко получаем

$$\sum_{r=k}^l (-1)^{l-r} \binom{r}{k} \binom{l}{r} = \begin{cases} 1, & l=k, \\ 0, & l>k. \end{cases}$$

Используя это равенство, из равенства (2.3) получаем формулу обращения

$$S_k = \sum_{r=k}^n \binom{r}{k} M(r), \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Выражение S_k из формулы (2.4) подставим в формулу (2.2). Меняя порядок суммирования, имеем

$$U(d, r) = \sum_{j=d}^n M(j) \sum_{k=d}^j (-1)^{k-d} \binom{k}{r} \binom{j}{k}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=d}^j (-1)^{k-d} \binom{k}{r} \binom{j}{k} = \binom{j}{r} \sum_{l=0}^{j-d} (-1)^{j-l-d} \binom{j-r}{l}.$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{j-d} (-1)^{j-l-d} \binom{j-r}{l} = \text{coef}_{x^{j-d}} (1+x)^{-1} (1+x)^{j-r} = \binom{j-r-1}{j-d},$$

то окончательно получаем

$$U(d, r) = \sum_{j=d}^n \binom{j}{r} \binom{j-r-1}{d-r-1} M(j) \geq 0.$$

С учетом этого неравенства из соотношения (2.4) имеем

$$M(r) - \sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k = (-1)^{2v} U(r+2v, r) \geq 0,$$

$$M(r) - \sum_{k=r}^{r+2v} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k = (-1)^{2v+1} U(r+2v+1, r) \leq 0.$$

Из этих двух соотношений вытекают так называемые *неравенства Бонферрони*:

$$\sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k \leq M(r) \leq \sum_{k=r}^{r+2v} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k, \quad (2.5)$$

где $0 \leq v \leq (n - r)/2$. Они эквивалентны неравенствам

$$\begin{aligned} M(r) = \sum_{k=r}^{r+2v} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k &\geq -\binom{r+2v+1}{r} S_{r+2v+1} \\ M(r) = \sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k &\leq \binom{r+2v}{r} S_{r+2v} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из этих неравенств следует, что, отбрасывая в сумме (1.9), выражающей величину $M_n(r)$, слагаемые, начиная с некоторого, мы получаем погрешность, знак которой совпадает со знаком первого из отброшенных членов, а абсолютная величина погрешности не превосходит абсолютной величины первого из отброшенных членов.

2. Существенные переменные булевых функций. Обозначим через $M_n(r)$ число булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, которые имеют r несущественных переменных, т. е. существенно зависят только от $n - r$ переменных, $0 \leq r \leq n - 1$. Для определения $M_n(r)$ применим метод включения — исключения. Обозначим через A_i свойство булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, состоящее в том, что для нее переменная x_i является несущественной. Тогда $M_n(r)$ равно числу булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, которые обладают ровно r свойствами из совокупности A_1, A_2, \dots, A_n . Нетрудно заметить, что число функций, обладающих заданным набором свойств $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, равно

$$M(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = 2^{2^{n-k}}. \quad (2.7)$$

Поэтому согласно формуле (1.9) имеем

$$M_n(r) = \binom{n}{r} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{n-r}{k} 2^{2^{n-r-k}}, \quad r=0, 1, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

Из этой формулы, используя неравенства Бонферрони, получаем следующие оценки для числа булевых функций, существенно зависящих от всех n переменных:

$$1 - n/2^{2^{n-1}} \leq M_n(0)/2^{2^n} \leq 1. \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что относительная доля булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, у которых хотя бы одна переменная является несущественной, не превосходит величины $n/2^{2^{n-1}}$, а также, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(0)/2^{2^n} = 1. \quad (2.10)$$

3. Двойственные функции. Булева функция $f_1(x_1, \dots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f_2(x_1, \dots, x_n)$, если $f_1(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Найдем выражение для

N_n — числа самодвойственных булевых функций $f(x_1, \dots, x_n)$, существенно зависящих от всех n переменных.

Два булевых вектора (x_1, \dots, x_n) и $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ будем называть *противоположными*. Если самодвойственная функция на векторе (x_1, \dots, x_n) принимает значение 0, то на противоположном векторе $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ она принимает значение 1. Следовательно, такая функция определяется своими значениями на 2^{n-1} булевых векторах и общее число самодвойственных функций равно $2^{2^{n-1}}$. Обозначим через A_i свойство самодвойственной функции, состоящее в том, что она не зависит от переменной x_i , $1 \leq i \leq n$. Число самодвойственных функций $f(x_1, \dots, x_n)$, обладающих свойствами A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, равно $N(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = 2^{2^{n-k-1}}$. Применяя формулу (1.9) метода включения — исключения, получаем

$$N_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k-1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Применяя неравенства Бонферрони так же, как и при доказательстве равенства (2.9), имеем

$$1 - n / 2^{2^{n-2}} \leq N_n / 2^{2^{n-1}} \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n / 2^{2^{n-1}} = 1.$$

§ 3. Формулы обращения для частично упорядоченных множеств

1. Функции. Рассмотрим множество X , на котором задано бинарное отношение, обозначаемое символом \leq и удовлетворяющее следующим свойствам.

1) *Рефлексивность*. Для любого $x \in X$ имеем $x \leq x$.

2) *Антисимметричность*. Для любых $x, y \in X$ из $x \leq y$ и $y \leq x$ следует $x = y$.

3) *Транзитивность*. Для любых $x, y, z \in X$ из $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$.

Такое бинарное отношение называется отношением *частично-го порядка*, а множество X называется *частично упорядоченным*. Будем полагать, что $y \geq x$, если $x \leq y$. Кроме того, считаем, что $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. Если для x и y не имеет места отношение $x \leq y$, то будем записывать $x \not\leq y$.

Если существуют элементы, обозначаемые h и H , такие, что $h \leq x$ и $x \leq H$ для всех $x \in X$, то эти элементы называются соответственно *наименьшим* и *наибольшим* элементами множества X .

Для $x, y \in X$ множество элементов

$$[x, y] = \{z: x \leq z \leq y, z \in X\}$$

называется **интервалом**. Если для любых $x, y \in X$ интервал $[x, y]$ есть конечное множество, то частично упорядоченное множество X называется **локально конечным**. Если X — множество натуральных чисел, в котором отношение порядка $x \leq y$, $x, y \in X$, означает, что x меньше или равно y , то это множество локально конечно. Возьмем в качестве X снова множество натуральных чисел и отношение порядка $x \leq y$, $x, y \in X$, означает, что x делит y . Это также локально конечное множество.

Рассмотрим множество функций $f(x, y)$ определенных на $X \times X$, где X — локально конечное частично упорядоченное множество, принимающих действительные или комплексные значения и таких, что $f(x, y) = 0$ при $x \not\leq y$.

Определим композицию двух функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, обозначаемую символом $*$, с помощью равенства

$$f * g (x, y) = (f * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y), \quad (3.1)$$

где суммирование проводится по всем элементам конечного интервала $[x, y]$. Композиция функций представляет собой ассоциативную операцию, т. е.

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Действительно, с одной стороны

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](x, y) &= \sum_{x \leq z \leq y} h(z, y) \sum_{x \leq u \leq z} f(x, u) g(u, z) = \\ &= \sum_{x \leq u \leq z \leq y} f(x, u) g(u, z) h(z, y). \end{aligned}$$

То же самое выражение получаем и вычисляя $[f * (g * h)](x, y)$.

Единичным элементом для операции композиции в множестве функций является дельта-функция Кронекера

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases} \quad (3.2)$$

Действительно,

$$[f * \delta](x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \delta(z, y) = f(x, y).$$

Аналогично,

$$[\delta * f](x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta(x, z) f(z, y) = f(x, y).$$

Для функции $f(x, y)$ можно определить левый обратный элемент $f^{-1}(x, y)$, такой, что $(f^{-1} * f)(x, y) = \delta(x, y)$. Если левый обратный элемент существует, то он вычисляется по следующим

формулам:

$$f^{-1}(x, x) = \frac{1}{f(x, x)}, \quad (3.3)$$

$$f^{-1}(x, y) = -\frac{1}{f(y, y)} \sum_{x < z < y} f^{-1}(x, z) f(z, y), \quad x < y, \quad (3.4)$$

что легко проверяется непосредственно.

Кроме того, полагаем

$$f^{-1}(x, y) = 0, \quad x \leq y.$$

Известно, что если элемент f в множестве с ассоциативной операцией обладает левым обратным f^{-1} , то он является также и правым обратным. Отметим, что если множество функций удовлетворяет условию $f(x, x) \neq 0$, то это множество образует группу G по отношению к операции $*$.

2. Даэта-функция и функция Мёбиуса. Функцию $\zeta(x, y)$, определенную на локально конечном частично упорядоченном множестве X равенствами

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ 0, & x \nleq y, \end{cases} \quad (3.5)$$

назовем *даэта-функцией*. Из определения следует, что обратной для функции $\zeta(x, y)$ является функция $\mu(x, y)$, такая, что

$$\mu(x, x) = 1, \quad (3.6)$$

$$\mu(x, y) = -\sum_{x < z < y} \mu(x, z), \quad x < y, \quad (3.7)$$

$$\mu(x, y) = 0, \quad x \nleq y.$$

Эту функцию будем называть *функцией Мёбиуса*. Функция Мёбиуса играет важную роль при получении формула обращения в рассматриваемом множестве функций.

Теорема обращения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на локально конечном частично упорядоченном множестве X с наименьшим элементом $h \in X$, причем

$$f(x) = \sum_{h < z < x} g(z) \quad (3.8)$$

для всех $x \in X$. Тогда имеет место формула обращения

$$g(x) = \sum_{h < z < x} f(z) \mu(z, x). \quad (3.9)$$

Используя определение даэта-функции $\zeta(x, y)$, имеем

$$h(x) = \sum_{h < z < x} \left(\sum_{u > h} g(u) \zeta(u, z) \right) \mu(x, z),$$

где h — наименьший элемент X .

меняя порядок суммирования, получаем

$$h(x) = \sum_{u>h} g(u) \sum_{h < z < x} \zeta(u, z) \mu(z, x).$$

Отсюда следует, что

$$h(x) = \sum_{u>h} g(u) \delta(u, x) = g(x).$$

Этим теорема доказана.

Если X — множество натуральных упорядоченных по величине чисел, то согласно равенствам (3.6) и (3.7) функция Мёбиуса имеет вид

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ -1, & x = y - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что для формулы

$$f(n) = \sum_{k=1}^n g(k)$$

имеет место обращение

$$g(n) = f(n) - f(n-1).$$

3. Функция Мёбиуса в теории чисел. Обратимся к тому специальному случаю, когда X — множество всех натуральных чисел, упорядоченных по делительности, т. е. для $d, n \in X$ полагаем $d \leq n$, если d делит n . В этом частично упорядоченном множестве наименьший элемент существует и равен 1. Рассмотрим функцию Мёбиуса для этого X . Из формул (3.6) и (3.7) следует, что

$$\mu(d, d) = 1, \quad \mu(d, n) = - \sum_{\substack{x: d|x, x \leq n \\ x \neq d}} \mu(d, x), \quad (3.10)$$

и, $\mu(d, n) = 0$, $d \nmid n$, и приняты обозначения: $d|n$ — d делит n , $d \nmid n$ — d не делит n . Отсюда вытекает, что для простого числа p

$$\mu(d, dp) = -1, \quad \mu(d, dp^2) = 0. \quad (3.11)$$

Из последнего равенства для любого натурального $r \geq 2$ индукцией можно получить равенство

$$\mu(d, dp^r) = 0. \quad (3.12)$$

Из равенств (3.10) и (3.11) следует, что для любых различных простых чисел p и q

$$\mu(d, dpq) = (-1)^3 = 1. \quad (3.13)$$

Индукцией по $k \geq 1$ с использованием равенств (3.10) и (3.13)

получаем следующую формулу:

$$\mu(d, dp_1 p_2 \dots p_k) = (-1)^k, \quad (3.14)$$

где p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа, $k \geq 1$.

Установим теперь окончательный вид функции Мёбиуса:

$$\mu(d, n) = \begin{cases} 1, & n = d, \\ (-1)^k, & n = dp_1 p_2 \dots p_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.15)$$

где p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа. Действительно, из формул (3.10), (3.12) и (3.14) следует, что

$$\begin{aligned} \mu\left(d, dp_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}\right) &= \\ &= - \left[1 + \binom{k}{1}(-1)^1 + \binom{k}{2}(-1)^2 + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \right] = 0, \end{aligned}$$

если хотя бы одно $a_i > 1$, $1 \leq i \leq k$. С использованием функции Мёбиуса (3.15) для равенства

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad (3.16)$$

из теоремы обращения получаем следующую формулу обращения:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d, n) f(d). \quad (3.17)$$

В теории чисел используется функция Мёбиуса $\mu(n)$ от одного натурального переменного $n := p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, задаваемая равенствами

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^k, & n = p_1 p_2 \dots p_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3.18)$$

где p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа.

Из равенств (3.15) и (3.18) следует, что

$$\mu(d, n) = \mu\left(\frac{n}{d}\right). \quad (3.19)$$

Следовательно, формула обращения (3.17) принимает вид

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d). \quad (3.20)$$

4. Циклические последовательности. На множестве отображений $\varphi: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ зададим отношение эквивалентности, полагая $\varphi \sim \varphi'$, если $\varphi'(i) = \varphi(i+d)$, $1 \leq d \leq m$,

$i = 1, 2, \dots, m$, и сложение ведется по модулю m . Ясно, что векторы $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ и $(\varphi'(1), \dots, \varphi'(m))$, отвечающие эквивалентным отображениям, отличаются некоторым циклическим сдвигом. Поэтому совокупность векторов, отвечающих классу эквивалентности отображений, будем называть *циклической последовательностью*. Определим число циклических последовательностей M_m .

Число d является *периодом вектора* $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$, если $\varphi(i+d) = \varphi(i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Все векторы $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ отображений φ , принадлежащих одному классу эквивалентности, имеют один и тот же наименьший период. Обозначим через $M(d)$ число классов эквивалентности φ , для которых векторы $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ имеют наименьший период d . Число элементов в каждом из таких классов равно d . Следовательно, общее число отображений φ , у которых векторы $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ имеют наименьший период d , равно $dM(d)$. Суммируя по всем d , являющимся делителями числа m , получаем общее число отображений. Таким образом,

$$n^m = \sum_{d|m} dM(d). \quad (3.21)$$

Применяя к равенству (3.21) формулу обращения (3.20), получаем

$$M(m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) n^d. \quad (3.22)$$

Все наименьшие периоды являются делителями m . Следовательно,

$$M_m = \sum_{d|m} M(d). \quad (3.23)$$

Из формул (3.22) и (3.23) окончательно получаем

$$M_m = \sum_{d|m} \frac{1}{d} \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) n^\delta. \quad (3.24)$$

5. Метод включения — исключения. Пусть X — конечное множество. На булеане 2^X определим частичный порядок \leqslant , полагая $Z \leqslant Y$, если $Z \subseteq Y$, $Z, Y \in 2^X$. Покажем, что в этом случае функция Мёбиуса имеет вид

$$\mu(Z, Y) = (-1)^{|Y|-|Z|}. \quad (3.25)$$

Действительно, из равенств (3.6) и (3.7) следует, что

$$\mu(Z, Z) = 1, \quad \mu(Z, Y) = - \sum_{Z \subseteq U \subseteq Y} \mu(Z, U). \quad (3.26)$$

Для любого $y \notin Z$ из равенства (3.26) имеем

$$\mu(Z, Z \cup \{y\}) = -1. \quad (3.27)$$

Индукцией по k покажем, что для любых различных $y_1, y_2, \dots, y_k \notin Z$

$$\mu(Z, Z \cup \{y_1, y_2, \dots, y_k\}) = (-1)^k. \quad (3.28)$$

При $k=1$ равенство (3.28) сводится к формуле (3.27). Для произвольного натурального k из формулы (3.26) имеем

$$\begin{aligned} \mu(Z, Z \cup \{y_1, y_2, \dots, y_k\}) &= - \left[\mu(Z, Z) + \sum_{i=1}^k \mu(Z, Z \cup \{y_i\}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \sum_{1 < j_1 < \dots < j_{k-1} < k} \mu(Z, Z \cup \{y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_{k-1}}\}) \right]. \end{aligned}$$

Используя предположение индукции, получаем

$$\mu(Z, Z \cup \{y_1, y_2, \dots, y_k\}) = -(1-1)^k + (-1)^k.$$

Отсюда следует формула (3.25).

Пусть теперь на булеване 2^X конечного множества X заданы функции f и g такие, что

$$f(Y) = \sum_{Z \subseteq Y} g(Z). \quad (3.29)$$

Тогда из теоремы обращения следует, что

$$g(Y) = \sum_{Z \subseteq Y} f(Z) \mu(Z, Y). \quad (3.30)$$

Из равенств (3.25) и (3.30) вытекает, что

$$g(Y) = \sum_{Z \subseteq Y} (-1)^{|Y|-|Z|} f(Z). \quad (3.31)$$

Полагая $|Y|=n$ и суммируя отдельно в правой части равенства (3.31) слагаемые с $|Z|=n, n-1, \dots, 1, 0$, получаем

$$\begin{aligned} g(Y) &= f(Y) - \sum_{\substack{Z \subseteq Y \\ |Z|=n-1}} f(Z) + \sum_{\substack{Z \subseteq Y \\ |Z|=n-2}} f(Z) - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^k \sum_{\substack{Z \subseteq Y \\ |Z|=n-k}} f(Z) + \dots + (-1)^n \sum_{\substack{Z \subseteq Y \\ |Z|=0}} f(Z). \quad (3.32) \end{aligned}$$

Из формулы (3.32) могут быть получены различные варианты формул метода включения — исключения. Эти варианты используют понятие меры конечного множества. На конечном частично упорядоченном множестве X зададим функцию $\alpha(x)$, $x \in X$, принимающую значения из некоторого коммутативного кольца K . Используя функцию $\alpha(x)$, можно определять функцию на булеване 2^X , которую будем также обозначать через α . Для любого

$Y \in 2^X$ положим

$$\alpha(Y) = \begin{cases} 0, & Y = \emptyset, \\ \sum_{x \in Y} \alpha(x), & Y \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3.33)$$

Эту функцию α будем называть мерой. Пусть K — кольцо действительных чисел. Если $\alpha(x) = 1$ для всех $x \in X$, то $\alpha(Y) = |Y|$, $Y \in 2^X$, т. е. мера совпадает с мощностью множества. Если для каждого $x \in X$ имеем $0 \leq \alpha(x) \leq 1$ и $\sum_{x \in X} \alpha(x) = 1$, то мера называется вероятностным распределением. В этом случае элементы булеана 2^X называются событиями. Из равенства (3.33) следует, что

$$\alpha(Y) + \alpha(\bar{Y}) = \alpha(X), \quad (3.34)$$

где $\bar{Y} = X \setminus Y$, $Y \in 2^X$.

Используя законы де Моргана, получаем

$$\alpha(\overline{Y \cup Z}) = \alpha(\bar{Y} \cap \bar{Z}), \quad (3.35)$$

$$\alpha(\overline{Y \cap Z}) = \alpha(\bar{Y} \cup \bar{Z}). \quad (3.36)$$

Пусть теперь задано множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, элементы которого могут обладать или не обладать каждым из свойств A_1, A_2, \dots, A_n . На булееане 2^X задана некоторая мера $\alpha(Y)$, $Y \in 2^X$. Будем считать, что элемент $x_i \in X$ обладает Q -свойством, если он обладает свойствами, индексы которых принадлежат множеству $Q \subseteq R_n$, $R_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть $Q \cup \bar{Q} = R_n$, $Q \cap \bar{Q} = \emptyset$ и $g(Q)$ есть мера множества элементов из X , обладающих Q -свойством, а $f(Q)$ — мера множества элементов из X , обладающих \bar{Q} -свойством, и, может быть, другими свойствами, номера которых принадлежат Q . Тогда очевидно следующее равенство:

$$f(Q) = \sum_{Z \subseteq Q} g(Z). \quad (3.37)$$

Применив формулы обращения (3.31) и (3.32), получаем при $Q = R_n$:

$$\begin{aligned} g(R_n) &= \sum_{Z \subseteq R_n} (-1)^{|Q|-|Z|} f(Z) = \alpha(X) - \sum_{\substack{Z \subseteq R_n \\ |Z|=n-1}} f(Z) + \dots \\ &\dots + (-1)^k \sum_{\substack{Z \subseteq R_n \\ |Z|=n-k}} f(Z) + \dots + (-1)^n \sum_{\substack{Z \subseteq R_n \\ |Z|=0}} f(Z). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Отметим, что $g(R_n)$ есть мера множества элементов X , не обладающих ни одним из свойств A_1, A_2, \dots, A_n , $f(Z)$ — мера множества элементов, обладающих свойствами с номерами из $R_n \setminus Z$ и, возможно, некоторыми свойствами с номерами из Z ; $f(R_n) = \alpha(X)$.

Множество элементов X , обладающих свойством A_i , удобно обозначить той же буквой A_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда можно записать

$$g(R_n) = \alpha \left(\bigcap_{i \in R_n} \bar{A}_i \right),$$

$$f(Z) = \begin{cases} \alpha(X), & Z = R_n, \\ \alpha \left(\bigcap_{i \in R_n \setminus Z} A_i \right), & Z \neq R_n. \end{cases}$$

Из равенства (3.38) или используя индукцию по n , имеем

$$\alpha \left(\bigcap_{i \in R_n} \bar{A}_i \right) = \sum_{Z \subseteq R_n} (-1)^{|n - |Z||} \alpha \left(\bigcap_{i \in R_n \setminus Z} A_i \right).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha \left(\bigcap_{i \in R_n} \bar{A}_i \right) = \sum_{Z \subseteq R_n} (-1)^{|Z|} \alpha \left(\bigcap_{i \in Z} A_i \right). \quad (3.39)$$

Полагая $M(0) = \alpha \left(\bigcap_{i \in R_n} \bar{A}_i \right)$

$$S_0 = \alpha(X), \quad (3.40)$$

$$S_k = \sum_{\substack{Z \subseteq R_n \\ |Z|=k}} \alpha \left(\bigcap_{i \in Z} A_i \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.41)$$

из формулы (3.39) получаем *формулу Сильвестра*:

$$M(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k, \quad (3.42)$$

являющуюся одной из формул метода включения — исключения.

Мера множества элементов X , обладающих хотя бы одним из свойств A_1, A_2, \dots, A_n , в принятых обозначениях записывается следующим образом:

$$M_{(1)} = \alpha \left(\bigcup_{i \in R_n} A_i \right).$$

В силу очевидного равенства $M_{(1)} = \alpha(X) - M(0)$ из формул (3.39) и (3.42) получаем

$$M_{(1)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k, \quad (3.43)$$

$$\alpha \left(\bigcup_{i \in R_n} A_i \right) = \sum_{\substack{Z \subseteq R_n \\ Z \neq \emptyset}} (-1)^{|Z|-1} \alpha \left(\bigcap_{i \in Z} A_i \right) \quad (3.44)$$

Применяя к последнему соотношению формулу обращения (3.31), находим

$$\alpha \left(\bigcap_{i \in R_n} A_i \right) = \sum_{\substack{Z \subseteq R_n \\ |Z|=k}} (-1)^{|Z|-1} \alpha \left(\bigcup_{i \in Z} A_i \right). \quad (3.45)$$

Используя обозначения

$$S_{[k]} = \sum_{\substack{Z \subseteq R_n \\ |Z|=k}} \alpha \left(\bigcup_{i \in Z} A_i \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.46)$$

из формулы (3.45) получаем

$$\alpha \left(\bigcap_{i \in R_n} A_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_{[k]}. \quad (3.47)$$

Обозначим теперь через $M(r)$ меру множества элементов из X , обладающих в точности r свойствами из совокупности A_1, A_2, \dots, A_n . Используя обозначение A_i как множества элементов, обладающих свойством A_i , можно записать:

$$M(r) = \sum_{\substack{Y \subseteq R_n \\ |Y|=r}} \alpha \left(\bigcap_{i \in Y} A_i \cap \bar{A}_j \right), \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (3.48)$$

где $\bar{Y} = R_n \setminus Y$.

Полагая $\bar{X} = \bigcap_{i \in \bar{Y}} A_i$, из формулы (3.39) получаем

$$\alpha \left(\bigcap_{i \in Y} A_i \cap \bar{A}_j \right) = \sum_{Z \subseteq \bar{Y}} (-1)^{|Z|} \alpha \left(\bigcap_{i \in Y} A_i \cap \bigcap_{j \in Z} A_j \right).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha \left(\bigcap_{i \in Y} A_i \cap \bar{A}_j \right) = \sum_{\substack{U \subseteq R_n \\ U \supseteq Y}} (-1)^{|U|-|Y|} \alpha \left(\bigcap_{i \in U} A_i \right). \quad (3.49)$$

Из формул (3.48) и (3.49) имеем

$$M(r) = \sum_{\substack{Y \subseteq R_n \\ |Y|=r}} \sum_{\substack{U \subseteq R_n \\ U \supseteq Y}} (-1)^{|U|-r} \alpha \left(\bigcap_{i \in U} A_i \right). \quad (3.50)$$

Поменяем порядок суммирования в правой части последнего равенства. Получим

$$M(r) = \sum_{\substack{U \subseteq R_n \\ |U| \geq r}} (-1)^{|U|-r} \alpha \left(\bigcap_{i \in U} A_i \right) \sum_{\substack{Y \subseteq U \\ |Y|=r}} 1.$$

Отсюда следует, что

$$M(r) = \sum_{\substack{U \subseteq R_n \\ |U| \geq r}} (-1)^{|U|-r} \binom{|U|}{r} \alpha \left(\bigcap_{i \in U} A_i \right).$$

Полагая $|U| = k$ и используя обозначения (3.41), окончательно получаем

$$M(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (3.51)$$

6. Функция Эйлера. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как число вычетов по модулю n в системе чисел $0, 1, \dots, n$, взаимно простых с n . Если каноническое разложение n имеет вид $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$, то

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \quad (3.52)$$

Получим эту формулу методом включения — исключения. В качестве элементов возьмем числа $0, 1, \dots, n-1$. Элемент обладает свойством A_i , если он делится на число p_i , $1 \leq i \leq r$. Очевидно, что $\varphi(n)$ равно числу элементов, не обладающих ни одним из свойств A_1, A_2, \dots, A_r . Число элементов, обладающих заданными свойствами $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r$, равно

$$M(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k}) = \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_k}}.$$

Применяя формулу (3.42), получаем

$$\varphi(n) = n + \sum_{k=1}^r (-1)^k \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_k}}. \quad (3.53)$$

Эта формула эквивалентна формуле (3.52).

Из формулы (3.52) следует мультипликативность функции $\varphi(n)$, а именно: если m и n взаимно просты, т. е. $(m, n) = 1$, то

$$\varphi(m, n) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Обозначим через $\varphi_d(n)$ число элементов среди вычетов $0, 1, \dots, n-1$, имеющих с n наибольший общий делитель, равный d . Тогда очевидно, что

$$\varphi_d(n) = \varphi(n).$$

Все интересующие нас вычеты имеют вид $dd',$ причем $(dd', n) = d$, т. е. $(d', n/d) = 1$, $0 \leq d' \leq n/d - 1$. Отсюда следует, что

$$\varphi_d(n) = \varphi_d(n/d) = \varphi(n/d).$$

Пусть d_1, d_2, \dots, d_k — все делители числа n , а d'_1, d'_2, \dots, d'_k — их дополнительные делители, т. е. $d'_i \cdot d_i = n$, $i = 1, \dots, k$. Тогда

$$\varphi(d'_i) = \varphi(n/d_i) = \varphi_{d_i}(n).$$

Очевидно следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^k \varphi(d'_i) = \sum_{i=1}^k \varphi_{d_i}(n) = n.$$

Отсюда следует формула Гаусса:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \quad (3.54)$$

Применив формулу обращения (3.20), из равенства (3.54) получаем

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, \quad (3.55)$$

где $\mu(d)$ — теоретико-числовая функция Мёбиуса, определенная равенствами (3.18).

Используя равенство (3.55), формулу (3.24) для задачи о циклических последовательностях можно записать в виде

$$M_{mn} = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \varphi\left(\frac{m}{d}\right) n^d. \quad (3.56)$$

Действительно, меняя порядок суммирования в правой части равенства (3.24) и умножив и деля на m , имеем

$$M_{mn} = \frac{1}{m} \sum_{\delta|m} n^\delta \sum_{d|m/\delta} \mu(d) \frac{(m/\delta)}{d}.$$

Следует в силу формулы (3.55) следовать равенство (3.56).

ЗАДАЧИ

1. Подстановка x степени n противоречива с подстановкой x' степени n , если $x(i) \neq x'(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $X = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество, на котором действуют подстановки. Показать, что число систем подстановок (x_1, x_2, \dots, x_n) , противоречивых с заданной подстановкой x' , равно

$$\Delta^{n01^m} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!^m.$$

2. Элементы множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ расположены на прямой в порядке возрастания. Пара элементов i и $i+1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, называется соседними. Показать, что $f(n, k)$ — число k -подмножеств множества X , не содержащих соседних элементов, — удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} f(n, k) &= f(n-1, k) + f(n-2, k-1), \\ f(n, 1) &= n, \quad f(1, n) = 0, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Вывести отсюда формулу

$$f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

3. Для элементов множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$, расположенных на окружности, соседними являются пары элементов: 1; 2; 2; 3; ...; $n-1$; n ; n ; 1. Показать, что если $g(n, k)$ — число k -подмножеств множества X , не содержащих соседних элементов, то $g(n, k) = f(n-1, k) + f(n-3, k-1)$, где $f(n, k)$ определено в задаче 2. Вывести отсюда, что

$$g(n, k) = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

4. С использованием результатов задачи 3 и метода включения — исключения показать, что число подстановок степени n , противоречивых с подстановками e и c , где e — единичная подстановка, а $c = (1, 2, \dots, n)$, равно

$$U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! , n=1, 2, \dots$$

5. Система (s_1, s_2, \dots, s_m) из m попарно противоречивых подстановок степени n называется *латинским прямоугольником* размера $m \times n$. При $m = n$ латинский прямоугольник называется *латинским квадратом*. Показать, что число латинских прямоугольников размера $2 \times n$ равно

$$L(2, n) = (n!)^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

ГЛАВА III

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Формальные степенные ряды

1. Последовательности. Пусть $N_0 = (0, 1, 2, \dots)$ есть натуральный ряд с нулем и K — числовое кольцо с единицей, элементами которого являются все действительные или все комплексные числа. Отметим сразу, что некоторые из формулируемых ниже утверждений остаются верными и для произвольного кольца с единицей, не имеющего делителей нуля. Отображение $\phi: N_0 \rightarrow K$ определяет бесконечномерный вектор $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, $a_n \in K$, $n = 0, 1, \dots$, который называется *последовательностью*. Последовательность α совпадает с последовательностью $\beta = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ тогда и только тогда, когда $a_n = b_n$, $n = 0, 1, \dots$ На множество последовательностей зададим операции сложения и умножения, обозначаемые соответственно $+$ и \cdot и определяемые равенствами

$$\alpha + \beta = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots), \quad (1.1)$$

$$\alpha \cdot \beta = \left(a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \dots \right). \quad (1.2)$$

Легко проверяется, что обе операции коммутативны, ассоциативны и связаны законом дистрибутивности. Нейтральные элементы по сложению и умножению, играющие роль нуля и единицы, имеют соответственно вид

$$z = (0, 0, \dots, 0, \dots), \quad u = (1, 0, \dots, 0, \dots), \quad (1.3)$$

где 0 и 1 является нулем и единицей кольца K . Для последовательности $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ обратным по сложению элементом является $-\alpha = (-a_0, -a_1, \dots, -a_n, \dots)$, так как $\alpha + (-\alpha) = z$. Таким образом, множество последовательностей с элементами из кольца K и с двумя операциями $+$ и \cdot образуют коммутативное кольцо \bar{K} . Рассмотрим некоторые свойства кольца \bar{K} .

Свойство 1. Кольцо \bar{K} является областью целостности.

Действительно, пусть $\alpha \cdot \beta = z$ и $\alpha \neq z$, $\beta \neq z$. Допустим, что i и j — наименьшие индексы, такие, что $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{i+j} a_k b_{i+j-k} \neq 0,$$

и, следовательно, $(i+j+1)$ -й элемент последовательности $\alpha \cdot \beta$ отличен от нуля, что противоречит условию $\alpha \cdot \beta = z$.

Элемент α^{-1} будем называть *обратным* элементу α , если $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = u$.

Свойство 2. Если $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, то α^{-1} существует тогда и только тогда, когда для a_0 существует обратный элемент a_0^{-1} в кольце K .

Действительно, из условия $\alpha \cdot \alpha^{-1} = u$ при $\alpha^{-1} = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$ следует система уравнений

$$a_0 c_0 = 1,$$

$$a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \dots + a_n c_0 = 0,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

которая разрешима тогда и только тогда, когда существует элемент a_0^{-1} .

Свойство 3. Пусть $\beta = (1, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$. Тогда для любого целого положительного m имеем $\beta^m = (1, c_1, c_2, \dots, c_m, \dots)$, где $c_k = \beta \cdot \beta \cdots \beta$ (m раз). При этом $c_1 = mb_1$, $c_k = mb_k + f_{m,k}(b_1, b_2, \dots, b_{k-1})$ для всех $k \geq 2$, где $f_{m,k}$ есть некоторый многочлен от b_1, b_2, \dots, b_{k-1} .

Это свойство легко доказывается индукцией по m .

Свойство 4. Пусть $\alpha = (1, a_1, \dots, a_n, \dots)$, и пусть m — целое положительное число. Тогда существует единственное $\beta = -(1, b_1, \dots, b_n, \dots)$, такое, что $\beta^m = \alpha$; при этом будем обозначать $\beta = \alpha^{1/m}$.

Действительно, из свойства 3 следует, что элементы последовательности β определяются последовательно из уравнений

$$mb_1 = a_1, \quad mb_2 + f_{m,2}(b_1) = a_2, \dots, \quad mb_k + f_{m,k}(b_1, \dots, b_{k-1}) = a_k, \dots$$

Легко доказывается следующее свойство.

Свойство 5. Пусть $\alpha = (1, a_1, \dots, a_n, \dots)$, и пусть m — целое положительное число. Тогда $(\alpha^{-1})^m = (\alpha^m)^{-1}$ и по определению считаем, что $\alpha^{-m} = (\alpha^m)^{-1}$, $\alpha^0 = u$.

Из свойств 4 и 5 вытекает следующее свойство.

Свойство 6. Если $m, s \geq 0$ — целые числа, то для любого $\alpha = (1, a_1, \dots, a_n, \dots)$ существует единственное $\beta = (1, b_1, \dots, b_n, \dots)$, такое, что $\alpha^m = \beta^s$, т. е. $\beta = \alpha^{ms}$.

2. Формальные степенные ряды. Рассмотрим элемент $x = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \in K$. Попробуем проверить, что

$$x^k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

где единственная единица стоит на $(k+1)$ -м месте. Кроме того, по определению считаем, что $x^0 = u$. Любая последовательность

$\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ может быть записана в виде

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j. \quad (1.5)$$

Эту запись будем называть *формальным степенным рядом*, соответствующим последовательности α . В этом равенстве $a_j \in K$ можно понимать как $(a_0, 0, \dots, 0, \dots) \in \bar{K}$, и тем самым формальный степенной ряд является удобным представлением любого элемента $\alpha \in \bar{K}$. Отметим, что в этих условиях вместо z и n в дальнейшем можно писать 0 и 1.

Два формальных степенных ряда, соответствующих последовательностям α и $\beta = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, равны ($\alpha = \beta$) тогда и только тогда, когда $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \dots$. Операции сложения и умножения для формальных степенных рядов определяются следующим образом:

$$\alpha + \beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k, \quad (1.6)$$

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) x^k. \quad (1.7)$$

Относительно этих операций формальные степенные ряды образуют кольцо, изоморфное кольцу \bar{K} .

Каждой последовательности $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ можно поставить в соответствие последовательность $\tilde{\alpha} = (a_0, a_1/1!, \dots, a_n/n!, \dots)$. Формальный степенной ряд

$$\tilde{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n!} \right) x^n \quad (1.8)$$

будем называть *экспоненциальным* формальным степенным рядом последовательности α . Если для таких рядов ввести операции сложения и умножения по правилам

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n!} + \frac{b_n}{n!} \right) x^n, \quad (1.9)$$

$$\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}, \quad (1.10)$$

то относительно этих операций множество экспоненциальных формальных степенных рядов образует кольцо \bar{K} .

Для формального степенного ряда $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ определим операцию дифференцирования $D(\alpha)$ равенством

$$D(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \quad (1.11)$$

Ясно, что эта операция не выводит из кольца \bar{K} .

Далее, определим n -ю производную равенством $D^n(\alpha) = -D(D^{n-1}(\alpha))$ и положим $D^0(\alpha) = \alpha$. Для последовательности $\alpha = -(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ положим

$$S(\alpha) = a_0. \quad (1.12)$$

Используя это обозначение, запишем равенство

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} S(D^n(\alpha)) \frac{x^n}{n!}, \quad (1.13)$$

которое можно рассматривать как разложение Маклорена для α . Дифференцирование обладает следующими свойствами:

$$1) \quad D(\alpha + \beta) = D(\alpha) + D(\beta), \quad (1.14)$$

$$2) \quad D(\alpha \cdot \beta) = \alpha D(\beta) + \beta D(\alpha), \quad (1.15)$$

$$3) \quad D(\alpha^n) = n\alpha^{n-1}D(\alpha), \text{ где } n \text{ — натуральное число,} \quad (1.16)$$

$$4) \quad D(\alpha^{-1}) = -\alpha^{-2}D(\alpha), \quad (1.17)$$

$$5) \quad D(\alpha^{-n}) = -n\alpha^{-n-1}D(\alpha). \quad (1.18)$$

В последних двух случаях предполагается, что α^{-1} существует.

Свойство 1) очевидно. Для доказательства свойства 2) приравняем коэффициенты при x^n в обеих частях равенства. В результате получаем

$$(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n-k+1} = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} + \sum_{k=0}^n (n-k+1) a_k b_{n-k+1}.$$

В первой сумме в правой части равенства делаем замену индексов $j = k+1$ и полученный результат объединяем со второй суммой. В итоге получаем сумму, стоящую в левой части равенства.

Свойство 3) доказывается индукцией по n . Дифференцируя обе части равенства $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$, убеждаемся в справедливости свойства 4). Наконец, из цепочки равенств

$$D(\alpha^{-n}) = D((\alpha^{-1})^n) = n(\alpha^{-1})^{n-1}D(\alpha^{-1}) = -n\alpha^{-n-1}D(\alpha)$$

вытекает свойство 5), из которого следует, что для любого рационального $s = m/n$ и для любой последовательности $\alpha \in \bar{K}$, такой, что $S(\alpha) = 1$, справедлива формула

$$D(\alpha^s) = s\alpha^{s-1}D(\alpha). \quad (1.19)$$

Действительно, $D((\alpha^*)^n) = n(\alpha^*)^{n-1}D(\alpha^*)$, $D((\alpha^*)^n) = D(\alpha^n) = m\alpha^{m-1}D(\alpha)$, откуда и следует формула (1.19).

Для операции дифференцирования D можно рассмотреть обратную ей операцию интегрирования D^* — такую, что если $S(\alpha) = 0$, то $D^*D(\alpha) = DD^*(\alpha) = \alpha$. Из определения операции D следует, что

$$D^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n. \quad (1.20)$$

Кроме того, при $S(\alpha) = S(\beta) = 0$

$$D^*(\alpha + \beta) = D^*(\alpha) + D^*(\beta), \quad (1.21)$$

$$D^*(\alpha \cdot D(\beta)) = \alpha \cdot \beta - D^*(D(\alpha) \cdot \beta). \quad (1.22)$$

Докажем теперь формулу бинома Ньютона для последовательностей. Пусть r — рациональное число и $k \in K$. Тогда

$$(1 + kx)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} (kx)^n, \quad (1.23)$$

где

$$(r)_n = r(r-1)\dots(r-n+1), \quad (r)_0 = 1, \quad \binom{r}{n} = \frac{(r)_n}{n!}. \quad (1.24)$$

Прежде всего заметим, что

$$D(1 + kx)^r = r(1 + kx)^{r-1}D(1 + kx) = rk(1 + kx)^{r-1}.$$

Отсюда, используя индукцию по n , получаем

$$D^n(1 + kx)^r = r(r-1)\dots(r-n+1)k^n(1 + kx)^{r-n},$$

а так как $S(1 + kx)^{r-n} = 1$, то $S(D^n(1 + kx)^r) = (r)_n k^n$. Теперь, используя формулу разложения Маклорена для $\alpha = (1 + kx)^r$, убеждаемся в справедливости формулы (1.23).

3. Число неассоциативных систем. На примере решения одной комбинаторной задачи проиллюстрируем применение формальных степенных рядов.

Пусть q_n есть число способов образования произведений из n сомножителей в неассоциативной системе. Если обозначить сомножители через y_1, y_2, \dots, y_n , то q_n равно числу способов расстановки скобок таким образом, чтобы при последовательном вычислении произведения обеспечить на каждом шаге отыскание произведения двух элементов системы. Ясно, что $q_2 = 1$. При $n = 3$ имеем следующие варианты расстановок скобок: $y_1(y_2y_3)$ и $(y_1y_2)y_3$, т. е. $q_3 = 2$. Для $n = 4$ имеем $y_1(y_2(y_3y_4))$, $y_1((y_2y_3)y_4)$, $(y_1y_2)(y_3y_4)$, $(y_1(y_2y_3))y_4$, $(y_1y_2)y_3y_4$, т. е. $q_4 = 5$.

В общем случае при $n \geq 2$ имеет место рекуррентное соотношение

$$q_n = \sum_{j=1}^{n-1} q_j q_{n-j}. \quad (1.25)$$

Докажем (1.25): разобьем все возможные расстановки скобок на $n - 1$ классов в зависимости от положения двух пар внешних скобок. Если первая из этих скобок содержит j элементов, то после расстановки двух пар внешних скобок имеем $(y_1, y_2, \dots, y_j)(y_{j+1}, \dots, y_n)$. Если фиксированы внешние скобки, остальные скобки можно расставить $q_j q_{n-j}$ способами. Просуммировав эти величины по j , получаем общее число расстановок скобок, равное q_n .

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n, \quad (1.26)$$

где (в соответствии с (1.25)) полагаем $q_1 = 1$.

Для всех $n \geq 2$ правая часть равенства (1.25) есть коэффициент при x^n в формальном степенном ряде q^2 . Отсюда следует, что, умножая обе части равенства (1.25) на x^n и суммируя по n от 1 до ∞ , получаем соотношение для степенных рядов $q - x = q^2$. Таким образом, имеем квадратное уравнение

$$q^2 - q + x = 0, \quad (1.27)$$

для разрешения которого потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть α, β — формальные степенные ряды с действительными коэффициентами. Тогда из равенства $\alpha^n = \beta^n$, где n — натуральное число, следует, что $\alpha = \beta$ при n нечетном, $\alpha = -\beta$ при n четном.

Если $\alpha = 0$, то $\alpha^n = 0$, и из равенства $\alpha^n = \beta^n$ следует, что $\beta^n = 0$, т. е. $\beta = 0$, и, значит $\alpha = \beta$. Аналогично рассматривается случай $\beta = 0$.

Будем предполагать теперь, что $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Введем обозначение $\omega = e^{2\pi i/n}$ для корня n -й степени из единицы. Тогда можно записать

$$\alpha^n - \beta^n = \prod_{j=1}^n (\alpha - \beta \cdot \omega^j) = 0.$$

Если ω^j не является действительным числом, то $\alpha - \beta \cdot \omega^j \neq 0$, так как α и β имеют действительные элементы и $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

Если n нечетно, то ω^j является действительным числом тогда и только тогда, когда $j = n$. Отсюда следует, что $\alpha - \beta \omega^n = 0$. Так как $\omega^n = 1$, то $\alpha = \beta$.

Если n четно, то ω^j является действительным числом в двух случаях: при $j = n/2$ и при $j = n$. Так как $\omega^{n/2} = -1$ при четном n , то имеем либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = -\beta$.

Обратимся теперь к квадратному уравнению (1.27); имеем $(1 - 2q)^2 = ((1 - 4x)^{1/2})^2$. Отсюда согласно лемме получаем

$$q = \frac{1}{2} [1 - (1 - 4x)^{1/2}]. \quad (1.28)$$

Перед круглой скобкой выбран знак минус, так как $S(q) = 0$. Применяя формулу бинома Ньютона (1.23), получаем

$$q = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n.$$

Используя равенство

$$\binom{1/2}{n} (-4)^{n-1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-2} = \frac{(2n-2)!}{2n!(n-1)!},$$

окончательно получаем

$$q_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.29)$$

4. Линейные рекуррентные уравнения. Последовательность $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ удовлетворяет линейному рекуррентному уравнению (соотношению) порядка r , если существуют действительные числа a_1, a_2, \dots, a_r , называемые коэффициентами уравнения, такие, что

$$u_{n+r} + a_1 u_{n+r-1} + a_2 u_{n+r-2} + \dots + a_r u_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.30)$$

Величины u_0, u_1, \dots, u_{r-1} называются начальными значениями.

Формальный степенной ряд, соответствующий последовательности $(1, u_1, u_2, \dots, u_r)$, есть многочлен степени r :

$$a = \sum_{k=0}^r a_k x^k, \quad a_0 = 1. \quad (1.31)$$

Перемножая его с формальным степенным рядом

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, \quad (1.32)$$

получаем

$$a \cdot u = c, \quad (1.33)$$

где

$$c = \sum_{k=0}^{r-1} c_k x^k, \quad (1.34)$$

так как все коэффициенты при x^{n+r} , $n \geq 0$, в произведении $a \cdot u$ согласно уравнению (1.30) равны нулю. В свою очередь c_0, c_1, \dots, c_{r-1} выражаются через коэффициенты уравнения (1.30) $a_0 = 1, a_1, \dots, a_r$ и через начальные значения u_0, u_1, \dots, u_{r-1} следующим образом:

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j u_{k-j}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \quad (1.35)$$

Рассмотрим теперь многочлен переменной x следующего вида:

$$f(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^{r-j}. \quad (1.36)$$

Разложим этот многочлен на линейные множители:

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_k)^{r_k}, \quad r_1 + \dots + r_k = r, \quad (1.37)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — корни многочлена $f(x)$, из поля комплексных чисел. Так как

$$\sum_{j=0}^r a_j x^j = (1 - \lambda_1 x)^{r_1} \dots (1 - \lambda_k x)^{r_k},$$

то

$$u = \sum_{j=0}^{r-1} c_j x^j (1 - \lambda_1 x)^{-r_1} \dots (1 - \lambda_k x)^{-r_k}, \quad (1.38)$$

Применяя формулу бинома Ньютона и вычисляя коэффициент при x^n в обеих частях равенства, получаем

$$u_n = \sum_{j=0}^{\min(n, r-1)} c_j \sum_{s_1 + \dots + s_k = n-j} \prod_{i=1}^k \binom{r_i + s_i - 1}{s_i} \lambda_i^{s_i}, \quad (1.39)$$

где второе суммирование проводится по всем решениям (s_1, s_2, \dots, s_k) уравнения $s_1 + \dots + s_k = n - j$, $s_i \geq 0$.

Можно получить другую формулу для u_n , если рассмотреть правую часть (1.38) как дробно-рациональную функцию и разложить ее в сумму простых дробей. Тогда

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j x^j \prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i x)^{-r_i} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \gamma_{ij} (1 - \lambda_i x)^{-j},$$

где γ_{ij} — некоторые постоянные. Отсюда следует равенство

$$u_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n \sum_{j=1}^{r_i} \binom{j+n-1}{n} \gamma_{ij}, \quad (1.40)$$

в правой части которого внутренняя сумма представляет собой многочлен $g_i(n)$ степени, не превосходящий $r_i - 1$. Поэтому можно записать

$$u_n = \sum_{i=1}^k g_i(n) \lambda_i^n. \quad (1.41)$$

Если среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ имеется единственный максимальный по модулю корень λ_m , то из этой формулы получаем

асимптотическое представление

$$u_n = g_m(n) \lambda_m^n (1 + \Delta_n), \quad (1.42)$$

где $\Delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

5. Суммируемые последовательности. Рассмотрим последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$, где $\alpha_k \in K$, причем

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} x^j, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.43)$$

Последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ будем называть *суммируемой*, если для любого целого числа $r \geq 0$ существует целое число $N = N(r)$, такое, что для всех $n \geq N$ имеем $a_{0n} = a_{1n} = \dots = a_{rn} = 0$. Если последовательность суммируема, то определена сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{r=0}^{\infty} s_r x^r, \quad (1.44)$$

так как при любом $r \geq 0$ вычисление s_r как коэффициента при x^r достаточно проводить для суммы $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$, т. е.

$$s_r = a_{r1} + a_{r2} + \dots + a_{rN}.$$

При этом s_r есть коэффициент при x^r в каждой конечной сумме $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $n \geq N$. Рассмотрим некоторые свойства суммируемых последовательностей.

Свойство 1. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$ — суммируемая последовательность и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$ — последовательность, для которой существует биективное отображение $\sigma: N \rightarrow N$ такое, что $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots) = (\beta_{\sigma(1)}, \beta_{\sigma(2)}, \dots, \beta_{\sigma(k)}, \dots)$. Тогда последовательность $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots)$ суммируема и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k.$$

Ясно, что существует такое $N = N(r)$, что для всех $n \geq N$ коэффициент при x^r в сумме $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ равен коэффициенту при x^r в сумме $\beta_{\sigma(1)} + \beta_{\sigma(2)} + \dots + \beta_{\sigma(N)}$, и равен коэффициенту при x^r в сумме $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$. Отсюда следует свойство 1.

Рассмотрим последовательность $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots)$, такую, что

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_{jk} x^j, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $S(\gamma_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Для последовательности $(1 + \gamma_1, 1 + \gamma_2, \dots, 1 + \gamma_k, \dots)$ определено умножение, если коэффициент

при x^r в произведении $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \gamma_k)$ совпадает с коэффициентом при x^r в произведении $\prod_{k=1}^N (1 + \gamma_k)$ при некотором конечном N .

Свойство 2. Если последовательность $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$, где $\gamma_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_{jk} x^j$, $k = 1, 2, \dots$, суммируема, то для последовательности $(1 + \gamma_1, 1 + \gamma_2, \dots, 1 + \gamma_n, \dots)$ определено умножение.

Из суммируемости $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$ следует, что существует такое $N = N(r)$, что для всех $k > N$ $c_{jk} = 0$, $1 \leq j \leq r$. Следовательно, $\prod_{k=N+1}^{\infty} (1 + \gamma_k)$ не дает вклада в коэффициент при x^r , который определяется вкладом $\prod_{k=1}^N (1 + \gamma_k)$.

Свойство 3. Если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ — суммируемая последовательность и D — оператор дифференцирования, то

$$D\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} D(\alpha_k). \quad (1.45)$$

Из суммируемости $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ следует существование такого n , что вычисление коэффициента при x^r в $D\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\right)$, связанное с дифференцированием, можно проводить в $D\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right)$.

Отсюда и следует свойство 3.

Свойство 4. Пусть $\beta = (0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$. Тогда последовательность $(\beta, \beta^2, \dots, \beta^k, \dots)$ суммируема.

Действительно, так как $\beta^k = \sum_{j=k}^{\infty} b^{(j)} x^j$, то коэффициент при x^r в $\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j$ совпадает с коэффициентом при x^r в $\sum_{j=1}^r \beta^j$.

6. Логарифм. Пусть $\beta = (0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ и $\alpha = 1 + \beta$. Логарифм $L(\alpha)$ последовательности $\alpha = (1, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ определим равенством

$$L(\alpha) = L(1 + \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \beta^k}{k}. \quad (1.46)$$

Из свойства 4 следует, что $L(\alpha)$ всегда определен. Рассмотрим теперь некоторые свойства логарифма.

Свойство 1.

$$D(L(\alpha)) = \alpha^{-1} D(\alpha). \quad (1.47)$$

Из свойства 3 суммируемых последовательностей вытекает, что

$$D(L(\alpha)) = D\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\beta^k}{k}\right) = D(\beta) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta^k = D(\beta) \cdot \alpha^{-1}.$$

Свойство 2. Если $S(\alpha) = S(\gamma) = 1$, то

$$L(\alpha \cdot \gamma) = L(\alpha) + L(\gamma). \quad (1.48)$$

Действительно,

$$D(L(\alpha\gamma)) = (\alpha\gamma)^{-1}D(\alpha\gamma) = \alpha^{-1}D(\alpha) + \gamma^{-1}D(\gamma) = D(L(\alpha) + L(\gamma));$$

а так как $S(L(\alpha)) = 0$, $S(L(\alpha) + L(\gamma)) = 0$, то $L(\alpha\gamma) = L(\alpha) + L(\gamma)$.

Свойство 3. Для любого рационального числа r справедливо равенство

$$L(\alpha^r) = rL(\alpha). \quad (1.49)$$

Из определения следует, что $L(1) = 0$. Поэтому из равенства $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ следует, что $L(\alpha^{-1}) = -L(\alpha)$. Для натурального n из свойства 2 имеем $L(\alpha^n) = nL(\alpha)$. Теперь, если $r = m/n$, где m, n — целые числа, то $mL(\alpha) = L(\alpha^m) = L((\alpha^n)^m) = nL(\alpha^n)$. Отсюда и следует свойство 3.

Свойство 4. Если $L(\alpha) = L(\beta)$, то $\alpha = \beta$.

Покажем сначала, что из условия $L(\alpha) = 0$ следует, что $\alpha = 1$. Из равенства $L(\alpha) = 0$ имеем $D(L(\alpha)) = \alpha^{-1}D(\alpha) = 0$. Так как $\alpha^{-1} \neq 0$, то $D(\alpha) = 0$, и, значит, $\alpha = 1$. Теперь из равенства $L(\alpha) = L(\beta)$ следует, что $L(\alpha^{-1}\beta) = 0$, т. е. $\alpha^{-1}\beta = 1$, и $\alpha = \beta$.

Свойство 5. Если $\beta = (0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ и r — рациональное число, то

$$(1 + \beta)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} \beta^n, \quad (1.50)$$

$$\text{где } \binom{r}{n} := \frac{(r)_n}{n!}, \quad (r)_n := r(r-1)\dots(r-n+1), \quad (r)_0 = 1.$$

Введем обозначение

$$\gamma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} \beta^n.$$

Используя свойство суммируемости 3, имеем $(1 + \beta)D(\gamma) = r\gamma D(\beta)$. Отсюда следует, что $\gamma^{-1}D(\gamma) = r(1 + \beta)^{-1}D(1 + \beta)$. Так как из свойства 4 логарифмов следует, что $D(L(\gamma)) = \gamma^{-1}D(\gamma)$, то получаем

$$D(L(\gamma)) = r(1 + \beta)^{-1}D(1 + \beta).$$

С другой стороны, непосредственно имеем $D(L(1 + \beta)^r) = r(1 + \beta)^{-1}D(1 + \beta)$. Таким образом, $D(L(\gamma)) = D(L(1 + \beta)^r)$.

Из условия $S(L(\gamma)) = S(L(1 + \beta)^r) = 0$ следует, что $L(\gamma) = -L((1 + \beta)^r)$. Отсюда в силу свойства 4 для логарифмов вытекает, что

$$\gamma = (1 + \beta)^r.$$

7. Экспонента. Для последовательности $\beta = (0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ экспоненту $E(\beta)$ определим равенством

$$E(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!}, \quad \beta^0 = 1. \quad (1.51)$$

Корректность определения вытекает из свойства 4 суммируемых последовательностей. Рассмотрим свойства экспоненты.

Свойство 1.

$$D(E(\beta)) = D(\beta)E(\beta). \quad (1.52)$$

Действительно, из свойства 3 суммируемых последовательностей имеем

$$D(E(\beta)) = D(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} = D(\beta)E(\beta).$$

Свойство 2. Если $E(\beta) = E(\gamma)$, то $\beta = \gamma$.

По условию имеем $D(E(\beta)) = D(E(\gamma))$; тогда $D(\beta)E(\beta) = D(\gamma)E(\gamma)$. Так как $E(\beta) = E(\gamma) \neq 0$, то $D(\beta) = D(\gamma)$ и, следовательно, $\beta = \gamma$, с учетом того, что $S(\beta) = S(\gamma) = 0$.

Свойство 3. Если $\beta = (0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$, то $L(E(\beta)) = \beta$. Если $\alpha = (1, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, то $E(L(\alpha)) = \alpha$.

Из свойства 1 логарифмов и свойства 1 экспоненты имеем

$$D(L(E(\beta))) = (E(\beta))^{-1}D(E(\beta)) = (E(\beta))^{-1}E(\beta)D(\beta) = D(\beta).$$

Так как $S(L(E(\beta))) = S(\beta) = 0$, то $L(E(\beta)) = \beta$. Положим теперь $\alpha_i = E(L(\alpha_i))$, где $S(\alpha_i) = 1$. Имеем $L(\alpha_i) = L(E(L(\alpha_i)))$. Отсюда, согласно доказанному, $L(\alpha_i) = L(\alpha)$. Из этого равенства в силу свойства 4 логарифма вытекает, что $\alpha_i = \alpha$, т. е. $E(L(\alpha)) = \alpha$.

Свойство 4. Если $\beta = (0, b_1, \dots, b_n, \dots)$, $\gamma = (0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots)$, то $E(\beta + \gamma) = E(\beta)E(\gamma)$.

Из свойства 2 логарифма и свойства 3 экспоненты имеем

$$L(E(\beta)E(\gamma)) = L(E(\beta)) + L(E(\gamma)) = \beta + \gamma.$$

Таким образом, $E(L(E(\beta)E(\gamma))) = E(\beta + \gamma)$. Из свойства 3 экспоненты вытекает, что $E(L(E(\beta)E(\gamma))) = E(\beta)E(\gamma)$. Сравнивая два последних равенства, убеждаемся в справедливости свойства 4.

8. Формальные тригонометрические функции. Из свойства 3 логарифмов и свойства 3 экспоненты следует, что $E(rL(\alpha)) = \alpha'$ для любого рационального r и $\alpha = (1, a_1, a_2, \dots)$. Будем предполагать, что равенство $E(rL(\alpha)) = \alpha'$ выполнено для любого комплексного числа r . Тогда согласно свойству 4 экспоненты $\alpha' \alpha'' =$

$= \alpha^{r+s}$, где r и s — комплексные числа. Если $S(\alpha) = 1$, то для комплексного числа r имеем

$$D(\alpha') = D(E(rL(\alpha))) = E(rL(\alpha))D(rL(\alpha)) = \alpha' r \alpha^{-1} D(\alpha) = r \alpha'^{-1} D(\alpha).$$

Аналогичным образом, используя свойство 3 экспоненты, устанавливаем, что для комплексного r имеют место свойства логарифмов 3 и 5.

Указанные обобщения дают возможность определить формальные тригонометрические функции. Для последовательности $\alpha = (0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ формальные синус и косинус определим равенствами

$$\sin \alpha = \frac{1}{2i} \{E(i\alpha) - E(-i\alpha)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (1.53)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \{E(i\alpha) + E(-i\alpha)\} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}, \quad (1.54)$$

где $\alpha^0 = 1$, i — минимая единица: $i^2 = -1$.

Используя эти определения, получим

$$\sec \alpha = (\cos \alpha)^{-1}, \quad (1.55)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = (\sin \alpha)(\cos \alpha)^{-1}. \quad (1.56)$$

Из свойств экспоненты следует тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (1.57)$$

Отсюда вытекает тождество

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1.58)$$

Из определения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ и свойств 3 и 4 суммируемых последовательностей следуют равенства

$$D(\sin \alpha) = \cos \alpha, \quad D(\cos \alpha) = -\sin \alpha. \quad (1.59)$$

Из этих равенств имеем

$$D(\operatorname{tg} \alpha) = \sec^2 \alpha, \quad (1.60)$$

$$D(\sec \alpha) = \sec \alpha \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.61)$$

Используя свойства экспоненты, можно вывести и другие соотношения для тригонометрических функций.

9. Задача Андре. Пусть d_1, d_2, \dots, d_n есть некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Перестановку d_1, d_2, \dots, d_n назовем *E-перестановкой*, если $d_j > d_{j-1}$ при j четном и $d_j < d_{j-1}$ при j нечетном. Аналогично перестановку d_1, d_2, \dots, d_n будем называть *O-перестановкой*, если $d_j > d_{j-1}$ при j нечетном и $d_j < d_{j-1}$ при j четном. Заметим, что каждой *E-перестановке* d_1, d_2, \dots, d_n ставится во взаимно однозначное соответствие *O-перестановка* $n - d_i + 1$,

$n - d_2 + 1, \dots, n - d_n + 1$. Обозначим через b_n число E -перестановок (O -перестановок) d_1, d_2, \dots, d_n при $n \geq 2$ и положим $b_0 = b_1 = 1$. Задача Андре состоит в вычислении b_n .

Всю совокупность из $2b_n$ E -перестановок и O -перестановок d_1, d_2, \dots, d_n разобъем на n классов, полагая последовательно $d_1 = n, d_2 = n, \dots, d_n = n$. При $d_1 = n$ число O -перестановок равно b_{n-1} ; E -перестановок при $d_1 = n$ не существует. Если $d_1 = n$, то O -перестановок такого типа не существует, а соответствующее число E -перестановок равно $(n-1)b_{n-2}$, так как в качестве d_1 может быть выбрано любое из чисел $1, 2, \dots, n-1$, а число соответствующих перестановок d_2, d_3, \dots, d_n равно b_{n-2} . Вообще, если $d_{j+1} = n$, то число элементов, предшествующих n , выбирается $\binom{n-1}{j}$ способами, а количества вариантов для перестановок d_1, \dots, d_j и d_{j+2}, \dots, d_n соответственно равны b_j и b_{n-j-1} . Следовательно, общее число перестановок с $d_{j+1} = n$ равно $\binom{n-1}{j} b_j b_{n-j-1}$. Таким образом,

$$2b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} b_j b_{n-j-1}. \quad (1.62)$$

Полагая $c_n = b_n/n!$, отсюда получаем

$$2nc_n = \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_{n-j-1}. \quad (1.63)$$

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (1.64)$$

Из (1.63) следует, что α удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$2D(\alpha) = \alpha^2 + 1. \quad (1.65)$$

Из приведенных выше соотношений (1.58)–(1.61) для формальных тригонометрических функций следует, что это дифференциальное уравнение имеет решение $\alpha = \operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x$. Заметим, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{sec} x$ имеют ненулевые коэффициенты соответственно при нечетных и четных степенях x . Поэтому

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} x^{2k-1}, \quad (1.66)$$

$$\operatorname{sec} x = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k}. \quad (1.67)$$

В пунктах 10 и 11 будут получены явные формулы для чисел c_n .

10. Числа Бернулли. Рассмотрим последовательность $\alpha = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/(n+1), \dots)$ и соответствующий ей экспоненциальный формальный степенной ряд

$$\tilde{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{n!}.$$

Для этого ряда существует обратный ему, поэтому

$$\tilde{\alpha}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \quad (1.68)$$

Коэффициенты B_n , $n = 0, 1, \dots$, будем называть числами Бернулли. Из равенства $\tilde{\alpha}^{-1} \cdot \tilde{\alpha} = 1$ следует соотношение

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} B_{n-k} = \delta_{n,0}, \quad (1.69)$$

где $\delta_{n,0}$ — символ Кронекера. Это соотношение будем называть соотношением ортогональности для чисел Бернулли. При $n \geq 2$ из него следует рекуррентное соотношение для чисел Бернулли:

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.70)$$

Рассмотрим формальный степенной ряд $e(x)$, полученный из $E(x) - 1$ путем уменьшения показателей степени при x на единицу. В смысле этого определения будем понимать и запись $e(x) = (E(x) - 1)/x$. Ясно, что $e^{-1}(x)$ существует и согласно равенству (1.68)

$$e^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \quad (1.71)$$

В силу очевидного равенства

$$e^{-1}(-x) = x + e^{-1}(x)$$

из равенства (1.71) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{x^n}{n!} = x + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \quad (1.72)$$

Из равенства (1.72) вытекает, что

$$B_1 = -1/2, \quad B_{2k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, равенство (1.71) может быть записано в следующем виде:

$$e^{-1}(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (1.73)$$

Используя формулы (1.53), (1.54) и (1.56) и свойства $E(x)$, можно получить следующее соотношение для формальных степенных рядов:

$$x \operatorname{tg} x = e^{-1}(2ix) - e^{-1}(4ix) - ix, \quad (1.74)$$

Из равенств (1.73) и (1.74) следует, что

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} B_{2k} 2^{2k} (2^{2k}-1) \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}. \quad (1.75)$$

Возвращаясь к формальному степенному ряду (1.66), полученному при решении задачи Андре, из равенства (1.75) получаем

$$b_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} 2^{2k-1} (2^{2k}-1) B_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.76)$$

Числа Бернулли используются также в следующих формулах обращения:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n-k+1} b_k, \quad (1.77)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} a_k. \quad (1.78)$$

Доказательство основано на формуле (1.69) и осуществляется прямой подстановкой значений a_n и b_n из одного равенства в другое.

11. Числа Эйлера. Определим однопараметрические числа Эйлера E_n как коэффициенты формального степенного ряда

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}. \quad (1.79)$$

Степенной ряд в левой части равенства остается неизменным при замене x на $-x$. Отсюда следует, что в правой части равенства отличны от нуля только коэффициенты при четных степенях x . Таким образом, $E_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, \dots$, и

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} E_{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!}. \quad (1.80)$$

Из (1.80) следует соотношение для чисел Эйлера:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} E_{2k} = \delta_{n,0}, \quad (1.81)$$

где $\delta_{n,0}$ — символ Кронекера и суммирование ведется до обращения слагаемых в нули. Соотношение (1.81) позволяет получить

следующие формулы обращения:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} b_{n-2k}, \quad (1.82)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} E_{2k} a_{n-2k}. \quad (1.83)$$

Из равенств (1.54), (1.55) и (1.80) находим

$$\sec x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j E_{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!}. \quad (1.84)$$

Теперь, возвращаясь к задаче Андре, из равенств (1.67) и (1.84) получаем

$$b_{2k} = (-1)^k E_{2k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

§ 2. Производящие функции

1. Определения. Пусть \mathbf{C} — множество комплексных чисел, $C_0 \subseteq \mathbf{C}$ и $C^{(k)} \subseteq \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \dots \times \mathbf{C}$, где декартово произведение содержит k сомножителей. Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots, \quad (2.1)$$

заданных на множестве C_0 и принимающих значения из \mathbf{C} . Будем называть эту последовательность *базисной*.

Рассмотрим последовательность функций от k переменных:

$$a_0(x_1, \dots, x_k), a_1(x_1, \dots, x_k), \dots, a_n(x_1, \dots, x_k), \dots, \quad (2.2)$$

каждая из которых задана на $C^{(k)}$ и принимает комплексные значения.

Функцию $f(t; x_1, \dots, x_k)$, имеющую единственное разложение в ряд вида

$$f(t; x_1, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1, \dots, x_k) \varphi_n(t), \quad (2.3)$$

сходящийся для всех $(x_1, \dots, x_k) \in C_k$, $C_1 \subseteq C^{(k)}$, будем называть *производящей функцией* последовательности (2.2) относительно базисной последовательности (2.1).

Если вместо последовательности (2.2) рассматривать последовательность

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, \quad (2.4)$$

элементы которой суть комплексные числа, то производящая

функция последовательности (2.4) с базисной последовательностью (2.1) имеет вид

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t). \quad (2.5)$$

2. Степенные ряды. Наиболее часто в качестве базисной рассматривается последовательность

$$1, t, t^2, \dots, t^n, \dots \quad (2.6)$$

Соответствующая ей производящая функция последовательности (2.4)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (2.7)$$

называется *производящей функцией*. В комбинаторном анализе используется также *экспоненциальная производящая функция*

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}, \quad (2.8)$$

отвечающая базисной последовательности

$$1, t, t^2/2!, \dots, t^n/n!, \dots \quad (2.9)$$

Если элементы последовательности (2.4) и переменная t принимают действительные значения, то производящие функции (2.7) и (2.8) являются степенными рядами функций $f(t)$ и $F(t)$ соответственно. Известно, что *областью сходимости* степенного ряда является интервал $(-R, R)$. Число $R > 0$ называется *радиусом сходимости*. Для любого $t \in (-R, R)$ степенной ряд сходится абсолютно, а на отрезке $[-r, r]$, $r < R$, он сходится также и равномерно. Следовательно, его сумма для всех значений $t \in (-R, R)$ представляет собой непрерывную функцию от t . На отрезке $[0, t]$, где $|t| < R$, его можно почленно интегрировать, причем радиус сходимости проинтегрированного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного ряда. Внутри области сходимости степенной ряд можно многократно почленно дифференцировать.

Если функция $f(t)$ разлагается в степенной ряд вида (2.7), то этот ряд является рядом Тейлора для функции $f(t)$ в точке $t_0 = 0$ и, следовательно,

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.10)$$

где $f^{(n)}(0)$ — производная n -го порядка функции $f(t)$ в точке $t_0 = 0$.

Для радиуса сходимости степенного ряда известно следующее выражение через верхний предел соответствующей последова-

тельности:

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (2.11)$$

Из разложения

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n, \quad (2.12)$$

где α — действительное число, следует, что при $|t| < 1$ функция $(1+t)^\alpha$ является производящей функцией последовательности

$$1, \quad \binom{\alpha}{1}, \quad \binom{\alpha}{2}, \quad \dots, \quad \binom{\alpha}{n}, \quad \dots,$$

где $\binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)/n!$.

Функция $e^{\beta t}$, где β — действительное число, является экспоненциальной производящей функцией последовательности $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n, \dots$ в силу разложения

$$e^{\beta t} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{t^n}{n!}, \quad (2.13)$$

справедливого для всех действительных значений t .

Из равенства (2.12) следует, что при $|t| < 1$

$$(1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n. \quad (2.14)$$

Почленным интегрированием этого ряда получаем выражение для производящей функции

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}, \quad (2.15)$$

соответствующей последовательности $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$

Два степенных ряда, для которых наименьший из радиусов сходимости равен R , можно почленно складывать, вычитать и перемножать. В результате получаются степенные ряды, сходящиеся при $|t| < R$. Если суммируется бесконечное число степенных рядов и для соответствующего повторного ряда

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} t^n \right\}$$

при выбранном значении t сходится ряд, полученный из повторного заменой всех его членов их абсолютными величинами, то

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| \right) t^n, \quad (2.16)$$

Если заданы две производящие функции: $f(t)$ вида (2.7) с радиусом сходимости ряда R и производящая функция

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \quad (2.17)$$

с радиусом сходимости ряда r , причем $|a_0| < r$, то существует производящая функция

$$\psi(f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad (2.18)$$

полученная подстановкой ряда (2.7) в ряд (2.17). Ряд (2.18) имеет положительный радиус сходимости.

3. Разбиение чисел. Используя возможность подстановки ряда в ряд, докажем справедливость разложения

$$F(x, t) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + x^m t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{\binom{k+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)} t^k \quad (2.19)$$

при $|t| < 1$ и $|x| < 1/2$. Бесконечное произведение в (2.19) при $|t| < 1$, $|x| < 1$ сходится и имеет положительное значение. Поэтому, логарифмируя, получим

$$\ln F(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln(1 + x^m t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^{jm}}{j} t^j.$$

Из формулы (2.16) следует, что

$$\ln F(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} x^j}{j(1-x^j)} t^j \quad (2.20)$$

при $|x| < 1/2$, $|t| < 1$. Так как ряд, стоящий в правой части равенства (2.20), сходится при $|x| < 1/2$, $|t| < 1$, то существует разложение

$$F(x, t) = e^{\ln F(x, t)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^k. \quad (2.21)$$

Из очевидного соотношения $F(x, t) = (1 + xt)F(x, xt)$ следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) t^k = (1 + xt) \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) x^k t^k.$$

Приравнивая коэффициенты при t^k в обеих частях последнего равенства, приходим к соотношению

$$a_k(x) = \frac{x^k}{1-x^k} a_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем $a_0(x) = 1$. Отсюда имеем

$$a_k(x) = \frac{x^{\binom{k+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (2.22)$$

что согласуется с равенством (2.19).

Установим теперь комбинаторный смысл равенства (2.19). Рассмотрим числа

$$V_{n,k} = \sum_{\substack{1\delta_1+2\delta_2+\dots+n\delta_n=n \\ \delta_1+\delta_2+\dots+\delta_k=k}} 1, \quad (2.23)$$

где $\delta_i = 0, 1, i = 1, \dots, n$. Всякое представление натурального числа n в виде

$$n = 1\delta_1 + 2\delta_2 + \dots + n\delta_n,$$

где $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ — целые неотрицательные числа, $\delta_1 + \dots + \delta_n = k$, называется разбиением n на k слагаемых (δ_1 — число единиц, используемых в качестве слагаемых, δ_2 — число двоек и т. д.). Из формулы (2.23) следует, что $V_{n,k}$ равно числу разбиений n на k различных слагаемых. Непосредственным перемножением сомножителей бесконечного произведения в (2.19) нетрудно убедиться, что

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1+x^m t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=\binom{k+1}{2}}^{\infty} V_{n,k} t^k x^n. \quad (2.24)$$

Отсюда следует, что для $k \geq 1$

$$\sum_{n=\binom{k+1}{2}}^{\infty} V_{n,k} x^n = \frac{x^{\binom{k+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)}. \quad (2.25)$$

Обозначим через $R_n^{(k)}$ число разбиений n на слагаемые, не превосходящие k . Испо, что

$$R_n^{(k)} = \sum_{1n_1+2n_2+\dots+kn_k=n} 1.$$

Из этого равенства следует, что для $k \geq 1$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^k)} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^{(k)} x^n. \quad (2.26)$$

Теперь из равенств (2.25) и (2.26) вытекает равенство

$$R_n^{(k)} = V_{n+\binom{k+1}{2}, k}, \quad (2.27)$$

которое выражает содержание известной теоремы.

Теорема. Количество разбиений числа $n + \binom{k+1}{2}$ на k различных слагаемых равно количеству разбиений n на слагаемые, не превосходящие k .

4. Аппелевые множества многочленов. Последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ поставим в соответствие совокупность многочленов

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.28)$$

Если $A'_n(x)$ — производная многочлена $A_n(x)$ по x , то из (2.28) следует, что

$$A'_n(x) = n A_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \quad (2.30)$$

и будем предполагать, что ряд в правой части имеет радиус сходимости $R > 0$. Для производящей функции

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.31)$$

из (2.28) имеем

$$F(x, t) = e^{xt} F(t). \quad (2.32)$$

Из (2.29) вытекает, что $F(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = t F(x, t),$$

интегрирование которого также позволяет получить выражение (2.32) для $F(x, t)$. Множество многочленов, для которых производящая функция имеет вид (2.32), называется *аппелевым*.

Последовательность чисел *Бернулли* $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ можно задать производящей функцией

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad (2.33)$$

где t — действительная переменная. *Многочлены Бернулли*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \quad (2.34)$$

образуют аппелево множество, так как

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.35)$$

Из (2.33) и (2.35) следует, что для $n > 1$

$$B_n(0) = B_n(1) = B_n.$$

Отсюда, используя (2.34), получаем рекуррентное соотношение для чисел Бернулли:

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2.36)$$

совпадающее с соотношением (1.70).

Числа Бернулли можно выразить через числа Моргана. Заметим, что

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{\ln[1 - (e^t - 1)]}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (e^t - 1)^k \quad (2.37)$$

для всех $|t| < \ln 2$. Далее, имеем

$$(e^t - 1)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{n=0}^{\infty} j^n \frac{t^n}{n!}.$$

Отсюда следует, что

$$(e^t - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \Delta^k 0^n \frac{t^n}{n!}. \quad (2.38)$$

Подставляя это выражение в ряд (2.37) и меняя порядок суммирования, что возможно при достаточно малом t , получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Delta^k 0^n}{k+1}.$$

Отсюда следует формула

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Delta^k 0^n}{k+1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.39)$$

Поскольку для чисел Стирлинга второго рода имеет место выражение

$$\sigma(n, k) = \frac{\Delta^k 0^n}{k!},$$

то из равенства (2.38) следует формула

$$\frac{1}{k!} (e^x - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.40)$$

Выражение соответствующей производящей функции для чисел Стирлинга первого рода имеет вид

$$\frac{1}{k!} [\ln(1+t)]^k = \sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.41)$$

где $|t| < 1$. Действительно, умножая обе части равенства (2.41) на x^k и суммируя по k от 0 до ∞ , получаем

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s(n, k) \frac{t^k}{k!} x^n.$$

Отсюда следует, что числа $s(n, k)$ удовлетворяют соотношению

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k,$$

определяющему числа Стирлинга первого рода.

Последовательностям, определяющим ациклические множества многочленов, можно придать комбинаторный смысл. Рассмотрим некоторую совокупность преобразований n -множества X , причем через a_n обозначим число преобразований этой совокупности, не имеющих неподвижных точек. Ясно, что если $A_n(x)$ — многочлен вида (2.28), то общее число преобразований рассматриваемой совокупности равно $A_n(1)$. Если $u_n(h_n)$ — число всех преобразований (подстановок) n -множества без неподвижных точек, то

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k, \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h_k.$$

Применяя к этим равенствам формулы обращения (4.19) и (4.20) га. I, находим

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} h_k, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.42)$$

$$h_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.43)$$

5. Инволюции. Подстановка степени n называется *инволюцией*, если она принадлежит цикловому классу $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, где $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, т. е. может содержать только циклы длины 1 и 2. Обозначим через I_n число инволюций степени n , через J_n —

число инволюций без единичных циклов, причем полагаем $I_n = 0$, если n — нечетное число. Очевидно, что

$$I_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J_k, \quad J_0 = I_0 = 1. \quad (2.44)$$

Имеет место рекуррентное соотношение

$$J_n = (n-1)J_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.45)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \frac{t^n}{n!}.$$

Умножая обе части равенства (2.45) на $t^{n-1}/(n-1)!$ и суммируя по n от 2 до ∞ , получаем дифференциальное уравнение $F'(t) = -tF(t)$. Интегрируя его при начальном условии $F(0) = 1$, получаем

$$F(t) = e^{t^2/2}. \quad (2.46)$$

Рассмотрим многочлен Аппеля

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J_k x^{n-k}.$$

В силу (2.44) имеем $I_n = A_n(1)$. Кроме того, из (2.31), (2.32) и (2.46) следует, что

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{xt+t^2/2}, \quad (2.47)$$

откуда

$$F(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{t^n}{n!} = e^{t+t^2/2}. \quad (2.48)$$

Из формулы (2.46) получаем

$$J_n = \begin{cases} \frac{n!}{2^{n/2} (n/2)!}, & n \text{ — четное,} \\ 0, & n \text{ — нечетное.} \end{cases} \quad (2.49)$$

Подставляя (2.49) в (2.44), приходим к формуле для числа цикловий степени n :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n)_{2k}}{2^k k!}. \quad (2.50)$$

6. Регулярные функции. Функция $f(z)$ комплексного переменного z называется *регулярной* в области D , являющейся связным открытым множеством, если она определена в этой области и в окрестности каждой точки этой области разлагается в сходящийся степенной ряд. Он представляет собой ряд Тейлора функции $f(z)$ и для $z_0 \in D$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{n!}, \quad (2.51)$$

где $f^{(n)}(z_0)$ — n -я производная $f(z)$ в точке z_0 . Ряд (2.51) сходится к $f(z)$ в любом круге $|z - z_0| < R$, лежащем в области D ; радиус сходимости R определяется из формулы Адамара: $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$. Например, ряды Тейлора

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad (2.52)$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad (2.53)$$

сходятся в круге $|z| < 1$, а ряд

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (2.54)$$

сходится во всей комплексной плоскости.

Если функция $f(z)$ регулярна в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$, $r \geq 0$, то для нее справедливо разложение в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (2.55)$$

сходящийся в этом кольце. Члены этого ряда с положительными показателями степени образуют ряд, сходящийся в круге $|z - z_0| < R$, а члены с отрицательными показателями — ряд, сходящийся при $|z - z_0| > r$. Для коэффициентов ряда (2.55) справедлива формула Коши:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.56)$$

где C — простой замкнутый контур, целиком лежащий внутри кольца и охватывающий точку z_0 . Обход контура осуществляется против часовой стрелки. Коэффициент

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \quad (2.57)$$

разложения $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $r < |z - z_0| < R$ называется вычетом этой функции и обозначается $c_1 = \underset{z=z_0}{\text{выч}} f(z)$, если z_0 — изолированная особая точка однозначного характера.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в области, ограниченной простой замкнутой кривой C , за исключением конечного числа изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_r , и $c_{-1}^{(1)}, c_{-1}^{(2)}, \dots, c_{-1}^{(r)}$ — вычеты $f(z)$ относительно этих особых точек. Тогда справедливо равенство

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r c_{-1}^{(k)}. \quad (2.58)$$

Например, функция $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ имеет следующее разложение в ряд Лорана: для $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n,$$

для $1 < |z| < 2$

$$f(z) = - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

для $2 < |z| < \infty$

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

Многочлены Лежандра определяются равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n], \quad |x| \leq 1.$$

Используя интегральную формулу Коши, можно записать

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-x|=R} \frac{(1-z^2)^n}{2^n (z-x)^{n+1}} dz.$$

Умножим обе части последнего равенства на t^n и просуммируем от 0 до ∞ . При достаточно малом t и фиксированном R можно поменять порядок суммирования и интегрирования. В результате получаем

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-x|=R} \frac{2dz}{2(z-x)-(1-z^2)t}.$$

Ясно, что подынтегральная функция имеет два полюса в точках $z_1 = \frac{1}{t} (\sqrt{t^2 + 2tx + 1} - 1)$, $z_2 = -\frac{1}{t} (\sqrt{t^2 + 2tx + 1} + 1)$.

При достаточно малом t имеем $z_1 = x + t/2 - \dots$, $z_2 = -(t + x + t/2) + \dots$, т. е. первый полюс лежит внутри контура интегрирования, а второй — вне контура при соответствующем выборе R . Таким образом,

$$F(x, t) = \operatorname{выч}_{z=z_1} \frac{2}{2(z-x)-(1-z^2)t}.$$

Известно, что если a — простой полюс функции $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то

$$\operatorname{выч}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Применяя эту формулу, получаем $F(x, t) = 1/(1+z,t)$. Подставляя значение z_1 , приходим к выражению для производящей функции:

$$F(x, t) = (t^2 + 2xt + 1)^{-1/2}. \quad (2.59)$$

7. Ряд Бюргмана — Лагранжа. Рассмотрим заданную при помощи ряда функцию

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \quad (2.60)$$

Если $c_1 \neq 0$, то существует достаточно малая окрестность точки $z = 0$, в которой $\varphi(z)$ принимает каждое значение один раз. На множестве этих значений существует функция $z(w)$ такая, что $\varphi(z(w)) = w$; ее называют *обратной* к функции $\varphi(z)$. Если обратная функция $z(w)$ удовлетворяет условию $z(0) = 0$ и функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки $z = 0$, то для функции $f(z(w))$ в некоторой окрестности точки $w = 0$ существует разложение в степенной ряд

$$f(z(w)) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n, \quad (2.61)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ f'(z) \left(\frac{z}{\varphi(z)} \right)^n \right\}_{z=0}. \quad (2.62)$$

Ряд (2.61) называется *рядом Бюргмана — Лагранжа*.

В качестве примера рассмотрим задачу отыскания ряда Бюргмана — Лагранжа, когда

$$\varphi(z) = ze^{-z^2}, \quad (2.63)$$

$$f(z) = e^z, \quad (2.64)$$

так a, b — постоянные, $a \neq 0$. Так как

$$f'(z) \left(\frac{z}{\psi(z)} \right)^n = b e^{(an+b)z},$$

то, как легко видеть,

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left\{ f'(z) \left(\frac{z}{\psi(z)} \right)^n \right\} = b (an + b)^{n+1} e^{(an+b)z}.$$

Применяя формулы (2.61) и (2.62), получаем

$$e^{bz(w)} = b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(an+b)^{n+1}}{n!} w^n. \quad (2.65)$$

Радиус сходимости этого ряда равен

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|an+b|^{n+1}}{n!}} \right)^{-1} = \frac{1}{|a|e}.$$

8. Графы и деревья. Графом $\Gamma = \Gamma(X, W)$ называется пара множеств: X — множество, элементы которого называются *вершинами*, W — множество неупорядоченных пар вершин, называемых *ребрами*. Если $x, y \in X$, $w = (x, y) \in W$, то говорит, что ребро w соединяет вершины x и y , или w *инцидентно* x и y . Четедующаяся последовательность вершин и ребер $x_1, w_1, x_2, w_2, \dots, x_{l-1}, w_{l-1}, x_l$, $w_i \neq w_j$, $i \neq j$, где $x_i \in X$, $w_i \in W$ и w_i инцидентно x_i и x_{i+1} , $1 \leq i \leq l-1$, называется *цепью*, соединяющей вершины x_1 и x_l . Замкнутая цепь, в которой $x_l = x_1$, называется *циклом*. Граф Γ называется *связным*, если любая пара его вершин соединена цепью. Связный граф, не содержащий циклов, называется *деревом* или точнее, *деревом с помеченными вершинами*. Дерево, в котором одна из помеченных вершин, называемая *корнем*, выделена называют *корневым*. Пусть X — множество вершин, $|X| = n$ и r_n — число корневых деревьев с этими вершинами. Если $r_n(k)$ — число таких корневых деревьев с k ребрами в корне, то

$$r_n(k) = \frac{1}{k!} \sum_{j_1 + \dots + j_k = n-1} \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_k!} r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_k}, \quad (2.66)$$

где суммирование проводится по всем векторам (j_1, j_2, \dots, j_k) , $j_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, таким, что $j_1 + \dots + j_k = n-1$. Действительно, $n!/(j_1! j_2! \dots j_k!)$ — число способов выбора корня и распределений $n-1$ остальных вершин по k деревьям с числами вершин j_1, j_2, \dots, j_k , составляющих исходное дерево. Общее число таких деревьев равно $r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_k}$. Перемножая эти величины, деля на $k!$ и суммируя по всем j_1, \dots, j_k , получаем требуемую формулу. Деление на $k!$ исключает многочленный учет комбинаций из k -деревьев, отличающихся их перестановкой.

Рассмотрим производящие функции

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \frac{x^n}{n!}, \quad (2.67)$$

$$r(x; k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n(k) \frac{x^n}{n!}. \quad (2.68)$$

Каждому корневому дереву с фиксированным корнем можно поставить в соответствие некоторое преобразование $\varphi: X \rightarrow X$, $|X|=n$. Для этого все вершины разобьем на слои X_0, X_1, \dots, X_h . В слое X_0 находится корневая вершина, в слое X_1 находится вершины, имеющие общее ребро с корнем. К i -му слою относятся вершины, имеющие общие ребра с вершинами $(i-1)$ -го слоя. Вершины последнего, h -го слоя являются концевыми. Теперь отображение φ определяется следующим образом: для $x \in X_i$, $\varphi(x) = x'$, где $x' \in X_{i-1}$, а x и x' имеют общее ребро. Отсюда следует, что $r_n(k) \leq r_n \leq n^n$. Теперь из неравенства

$$\left| r_n \frac{x^n}{n!} \right| \leq |xe|^n$$

следует, что ряды (2.67) и (2.68) сходятся при $x < 1/e$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$xr^h(x) = \sum_{n=h+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{j_1+\dots+j_k=n-1} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} r_{j_1} \dots r_{j_k}. \quad (2.69)$$

Из равенств (2.66), (2.68) и (2.69) следует, что

$$r(x; k) = \frac{x}{k!} r^h(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

Из равенств (2.68) и (2.70) с учетом равенств

$$r_n := \sum_{k=1}^{n-1} r_n(k), \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$r_1 := r_1(0) = 1, \quad r(x; 0) = x$$

находим

$$r(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r^k(x).$$

Иными словами, $r(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$r(x) = xe^{r(x)}.$$

Положим $w = x$, $z = r(x)$, $\varphi(z) = ze^{-z}$, $f(z) = z$. Тогда из формулы (2.62) следует, что

$$b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{xz}) \right|_{z=0} = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Следовательно, из формулы (2.61) с учетом равенства $r(0) = 0$ находим

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Таким образом, число корневых деревьев с n помеченными вершинами дается формулой

$$r_n = n^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Дерево с помеченными вершинами, ни одна из которых не выделена, называется *свободным*. Число свободных деревьев с n помеченными вершинами равно

$$\tilde{r}_n = n^{n-2},$$

так как каждому свободному дереву с n вершинами отвечает ровно n корневых деревьев, определяемых выбором корневой вершины.

§ 3. Метод дифференциальных уравнений

При решении комбинаторных задач перечислительного характера часто используется следующая схема. Для отыскания числа $A_{n,k}$ некоторых конфигураций из n объектов с k свойствами из непосредственных комбинаторных соображений составляется рекуррентное соотношение $A_{n,k} = \varphi(A_{n-1,1}, A_{n-1,2}, \dots, A_{n-1,k})$. Для двойной производящей функции $F(x, y) = \sum A_{n,k} x^k y^n$ с использованием рекуррентного соотношения выводится дифференциальное уравнение — обыкновенное или в частных производных. Решение этого дифференциального уравнения при некоторых начальных условиях позволяет определить функцию $F(x, y)$. Разложение $F(x, y)$ в степенной ряд позволяет найти искомые величины $A_{n,k}$.

Проиллюстрируем применение этой схемы в конкретном случае при определении числа перестановок степени n с данным числом возрастаний.

1. Возрастания. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — перестановка степени n элементов $1, 2, \dots, n$, и пусть для $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & a_{i+1} > a_i, \\ 0, & a_{i+1} \leq a_i. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пара элементов a_i и a_{i+1} образует возрастание, если $a_i < a_{i+1}$. Число возрастаний k этой перестановки определяется равенством

$$k = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i. \quad (3.2)$$

Обозначим через $A_{n,k}$ число перестановок степени n с k возрастаниями. В перестановках $n, n-1, \dots, 1$ и $1, 2, \dots, n$ число возрастаний равно соответственно 0 и $n-1$. Так как только эти перестановки обладают данными свойствами, то

$$A_{n,0} = A_{n,n-1} = 1. \quad (3.3)$$

Для величин $A_{n,k}$ имеет место рекуррентное соотношение

$$A_{n,k} = (k+1)A_{n-1,k} + (n-k)A_{n-1,k-1}. \quad (3.4)$$

Действительно, любая перестановка степени n с k возрастаниями получается из некоторой фиксированной перестановки степени $n-1$ из элементов $1, 2, \dots, n-1$ путем расположения элемента n на одно из n мест в начале, между элементами перестановки степени $n-1$, или в конце. При этом имеются следующие четыре случая:

1) Элемент n располагается в начале; перестановка степени $n-1$ имеет k возрастаний.

2) Элемент n располагается между элементами a_i и a_{i+1} такими, что $a_i > a_{i+1}$; перестановка степени $n-1$ имеет $k-1$ возрастаний.

3) Элемент n располагается между элементами a_i и a_{i+1} такими, что $a_i < a_{i+1}$; перестановка степени $n-1$ имеет k возрастаний.

4) Элемент n располагается в конце; перестановка степени $n-1$ имеет $k-1$ возрастаний.

Определение числа перестановок, отвечающих каждому из этих четырех случаев, приводит к равенству

$$A_{n,k} = A_{n-1,k} + (n-k-1)A_{n-1,k-1} + kA_{n-1,k} + A_{n-1,k-1},$$

которое совпадает с соотношением (3.4).

Рассмотрим производящую функцию

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} x^k, \quad (3.5)$$

С использованием рекуррентного соотношения (3.4) можно вывести следующее дифференциально-разностное уравнение:

$$nf_n(x) = (1-x) \frac{\partial}{\partial x} [xf_{n-1}(x)] + nx f_{n-1}(x). \quad (3.6)$$

Действительно, умножая обе части равенства (3.4) на $x^k/n!$ и суммируя по k от 1 до $n-1$, после несложных преобразований

получаем

$$nf_n(x) = f_{n-1}(x) + x \frac{\partial}{\partial x} f_{n-1}(x) - x^2 \frac{\partial}{\partial x} f_{n-1}(x) + (n-1)xf_{n-1}(x).$$

Производя необходимое свертывание выражений, получаем уравнение (3.6).

Рассмотрим теперь двойшую производящую функцию

$$F(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \frac{x^k z^n}{n!}. \quad (3.7)$$

Из начальных условий (3.3) вытекает, что

$$F(x, 0) = 0, \quad F(0, z) = e^z - 1. \quad (3.8)$$

Кроме того, заметим, что ряд по степеням x , стоящий в правой части равенства (3.7), сходится вместе с рядом из производных по x равномерно по крайней мере для $|x| \leq r < 1$, $|z| \leq r < 1$. Поэтому, умножая обе части равенства (3.6) на z^{n-1} и суммируя по n от 2 до ∞ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} nf_n(x) z^{n-1} &= \\ &= (1-x) \frac{\partial}{\partial x} \left(x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1}(x) z^{n-1} \right) + xz \sum_{n=2}^{\infty} n f_{n-1}(x) z^{n-2} \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial z} (F(x, z) - z) = (1-x) \frac{\partial}{\partial x} (xF(x, z)) + x \frac{\partial}{\partial z} (zF(x, z)). \quad (3.9)$$

Проводя несложные преобразования и полагая

$$F = F(x, z), \quad F_z = \frac{\partial}{\partial z} F(x, z), \quad F_x = \frac{\partial}{\partial x} F(x, z), \quad (3.10)$$

получаем следующее уравнение в частных производных:

$$(xz - 1) F'_z + x(1-x) F'_x + F + 1 = 0. \quad (3.11)$$

Произведем в этом уравнении замену переменных с помощью равенств

$$u = \ln x + z(x-1), \quad v = \ln x - z(x-1); \quad (3.12)$$

полагая $F'_u = \frac{\partial}{\partial u} F(x, z)$, $F'_v = \frac{\partial}{\partial v} F(x, z)$ и применяя правила

дифференцирования сложных функций, имеем

$$F'_x = \left(z + \frac{1}{x} \right) F'_u - \left(z - \frac{1}{x} \right) F'_v, \quad F'_z = (x - 1) F'_u - (x - 1) F'_v. \quad (3.43)$$

Подставляя эти выражения в равенство (3.11), получаем

$$2(1-x)F'_u + F + 1 = 0. \quad (3.14)$$

Введем в рассмотрение частный дифференциал $d_u F = \frac{\partial F}{\partial u} du$ и из (3.12) выражим x через u и v : $x = e^{(u+v)/2}$. Теперь из равенства (3.14) получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d_u F}{F - 1} = - \frac{du}{2(1 - e^{(u+v)/2})}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим неопределенный интеграл

$$I = \int \frac{du}{2(1 - e^{(u+v)/2})}. \quad (3.16)$$

После замены $w = e^{(u+v)/2}$ интеграл приводится к виду

$$I = \int \frac{dw}{w(1-w)} = \int \frac{dw}{w} + \int \frac{dw}{1-w}. \quad (3.17)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (3.15), с учетом формул (3.16) и (3.17) получаем

$$F + 1 = (1 - e^{-(u+v)/2})C(v), \quad (3.18)$$

где $C(v)$ — некоторая функция, зависящая только от v . Определим эту функцию, используя начальные условия (3.8). В равенстве (3.18) вернемся снова к переменным x и z . Имеем

$$F(x, z) + 1 = \left(1 - \frac{1}{x}\right) C(v(x, z)). \quad (3.19)$$

Полагая $z = 0$, с учетом первого из равенств (3.8) получаем

$$1 = \left(1 - \frac{1}{x}\right) C(v(x, 0)). \quad (3.20)$$

Из (3.12) следует, что $v(x, 0) = \ln x$. Поэтому $C(\ln x) = x/(x - 1)$. Таким образом, $C(v) = e^v/(e^v - 1)$. Используя это выражение и равенства (3.12), из формулы (3.18) получаем

$$F(x, z) = \frac{(1-x)e^{z(1-x)}}{1-xe^{z(1-x)}} - 1. \quad (3.21)$$

Для $|x| \leq r < 1$, $|z| \leq r < 1$ имеем $|xe^{z(1-x)}| \leq |x|e^{2r}$. Поэтому, применив формулу разложения бинома Ньютона для $\alpha = -1$ для

всех $|x| < e^{-1/(2r)}$, из равенства (3.21) получаем

$$1 + F(x, z) = (1 - x) \sum_{j=0}^{\infty} x^j e^{z(1-x)(j+1)}.$$

Экспоненту под знаком суммы также разложим в ряд при $|z| \leq r < 1$, $|x| < e^{-1/(2r)}$. В результате имеем

$$1 + F(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \sum_{n=0}^{\infty} (j+1)^n (1-x)^{n+1} \frac{z^n}{n!}.$$

Отсюда следует, что

$$F(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (1-x)^{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^n x^j. \quad (3.22)$$

С учетом (3.7) получаем

$$f_n(x) = \frac{(1-x)^{n+1}}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^n x^j. \quad (3.23)$$

Из равенств (3.5) и (3.23), вычисляя коэффициент при x^k , получаем формулу для числа перестановок степени n с k возрастаниями:

$$A_{n,k} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.24)$$

Убедимся, что эта формула согласуется с начальными условиями (3.3). Очевидным образом из формулы (3.24) следует, что $A_{n,n} = 1$. Далее, из этой формулы следует, что

$$A_{n,n-1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} (n-j)^n.$$

Разлагая $(n-j)^n$ по формуле бинома Ньютона и меняя порядок суммирования, получаем

$$A_{n,n-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} n^{n-k} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} j^k.$$

Внутренняя сумма равна $\Delta^{n+k} 0^k + (-1)^k (n+1)^k$. Так как $\Delta^{n+k} 0^k = 0$ для $1 \leq k \leq n$, то

$$A_{n,n-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+1)^k n^{n-k} = 1.$$

2. Возрастания и убывания. Для перестановки a_1, a_2, \dots, a_n элементов $1, 2, \dots, n$ пара элементов a_i и a_{i+1} образует убывание, если $a_i > a_{i+1}$. Если перестановка a_1, a_2, \dots, a_n образует k

возрастаний и l убываний, то очевидно, что

$$k + l = n - 1. \quad (3.25)$$

Обозначим через $A(k, l)$ число перестановок степени n , имеющих k возрастаний и l убываний, причем k и l удовлетворяют условию (3.25). Так как имеет место очевидное равенство

$$A(k, n-k-1) = A_{n, k}, \quad (3.26)$$

то из соотношения (3.4) вытекает, что

$$A(k, l) = (k+1)A(k, l-1) + (l+1)A(k-1, l), \quad (3.27)$$

$$k + l = n - 1, \quad k, l = 1, \dots, n - 1.$$

Из этого равенства следует, что

$$A(k, l) = A(l, k). \quad (3.28)$$

Равенство (3.28) можно получить и непосредственно. Действительно, перестановке a_1, a_2, \dots, a_n поставим во взаимно однозначное соответствие перестановку b_1, b_2, \dots, b_n такую, что $b_i = n - a_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Каждому возрастанию в первой перестановке соответствует убывание во второй перестановке, и обратно. Отсюда и следует равенство (3.28).

Выведем теперь другое рекуррентное соотношение для чисел $A(k, l)$. Каждая перестановка элементов $1, 2, \dots, k+l, k+l+1$ может быть получена из перестановки элементов $1, 2, \dots, k+l$ путем помещения элемента $k+l+1$ на одно из $k+l+1$ мест. Число перестановок степени $k+l$, дающих перестановку степени $k+l+1$ с k возрастаниями и l убываниями при помещении элемента $k+l+1$ на первое и последнее места, соответственно равно $A(k, l-1)$ и $A(k-1, l)$. Пусть элемент $k+l+1$ располагается так, что элементы, стоящие слева, образуют r возрастаний и s убываний, а элементы, стоящие справа, образуют $k-r-1$ возрастаний и $l-s-1$ убываний; $0 \leq r \leq k-1$, $0 \leq s \leq l-1$. Соответствующая перестановка степени $k+l+1$ имеет k возрастаний и l убываний. Элементы для перестановки степени $r+s+1$, стоящей слева от элемента $k+l+1$, можно выбрать $\binom{k+l}{r+s+1}$ способами, а число способов образования перестановок слева и справа от элемента $k+l+1$ равно соответственно $A(r, s)$ и $A(k-r-1, l-s-1)$. Заметим, наконец, что в соответствии с равенством (3.26) можно положить $A(0, 0) = 1$. Из этих соображений следует рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} A(k, l) &= A(k, l-1) + A(k-1, l) + \\ &+ \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{l-1} \binom{k+l}{r+s+1} A(r, s) A(k-r-1, l-s-1), \quad (3.29) \\ &k, l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A(k, l) \frac{x^k y^l z^{k+l+1}}{(k+1)(l+1)!}. \quad (3.30)$$

Двойной ряд сходится абсолютно и равномерно для всех $|x| \leq r < 1$, $|y| \leq r < 1$, $|z| \leq 1/r$. Он сходится также при $|x| \leq r < 1$, $|z| \leq r < 1$ и $|y| \leq 1/r$, т. е., в частности, он сходится при $y = 1$. Умножим обе части равенства (3.29) на $x^k y^l z^{k+l}/(k+l)!$ и просуммируем по k и l от $k = 1$ до ∞ и от $l = 1$ до ∞ . В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi'_z(x, y, z) - (e^{yz} - 1) - (e^{xz} - 1) - 1 = \\ = y\Phi(x, y, z) - (e^{yz} - 1) + x\Phi(x, y, z) - (e^{xz} - 1) + xy\Phi^2(x, y, z), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где $\Phi'_z(x, y, z)$ есть частная производная $\Phi(x, y, z)$ по z . Полагая $\Phi = \Phi(x, y, z)$, $\Phi'_z = \Phi'_z(x, y, z)$, из равенства (3.31) получаем дифференциальное уравнение

$$\Phi'_z = xy\Phi^2 + (x+y)\Phi - 1. \quad (3.32)$$

Используя частный дифференциал $d_z\Phi = \Phi'_z dz$, перепишем уравнение (3.32) в виде

$$\frac{d_z\Phi}{(\Phi - 1/x)(\Phi - 1/y)} = xy dz.$$

Разложив левую часть последнего равенства на простейшие дроби, получим

$$\frac{1}{x-y} \left(\frac{d_z\Phi}{\Phi - 1/x} - \frac{d_z\Phi}{\Phi - 1/y} \right) = dz.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, находим

$$\frac{\Phi - 1/x}{\Phi - 1/y} = C(x, y) e^{(x-y)z}, \quad (3.33)$$

где $C(x, y)$ — некоторая функция, зависящая только от x и y . Из этого равенства, используя начальное условие $\Phi(x, y, 0) = 0$, получаем выражение для $C(x, y)$: $C(x, y) = y/x$. Подставляя это выражение в равенство (3.33) и проводя несложные преобразования, окончательно получаем

$$\Phi(x, y, z) = \frac{e^{xz} - e^{yz}}{xe^{yz} - ye^{xz}}. \quad (3.34)$$

В равенстве (3.7) поменяем порядок суммирования и сделаем замену переменной n на l с помощью равенства $n = k + l + 1$.

Тогда с учетом равенства (3.26) получим

$$F(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A(k, l) \frac{x^k z^{k+l+1}}{(k+l+1)!} \quad (3.35)$$

Теперь из равенств (3.30), (3.34) и (3.35) следует, что

$$F(x, z) = \Phi(x, 1, z) = \frac{e^x - e^{xz}}{e^{xz} - xe^z},$$

что согласуется с формулой (3.21).

§ 4. Метод линейных функционалов

1. Коэффициенты Гаусса и числа Галуа. Пусть V_n есть n -мерное векторное пространство над конечным полем $GF(q)$, содержащим $q = p^r$ элементов, где p — простое число. Поле $GF(q)$ называется *полям Галуа*.

Лемма 1. Число систем из k линейно независимых векторов в пространстве V_n равно

$$w_{n,k} = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{k-1}). \quad (4.1)$$

В частности, число базисов пространства V_n равно

$$w_n = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}). \quad (4.2)$$

Пусть v_1, v_2, \dots, v_k — система k линейно независимых векторов в пространстве V_n . Вектор $v_1 \neq 0$ выбирается $q^n - 1$ способами. Вектор $v_2 \neq 0$ линейно не выражается через v_1 , т. е. может быть выбран $q^n - q$ способами, и т. д. Наконец, вектор v_k линейно не выражается через векторы v_1, \dots, v_{k-1} и, следовательно, может быть выбран $q^n - q^{k-1}$ способами. Перемножая эти величины, получаем (4.1). Формула (4.2) вытекает из очевидного равенства $w_n = w_{n,n}$.

Лемма 2. Число подпространств размерности $1 \leq k \leq n$ в пространстве V_n равно

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \dots (q - 1)}. \quad (4.3)$$

Числа $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ называются *коэффициентами Гаусса*. Примем, что $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$. Согласно формуле (4.2) число систем из k линейно независимых векторов в фиксированном k -мерном подпространстве пространства V_n равно $(q^k - 1) \dots (q^k - q^{k-1})$. Так как число k -мерных подпространств равно $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, то число систем из k линейно независимых векторов в пространстве V_n равно $w_{nk} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (q^k - 1) \dots (q^k - q^{k-1})$.

Из формулы (4.1) следует равенство

$$(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{k-1}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (q^k - 1)(q^k - q) \dots (q^k - q^{k-1}),$$

из которого после сокращений вытекает формула (4.3).

Коэффициенты Гаусса удовлетворяют соотношению

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q, \quad (4.4)$$

которое следует из формулы (4.3), так как

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1) \dots (q^{n-k+1} - 1)(q^{n-k} - 1) \dots (q - 1)}{(q^n - 1) \dots (q - 1)(q^{n-k} - 1) \dots (q - 1)} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q.$$

Равенство (4.4) означает, что число k -мерных подпространств в пространстве V_n равно числу $(n-k)$ -мерных подпространств. Непосредственно из леммы 2 вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Общее число подпространств пространства V_n равно*

$$G_n = G_n(q) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q. \quad (4.5)$$

Числа G_n называются числами Галуа.

Лемма 4. *Коэффициенты Гаусса удовлетворяют соотношению*

$$x^n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (x-1)(x-q) \dots (x-q^{n-k-1}). \quad (4.6)$$

Пусть X — векторное пространство над полем $GF(q)$, содержащее x элементов. Рассмотрим линейный оператор $A: V_n \rightarrow X$, осуществляющий линейное отображение пространства V_n в пространство X . Если v_1, v_2, \dots, v_n — базис пространства V_n , то оператор A единственным образом определяется заданием векторов Av_1, \dots, Av_n , являющихся образами базиса v_1, \dots, v_n и принадлежащих пространству X . Так как систему векторов Av_1, \dots, Av_n можно задать x^n способами, то число операторов A равно x^n .

Определим число операторов A другим способом. Выберем в пространстве V_n подпространство W_k размерности k , $1 \leq k \leq n$. Вычислим количество операторов A , для которых W_k является ядром, т. е. совокупностью векторов, отображающихся оператором A в нулевой вектор пространства X . Не ограничивая общности, считаем, что векторы v_1, \dots, v_k составляют базис W_k и, следовательно, $Av_1 = 0, \dots, Av_k = 0$, где 0 есть нулевой вектор в X .

В качестве вектора Av_{k+1} можно взять любой ненулевой вектор пространства X , и, следовательно, число вариантов выбора этого вектора равно $x-1$. Для выбора вектора Av_{k+2} имеется

$x = q$ вариантов, причем каждый из векторов не является пулевым и линейно не выражается через вектор Av_{k+1} , и т. д. Наконец, в качестве вектора Av_n можно взять любой непулевой вектор, не принадлежащий произвольной плоскости, построенной на векторах $Av_{k+1}, \dots, Av_{n-1}$. Число способов выбора равно $x = q^{n-k-1}$. Таким образом, число линейных операторов, у которых ядром является фиксированное подпространство W_k , равно

$$\gamma(W_k) = \begin{cases} (x-1)(x-q)\dots(x-q^{n-k-1}), & 1 \leq k \leq n-1, \\ 1, & k = n. \end{cases}$$

Умножая эту величину на число способов выбора W_k , равное $\binom{n}{k}_q$, и суммируя по всем k , получаем правую часть равенства (4.6), доказав его тем самым для натуральных значений x .

Для всех действительных значений x формула (4.6) следует из известного факта совпадения двух полиномов, если они совпадают при всех натуральных значениях x .

2. Линейный функционал. Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство P , элементами которого являются все полиномы с рациональными коэффициентами. Базисами являются следующие последовательности полиномов:

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots, \quad (4.7)$$

$$1, P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots, \quad (4.8)$$

где

$$P_n(x) = (x-1)(x-q)\dots(x-q^{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

q — целое положительное число. Под *линейным функционалом* L будем понимать линейное отображение $L: P \rightarrow D$, где D — множество действительных чисел. Из линейности функционала следует, что он полностью определен своими значениями на элементах базиса P .

Возьмем базис вида (4.8) и рассмотрим линейный функционал, заданный системой равенств

$$L(P_n(x)) = 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.10)$$

где $P_0(x) = 1$. Вычисляя значения функционала L от обеих частей равенства (4.6), находим

$$L(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q. \quad (4.11)$$

Из равенства (4.5) следует выражение для чисел Галуа:

$$G_n = L(x^n). \quad (4.12)$$

Воспользуемся этим равенством для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. Для чисел Галуа имеет место рекуррентное соотношение

$$G_{n+1} = 2G_n + (q^n - 1)G_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.13)$$

Для доказательства формулы (4.13), согласно равенству (4.12), достаточно показать, что

$$L(x^{n+1}) = 2L(x^n) + (q^n - 1)L(x^{n-1}). \quad (4.14)$$

Введем линейный оператор D_q :

$$D_q P(x) = \frac{1}{x}(P(qx) - P(x)), \quad P(x) \in P.$$

Очевидно, что $D_q x^n = (q^n - 1)x^{n-1}$. С использованием оператора D_q формула (4.14) может быть переписана в виде

$$L(xP(x)) = 2L(P(x)) + L(D_q P(x)). \quad (4.15)$$

Так как последовательность (4.7) является базисом и оператор D_q — линейный, то из равенства (4.15) следует, что для произвольного полинома $P(x) \in P$ можно записать

$$L(xP(x)) = 2L(P(x)) + L(D_q P(x)). \quad (4.16)$$

Положим $P(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ определяется равенством (4.9). В результате получим

$$L(xP_n(x)) = 2L(P_n(x)) + L(D_q P_n(x)). \quad (4.17)$$

Так как последовательность (4.8) является базисом, то из (4.17) вытекает (4.16), а следовательно, и (4.15). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости равенства (4.17).

Из (4.9) следует, что $P_{n+1}(x) = (x - q^n)P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ Отсюда следует равенство $xP_n(x) = P_{n+1}(x) + q^n P_n(x)$. Применяя оператор L к обеим частям последнего равенства с учетом формул (4.10) получаем

$$L(xP_n(x)) = 1 + q^n. \quad (4.18)$$

С другой стороны, так как $D_q P_n(x) = (q^n - 1)P_{n-1}(x)$, то

$$2L(P_n(x)) + L(D_q P_n(x)) = 1 + q^n. \quad (4.19)$$

Из (4.18) и (4.19) следует (4.17). Теорема доказана.

Для чисел Галуа рассмотрим производящую функцию, заданную формальным степенным рядом

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n t^n}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)}. \quad (4.20)$$

Производящие функции этого типа иногда называют производящими функциями Эйлера.

Теорема 2. Производящая функция Эйлера (4.20) для чисел Галуа имеет вид

$$G(t) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k t)^2}, \quad (4.21)$$

где бесконечное произведение понимается как формальный степенной ряд после соответствующих переножений.

В равенство (4.16) заменим $P(x)$ на $D_q P(x)$. В результате получим

$$L(x D_q P(x)) = 2L(D_q P(x)) + L(D_q^2 P(x)). \quad (4.22)$$

Полагая $P(x) = x^n$, из равенства (4.22) имеем

$$(q^n - 1)L(x^n) = 2(q^n - 1)L(x^{n-1}) + (q^n - 1)(q^{n-1} - 1)L(x^{n-2}).$$

Отсюда, используя формулу (4.12), получаем

$$\begin{aligned} q^n G_n &= G_n - 2(1-q^n)G_{n-1} + (1-q^n)(1-q^{n-1})G_{n-2}, \\ n &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Умножая обе части этого равенства на $t^n / [(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)]$ и суммируя по n от 0 до ∞ , получаем функциональное соотношение для $G(t)$: $G(qt) = G(t) - 2tG(t) + t^2 G(t)$. Отсюда следует равенство

$$G(t) = \frac{1}{(1-t)^2} G(qt). \quad (4.23)$$

Применяя соотношение (4.23) многократно, приходим к формуле (4.24).

3. Свойства коэффициентов Гаусса. На пространстве полиномов P с базисом (4.8) определим последовательность линейных функционалов

$$L_0, L_1, \dots, L_k, \dots, \quad (4.24)$$

которые заданы равенствами

$$L_k(P_n(x)) = \delta_{k,n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (4.25)$$

Вычисляя значение функционала L_k от обеих частей равенства (4.6), получаем формулу

$$L_k(x^n) = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q. \quad (4.26)$$

Лемма 5. Для произвольного полинома $P(x) \in P$ имеет место соотношение

$$L_k(xP(x)) = q^k L_k(P(x)) + L_{k-1}(P(x)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

Достаточно убедиться в справедливости равенства (4.27) для полиномов базиса (4.8) $P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$. Вычислим значение функционала L_k от обеих частей очевидного равенства $xP_n(x) = -P_{n+1}(x) + q^n P_n(x)$. Имеем

$$L_k(xP_n(x)) = \begin{cases} q^n, & k = n, \\ 1, & k = n+1, \\ 0, & k \neq n, n+1. \end{cases} \quad (4.28)$$

С другой стороны,

$$q^k L_k(P_n(x)) + L_{k-1}(P_n(x)) = \begin{cases} q^n, & k = n, \\ 1, & k = n+1, \\ 0, & k \neq n, n+1. \end{cases} \quad (4.29)$$

Из (4.28) и (4.29) следует соотношение (4.27), справедливое для любого полинома $P(x) \equiv P$.

Теорема 3. Для коэффициентов Гаусса справедливы соотношения

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q + q^k \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_q, \quad (4.30)$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q = \frac{q^n - 1}{q^k - 1} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.31)$$

В равенстве (4.27) подожим $P(x) = x^{n-1}$. В результате имеем $L_k(x^n) = q^k L_k(x^{n-1}) + L_{k-1}(x^{n-1})$. Отсюда в силу равенства (4.26) получаем соотношение (4.30).

Для многочленов $P_k(x)$ базиса (4.8) из формулы (4.25) в силу очевидного равенства $(q^n - 1)\delta_{k,n} = (q^k - 1)\delta_{k,n}$ имеем

$$L_{k-1}(D_q P_n(x)) = (q^n - 1)L_{k-1}(P_{n-1}(x)) = (q^n - 1)L_k(P_n(x)), \\ n = 0, 1, \dots$$

Отсюда следует, что для произвольного полинома $P(x) \equiv P$

$$(q^n - 1)L_k(P(x)) = L_{k-1}(D_q P(x)).$$

Полагая $P(x) = x^n$, имеем $(q^n - 1)L_k(x^n) = (q^n - 1)L_{k-1}(x^{n-1})$. Отсюда, с учетом формулы (4.26), следует соотношение (4.31).

Чтобы многократного применения соотношения (4.31) получать формулу (4.3), дающую явное выражение для коэффициентов Гаусса.

Соотношение (4.30) может быть также получено путем рассмотрения некоторых подпространств пространства V_n над полем $GF(q)$. Пусть v_1, \dots, v_n — базис пространства V_n и V_{n-1} — его подпространство, генерируемое на векторы v_1, \dots, v_{n-1} . Рассмотрим k -мерное подпространство V_k пространства V_n . Имеют место два случая.

Случай 1. Подпространство V_k содержит прямую, генерируемую на вектор v_n . В этом случае $V_k \cap V_{n-1}$ есть подпространство

пространства V_{n-1} размерности $k-1$. Число таких подпространств, согласно формуле (4.3), равно $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}_q$.

Случай 2. Подпространство V_k не содержит прямой, натянутой на вектор v_n . В этом случае проекция V_k на V_{n-1} вдоль прямой v_n есть подпространство W_k размерности k пространства V_{n-1} . В этом случае V_k можно получить, выбирая базисные векторы w_1, \dots, w_k , определяющие W_k , а затем к каждому вектору $w_i, i = 1, \dots, k$, добавляя вектор, кратный v_n . Пространство W_k можно выбрать $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}_q$ способами, а кратные векторы добавить q^k способами. Таким образом, k -мерные подпространства V_n можно построить $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}_q + q^k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}_q$ способами. Отсюда и следует соотношение (4.30).

4. Биномиальные коэффициенты. В этом параграфе мы всегда предполагаем, что $q \geq 2$. Однако полученные формулы сохраняют смысл и при $q = 1$. С учетом очевидного равенства

$$q^k - 1 = (q-1)(q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1)$$

из формулы (4.3) получаем

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_q = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}, \quad (4.32)$$

т. е. коэффициенты Гаусса при $q = 1$ совпадают с обычными биномиальными коэффициентами. Далее, из формулы (4.5) следует выражение при $q = 1$ для чисел Галуа:

$$G_n(1) = 2^n. \quad (4.33)$$

Эта формула следует также и из (4.13). Соотношение (4.6) сводится к очевидному равенству

$$x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^{n-k}.$$

Наконец, соотношения (4.30) и (4.31) при $q = 1$ сводятся к известным соотношениям для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad (4.34)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.35)$$

5. q -биномиальная формула. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть

$$P_k(x, y) = (x-y)(x-qy)\dots(x-q^{n-1}y). \quad (4.36)$$

Тогда справедлива формула

$$P_n(x, z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q P_k(x, y) P_{n-k}(y, z). \quad (4.37)$$

Формула (4.37) называется *q-биномиальной*. При $q = 1$ в соответствии с (4.32) она сводится к биномиальной формуле, представленной в виде

$$(x - z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - y)^k (y - z)^{n-k}.$$

Для доказательства теоремы 4 рассмотрим векторные пространства V_n , X , Y , Z над полем $GF(q)$, такие, что $Z \subset Y \subset X$ и X , Y , Z имеют соответственно x , y , z векторов. Будем предполагать, что если $\dim W$ есть размерность пространства W , то выполнены условия $n = \dim V_n < \dim Z$.

Покажем, что как левая, так и правая части равенства (4.37) определяют число взаимно однозначных линейных операторов $f: V_n \rightarrow X$, таких что $f(V_n) \cap Z = 0$, или, что то же самое, $f^{-1}(Z) = 0$, где 0 — нулевой вектор пространства V_n .

Действительно, пусть v_1, v_2, \dots, v_n есть базис пространства V_n . Определим число способов отображения базиса в множество из n линейно независимых векторов пространства X , для которых линейная оболочка пересекается с Z только по нулевому вектору. Вектор базиса v_1 может быть $x - z$ способами отображен в множество $X \setminus Z$. Вектор базиса v_2 может быть отображен $x - qz$ способами в те векторы пространства X , которые не лежат в пространстве, натянутом на Z и $f(v_1)$, и т. д. Наконец, вектор базиса v_n может быть $(x - q^{n-1}z)$ способами отображен в векторы пространства X , которые не лежат в подпространстве, натянутом на векторы Z и $f(v_1), \dots, f(v_{n-1})$. Таким образом, число взаимно однозначных операторов $f: V_n \rightarrow X$, таких, что $f^{-1}(z) = 0$, равно

$$P_n(x, z) = (x - z)(x - qz) \dots (x - q^{n-1}z).$$

Определим число указанных взаимно однозначных операторов, принимая во внимание расположение образа $f(v)$, $v \in V_n$, относительно пространства Y . Ясно, что $f(V_n) \cap Y$ является подпространством Y . Если $\dim(f(V_n) \cap Y) = k$, то $f(V_n) \cap Y$ является образом некоторого k -мерного подпространства пространства V_n . Выберем k -мерное подпространство U пространства V_n и отобразим U в Y так, чтобы образами не были элементы $Z \setminus \{0\}$. Остальные элементы, принадлежащие $V_n \setminus U$, отобразим в $X \setminus Y$. Не ограничивая общности, считаем, что v_1, \dots, v_k , $1 \leq k \leq n$, есть базис подпространства U , где v_1, \dots, v_n — базис всего пространства V_n .

Определим теперь количество всех взаимно однозначных линейных операторов рассматриваемого вида. Число линейных опе-

раторов, отображающих U в $Y \setminus Z$, по доказанному выше равно

$$P_k(y, z) = (y - z)(y - qz) \dots (y - q^{k-1}z).$$

Подпространство пространства V_n , натянутое на базисные векторы v_{n+1}, \dots, v_n , взаимно однозначно отображается в $X \setminus Y$. По доказанному число таких отображений равно $P_{n-k}(x, y)$. Таким образом, имеется $P_k(y, z)P_{n-k}(x, y)$ взаимно однозначных линейных операторов, отображающих фиксированное k -мерное подпространство пространства V_n в X с условием, что образ U совпадает с $f(V_n) \cap Y$ и $f(V_n) \cap Z = 0$. Так как число способов выбора k -мерного подпространства в n -мерном пространстве над полем $GF(q)$ равно $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, то общее число линейных операторов равно

$$P_n(x, z) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q P_k(y, z) P_{n-k}(x, y).$$

Отсюда, с учетом равенства (4.4), следует соотношение (4.37).

Следствие 1. При $z = 0$ и $y = 1$ из соотношения (4.37) следует равенство (4.6).

Следствие 2. При $z = 1$ и $y = 0$ из соотношения (4.37) вытекает равенство

$$(x - 1)(x - q) \dots (x - q^{n-1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^{n-k}. \quad (4.38)$$

6. Разбиения множеств. Пусть X и U — конечные непустые множества, содержащие соответственно n и m элементов. Рассмотрим множество U^X однозначных отображений вида $f: X \rightarrow U$. Каждому отображению f поставим в соответствие разбиение π множества X , полагая, что x и x' принадлежат одному блоку разбиения, если $f(x) = f(x')$. Разбиение π , соответствующее отображению f , называется ядром этого отображения. Определим число отображений f с данным ядром π . Так как $f(x) \neq f(x')$, если x и x' принадлежат различным блокам, то число отображений с данным ядром π равно $(u)_{\pi(n)} = u(u-1) \dots (u-N(\pi)+1)$, где $N(\pi)$ — число блоков в разбиении π . Каждому отображению f соответствует единственное ядро, а общее число отображений равно $|U^X| = u^n$, поэтому

$$\sum_{\pi} (u)_{\pi(n)} = u^n, \quad (4.39)$$

где суммирование проводится по всем разбиениям π множества X .

Рассмотрим векторное пространство V над полем действительных чисел, элементами которого являются многочлены с действительными коэффициентами от одной переменной u . В качестве базиса пространства возьмем последовательность многочленов $(u)_0 = 1, (u)_1, (u)_2, \dots$ Рассмотрим линейный функционал L , за-

заданный единственным образом системой равенств

$$L((u)_k) = 1, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.40)$$

Вычисляя значения функционала L от обеих частей равенства (4.39), получаем

$$\sum_n L((u)_{n(n)}) = L(u^n). \quad (4.41)$$

Левая часть равенства представляет собой сумму единиц, каждая из которых соответствует единственному разбиению n -множества X . Поэтому из равенства (4.41) имеем

$$T_n = L(u^n), \quad (4.42)$$

где T_n — число Белла, равное количеству разбиений n -множества на блоки.

Формула (4.42) позволяет простым способом установить некоторые свойства чисел Белла. Так, из очевидного равенства $u(u-1)_n = (u)_{n+1}$ имеем

$$L(u(u-1)_n) = L((u)_{n+1}) = 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.43)$$

Так как равенства (4.43) выполняются для базисных элементов пространства V , то в силу линейности функционала L они справедливы для любого многочлена $P(u) \in V$:

$$L(uP(u-1)) = L(P(u)). \quad (4.44)$$

Полагая $P(u) = (u+1)^n$, из равенства (4.44) получаем

$$L(u^{n+1}) = L((u+1)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L(u^k). \quad (4.45)$$

Отсюда, с учетом равенства (4.42), следует известное соотношение для чисел Белла:

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.46)$$

Заметим, что равенство (4.44) вместе с условием $L(1) = 1$ однозначно определяет функционал L , заданный равенством (4.42), так как выполнение соотношения (4.44) для любого многочлена $P(u)$ означает выполнение его для многочленов, задающих базисную последовательность $u^0 = 1, u, u^2, \dots, u^n \dots$. Разложим функцию e^{et-1} в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$:

$$e^{et-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n \frac{t^n}{n!}. \quad (4.47)$$

Рассмотрим линейный функционал M на пространстве V , такой, что

$$M(u^n) = T_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.48)$$

Ясно, что этот функционал единственный. Покажем, что $M = L$. Из линейности M следует, что

$$M(e^{tu}) = \sum_{n=0}^{\infty} M(u^n) \frac{t^n}{n!} = e^{et}-1. \quad (4.49)$$

Дифференцируя левую и правую части по t и снова используя линейность оператора M , получаем

$$e^t e^{et}-1 = M(u e^{tu}), \quad (4.50)$$

Умножая на e^t обе части равенства (4.49), имеем

$$e^t e^{et}-1 = M(e^{t(u+1)}). \quad (4.51)$$

Из равенств (4.50) и (4.51) следует, что

$$M(e^{t(u+1)}) = M(u e^{tu}). \quad (4.52)$$

Разлагая функции $e^{t(u+1)}$ и e^{tu} в ряд Тейлора в окрестности точки $t=0$ и вычисляя коэффициенты в обеих частях равенства при $t^n/n!$, получаем

$$M((u+1)^n) = M(u^{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.53)$$

Так как $u^0 = 1$, u , u^2 , ..., u^n , ... есть базисная последовательность пространства V , то равенства (4.45) и (4.53) однозначно определяют операторы L и M соответственно. В силу одинакового вида этих равенств $M = L$. Теперь из (4.42) и (4.48) следует $T_n = T_n$, и, значит

$$e^{et}-1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{t^n}{n!}. \quad (4.54)$$

Принимая во внимание равенство $(k)_n = 0$ при $k < n$, рассмотрим очевидное тождество

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k)_n}{k!} \quad (4.55)$$

Для функционала L , заданного системой равенств (4.40), имеем

$$L((u)_n) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k)_n}{k!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.56)$$

Поскольку $(u)_0 = 1$, $(u)_1$, ..., $(u)_n$, ... есть базисная последовательность, то из (4.56) следует аналогичное соотношение для произвольного полинома $P(u) \in V$:

$$L(P(u)) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(k)}{k!}. \quad (4.57)$$

Полагая $P(n) = n^n$ и используя (4.42), из соотношения (4.57) получаем формулу Добинского для чисел Белла:

$$T_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.58)$$

§ 5. Асимптотические разложения

1. Асимптотические формулы. При решении перечислительных задач комбинаторного анализа часто приходится сталкиваться со сложными формулами, по которым вычисления при больших значениях входящих в них параметров становятся затруднительными. В этих случаях используются некоторые более простые приближенные формулы, по которым погрешность вычислений тем меньше, чем ближе значения параметров к некоторым предельным величинам, в частности к бесконечности. Такие приближенные формулы и полученные с их помощью оценки вычисляемых величин называют *асимптотическими*. Для более точной формулировки понятия асимптотических формул, или асимптотик, дадим предварительно ряд определений.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на множестве X и x_0 — предельная точка этого множества, U — некоторая окрестность точки x_0 , c — постоянная. Тогда формулы, расположенные ниже в одной и той же строке, эквивалентны между собой:

- 1) $f(x) \sim \varphi(x)$, $x \rightarrow x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$;
- 2) $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$;
- 3) $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \rightarrow x_0$; $|f(x)| \leq c|\varphi(x)|$ для $x \in U$;
- 4) $f(x) = O(\varphi(x))$, $|f(x)| \leq c|\varphi(x)|$, $x \in X$.

Выражения, содержащие символы \sim , o , O , называются *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками*, а иногда — просто *асимптотиками*.

Примеры асимптотических оценок:

- 1) $(x)_k \sim x^k$ при $x \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots$;
- 2) $\ln x = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$;
- 3) $e^x = O(1)$ при $x \rightarrow 0$.

Выведем некоторые асимптотические формулы для сумм значений функций, используя их связь с интегралами. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает на отрезке $[a, b]$. Разобъем $[a, b]$ на отрезки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, и обозначим через Δ_k длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, y^*

$1 \leq k \leq n$. Тогда из очевидных неравенств

$$f(x_k) \Delta_k \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \leq f(x_{k-1}) \Delta_k$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta_k \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta_k. \quad (5.1)$$

Если $\Delta_k = (b-a)/n$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$\frac{b-a}{n} f(b) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} f(a). \quad (5.2)$$

В частности, если a и b — целые числа и $\Delta_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$f(b) \leq \sum_{k=0}^n f(x_k) - \int_a^b f(x) dx \leq f(a). \quad (5.3)$$

Для монотонно возрастающей функции $f(x)$ формулы типа (5.2) и (5.3) принимают соответственно вид

$$\frac{b-a}{n} f(a) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) - \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} f(b), \quad (5.4)$$

$$f(a) \leq \sum_{k=0}^n f(x_k) - \int_a^b f(x) dx \leq f(b). \quad (5.5)$$

Оценку суммы значений произвольной положительной функции следует проводить путем разбиения ее на участки монотонности. В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = 1/x$ и возьмем $a = 1$, $b = n$. Тогда из формулы (5.3) имеем

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1.$$

Отсюда следует асимптотическая оценка

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.6)$$

Аналогично для функции $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > -1$, из (5.5) имеем асимптотическую формулу

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Используя неравенства (5.5), можно получить асимптотику вида

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k = n \ln n - n + O(\ln n), \quad n \rightarrow \infty,$$

а при помощи более детальных рассуждений — формулу

$$\ln n! = (n + 1/2) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} + \theta/(12n), \quad 0 < \theta < 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

эквивалентную известной формуле Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n^{n+1/2}} e^{-n+\theta/(12n)}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.9)$$

2. Степенные асимптотические ряды. Рассмотрим функцию $f(x)$ действительного переменного x . Ее представление

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (5.10)$$

означающее, что при любом $N \geq 0$

$$f(x) - \sum_{k=0}^N a_k x^{-k} = o(x^{-N}),$$

где a_k , $k = 0, 1, \dots$ — постоянные коэффициенты, называется *степенным асимптотическим рядом*. Нетрудно показать, что для каждой функции $f(x)$ представление вида (5.10) единственно. Заметим, что обратное неверно: различные функции могут иметь один и тот же степенной асимптотический ряд. Если $f(x)$ задана формулой (5.10) и $\varphi(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-k}$, то имеют место следующие свойства степенных асимптотических рядов:

1*. Для постоянных α и β

$$\alpha f(x) + \beta \varphi(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^{-k}, \quad (5.11)$$

2*. Для $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$

$$f(x) \varphi(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}. \quad (5.12)$$

3*. При $b_0 \neq 0$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \approx \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{-k}. \quad (5.13)$$

4*. При $b_0 = 0$

$$f(\varphi(x)) \approx \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^{-k}. \quad (5.14)$$

Коэффициенты d_k и e_k имеют такие же выражения через a_k и b_k , $k = 0, 1$, как и в случае сходящихся при $x \rightarrow \infty$ рядов.

Доказательства свойств вытекают непосредственно из определений. Например, свойство 2° доказывается следующим образом:

$$f(x)\varphi(x) = \left(\sum_{k=0}^N a_k x^{-k} + o(x^{-N}) \right) \left(\sum_{l=0}^N b_l x^{-l} + o(x^{-N}) \right), \quad (5.15)$$

и соотношение (5.12) следует из равенств (5.15) и (5.16).

Примером асимптотического разложения является формула суммирования Эйлера — Маклорена. Пусть функция действительного переменного $f(x)$ непрерывна на отрезке $[n, m]$ вместе со своими производными $f^{(v)}(x)$ для $v = 1, 2, \dots, k$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{n-1} f(j) &= \int_m^n f(x) dx + \sum_{v=1}^{k-1} \frac{B_v}{v!} \{ f^{(v-1)}(n) - f^{(v-1)}(m) \} - \\ &- \frac{1}{k!} \int_0^1 \sum_{v=0}^{n-1} \binom{n}{v} B_v x^{n-v} \sum_{j=m}^{n-1} f^{(k)}(j-x+1) dx, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где B_v , $v = 0, 1, \dots$ — числа Бернуали. Гамма-функция от действительного переменного x обычно определяется эйлеровым интегралом второго рода:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy, \quad (5.18)$$

сходящимся при $x > 0$ и расходящимся при $x \leq 0$. Для гамма-функции имеет место рекуррентное соотношение

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1. \quad (5.19)$$

Если $x = n$, где n — натуральное число, то

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (5.20)$$

Используя формулу (5.17), можно записать для гамма-функции асимптотическое разложение, называемое рядом Стирлинга:

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x+1) &= \ln \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \\ &+ \sum_{v=2}^{2k-2} \frac{B_v}{v(v-1)} \frac{1}{x^{v-1}} + \theta \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{x^{2k-1}}, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Отсюда при $x = n$ вытекает формула (5.8).

3. Последовательно сюръективные преобразования. Преобразование $\varphi: X \rightarrow X$, $X = \{1, 2, \dots, n\}$, называется *последовательно сюръективным*, если существует такое k , $1 \leq k \leq n$, что это преобразование совпадает с сюръективным отображением $\psi: X \rightarrow Y$, где $Y = \{1, 2, \dots, k\}$. Отметим, что преобразование $\varphi: X \rightarrow X$ является последовательно сюръективным тогда и только тогда, когда из условия, что φ принимает значение k , следует, что φ принимает все значения, не превосходящие k .

Так как число сюръективных отображений $\psi: X \rightarrow Y$, $|X| = n$, $|Y| = k$, равно числу Моргана $\Delta^k 0^n$, $1 \leq k \leq n$, то число последовательно сюръективных отображений равно

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^n \Delta^k 0^n. \quad (5.22)$$

Разобъем все последовательно сюръективные преобразования на n классов в зависимости от значения числа j , $1 \leq j \leq n$, равного количеству прообразов элемента 1. При фиксированном j эти прообразы могут быть выбраны $\binom{n}{j}$ способами. Остальные $n-j$ элементов X сюръективно отображаются в элементы множества $\{2, 3, \dots, k\}$ при некотором k , $0 \leq k \leq n-j$. Таким образом, число отображений в j -м классе равно $\binom{n}{j} \Phi_{n-j}$, $1 \leq j \leq n$, где $\Phi_0 = 1$. Суммируя по всем классам, получаем соотношение

$$\Phi_n = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \Phi_{n-j}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \frac{t^n}{n!}. \quad (5.24)$$

Из очевидной оценки $\Delta^k 0^n \leq k^n$ следует, что $\Phi_n \leq n^n e / (e - 1)$. Отсюда вытекает, что ряд в правой части (5.24) при $t < 1/e$ абсолютно сходится. Добавляя к обеим частям равенства (5.23) Φ_n , умножая на $t^n / n!$ обе части полученного равенства, суммируя по $n = 1, 2, \dots$ и меняя порядок суммирования, получаем

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \Phi_{n-j} \frac{t^{n-j}}{(n-j)!} - 1.$$

Отсюда следует, что при $|t| < 1/e$

$$F(t) = \frac{1}{2 - e^t}. \quad (5.25)$$

Проводя сначала разложение правой части по формуле геометрической прогрессии, а затем раскладывая в ряд функцию e^t ,

получаем при $|t| < 1/e$

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} t^n.$$

Пользуясь абсолютной сходимостью полученного двойного ряда, меняем порядок суммирования и вычисляем коэффициент при $t^n/n!$ в полученном ряде. В результате получаем

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}. \quad (5.26)$$

Перейдем теперь к получению асимптотической формулы для Φ_n при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим многочлен от действительного переменного x :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k 0^n x^k, \quad (5.27)$$

который будем называть *многочленом Моргана*, и производящую функцию

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (5.28)$$

Используя выражение для производящей функции чисел Моргана

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \Delta^k 0^n \frac{x^n}{n!}, \quad (5.29)$$

вытекающее из формулы (2.40), находим

$$F(x, t) = \frac{1}{1 - x(e^x - 1)}. \quad (5.30)$$

Из (5.28) и (5.30), используя интегральную формулу Коши, имеем

$$f_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{dz}{[1 - x(e^z - 1)] z^{n+1}}, \quad (5.31)$$

где в качестве контура интегрирования берется окружность с центром в начале координат и радиусом $R < \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $1 - \delta < x < 1 + \delta$, $0 < \delta < (e^x - 2)/(e^x - 1)$.

Подынтегральная функция в интеграле (5.31) при фиксированном x имеет изолированные особые точки при $z = 0$, $z = -\ln(1 + 1/x) + 2\pi k i$, $k = 0, 1, \dots$. Используя этот факт, можем записать

$$\oint_{|z|=R} \varphi_n(z) dz = \oint_{|z|=2} \varphi_n(z) dz - \oint_{|z-\ln(1+1/x)|=R} \varphi_n(z) dz, \quad (5.32)$$

где $\varphi_n(z) = \frac{t}{[1 - x(e^z - 1)] z^{n+1}}$. Точка $z = \ln(1 + 1/x)$ для функции $\varphi_n(z)$ является простым полюсом. Поэтому, пользуясь теоремой о вычетах, получаем

$$\oint_{|z-\ln(1+1/x)|=R} \varphi_n(z) dz = \frac{2\pi i}{z^{n+1} \frac{d}{dz} [1 - x(e^z - 1)]} \Big|_{z=\ln(1+1/x)}$$

Отсюда следует, что

$$\oint_{|z-\ln(1+1/x)|=R} \varphi_n(z) dz = - \frac{2\pi i}{(1+x) [\ln(1+1/x)]^{n+1}}. \quad (5.33)$$

Для всех x , $1-\delta < x < 1+\delta$, имеем равномерную оценку

$$\left| \oint_{|z|=2} \varphi_n(z) dz \right| \leq \frac{4\pi}{[2-\delta-(1+\delta)e^2] 2^{n+1}}. \quad (5.34)$$

Теперь из формул (5.31)–(5.34) находим

$$f_n(x) = \frac{n!}{(1+x) \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]^{n+1}} \left[1 + O \left(\left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{1-\delta} \right)}{2} \right)^n \right) \right], \quad (5.35)$$

где остаточный член при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно для всех x , $1-\delta < x < 1+\delta$.

Полагая в (5.35) $x = 1$, с учетом очевидного равенства $\Phi_n = f_n(1)$ получаем при $n \rightarrow \infty$ асимптотическую формулу для числа последовательно сюръективных преобразований n -множества:

$$\Phi_n = \frac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \left[1 + O \left(\left(\frac{\ln 2}{2} \right)^n \right) \right], \quad (5.36)$$

причем оценку остаточного члена проводим заново, пользуясь неравенством (5.34).

§ 6. Числа Каталана

1. Комбинаторные задачи. Рассмотрим множество векторов $(e_1, e_2, \dots, e_{2n})$, $e_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, 2n$, таких, что

$$\sum_{i=1}^k e_i \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n-1, \quad \sum_{i=1}^{2n} e_i = 0. \quad (6.1)$$

Обозначим через C_n число $2n$ -мерных векторов рассматриваемого типа. Очевидно, что

$$C_1 = 1, C_2 = 2. \quad (6.2)$$

Докажем рекуррентное соотношение

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}, \quad C_0 = 1. \quad (6.3)$$

Обозначим через \tilde{C}_n число векторов (e_1, \dots, e_{2n}) рассматриваемого вида, для которых

$$\sum_{i=1}^n e_i > 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2n-1, \quad \sum_{i=1}^{2n} e_i = 0. \quad (6.4)$$

Рассмотрим вектор (e_1, \dots, e_{2n}) типа (6.4), для которого

$$\sum_{i=1}^{2s-1} e_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{2s} e_i = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad (6.5)$$

где s — наименьшее число, удовлетворяющее этому свойству. Число таких векторов при $s = n$ равно \tilde{C}_n , а для $1 \leq s \leq n-1$ равно $C_s C_{n-s}$. Суммируя по всем s , получаем

$$C_n = \tilde{C}_n + \sum_{s=1}^{n-1} \tilde{C}_s C_{n-s}. \quad (6.6)$$

Рассмотрим вектор (e_1, \dots, e_{2n}) с условием (6.4). Очевидно, что для всех векторов этого типа $e_1 = 1$, $e_{2n} = -1$. Отбрасывая первую и последнюю координаты у каждого из этих векторов, находим, что для полученного вектора (e_2, \dots, e_{2n-1})

$$\sum_{i=2}^k e_i \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots, 2n-2, \quad \sum_{i=2}^{2n-1} e_i = 0, \quad (6.7)$$

так как все последовательные суммы координат векторов вида (6.4) уменьшены на единицу. Отсюда следует, что векторы (6.7) относятся к типу (6.4), т. е.

$$\tilde{C}_n = C_{n-1}, \quad (6.8)$$

причем

$$C_1 = C_0 = 1. \quad (6.9)$$

Теперь из равенств (6.6), (6.8), (6.9) следует соотношение (6.3).

Рассмотрим производящую функцию

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n. \quad (6.10)$$

Так как $C_n \leq 2^{2n}$, то ряд (6.10) сходится при $|t| < 1/4$. Умножим обе части равенства (6.3) на t^n и просуммируем по n от 1 до ∞ . Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

Осуществляя замену $n' = n - 1$ индекса суммирования в правой части последнего равенства, получаем соотношение

$$tC^2(t) - C(t) + 1 = 0. \quad (6.11)$$

Отсюда, решая квадратное уравнение, находим, что при $|t| < 1/4$

$$C(t) = \frac{1}{2t} [1 - (1 - 4t)^{1/2}], \quad (6.12)$$

что отвечает условию $C(0) = 1$. Из (6.12) следует, что

$$C(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n+1} 4^{n+1} t^n.$$

Таким образом, $C_n = (-1)^n \binom{1/2}{n+1} 2^{2n+1}$. Отсюда, проводя необходимые преобразования, окончательно получаем

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.13)$$

Числа C_n называют числами Каталана. Эти числа встречаются при рассмотрении ряда других комбинаторных задач.

Рассмотрим неассоциативную систему из n элементов: x_1, x_2, \dots, x_n . Обозначим через q_n число способов расстановки $n - 1$ пар скобок в этой системе для выполнения бинарной операции над каждой из пар полученных выражений. Очевидно, что

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 2. \quad (6.14)$$

Ясно, что внешняя пара скобок объединяет два выражения, каждое из которых заключено в скобки и содержит k и $n - k$ элементов соответственно. Отсюда следует рекуррентное соотношение

$$q_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_k q_{n-k}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.15)$$

В соответствии с этим соотношением и равенствами (6.14) полагаем $q_1 = 1$.

Нетрудно проверить, что рекуррентному соотношению (6.15) и начальными условиями (6.14) удовлетворяет значение (см. также формулу (1.29))

$$q_n = C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.16)$$

Числа Каталана встречаются также и при решении задачи Эйлера о числе разбиений на треугольники выпуклого $(n+2)$ -угольника с помеченными вершинами, диагоналями, не пересекающимися внутри этого многоугольника. Обозначим соответствующее

число через Q_n . Тогда очевидно, что

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = 2. \quad (6.17)$$

Выведем рекуррентное соотношение для чисел Q_n . Занумеруем вершины $(n+2)$ -угольника числами $1, 2, \dots, n, n+1, n+2$, а ребро, смежное с i -й и $(i+1)$ -й вершинами, обозначим $(i, i+1)$.

Пусть при некотором разбиении s есть номер вершины треугольника, противолежащей стороне $(n+2, 1)$. Если $s=2$ или $s=n+1$, то число соответствующих разбиений равно Q_{n-1} . Для $3 \leq s \leq n$ число разбиений равно произведению числа разбиений s -угольника на число разбиений $(n-s+3)$ -угольника, т. е. $Q_{s-2}Q_{n-s+1}$. Таким образом, полагая $Q_0 = 1$, получаем

$$Q_n = \sum_{s=0}^{n-1} Q_s Q_{n-s-1}. \quad (6.18)$$

Рекуррентное соотношение (6.18) совпадает с рекуррентным соотношением (6.3), а начальные условия (6.17) — с начальными условиями (6.2). Отсюда следует, что согласно формуле (6.13)

$$Q_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.19)$$

При $n \rightarrow \infty$, применяя формулу Стирлинга (5.9), получаем асимптотическое представление для чисел Каталана:

$$C_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^{3/2}}} (1 + o(1)). \quad (6.20)$$

2. Проверочные процедуры. Числа Каталана используются также при определении количества так называемых *групповых проверочных процедур*, применяемых для классификации элементов конечного множества [54].

Рассмотрим множество элементов N , $|N| = n$, каждый из которых обладает или не обладает заданным свойством Ψ . Для выяснения, какие элементы множества N обладают свойствами Ψ , а какие не обладают, можно применить простую процедуру перебора каждого из n элементов отдельно. Однако, в некоторых ситуациях более эффективным оказывается применять *групповые процедуры*, при которых на каждой стадии проверки рассматриваются сразу подмножества множества N . Одна из таких групповых процедур может быть охарактеризована следующими правилами.

1. На каждом шаге проверки рассматривается подмножество $X \subseteq N$ и устанавливается один из возможных фактов: все элементы X обладают свойством Ψ или имеется по крайней мере один элемент $x \in X$, который не обладает свойством Ψ .

2. На каждом шаге проверки проверяемое подмножество X выбирается из последнего из рассмотренных на предшествующем

шаге подмножества Y , $X \subseteq Y$, при условии, что $|Y| \geq 2$ и Y содержит по крайней мере один элемент, не обладающий свойством Ψ .

3. Если последнее из рассмотренных на предшествующем шаге множество Y содержит только элементы, обладающие свойством Ψ или $|Y| = 1$, то множество X выбирается из совокупности элементов множества N , которые еще не прошли классификацию.

4. Процедура заканчивается, когда будут расклассифицированы все элементы множества N .

Проверочная процедура может быть изображена некоторым ориентированным деревом. Вершина дерева (k, m) соответствует

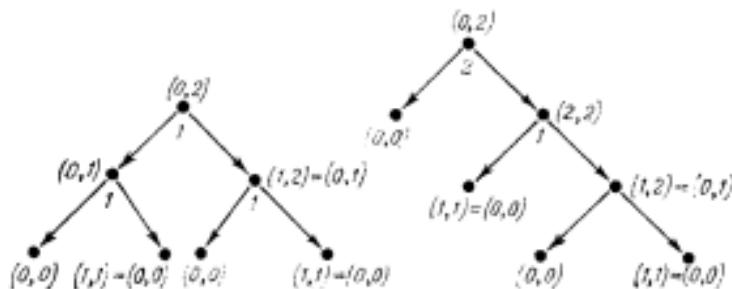


Рис. 2.

тому шагу проверки, когда рассматривается подмножество X из k элементов, среди которых по крайней мере один не обладает свойством Ψ , и число элементов, не прошедших классификацию, равно m . Наряду с пометкой (k, m) на концевой вершине присваивается еще число d , равное количеству элементов в множестве, выбираемом для следующего шага проверки. Из каждой вершины выходит две стрелки, идущие в две вершины. Одна вершина отвечает выбору подмножества X с элементами, обладающими свойством Ψ , а другая — с элементами, из которых по крайней мере один не обладает свойством Ψ .

В качестве примера для $n = 2$ приведем вид деревьев, отвечающих двум процедурам классификации (рис. 2).

Дадим краткие пояснения к первой процедуре. Если выбран элемент, обладающий свойством Ψ , то по стрелке переходим в левую вершину. Если второй элемент также обладает свойством Ψ , то далее по стрелке идем влево, если не обладает — вправо. В обоих случаях классификация на этом заканчивается. Вернемся теперь к исходной вершине $(0, 2)$ и предположим, что выбран элемент, не обладающий свойством Ψ . В этом случае переходим вправо по стрелке в вершину $(1, 2)$. Так как для последующей классификации остался один элемент, то ясно, что $(1, 2) = (0, 1)$. Далее рассуждения такие же, как для левой ветви дерева.

На множество проверочных процедур определим отношение эквивалентности. Две процедуры будем считать эквивалентными, если на каждом шаге проверки рассматриваются подмножества с одинаковым числом элементов. Заметим, что рассмотрение совокупности процедур, являющихся представителями этих классов эквивалентности, отвечает ситуации, когда рассматриваются процедуры для множества N , элементы которого не помечены, а следовательно, различимость процедур не зависит от порядка выбора этих элементов. Обозначим через $F(n)$ число групповых процедур рассматриваемого вида, необходимых для классификации множества N , $|N| = n$, элементы которого не помечены. Это число совпадает с указанным выше числом классов эквивалентности для случая, когда элементы множества N помечены.

Пусть $0 \leq k \leq m \leq n$ и $f(k, m)$ — число групповых процедур указанного вида, необходимых для классификации m элементов, при условии, что заданное подмножество из k элементов содержит по крайней мере один объект, не обладающий свойством \mathbb{A} . Заметим, что

$$F(n) = f(0, n). \quad (6.21)$$

При $k = 0$, $m \geq 1$ можно выбрать подмножество из i элементов, $1 \leq i \leq m$, и продолжить процедуру проверки. Если все i элементов обладают свойством \mathbb{A} , то остальные $m - i$ элементов можно расклассифицировать $f(0, m - i)$ способами. Если установлено, что по крайней мере один из i элементов не обладает свойством \mathbb{A} , то имеется $f(i, m)$ способов их классификации. Отсюда следует, что для $m \geq 1$

$$f(0, m) = \sum_{i=1}^m f(0, m - i) f(i, m). \quad (6.22)$$

Если $k = 1$, то ясно, что для классификации остаются $m - 1$ элементов и

$$f(1, m) = f(0, m - 1), \quad m \geq 1. \quad (6.23)$$

Отсюда следует, что можно положить

$$f(0, 0) = 1. \quad (6.24)$$

Если $2 \leq k \leq m$, то необходимо продолжить классификацию собственного подмножества из k элементов, про которое известно, что оно содержит по крайней мере один элемент, не обладающий свойством \mathbb{A} . Выберем i элементов из этого подмножества, $1 \leq i \leq k - 1$. Если все эти i элементов обладают свойством \mathbb{A} , то процедура проверки остальных $m - i$ элементов может быть продолжена $f(k - i, m - i)$ способами. Если же по крайней мере один из i элементов не обладает свойством \mathbb{A} , то процедуру можно продолжить $f(i, m)$ способами, так как нет никакой инфор-

мации об остальных $m - i$ элементах. Таким образом,

$$f(k, m) = \sum_{i=1}^{k-1} f(k-i, m-i) f(i, m). \quad (6.25)$$

Теорема 1. Если $1 \leq k \leq n$, то

$$f(k, n) = C_{k-1} f(0, n-1) f(0, n-2) \dots f(0, n-k), \quad (6.26)$$

где C_k — числа Каталана, определяемые формулой (6.13).

Для $k = 1$ соотношение (6.26) имеет вид $f(1, n) = C_1 f(0, n-1)$ и сводится к равенству (6.23), так как $C_1 = 1$. Предположим, что соотношение (6.26) верно для всех $1 \leq k \leq t-1$, где $2 \leq t \leq n$. Тогда из соотношения (6.25), используя предположение индукции, имеем

$$\begin{aligned} f(t, n) &= \sum_{i=1}^{t-1} f(i, n) f(t-i, n-i) = \\ &= \sum_{i=1}^{t-1} C_{i-1} C_{t-i-1} f(0, n-1) \dots f(0, n-i) f(0, n-i-1) \dots \\ &\quad \dots f(0, n-t). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (6.3), приходим к равенству (6.26).

Теорема 2. Если $n \geq 2$, то

$$f(0, n) = C_n f(0, n-1) f(0, n-2) \dots f(0, 1). \quad (6.27)$$

При $n = 2$ соотношение (6.27) имеет вид $f(0, 2) = C_2 f(0, 1) = 2$, что легко проверить непосредственно.

Допустим, что равенство (6.27) выполнено для всех $2 \leq n \leq j-1$, $j \geq 3$. Тогда, используя предположение индукции, из соотношений (6.22) и (6.26) имеем

$$\begin{aligned} f(0, j) &= \sum_{i=1}^j f(i, j) f(0, j-i) = \\ &= \sum_{i=1}^j C_{i-1} C_{j-i} f(0, j-1) \dots f(0, j-i) f(0, j-i-1) \dots f(0, 1). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенства (6.3) получаем $f(0, j) = C_j f(0, j-1) \dots f(0, 1)$. Из равенства (6.21) в качестве следствия из теоремы 2 получаем соотношения

$$F(n) = \frac{C_n}{C_{n-1}} F^2(n-1) = \frac{2(2n-1)}{n+1} F^2(n-1). \quad (6.28)$$

Многократно применяя первое из них, получаем для $n \geq 2$

$$F(n) = C_n C_{n-1} C_{n-2}^2 C_{n-3}^4 \dots C_1^{2^{n-2}}. \quad (6.29)$$

Из (6.28) следует, что

$$F(n) = 4 \left(1 - \frac{3}{2(n+1)}\right) F^2(n-1), \quad n \geq 1. \quad (6.30)$$

Выписывая равенства вида (6.30) для $n=1, n=2, \dots$, возводя их в степени $2, 2^2, \dots$ и затем перемножая, после сокращений получаем

$$F(n) = 4^{2^n-1} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{3}{2(i+1)}\right)^{2^{n-i}}. \quad (6.31)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F(n)]^{2^{-n}} = 4 \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2(i+1)}\right)^{2^{-i}}. \quad (6.32)$$

Непосредственным вычислением можно получить

$$\alpha = 4 \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2(i+1)}\right)^{2^{-i}} = 1.526753\dots \quad (6.33)$$

Используя эту величину α , получим асимптотическую формулу для $F(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Из (6.31) имеем

$$F(n) = \frac{\alpha^{2^n}}{4} R_n, \quad (6.34)$$

где $R_n = \prod_{i=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{2(i+1)}\right)^{-2^{n-i}}$. Производя в выражении для R_n замену индексов вида $j = i-n$ и логарифмируя, получаем

$$\ln R_n = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \ln \left(1 - \frac{3}{2(j+n+1)}\right).$$

Используя формулу Тейлора для разложения логарифма, находим

$$\ln R_n = \frac{3}{2n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{2^j(j+n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (6.35)$$

Разобьем сумму в правой части на две:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{2^j(j+n+1)} = \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{2^j(1+(j+n)/n)} + \sum_{j=\sqrt{n}+1}^{\infty} \frac{n}{2^j(j+n+1)}.$$

Первая сумма при $n \rightarrow \infty$ стремится к 1, а вторая имеет порядок $O(1/2^{\sqrt{n}})$. Таким образом, согласно (6.35) $R_n = e^{3/(2n)+o(1/n)}$. Снова применяя формулу Тейлора, получаем $R_n = 1 + 3/(2n) + o(1/n)$. Теперь из формулы (6.34) окончательно получаем

$$F(n) = \frac{\alpha^{2^n}}{4} \left(1 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Функция $F(n)$ с ростом n очень быстро возрастает. Из формулы (6.31) можно получить следующую таблицу начальных значений $F(n)$:

n	1	2	3	4	5	6
$F(n)$	1	2	10	280	235 200	173 859 840 000

ЗАДАЧИ

1. Пусть элементы последовательности $\{a_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{j=0}^n (n-j+1) a_j a_{n-j+1} = a_n + 1/n!.$$

Показать, что производящая функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(x) = e^x f(x) + 1$.

2. Для последовательности $\{u_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяющей соотношению $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$, $u_0 = 0$, где a, b — заданные числа, показать, что производящая функция

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$$

удовлетворяет равенству

$$f(x) + e^{ax} f(-x) = 0.$$

3. Показать, что если

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \ln(1-x^n), |x| < 1,$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, то $f(x) = x$, и вывести тождество

$$e^x = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-\mu(n)/n}.$$

4. Доказать, что:

а) $F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(1-x)(1-xz)(1-z^2)(1-z^2 z^2) \dots (1-x^k)(1-x^k z^k)}$

при $|x| < 1$, $z \neq x^n$, $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяет функциональному

уравнению

в) В. Н. Сачков

соотношению

$$F(z) - F(xz) = \frac{x^2 z}{(1-xz)(1-x^2 z)} F(x^2 z);$$

- 6) $G(z) = F(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n z)$ удовлетворяет соотношению

$$G(z) = (1-xz) G(xz) = x^2 z G(x^2 z)$$

5. Показать, что если

$$F(t, a, b, c) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = t^b (1-t)^{c-b-1} [(1-t)^c - t^{c-a}]^{-1}$$

и $a, b < c$, то

$$a_k = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-b}{c-a} \right]} \binom{aj+k}{cj+b}, \quad k = 0, 1, \dots$$

6. Дан определитель

$$a_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & -2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & 1-n \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_1 \end{vmatrix},$$

где $b_n = n!/n!$, $n = 1, 2, \dots$. Показать, что:

- а) имеет место рекуррентное соотношение $\frac{n a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k b_{n-k}}{k!}$;
- б) производящие функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n},$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = b_1$, удовлетворяют соотношению $f(x) = e^{\varphi(x)}$;

в) имеет место формула $a_n = (n+1)^{n-1}$.

7. Пусть ε и ε^2 — кубические комплексные корни из единицы, т. е. $1 + x + x^2 = (1-\varepsilon x)(1-\varepsilon^2 x)$. Используя представления

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon x)} - \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2 x)},$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (x+x^2)^r,$$

показать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n-k}{k} = \begin{cases} 1, & n = 3m, \\ -1, & n = 3m+1, \\ 0, & n = 3m+2, \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots$$

8. Доказать, что для любого натурального $p < n$ имеет место равенство
 $1^p + 2^p - 3^p + 4^p - 5^p + 6^p - 7^p + 8^p - \dots + (-1)^n (2^n - 1)^p = 0$,

где слагаемое m^p берется со знаком плюс, если в двоичной записи числа m — нечетное число единиц, и со знаком минус, если число единиц — четное. Воспользоваться равенством

$$1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - e^{ix^k}) = e^x + e^{ix} - e^{3x} - \dots + (-1)^n e^{x(2^n-1)},$$

где в правой части знаки слагаемых вида e^{mx} определяются указанным выше правилом.

9. Показать, что если $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{(1-x)^n}{(1-x)^3}$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{2^{n-4}}{3} \cdot n(n+2)(n+7),$$

10. Показать, что производящая функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ имеет следующее выражение:

$$f(x) = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt,$$

11. Установить, что производящая функция

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n+k, k) t^n,$$

где $\sigma(n, k)$ — числа Стирлинга второго рода, удовлетворяет соотношению $f_k(x) = \frac{1}{1-kx} f_{k-1}(x)$. Вывести отсюда, что

$$f_k(x) = \frac{t}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}.$$

12. Для чисел Лаха L_{nk} , определяемых соотношением

$$(-x)_n = \sum_{k=0}^n L_{nk} (x)_k,$$

$L_{00} = 1$, $L_{nk} = 0$, $k > n$, показать, что:

- a) $\sum_{k=m}^n L_{nk} L_{km} = \delta_{n,m}$, где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера;
 б) каждое из уравнений

$$a_n = \sum_{k=0}^n L_{nk} b_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^n L_{nk} a_k$$

следует одно из другого;

в) имеют место соотношения

$$L_{n+1,k} + (n+k)L_{n,k} + L_{n,k-1} = 0, \quad L_{nk} = \sum_{j=k}^n (-1)^j s(n,j) \sigma(j,k),$$

где $s(n,j)$, $\sigma(j,k)$ — числа Стирлинга первого и второго рода соответственно;

г) если $L_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_{nk} \frac{t^n}{n!}$, то $L_n(t) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{t}{1+t} \right)^k$ и, следовательно,

$$L_{nk} = (-1)^n \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1};$$

$$30) \quad \sum_{k=0}^{\infty} L_n(-t) x^k = \exp \frac{x^t}{1-t}$$

13. Доказать тождество для $x \neq 0, -1, \dots, -n, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k(k+1)/2}}{k! (x+k)},$$

14. Для $0 \leq x < 1$ доказать тождество:

$$a) \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{k(k+1)/2}}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^n)};$$

$$b) \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2k-1}} \right).$$

15. При заданных функциях $p_1(x), \dots, p_k(x)$, $p_k(x) \neq 0$, на множестве $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ линейное рекуррентное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ вида

$$f(x+k) + p_1(x)f(x+k-1) + \dots + p_k(x)f(x) = q(x) \quad (1)$$

называется *неоднородным уравнением*, а уравнение

$$f(x+k) + p_1(x)f(x+k-1) + \dots + p_k(x)f(x) = 0 \quad (2)$$

— *однородным уравнением*, соответствующим данному неоднородному. Доказать, что:

а) каждое решение $f(x)$ уравнения (2) определяется заданием начальных условий

$$f(0), f(1), \dots, f(k-1); \quad (3)$$

б) если $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ — решения уравнения (2) и c_1, c_2, \dots, c_k — постоянные, то и функция

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^k c_j f_j(x) \quad (4)$$

также есть решение уравнения (2);

в) если $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ — решения уравнения (2) и определитель

$$D = \begin{vmatrix} f_1(0) & f_1(1) & \dots & f_1(k-1) \\ f_2(0) & f_2(1) & \dots & f_2(k-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(0) & f_k(1) & \dots & f_k(k-1) \end{vmatrix} \quad (5)$$

отличен от нуля, то функция (4) дает общее решение уравнения (2), содержащее все частные решения, отличающиеся начальными условиями.

16. Доказать, что общее решение уравнения (1) представляется в виде суммы его частного решения, удовлетворяющего некоторым начальным условиям, и общего решения уравнения (2).

17. Показать, что если функция

$$f(x) = \lambda^x, \quad \lambda \neq 0, \quad (6)$$

является решением однородного рекуррентного уравнения

$$f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + \dots + a_k f(x) = 0, \quad a_k \neq 0, \quad (7)$$

с постоянными коэффициентами, то λ является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0. \quad (8)$$

18. Показать, что если корни уравнения (8) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ простые, то $f(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \dots + c_k \lambda_k^x$ является общим решением уравнения (6).

19. Показать, что если λ_1 — корень кратности s уравнения (8), то функция $(c_1 + c_2 x + \dots + c_{s-1} x^{s-1}) \lambda_1^x$ является решением уравнения (7).

20. Показать, что общее решение уравнения $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 0, f(1) = 1$, имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^x,$$

причем при $x \rightarrow \infty$

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x (1 + R(x)),$$

где $R(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

21. Пусть p_n — число разбиений натурального числа n на слагаемые и $a(n) := \sum_{d|n} d$. Показать, что при $|x| < 1$

а) $F(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1}$;

б) $\frac{x F'(x)}{F(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) x^n$.

ГЛАВА IV

ГРАФЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Графы

1. Основные определения. Рассмотрим множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$, и множество $\bar{X}^{(2)} = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)\}$, элементами которого являются 2-подмножества множества X . Напомним, что пара $\Gamma = \Gamma(X, W)$, $W \subseteq \bar{X}^{(2)}$, называется *графом* с множеством *вершин* X и множеством *ребер* W . При этом говорят, что ребро (x_i, x_j) соединяет вершины x_i и x_j , или ребро (x_i, x_j) и вершины x_i , x_j инцидентны. Граф $\Gamma(X, W)$ на множестве вершин X называется *полным*, если $W = \bar{X}^{(2)}$, и *пустым*, если $W = \emptyset$. Каждому графу (X, W) можно поставить во взаимно однозначное соответствие симметричное антирефлексивное бинарное отношение W на множестве X по правилу: $x_i W x_j \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in W$. Матрица этого бинарного отношения называется *матрицей смежности* графа $\Gamma(X, W)$.

Граф $\Gamma(X, W)$ может быть изображен геометрически. Для этого некоторые n точек трехмерного пространства помечаются элементами множества вершин X и вершины x_i и x_j соединяются линией, если $(x_i, x_j) \in W$. Если при этом линии не пересекаются нигде, кроме вершин, то полученный геометрический образ называется *топологической реализацией* графа. Точки, помеченные элементами множества X , расположим на одной прямой L и каждому ребру (x_i, x_j) поставим в соответствие плоскость, проходящую через L и не совпадающую с плоскостями, соответствующими другим ребрам. Проводя линии, соответствующие ребрам в отвечающих им плоскостях, убеждаемся, что любой граф имеет топологическую реализацию в трехмерном пространстве. Граф называется *плоским*, если он имеет топологическую реализацию на плоскости.

Число ребер, инцидентных вершине x_i , называется ее *степенью* и обозначается $d(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Если $d(x_i) = d$, $i = 1, \dots, n$, то граф Γ называется *однородным* (*регулярным*) степени d . Рассмотрим функцию

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in W, \\ 0, & (x_i, x_j) \notin W. \end{cases}$$

Имеем $d(x_i) = \sum_{j \neq i} d(x_i, x_j)$. Так как каждое ребро (x_i, x_j) дважды

дь учитывается при вычислении суммы степеней всех вершин, то

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2|W|. \quad (1.1)$$

Отсюда вытекает, что в графе число вершин нечетной степени четно. Вершина $x_i \in X$ графа $\Gamma(X, W)$ называется *концевой*, если $d(x_i) = 1$, и *изолированной*, если $d(x_i) = 0$.

Как уже отмечалось в гл. III, чередующаяся последовательность ребер $(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, (x_{i_{l-2}}, x_{i_{l-1}}), (x_{i_{l-1}}, x_{i_l})$, в которой соседние ребра инцидентны одной и той же вершине, называется *цепью*, причем x_{i_1} — начало цепи, x_{i_l} — ее конец, а l — длина этой цепи. Цепь называется *простой*, если все принадлежащие ей вершины различны. В этом случае l называется *расстоянием* между вершинами x_i и x_j (по этой цепи). Если $x_{i_1} = x_{i_l}$, то цепь называется *циклом*. Цикл, в котором все вершины различны, называется *простым*.

Граф $\Gamma(X, W)$ называется *связным*, если любые две вершины $x_i, x_j \in X$ соединены цепью с началом в x_i и концом в x_j . Из симметрии следует, что в этом случае и вершина x_i соединена цепью с вершиной x_j . По определению будем считать, что любая вершина соединена сама с собой цепью нулевой длины.

Граф $\Gamma(X', W')$ называется *подграфом* графа $\Gamma(X, W)$, если $X' \subseteq X$, $W' \subseteq W$. Граф $\Gamma(X, W')$, $W' \subseteq W$, называется *частичным* графом графа $\Gamma(X, W)$. Будем говорить, что граф $\Gamma(X, W)$ представляет собой *сумму* графов $\Gamma(X_1, W_1), \dots, \Gamma(X_k, W_k)$, и записывать: $\Gamma(X, W) = \Gamma(X_1, W_1) \cup \dots \cup \Gamma(X_k, W_k)$, если $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, $W = W_1 \cup \dots \cup W_k$. Эта сумма называется *прямой*, если дополнительно выполнены условия $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$.

На множестве вершин графа $\Gamma(X, W)$ определим отношение эквивалентности, полагая $x_i \sim x_j$, где $x_i, x_j \in X$, если вершины x_i и x_j соединены цепью. Это отношение эквивалентности индуцирует разбиение множества вершин:

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k, \quad X_i \cap X_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Обозначим через $W_i \subseteq W$ множество ребер графа $\Gamma(X, W)$, инцидентных вершинам из X_i , $1 \leq i \leq k$. Подграфы $\Gamma(X_1, W_1), \dots, \Gamma(X_k, W_k)$ графа $\Gamma(X, W)$ называются его *компонентами связности*. Ясно, что всякий граф представляет собой прямую сумму своих компонент связности.

Теорема 1. Граф $\Gamma(X, W)$, $|X| = n$, с k компонентами связности имеет максимальное число ребер тогда и только тогда, когда он состоит из $k - 1$ изолированных вершин и компоненты связности, представляющей собой полный граф с $n - k + 1$ вершинами.

Действительно, граф $\Gamma(X, W)$ имеет максимальное число ребер, если его компоненты связности $\Gamma(X_1, W_1), \dots, \Gamma(X_k, W_k)$ быть полные графы. Тогда общее число ребер равно $\sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}$, где $n_i = |X_i|$, $1 \leq i \leq k$. Эта сумма достигает максимума тогда и только тогда, когда существует такое $1 \leq i \leq k$, что $n_i = n - k + 1$, $n_j = 1$, $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$.

Таким образом, максимальное число ребер в графе с k компонентами связности равно $\binom{n-k+1}{2}$. Отсюда вытекает, что максимальное число ребер в графе с двумя компонентами связности равно $\binom{n-1}{2}$, так что граф, имеющий больше чем $\binom{n-1}{2}$ ребер, обязательно связан.

Пара $\bar{\Gamma} = \Gamma(X, \bar{W})$, состоящая из конечного множества X , элементы которого называются *вершинами*, и множества \bar{W} упорядоченных пар элементов X , называемых *дугами*, представляет собой *ориентированный* граф, или *орграф*. Орграфу $\Gamma(X, \bar{W})$ можно поставить в соответствие бинарное отношение R , при котором xRx' , если дуга $(x, x') \in \bar{W}$.

Пометим множество из $|X|$ точек на плоскости различными элементами множества X . Две точки x и x' соединим стрелкой, направленной из точки x в точку x' , если в графе $\Gamma(X, W)$ имеется дуга (x, x') . Проводя все стрелки, соответствующие дугам орграфа $\Gamma(X, W)$, получаем его геометрический образ на плоскости. При этом точки пересечения дуг, не совпадающие с вершинами орграфа, не учитываются. Орграф $\Gamma'(X', \bar{W}')$ называется *подорграфом* орграфа $\Gamma(X, \bar{W})$, если $X' \subseteq X$, $W' \subseteq \bar{W}$.

Будем говорить, что дуга (x, x') *инцидентна* вершинам x и x' , причем эта дуга выходит из x и заходит в x' . Чередующаяся последовательность вершин и инцидентных им дуг орграфа $x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_2, x_3), \dots, x_{l-1}, (x_{l-1}, x_l), x_l$, где $x_i \in X$, $i = 1, \dots, l$, $(x_i, x_{i+1}) \in \bar{W}$, $i = 1, 2, \dots, l-1$, называется *путем*, соединяющим x_1 с x_l , если $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Если в указанной чередующейся последовательности вершин и дуг $x_i = x_l$, а все остальные вершины различны, то эта последовательность называется *контуром*. Орграф $\bar{\Gamma}$ называется *сильно связным*, если для любых его вершин x и x' существуют пути, соединяющие x с x' и x' с x . *Компонентой сильной связности* орграфа $\bar{\Gamma}$ называется максимальный сильно связный подорграф Γ , орграфа $\bar{\Gamma}$.

Если в орграфе $\bar{\Gamma}$ не учитывать ориентацию дуг, то этот орграф превращается в соответствующий граф Γ . Компоненты связности этого графа Γ будем называть компонентами связности орграфа $\bar{\Gamma}$.

графа \bar{G} . Ясно, что каждая компонента сильной связности орграфа \bar{G} принадлежит некоторой его компоненте связности.

В геометрических изображениях графов можно удалить из вершин элементы множества X , которыми они помечены. В результате получается некоторый геометрический образ, который также называют графом с помеченными или незанумерованными вершинами. В противоположность этому определенные выше графы называются *графами с помеченными или занумерованными вершинами*. Только такие графы мы и будем рассматривать в этой главе.

Из приведенных определений графов следует, что в их геометрическом изображении не допускаются *петли*, т. е. ребра, инцидентные только одной вершине, а также отсутствуют *кратные*, или *параллельные*, ребра, соединяющие одни и те же пары вершин. Если в графе допускаются параллельные ребра, то он иногда называется *мультиграфом*. В дальнейшем мы не будем придерживаться этой терминологии, а будем говорить только о графах, оговаривая наличие или отсутствие петель и параллельных ребер. Аналогичное замечание относится также и к орграфам.

2. А-графы первого рода. Будем рассматривать графы с n вершинами. Так как общее число ребер равно $\binom{n}{2}$, а с учетом петель $\binom{n+1}{2}$, то число графов без петель с n вершинами есть $2^{\binom{n}{2}}$; при наличии петель это число равно $2^{\binom{n+1}{2}}$. Соответственно, общее число ориентированных графов с n вершинами без петель равно $2^{e(n-1)}$, а при наличии петель это число есть 2^{n^2} .

Рассмотрим теперь графы с n вершинами и m ребрами. Такие графы будем называть (n, m) -графами. Число таких графов без петель равно $\binom{\binom{n}{2}}{m}$; при наличии петель это число равно $\binom{\binom{n+1}{2}}{m}$.

Если же допускаются параллельные ребра, то вместо m -сочетаний ребер следует рассматривать m -сочетание с неограниченными повторениями и соответствующие числа графов равны

$$\binom{\binom{n}{2} + m - 1}{m} \text{ и } \binom{\binom{n+1}{2} + m - 1}{m}.$$

Таким образом, мы рассмотрели два способа задания классов графов, при одном из которых число ребер не является постоянным, а при другом равно фиксированной величине. Класс графов с n вершинами, у которых число ребер не является постоянной величиной, а может меняться в некоторых границах, зависящих только от n , будем называть классом графов *первого рода*. Класс графов с n вершинами, у которых число ребер m фиксировано,

будем называть классом графов *второго рода*. Очевидно, что если, например, рассматривать объединение классов графов без петель второго рода с n вершинами и m ребрами для $m = 0, 1, \dots, \binom{n}{2}$,

получаем некоторый класс графов первого рода с n вершинами.

Описание классов графов первого и второго рода можно осуществлять различными способами. Обычно для такого описания задается некоторый комплекс ограничений Λ на способ построения графов, который позволяет выделять данный класс в виде подкласса некоторого более широкого класса графов. Весьма часто встречается случай, когда комплекс ограничений Λ формулируется одинаково при любом числе вершин графа n . Так, свойство Λ , состоящее в том, что в любом графе рассматриваемого класса степень всех вершин равна одному и тому же числу d , является примером комплекса ограничения, не зависящего от числа вершин графа n .

Определим теперь один класс графов, задаваемых комплексом условий Λ , не зависящим от числа вершин графа n . Этот класс определяется некоторыми свойствами, связанными со способом перечисления всех графов, принадлежащих данному классу.

Класс графов с n вершинами, определяемый комплексом условий Λ , называется *классом Λ -графов первого рода*, если выполнены следующие два условия:

1) Однородность. Число компонент связности $C_k(\Lambda)$, $1 \leq k \leq n$, которое можно построить на любых k из n вершин при переборе графов данного класса, зависит только от k .

2) Независимость. При заданной компоненте связности с k вершинами число способов построения на $n - k$ вершинах оставшихся частей графов данного класса совпадает с $D_{n-k}(\Lambda)$ — числом Λ -графов первого рода, построенных на $n - k$ вершинах.

Зафиксируем некоторый класс Λ -графов первого рода и для общего числа графов $D_n = D_n(\Lambda)$ и числа связных графов $C_n = C_n(\Lambda)$ с n вершинами установим рекуррентное соотношение

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} C_k D_{n-k} = D_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad D_0 = 1. \quad (1.1)$$

Разобьем весь класс Λ -графов с k вершинами на n подклассов в зависимости от числа вершин в компоненте связности, содержащей фиксированную вершину $x \in X$, $|X| = n$. Из свойства однородности Λ -графов следует, что число способов построения такой компоненты с k вершинами равно $\binom{n-1}{k-1} C_k$, $1 \leq k \leq n$. Оставшуюся часть Λ -графа на $n - k$ вершинах, согласно свойству независимости, можно достроить D_{n-k} способами. Умножая обе полученные величины и суммируя результаты для $k = 1, 2, \dots, n$, получаем

общее число Λ -графов с n вершинами, т. е. приходим к соотношению (1.1).

Обозначим через $D_{nj} = D_{nj}(\Lambda)$ число Λ -графов первого рода с n вершинами и j компонентами связности $1 \leq j \leq n$. Положим $D_{n0} = C_n = 1$, $D_{nk} = 0$ при $n < k$ и $D_{nk} = 0$, если $nk = 0$, но либо n , либо k отличны от нуля. Будем предполагать, что класс Λ -графов первого рода обладает *усиленной независимостью*. Это свойство состоит в том, что в подклассе класса Λ -графов с j компонентами при фиксированной компоненте на k вершинах остальные $j-1$ компонент можно построить $D_{n-k,j-1}$ способами, где $D_{n-k,j}$ — число Λ -графов с n вершинами и j компонентами. Ясно, что из усиленной независимости следует обычная независимость, указанная в определении Λ -графов первого рода. При выполнении усиленной независимости имеет место рекуррентное соотношение

$$\sum_{k=1}^{n-j+1} \binom{n-1}{k-1} C_k D_{n-k,j-1} = D_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

вывод которого аналогичен выводу соотношения (1.1).

Рассмотрим производящие функции

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!}, \quad (1.3)$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \quad (1.4)$$

представляющие собой формальные степенные ряды.

Умножая обе части равенства (1.1) на $x^n/n!$ и суммируя по n , после замены индексов приходим к соотношению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_{k+1} D_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n+1} \frac{x^n}{n!}. \quad (1.5)$$

Соотношение (1.5) означает, что формальные степенные ряды (1.3) и (1.4) удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$F'(x) = F(x)\Phi'(x), \quad (1.6)$$

где撇 при x означает производную по x .

Если рассматривать e^y как формальный степенной ряд, отвечающий разложению этой функции в ряд Маклорена, то нетрудно убедиться, что

$$F(x) = e^{\Phi(x)}. \quad (1.7)$$

Это есть основное соотношение, выражающее производящую функцию Λ -графов через соответствующую производящую функцию связных графов.

Рассмотрим производящие функции

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^n D_{nj} z^j, \quad (1.8)$$

$$F(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \frac{x^n}{n!}. \quad (1.9)$$

Умножим теперь на $z^j x^{n-j}/(n-1)!$ обе части равенства (1.2) и просуммируем по всем допустимым значениям j и n . После замены индексов получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(z) \frac{x^n}{n!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C_{n+1} f_{n-k}(z).$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение для формальных степенных рядов:

$$F'(x, z) = z F(x, z) \Phi'(x), \quad (1.10)$$

где штрих означает производную по x . Снова рассматривая e^y как формальный степенной ряд, отвечающий разложению этой функции в ряд Маклорена, находим, что

$$F(x, z) = e^{z\Phi(x)}. \quad (1.11)$$

Это есть соотношение для Λ -графов с усиленной независимостью. При $z = 1$ соотношение (1.11) совпадает с соотношением (1.7).

В заключение отметим еще одно соотношение

$$\frac{1}{k!} \Phi^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} D_{nk} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.12)$$

которое вытекает из формул (1.9) и (1.11).

Рассмотрим теперь некоторые примеры Λ -графов. Примерами Λ -графов могут служить классы графов с n вершинами, отвечающие случаям отсутствия или наличия петель. При перечислении этих классов выполнены условия однородности и независимости, поэтому из равенства (1.1) следуют соотношения

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} C_k^{(1)} 2^{\binom{n-k}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}, \quad (1.13)$$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} C_k^{(2)} 2^{\binom{n-k+1}{2}} = 2^{\binom{n+1}{2}}, \quad (1.14)$$

где $C_n^{(1)}$ и $C_n^{(2)}$ — числа связных графов с n вершинами соответственно при отсутствии и наличии петель.

Другой пример Λ -графов связан с рассмотрением четных графов. Граф без петель называется четным, если каждой вершине инцидентно четное число ребер. Покажем, что для числа четных графов D'_n с n вершинами имеет место формула

$$D'_n = 2^{\binom{n-1}{2}}. \quad (1.15)$$

Действительно, в произвольном графе с $n - 1$ помеченными вершинами имеется четное число вершин нечетной степени. Добавим к такому графу новую вершину, помеченную элементом n , и соединим ее ребрами с вершинами нечетной степени. В результате получим четный граф с n вершинами. Обратно, если в четном графе с n вершинами удалить одну вершину вместе с инцидентными ей ребрами, то будет получен некоторый граф с $n - 1$ вершинами. Так как это соответствие взаимно однозначно, то отсюда следует формула (1.15). Связный четный граф называется *эйлеровым* графом. Так как четные графы образуют класс Λ -графов, то для числа эйлеровых графов с n вершинами C'_n в силу равенства (1.1) имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} C'_k 2^{\binom{n-k-1}{2}} = 2^{\binom{n-1}{2}}. \quad (1.16)$$

Исследуем теперь некоторые асимптотические свойства Λ -графов первого рода. Главное из этих свойств состоит в том, что с ростом числа вершин отношение числа связных Λ -графов к общему числу графов в классе стремится к единице.

Теорема 2. Для Λ -графов первого рода равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{D_n} = 1 \quad (1.17)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} D_k D_{n-k} = 0. \quad (1.18)$$

Введем обозначения

$$c_n = C_n/D_n, \quad d_n = D_n/n!, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

В этих обозначениях соотношение (1.1) переписывается в следующем виде:

$$\frac{1}{nd_n} \sum_{k=1}^n k c_k d_k d_{n-k} = 1. \quad (1.20)$$

Полагая

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{1}{2} d_{n/2}^2 / d_n, & n - \text{четное}, \\ 0 & n - \text{нечетное} \end{cases} \quad (1.21)$$

из равенства (1.20) находим

$$1 - c_n = \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[\left(1 - \frac{k}{n} \right) c_{n-k} + \frac{k}{n} c_k \right] d_k d_{n-k} - \theta_n c_{n/2}. \quad (1.22)$$

Так как $c_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, то из соотношения (1.22) вытекает неравенство

$$1 \geq c_n \geq 1 - \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_k d_{n-k}, \quad n \geq 1. \quad (1.23)$$

Из условия (1.18) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_k d_{n-k} \rightarrow 0. \quad (1.24)$$

Таким образом, из неравенств (1.23) при выполнении условия (1.24) имеем при $n \rightarrow \infty$

$$c_n \rightarrow 1. \quad (1.25)$$

Этим доказана достаточность условий теоремы.

Допустим теперь, что условие (1.25), эквивалентное условию (1.17), выполнено. Тогда для всех $k = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\left(1 - \frac{k}{n} \right) c_{n-k} + \frac{k}{n} c_k \rightarrow 1. \quad (1.26)$$

В силу равенства (1.22) отсюда следует, что

$$1 - c_n = \frac{1}{d_n} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_k d_{n-k} (1 + o(1)). \quad (1.27)$$

Это означает в силу условия (1.25), что условие (1.24) выполнено.

В качестве следствия из доказанной теоремы можно утверждать, что при неограниченном увеличении числа вершин отношение числа четных графов к числу эйлеровых графов близко к единице.

Действительно, в этом случае

$$D_n = 2^{\binom{n-1}{2}}$$

и

$$\frac{1}{2^{\binom{n-1}{2}}} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} 2^{\binom{k-1}{2} + \binom{n-k-1}{2}} \leq \frac{n}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-4}} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, т. е. условие (1.18) выполнено.

3. Λ -графы второго рода. Будем рассматривать классы графов с n вершинами и m ребрами. Класс графов с n вершинами и m ребрами, определяемый комплексом условий Λ , называется *классом Λ -графов второго рода*, если выполнены следующие два условия.

1) Однородность. Число компонент связности $C_{k,i}(\Lambda)$, $1 \leq k \leq n$, $0 \leq i \leq m$, которые можно построить на любых k из n вершин с использованием i ребер в процессе перебора графов данного класса, зависит только от k и i .

2) Независимость. При заданной компоненте связности с k вершинами и i ребрами число способов построения на $n-k$ вершинах оставшихся частей графов совпадает с $D_{n-k,m-i}(\Lambda)$ — числом Λ -графа второго рода, построенных на $n-k$ вершинах с использованием $m-i$ ребер.

Используя свойства однородности и независимости Λ -графов второго рода, можно вывести соотношение

$$D_{n+1,m}(\Lambda) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} C_{i+1,j}(\Lambda) D_{n-i,m-j}(\Lambda), \quad (1.28)$$

где $D_{n,m}(\Lambda)$ и $C_{n,m}(\Lambda)$ — общее число и число связных Λ -графов второго рода с n вершинами и m ребрами. Вывод соотношения (1.28) по существу совпадает с выводом соотношения (1.1).

Обозначим через $D_{n,m}^{(k)}(\Lambda)$ — число Λ -графов второго рода с n вершинами, m ребрами и k компонентами связности. Положим $D_{00}^{(0)}(\Lambda) = D_{00}(\Lambda) = 1$, $D_{nm}^{(k)}(\Lambda) = 0$, если $m \cdot n \cdot k = 0$ и хотя бы один из индексов m , n , k отличен от нуля; $D_{nm}^{(k)}(\Lambda) = 0$ при $k > n$.

Для класса Λ -графов второго рода определим понятие *усиленной независимости*. Оно состоит в том, что в классе Λ -графов с k компонентами связности при фиксированной компоненте с i вершинами и j ребрами остальные $k-1$ компонент можно построить $D_{n-i,m-j}^{(k-1)}(\Lambda)$ способами. Для Λ -графов очевидно, что из усиленной независимости следует обычная независимость, указанная в определении Λ -графов второго рода, обладающих этим свойством. Имеет место соотношение

$$D_{n+1,m}^{(k)}(\Lambda) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{n}{i} C_{i+1,j}(\Lambda) D_{n-i,m-j}^{(k-1)}(\Lambda). \quad (1.29)$$

Вывод этого соотношения аналогичен выводу соотношения (1.2).

Рассмотрим производящие функции

$$F(x, y, z; \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n D_{nm}^{(k)}(\Lambda) \frac{x^n}{n!} y^m z^k, \quad (1.30)$$

$$\Phi(x, y; \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}(\Lambda) \frac{x^n}{n!} y^m, \quad (1.31)$$

являющиеся формальными степенными рядами. Для Λ -графов второго рода, обладающих свойством усиленной независимости, установим следующее соотношение:

$$F(x, y, z; \Lambda) = \exp\{z\Phi(x, y; \Lambda)\}, \quad (1.32)$$

где под $\exp\{y\}$ понимается формальный степенной ряд, отвечающий разложению этой функции в ряд Маклорена. Положим

$$f_{nk}(y; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} D_{nm}^{(k)}(\Lambda) y^m, \quad (1.33)$$

$$\varphi_n(y; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}(\Lambda) y^m. \quad (1.34)$$

Умножая обе части равенства (1.29) на y^n и суммируя по допустимым значениям m , получаем

$$f_{n+1,k}(y; \Lambda) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \varphi_{i+1}(y; \Lambda) f_{n-i,k-1}(y; \Lambda). \quad (1.35)$$

Рассмотрим еще одну производящую функцию

$$f_n(y, z; \Lambda) = \sum_{k=0}^n f_{nk}(y; \Lambda) z^k. \quad (1.36)$$

Умножим обе части равенства (1.35) на z^k и просуммируем по всем значениям k в пределах от 1 до n . Так как $f_{n+1,0}(y; \Lambda) = 0$ при $n = 0, 1, \dots$, то с учетом равенства (1.36) в результате получаем

$$f_{n+1}(y, z; \Lambda) = z \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \varphi_{i+1}(y; \Lambda) f_{n-i}(y, z; \Lambda). \quad (1.37)$$

Умножим обе части равенства (1.37) на $x^n/n!$ и просуммируем по всем допустимым значениям n . Принимая во внимание равенства

$$F(x, y, z; \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y, z; \Lambda) \frac{x^n}{n!}, \quad \Phi(x, y; \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y; \Lambda) \frac{x^n}{n!},$$

в результате получаем дифференциальное уравнение

$$F'(x, y, z; \Lambda) = z \cdot F(x, y, z; \Lambda) \Phi'(x, y; \Lambda), \quad (1.38)$$

где штрих означает производную по x . Интегрируя это дифференциальное уравнение в множестве формальных степенных рядов, приходим к соотношению (1.32).

Отметим, что примерами классов А-графов второго рода являются: класс всех $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ графов без петель с n вершинами и m ребрами, класс всех $\binom{\binom{n+1}{2}}{m}$ графов, допускающих петли с n вершинами и m ребрами.

В заключение приведем без доказательства теорему, аналогичную теореме 1.

Пусть D_{nm} — общее число графов без петель с n вершинами и m ребрами, а C_{nm} — число связных графов рассматриваемого вида.

Теорема 2. Если $n, m \rightarrow \infty$ и выполнено условие $m/n = -\ln \sqrt{n} \rightarrow \infty$, то

$$\frac{C_{nm}}{D_{nm}} \rightarrow 1.$$

Таким образом, если при неограниченном увеличении числа вершин n число ребер m имеет порядок роста, больший $\frac{1}{2}n(\ln n + \omega_n)$, где $\omega_n \rightarrow \infty$, то отношение числа связных графов к общему числу графов стремится к единице.

§ 2. Деревья

1. Определение. В главе III было дано определение дерева, как связного графа, не содержащего циклов. Теперь можно несколько уточнить это определение в соответствии с расширением класса рассматриваемых графов. Связный граф, не содержащий циклов и петель, называется *деревом*. Ясно, что любые две вершины дерева соединены единственной цепью, так как в противном случае имелся бы цикл, проходящий через эти вершины. Отсюда следует, что удаление любого ребра приводит к несвязному графу. Выделим в дереве некоторую вершину x_0 и назовем ее *корнем*. Совокупность вершин дерева, находящихся от x_0 на расстоянии v , назовем v -м слоем дерева. При фиксированном корне число непустых слоев дерева называется его *высотой*. Вершины последнего слоя являются *концевыми*, так как вершина каждого слоя соединяется единственной цепью с корнем.

Каждой вершине дерева поставим во взаимно однозначное соответствие единственное ребро, соединяющее эту вершину с некоторой вершиной предыдущего слоя. В этих условиях только кор-

нико не соответствует никакого ребра. Отсюда вытекает, что если $\Gamma(X, W)$ — дерево и $|X| = n$, то $|W| = n - 1$.

Будем теперь последовательно строить связный граф (не обязательно дерево) путем добавления одного ребра и не более одной вершины. Начнем со случая, когда $|X_1| = 2$, $|W_1| = 1$. На следующем шаге либо добавим одну новую вершину и одно ребро, соединяющее эту вершину с уже имеющимися, либо новое ребро, соединяющее уже имеющиеся вершины. Далее этот процесс повторяется многократно.

Рассмотрим величину $\kappa(\Gamma_i) = |W_i| - |X_i| + 1$, отвечающую графу $\Gamma_i = \Gamma(X_i, W_i)$ на i -м шаге построения. Очевидно, что $\kappa(\Gamma_1) = -1$. На следующем, $(i+1)$ -м шаге $|W_i|$ увеличивается на единицу, а $|X_i|$ либо увеличивается на единицу, либо остается постоянным. Отсюда следует, что $\kappa(\Gamma_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть теперь $\Gamma(X, W)$ — произвольный связный граф. Тогда величина

$$\kappa(\Gamma) = |W| - |X| + 1 \quad (2.1)$$

называется цикломатическим числом связного графа. В соответствии с проведенными выше рассуждениями $\kappa(\Gamma) \geq 0$, причем $\kappa(\Gamma) = 0$ тогда и только тогда, когда граф Γ является деревом. Если граф Γ состоит из k компонент связности $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, то цикломатическим числом графа назовем выражение

$$\kappa(\Gamma) = \sum_{i=1}^k \kappa(\Gamma_i).$$

Отсюда следует, что

$$\kappa(\Gamma) = |W| - |X| + k. \quad (2.2)$$

Граф, все связные компоненты которого являются деревьями, называется лесом. Для леса, как и для дерева, цикломатическое число равно нулю.

Рассмотрим теперь связный граф $\Gamma(X, W)$. Будем последовательно удалять из него ребра так, чтобы оставались связными графы. В результате получим дерево, содержащее $|X| - 1$ ребер. Каждое такое дерево называется остовным деревом графа $\Gamma(X, W)$. Ясно, что число удаленных ребер до получения остовного дерева равно $|W| - |X| + 1$, т. е. цикломатическому числу графа $\Gamma(X, W)$.

Некоторые из циклов графа будем называть независимыми, если каждый из них содержит ребро, не принадлежащее остальным $\mu - 1$ циклам. Проведем теперь процесс образования основного дерева $\Gamma(X, W)$ в обратном порядке, последовательно добавляя к остовному дереву удаленные ранее ребра, вплоть до получения исходного графа $\Gamma(X, W)$. На каждом шаге добавление ребра приводит к образованию по крайней мере одного нового цикла. При этом каждому из $|W| - |X| + 1$ шагов можно поставить в соответствие такой цикл, что полученная совокупность из $|W| - |X| + 1$

циклов будет независимой. Таким образом, число независимых циклов в графе $\Gamma(X, W)$ не меньше цикломатического числа $x(\Gamma)$. Можно показать, что цикломатическое число равно числу независимых циклов графа.

2. Алгоритм Прюфера. Напомним, что если дерево имеет одну выделенную вершину — корень, то оно называется *корневым*. Дерево, не являющееся корневым, называется *свободным*. Если $d(x_i)$ — степень вершины графа x_i , то величину $x(x_i) = d(x_i) - 1$ будем называть *кратностью* этой вершины. Символ $[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}]$, где $k_i = x(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, будем называть *первичной спецификацией* графа.

Теорема 1. Каждому дереву, вершины которого помечены элементами множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и которое имеет первичную спецификацию $[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}]$, можно поставить во взаимно однозначное соответствие заполнение n различных ячеек $n-2$ различными предметами, в котором i -я ячейка содержит k_i предметов, $1 \leq i \leq n$.

Для доказательства приведем описание алгоритма Прюфера, с помощью которого устанавливается это соответствие. Пусть имеются $n-2$ различных предметов и n различных ячеек. Рассмотрим свободное дерево с n помеченными вершинами. Будем последовательно удалять ребра и вершины графа, проводя одновременно заполнение ячеек предметами.

На первом шаге удаляем концевую вершину дерева, имеющую наименьший номер, и инцидентное ей ребро. Если другой конец удаляемого ребра инцидентен вершине с номером i_1 , то первый предмет помещаем в ячейку с номером i_1 . На втором и последующих шагах процесс повторяется. Процесс останавливается в тот момент, когда остается одно ребро. Это соответствует заполнению $n-2$ предметов в n ячейках, причем в i -й ячейке имеется k_i предметов. Ячейки, номера которых совпадают с номерами концевых вершин дерева, оказываются пустыми.

С другой стороны, если задано заполнение n различных ячеек $n-2$ различными предметами, то по этому заполнению можно построить дерево с n вершинами. Пусть j_1, j_2, \dots, j_n , $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq n$ — номера пустых ячеек. Если первый предмет находится в ячейке с номером i_1 , то в дереве имеется ребро (i_1, j_1) . Удаляем ячейку с номером j_1 и первый предмет, в результате получаем заполнение $n-1$ ячеек $n-3$ предметами. Применяя индукцию, можно предположить, что этому заполнению соответствует дерево с $n-1$ вершинами. Так как j_1 не принадлежит к множеству вершин этого дерева, то добавление к нему ребра (i_1, j_1) снова дает дерево. Этим доказательство теоремы завершено.

Обозначим через $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ число помеченных свободных деревьев с n вершинами, у которых кратность вершины i

равна x_i . Справедлива формула

$$\tilde{r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(n-2)!}{x_1!x_2!\dots x_n!}, \quad (2.3)$$

так как это число совпадает с числом $(n-2)$ -векторов с координатами из n -множества, имеющих первичную спецификацию $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ (см. формулу (2.5) гл. I).

Из формулы (2.3) следует, что общее число свободных деревьев \tilde{r}_n равно

$$\tilde{r}_n = \sum_{\substack{x_1+\dots+x_n=n-2 \\ x_i \geq 0}} \frac{(n-2)!}{x_1!x_2!\dots x_n!}.$$

Таким образом, согласно формуле (2.6) гл. I,

$$\tilde{r}_n = n^{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (2.4)$$

Так как каждому свободному дереву с n вершинами соответствуют n различных корневых деревьев, полученных при выборе каждой из вершин в качестве корня, то число r_n корневых деревьев с n вершинами равно

$$r_n = n^{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (2.5)$$

При заполнении n различных ячеек $n-2$ различными предметами число заполнений, для которых фиксированная ячейка содержит $x = k-1$ предметов, равно

$$\tilde{r}_n(k) = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} \quad (2.6)$$

Это число совпадает с числом свободных деревьев с n вершинами, у которых кратность фиксированной вершины равна $x = k-1$. Соответствующая величина для корневых деревьев вычисляется по формуле

$$r_n(k) = n \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}. \quad (2.7)$$

Число свободных деревьев с n вершинами, из которых k концевых, равно

$$\tilde{r}(n, k) = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} 0^{n-k},$$

так как это число совпадает с числом заполнений n различных ячеек $n-2$ предметами, когда имеется k пустых ячеек.

3. Леса. В соответствии с данным выше определением граф $\Gamma(X, W)$, компоненты связности которого являются деревьями, называется лесом. Число лесов с вершинами, помеченными x_1, x_2, \dots, x_n , состоящих из k свободных деревьев, у которых k

фиксированных вершин x_1, x_2, \dots, x_k принадлежат различным деревьям, равно

$$\tilde{r}_{nk} = kn^{n-k-1}. \quad (2.8)$$

Рассмотрим множество D деревьев с $n+1$ вершинами x_0, x_1, \dots, x_n , у которых вершина x_0 инцидентна k ребер. Число таких деревьев, согласно формуле (2.6), равно

$$|D| = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}. \quad (2.9)$$

Для $K = \{1, 2, \dots, n\}$ такого, что $|K| = k$, обозначим через $D(K)$ множество деревьев из D , в которых для любого $i \in K$ вершина x_i соединена с x_0 . Ясно, что $|D(K)| = \tilde{r}_{nk}$. Таким образом,

$$|D| = \sum_K |D(K)| = \binom{n}{k} \tilde{r}_{nk}.$$

Отсюда, с учетом (2.9), следует формула (2.8).

Для дальнейшего важную роль будет играть следующее тождество:

$$\frac{k n^{n-k-1}}{(n-k)!} = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ j_i \geq 1}} \frac{j_1^{j_1-1} \dots j_k^{j_k-1}}{j_1! \dots j_k!}, \quad (2.10)$$

где суммирование ведется по всем векторам (j_1, \dots, j_k) с целочисленными координатами, такими, что $j_1 + \dots + j_k = n$, $j_i \geq 1$, $i = 1, \dots, k$.

Число корневых деревьев с n вершинами, с кратностью корня $\kappa = k - 1$, равно

$$r_n(k) = \frac{n}{k!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n-1 \\ j_i \geq 1}} \frac{(n-k)!}{j_1! \dots j_k!} r_{j_1} \dots r_{j_k}. \quad (2.11)$$

Действительно, $\frac{1}{k!}(n-1)!/(j_1! \dots j_k!)$ — это число разбиений $n-1$ некорневых вершин по деревьям леса, $r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_k}$ — число лесов при фиксированных вершинах деревьев и n — число вариантов выбора корня.

С другой стороны, для $r_n(k)$ имеется другое выражение, даваемое формулой (2.7). Поэтому с учетом формулы (2.5) имеем

$$n \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1} = \frac{n!}{k!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n-1 \\ j_i \geq 1}} \frac{j_1^{j_1-1} \dots j_k^{j_k-1}}{j_1! \dots j_k!}.$$

Отсюда после упрощений получаем тождество (2.10).

Пусть теперь $r_n^{(k)}$ — число лесов с n вершинами, состоящих из k корневых деревьев. Тогда

$$r_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ j_i \geq 1}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} j_1^{j_1-1} \dots j_k^{j_k-1}. \quad (2.42)$$

Эта формула получается рассуждением, близким к тому, с помощью которого получена формула (2.11).

Используя тождество (2.10), из (2.42) получаем

$$r_n^{(k)} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.43)$$

Общее число лесов с n вершинами, состоящих из корневых деревьев, равно $L_n = \sum_{k=1}^n r_n^{(k)}$. Используя формулу для $r_n^{(k)}$, находим

$$L_n = (n+1)^{n-1}.$$

Для любого фиксированного $k = 1, 2, \dots$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n^{(k)}}{(n-1)^{n-1}} = \frac{e^{-1}}{(k-1)!}.$$

Это равенство следует непосредственно из формулы (2.43).

4. Производящие функции. Рассмотрим производящие функции для корневых и свободных деревьев:

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \frac{x^n}{n!}, \quad r_1 = 1, \quad (2.44)$$

$$\tilde{r}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{r}_n \frac{x^n}{n!}, \quad \tilde{r}_1 = 1. \quad (2.45)$$

Прежде всего покажем, что $r(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$r(x) = xe^{r(x)}. \quad (2.46)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$r(x; k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n(k) \frac{x^n}{n!}, \quad (2.47)$$

где $r_n(k)$ — число корневых деревьев с n вершинами, с кратностью корня $\kappa = k-1$. Нетрудно убедиться, что

$$xr^k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n-1 \\ j_i \geq 1}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} r_{j_1} \dots r_{j_k}. \quad (2.48)$$

Из (2.17) и (2.18) с учетом формулы (2.11) следует, что

$$r(x; k) = \frac{x}{k!} r^k(x). \quad (2.19)$$

Из определения $r_n(k)$ следует, что

$$r_n = \sum_{k=1}^{n-1} r_n(k), \quad n = 2, 3, \dots$$

Кроме того, так как $r_1(0) = r_1 = 1$, то $r(x, 0) = x$. Суммируя обе части равенства (2.19), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} r_n(k) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r^k(x).$$

Отсюда следует равенство (2.16).

Полагая в равенстве (2.16) $y = y(x) = r(x)$ и возводя обе его части в k -ю степень, получаем $y^k = x^k e^{kx}$. Дифференцируя по x обе части этого равенства, находим

$$ky^{k-1}y' = ky^{k-2}y' - \frac{ky^{k-1}}{x}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, получаем

$$y^k = \frac{k}{k-1} y^{k-1} - k \int_0^x \frac{y^{k-1}(t)}{t} dt. \quad (2.20)$$

Непосредственно из вида (2.14) и (2.15) производящих функций $r(x)$ и $\tilde{r}(x)$ следует, что

$$\tilde{r}(x) = \int_0^x \frac{r(t)}{t} dt. \quad (2.21)$$

Поэтому, полагая в равенстве (2.20) $k = 2$ и $y = r(x)$, с учетом равенства (2.21) находим

$$\tilde{r}(x) = r(x) - \frac{1}{2} r^2(x). \quad (2.22)$$

Обозначим через $\tilde{r}_n^{(k)}$ число лесов с n вершинами, состоящих из k свободных деревьев. Распределяя n вершин $n!(j_1! \dots j_k!)^{-1}$ способами по k свободным деревьям и строя эти деревья $j_1^{j_1-2} \dots j_k^{j_k-2}$ способами, после суммирования по всем j_1, \dots, j_k , таким, что $j_1 + \dots + j_k = n$, $j_i \geq 1$, получаем, что

$$\tilde{r}_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=n \\ j_i \geq 1}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} j_1^{j_1-2} \dots j_k^{j_k-2}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{k!} (\tilde{r}(x))^k = \sum_{n=k}^{\infty} \tilde{r}_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.23)$$

Используя снова обозначение $y = r(x)$, из (2.22) имеем

$$\frac{1}{k!} (\tilde{r}(x))^k = \frac{1}{k!} \left(y - \frac{y^2}{2} \right)^k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j y^{k+j}}{2^j j! (k-j)!}. \quad (2.24)$$

Заметим, что

$$y^k = r^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_k=n \\ j_i \geq 1}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} j_1^{j_1-1} \dots j_k^{j_k-1}.$$

Отсюда в соответствии с формулой (2.12) получаем производящую функцию для $\tilde{r}_n^{(k)}$ — числа лесов с n вершинами, состоящих из k корневых деревьев:

$$\frac{1}{k!} r^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \tilde{r}_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.25)$$

откуда в силу тождества (2.10) следует, что

$$y^k = \sum_{n=k}^{\infty} k n^{n-k-1} (n)_k \frac{x^n}{n!}. \quad (2.26)$$

Вычисляя выражение y^{k+j} из формулы (2.26) и подставляя его в равенство (2.24), с учетом формулы (2.23) получаем

$$\tilde{r}_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{1}{2} \right)^j (k+j) (n)_{k+j} n^{n-k-j-1}. \quad (2.27)$$

Представим $\tilde{r}_n^{(k)}$ в следующем виде:

$$\tilde{r}_n^{(k)} = \sum_{l=1}^{2k} \alpha_{kl} n^{n-l}, \quad (2.28)$$

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{1}{2} \right)^j (k+j) s(k+j, k+j-l+1), \quad (2.29)$$

где $s(\mu, v)$ — числа Стирлинга первого рода. Так как $s(\mu, \mu) = 1$, $s(\mu, \mu-1) = -\binom{\mu}{2}$, то

$$\alpha_{k1} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{1}{2} \right)^j (k+j),$$

$$\alpha_{k2} = -\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \binom{k+j}{2} (k+j).$$

Заметим, что

$$\alpha_{k1} = \frac{1}{k!} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \right] = 0. \quad (2.30)$$

Кроме того, $\alpha_{k3} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \beta_{k3}$, где

$$\beta_{k1} = -\frac{\binom{k}{2}}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{1}{2}\right)^j (k+j) = 0,$$

$$\beta_{k2} = -\frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j(k+j) = \frac{k}{2^{k-1}(k-1)!},$$

$$\beta_{k3} = -\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \binom{j}{2} (k+j) = -\frac{(k-1)}{2^{k-1}(k-1)!}.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_{k2} = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}. \quad (2.31)$$

Теперь из (2.28) и формул (2.30) и (2.31) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{r}_n^{(k)}}{n^{n-2}} = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Если \tilde{L}_n — число лесов с n вершинами, состоящих из свободных деревьев, то $\tilde{L}_n = \sum_{k=1}^n \tilde{r}_n^{(k)}$. Можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{L}_n}{n^{n-2}} = e^{1/2}.$$

5. Образующие симметрической группы. Пусть S_n — симметрическая группа подстановок степени n , действующих на множестве $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Подстановка $\tau \in S_n$ называется *транспозицией*, если она содержит единственный цикл τ длины 2, а остальные циклы — единичные. Если цикл длины 2 содержит элементы i и j , то транспозицию τ записывают в следующем виде: $\tau = (i, j)$.

Обозначим через T_n множество всех транспозиций степени n . Очевидно, что $|T_n| = \binom{n}{2}$. Цикл (i_1, i_2, \dots, i_t) следующим образом может быть представлен в виде произведения транспозиций:

$$(i_1, i_2, \dots, i_t) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_1, i_t).$$

Отсюда следует, что любая подстановка $s \in S_n$ может быть пред-

ставлена в виде произведения транспозиций. В этом смысле говорят, что множество T_n является *системой образующих группы S_n* , или множество T_n *порождает группу S_n* (см. также п. 3 § 5 гл. I).

Однако существуют множества транспозиций, порождающие группу S_n , и являющиеся собственными подмножествами T_n . Примером может служить множество $T'_n = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}$, так как любая транспозиция (i, j) может быть записана в виде $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$.

Выясним, при каких условиях множество транспозиций $R_n^{(r)} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r\} \subseteq T_n$ является системой образующих группы S_n . Множеству $R_n^{(r)}$ поставим в соответствие граф $\Gamma(R_n^{(r)})$ с множеством вершин X . Каждой транспозиции $\tau_k = (i, j) \in R_n^{(r)}$, $1 \leq k \leq r$, в графе $\Gamma(R_n^{(r)})$ ставится в соответствие одно и только одно ребро, соединяющее вершины i и j . Граф $\Gamma(R_n^{(r)})$ называется *графом Пойа* множества транспозиций $R_n^{(r)}$.

Лемма. *Множество транспозиций $R_n^{(r)} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r\}$ при $r \geq n - 1$ тогда и только тогда порождает симметрическую группу S_n , когда соответствующий граф Пойа $\Gamma(R_n^{(r)})$ — связный.*

Пусть граф $\Gamma(R_n^{(r)})$ — связный и вершина $i \in X$ может быть соединена с вершиной $j \in X$ путем, составленным из ребер, отвечающих транспозициям $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_l} \in R_n^{(r)}$. Тогда справедливо равенство

$$(i, j) = \tau_{i_1} \tau_{i_2} \dots \tau_{i_{l-1}} \tau_{i_l} \tau_{i_{l-1}} \dots \tau_{i_2} \tau_{i_1}.$$

Отсюда следует, что произвольная транспозиция $(i, j) \in T_n$ может быть записана в виде произведения транспозиций из $R_n^{(r)}$. Так как T_n порождает группу S_n , то и $R_n^{(r)}$ порождает S_n .

Допустим теперь, что множество $R_n^{(r)}$ порождает S_n , но график $\Gamma(R_n^{(r)})$ содержит компоненты связности $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, $k > 1$, т. е. не является связным. Произвольная подстановка $s \in S_n$ может быть записана в виде

$$s = \tau_1^{(1)} \dots \tau_{v_1}^{(1)} \tau_1^{(2)} \dots \tau_{v_2}^{(2)} \dots \tau_1^{(k)} \dots \tau_{v_k}^{(k)},$$

где $\tau_i^{(t)}$ — транспозиция, соответствующая ребру графа, принадлежащему компоненте связности Γ_i , $1 \leq i \leq k$. Так как компоненты связности не имеют общих вершин, то s представляет собой произведение k независимых циклов. В силу условия $k > 1$ произведения транспозиций из $R_n^{(r)}$ не могут порождать полноциклических подстановок, и, следовательно, $R_n^{(r)}$ не порождает S_n .

Теорема 2. *Множество из $n - 1$ транспозиций $R_n^{(n-1)}$ тогда и только тогда порождает симметрическую группу S_n , когда соответствующий граф Пойа $\Gamma(R_n^{(n-1)})$ является свободным деревом с n помеченными вершинами.*

Действительно, согласно лемме, множество $R_n^{(n-1)}$ тогда и только тогда порождает группу S_n , когда граф $\Gamma(R_n^{(n-1)})$, имеющий $n-1$ ребер, является связным. Такой граф может быть только свободным деревом с n вершинами.

Между множествами $R_n^{(n-1)}$, порождающими симметрическую группу, и свободными деревьями с n занумерованными вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие. Из этого факта вытекает следствие.

Следствие. Число систем образующих симметрической группы S_n , состоящих из $n-1$ транспозиций, равно n^{n-2} .

§ 3. Циклы подстановок

1. Цикловые классы. Пусть S_n — симметрическая группа подстановок степени n на X . Как отмечалось в п. 3 § 5 гл. I, для любой подстановки $s \in S_n$ на X можно определить отношение эквивалентности, полагая, что $x \sim x'$, если существует такое число j , что $x' = s^j(x)$, $x, x' \in X$. Этому отношению эквивалентности отвечает разбиение $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, блоки которого называются *орбитами* подстановки s . Сужение подстановки s на орбиту X_i называется *циклом* подстановки s и обозначается s_i , $1 \leq i \leq k$. Полагая $s_i(x) = x$, $x \in X \setminus X_i$, можно доопределить s_i до подстановки степени n , которую будем также обозначать s_i , $1 \leq i \leq k$. Так как циклы s_i , s_j , $1 \leq i, j \leq k$, не имеют общих действительно перемещаемых символов, то умножение соответствующих им подстановок степени n коммутативно: $s_i s_j = s_j s_i$. Кроме того, подстановка s представима в виде произведения соответствующих ее циклам подстановок:

$$s = s_1 s_2 \dots s_k. \quad (3.1)$$

Циклу s_i можно поставить в соответствие запись $(x, s_i(x), \dots, s^{l_i-1}(x))$, $l_i = |X_i|$, содержащую в определенном порядке те и только те элементы, которые содержатся в орбите X_i . Эту запись также называют *циклом* подстановки s длины l_i или l_i -циклом. Так как в качестве x может быть выбран любой элемент орбиты X_i , то данная запись цикла s_i определена с точностью до циклического сдвига элементов. Отсюда следует, что каждая компонента связности соответствующего подстановки s орграфа $\Gamma(X, s)$ имеет в качестве компонент сильной связности контуры, отвечающие циклам этой подстановки. Совокупность вершин каждой из компонент сильной связности представляет собой орбиту, соответствующую некоторому циклу подстановки.

Отметим, что если $s_i^{-1} s_i = s_i s_i^{-1} = e$, где e — единичная подстановка, то $s^{-1} = s_1^{-1} \dots s_k^{-1}$ в силу коммутативности умножения циклов подстановки. В дальнейшем всюду полагаем, что $s_i^0 = e$, $1 \leq i \leq k$.

Подстановка $s \in S_n$ принадлежит цикловому классу $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, $1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$, если она содержит α_j циклов длины $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ число подстановок, содержащихся в цикловом классе $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$. Выведем несколько иным способом формулу (5.1) гл. I вида

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \dots \alpha_n!}, \quad (3.2)$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n.$$

Действительно, элементы в записи любой подстановки s из циклового класса $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$ можно переставить $n!$ способами. Из этих перестановок $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ дадут различные подстановки из циклового класса $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, а $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \dots \alpha_n!$ вариантов перестановок будут давать эквивалентные подстановки, так как циклическая перестановка элементов каждого цикла и перестановка совокупностей элементов, принадлежащих циклам одинаковой длины, не дают новых записей подстановок из заданного циклового класса.

Ясно, что число различных цикловых классов в симметрической группе подстановок S_n равно числу разбиений числа n , т. е. представлений n в виде суммы $n = 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n$.

2. Число циклов подстановок. Производящая функция для чисел $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$:

$$C_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n} C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (3.3)$$

называется *циклическим индикатором* совокупности всех подстановок степени n . Очевидно, что $C_n(1, 1, \dots, 1) = n!$. Кроме того, если $C_{nk}^{(l)}$ — число подстановок степени n , у которых имеется k l -циклов, а C_{nk} — число подстановок степени n , у которых общее число циклов равно k , то

$$C_{nk}^{(l)} = \sum_{\substack{1\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_l = k}} C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (3.4)$$

$$C_{nk} = \sum_{\substack{1\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (3.5)$$

Полагая в (3.3) сначала $x_i = x$, $x_i = 1$ для $i \neq l$, а затем $x_1 = \dots = x_n = x$, соответственно получаем

$$C_n^{(l)}(x) = C_n(1, \dots, x, \dots, 1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/l \rfloor} C_{nk}^{(l)} x^k, \quad (3.6)$$

$$C_n(x) = C_n(x, \dots, x) = \sum_{k=0}^n C_{nk} x^k, \quad (3.7)$$

где полагаем $C_{00}^{(l)} = C_{00} = 1$, $C_{n0}^{(l)} = C_{n0} = 0$ при $n \geq 1$.

Рассмотрим производящую функцию для циклового индикатора:

$$F(t; x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{t^n}{n!}, \quad (3.8)$$

где слагаемое при $n=0$ полагаем равным единице. Используя формулы (3.2) и (3.3), найдем явное выражение для производящей функции (3.8) и одновременно обоснуем возможность использования в данной ситуации производящей функции от бесконечного числа переменных. Из равенств

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j t^j}{j}\right) &= \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \left(\frac{x_j t^j}{j}\right)^{\alpha_j} \frac{1}{\alpha_j!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{1\alpha_1+\dots+n\alpha_n=n} \frac{n!}{1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \dots \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

следует, что

$$F(t; x_1, x_2, \dots) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j t^j}{j}\right). \quad (3.9)$$

Кроме того, при вычислении коэффициента при $t^n/n!$ в правой части равенства (3.9) фактически можно использовать производящую функцию $\exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j t^j}{j}\right)$ от $n+1$ переменных. Полагая в (3.9) $x_i = x$, $x_i = 1$ при $i \neq l$, а затем $x_1 = \dots = x_n = x$, с учетом формул (3.6), (3.7) и (3.8) находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(l)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-t} e^{(x-1)t^l/l}, \quad |t| < 1, \quad (3.10)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \frac{t^n}{n!} = (1-t)^{-x}, \quad |t| < 1. \quad (3.11)$$

Из формулы (3.10) следует, что

$$C_n^{(l)}(x) = n! \sum_{i=0}^{\lfloor n/l \rfloor} \frac{(x-1)^i}{i! l^i}. \quad (3.12)$$

Из равенств (3.6) и (3.12) получаем формулу

$$C_{nk}^{(l)} = \frac{n!}{k! l^k} \sum_{j=0}^{\lfloor n/l \rfloor - k} \frac{(-1)^j}{j! l^j}, \quad k = 0, 1, \dots, \lfloor n/l \rfloor. \quad (3.13)$$

Разлагая правую часть равенства (3.11) по формуле бинома с отрицательным показателем, получаем

$$C_n(x) = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.14)$$

причем $C_0(x) = 1$.

В равенстве

$$x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k,$$

определенном числа Стирлинга первого рода, заменим x на $-x$ и умножим обе части полученного равенства на $(-1)^n$. В результате получим

$$x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} s(n, k) x^k. \quad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.15) имеем (см. также (5.8) гл. I):

$$C_{nk} = (-1)^{n+k} s(n, k). \quad (3.16)$$

Положим $L_r = (l_1, l_2, \dots, l_r)$, $K_r = (k_1, k_2, \dots, k_r)$ и обозначим через $C_n(L_r, K_r)$ число подстановок степени n , у которых имеется точно k_i циклов длины l_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Тогда

$$C_n(L_r, K_r) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_{l_1} = k_1, \dots, \alpha_{l_r} = k_r}} C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (3.17)$$

Полагая в цикловом индикаторе $x_{l_1} = x_1, \dots, x_{l_r} = x_r$ и $x_i = 1$, $i \neq l_1, \dots, l_r$, согласно формуле (3.17) получаем

$$\begin{aligned} C_n(x_1, \dots, x_r, L_r, K_r) &= C_n(1, \dots, x_1, \dots, x_r, \dots, 1) = \\ &= \sum_{K_r} C_n(L_r, K_r) x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

С учетом (3.8) полагаем в обеих частях равенства (3.9) $x_{l_1} = x_1, \dots, x_{l_r} = x_r$ и $x_i = 1$, $i \neq l_1, \dots, l_r$; получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1, \dots, x_r, L_r, K_r) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-t} e^{(x_1-1)t^{l_1} + \dots + (x_r-1)t^{l_r}}. \quad (3.19)$$

Из этого равенства имеем

$$C_n(x_1, \dots, x_r, L_r K_r) = n! \sum_{\substack{k_1 l_1 + \dots + k_r l_r \leq n \\ 0 < k_1, \dots, k_r \leq n}} \frac{(x_1 - 1)^{k_1}}{l_1^{k_1} k_1!} \dots \frac{(x_r - 1)^{k_r}}{l_r^{k_r} k_r!}. \quad (3.20)$$

Из (3.18) и (3.20) получаем

$$C_n(L_r, K_r) = n! \prod_{j=1}^r \frac{1}{l_j^{k_j} k_j!} \sum_{j_1 \geq 0, \dots, j_r \geq 0} \frac{(-1)^{j_1 + \dots + j_r}}{l_1^{j_1} \dots l_r^{j_r} j_1! \dots j_r!}, \quad (3.21)$$

где индексы суммирования j_1, \dots, j_r удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^r (k_i + j_i) l_i \leq n$. При $r = 1$ формула (3.21) совпадает с формулой (3.13).

3. А-подстановки. В целом ряде комбинаторных задач рассматриваются подстановки из цикловых классов $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, для которых каждый из показателей цикловых классов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ является элементом некоторой последовательности. Для решения перечислительных задач производящую функцию $F(t; x_1, x_2, \dots)$ вида (3.8) оказывается возможным видоизменить в соответствии с заданными последовательностями.

Пусть $\Lambda_j, j = 1, 2, \dots$ — подпоследовательность последовательности $N_s = (0, 1, \dots)$ и $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$. Производящую функцию от бесконечного числа переменных:

$$F(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x_j t^j}{j} \right)^{\alpha_j} \frac{1}{\alpha_j!}, \quad (3.22)$$

будем называть *нумератором цикловых классов подстановок*, когда показатели цикловых классов определяются последовательностью $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$. Это означает, что если $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$ — рассматриваемый цикловой класс, то $\alpha_j \in \Lambda_j$, т. е. α_j принимает значения из последовательности $\Lambda_j, j = 1, 2, \dots$

Нумератор (3.22) запишем в виде

$$F(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{\substack{1\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_j \in \Lambda_j}} \frac{n!}{1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \dots \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (3.23)$$

Из этой записи видно, что коэффициент при $\frac{t^n}{n!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ в раз-

ложении $F(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda)$ равен $C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \in \Lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$, т. е. этот нумератор перечисляет цикловые классы подстановок, у которых показатели циклового класса $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ определяются Λ . Подстановки, принадлежащие цикловым классам $\{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}\}$, $1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, для которых $\alpha_j \in \Lambda_j$, где $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$, называются Λ -подстановками. Нумератор $F(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda)$ перечисляет цикловые классы Λ -подстановок.

Рассмотрим цикловой индикатор Λ -подстановок степени n :

$$C_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \Lambda) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + n\alpha_n = n \\ \alpha_j \in \Lambda_j}} C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (3.24)$$

Из (3.22) и (3.23) следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1, \dots, x_n; \Lambda) \frac{t^n}{n!} = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x_j t^j}{j} \right)^{\alpha_j} \frac{1}{\alpha_j!}. \quad (3.25)$$

При $\Lambda_j = N_j = (0, 1, \dots)$ равенство (3.25) соответствует равенствам (3.8) и (3.9). Оно является источником получения разнообразных производящих функций при различных заданиях Λ .

Обозначим через $C_{nk}(\Lambda)$ число Λ -подстановок с k циклами, через $C_n(L_r, K_r; \Lambda)$ — число Λ -подстановок с k_r циклами длины l_i , $i = 1, 2, \dots, r$, где $L_r = (l_1, l_2, \dots, l_r)$, $K_r = (k_1, k_2, \dots, k_r)$, и через $C_n(\Lambda)$ — общее число Λ -подстановок степени n .

По аналогии с формулами (3.7) и (3.18) имеем

$$C_n(x; \Lambda) = \sum_{k=0}^n C_{nk}(\Lambda) x^k = C_n(x, x, \dots, x; \Lambda), \quad (3.26)$$

$$C_n(x_1, \dots, x_r; L_r, K_r; \Lambda) = \sum_{K_r} C_n(L_r, K_r; \Lambda) x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} = \\ = C_n(1, \dots, x_1, \dots, x_r, \dots, 1), \quad (3.27)$$

где последнее выражение получается из $C_n(x_1, \dots, x_n; \Lambda)$ заменой $x_{l_1} = x_1, \dots, x_{l_r} = x_r, x_i = 1, i \neq l_1, \dots, l_r$, причем $k_j \in \Lambda_{l_j}$, $j = 1, 2, \dots, r$. Очевидно, что, полагая $\Lambda_j = N_j$, $j = 1, 2, \dots$, из формул (3.26) и (3.27) получаем соответственно формулы (3.7) и (3.18). Наконец, из (3.24) следует, что

$$C_n(\Lambda) = C_n(1, 1, \dots, 1; \Lambda). \quad (3.28)$$

Из равенства (3.25) и формул (3.27) и (3.28) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x; \Lambda) \frac{t^n}{n!} = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x t^j}{j} \right)^{\alpha_j} \frac{1}{\alpha_j!}, \quad (3.29)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1, \dots, x_r; L_r, K_r; \Lambda) \frac{t^n}{n!} = \\ = \prod_{i=1}^r \sum_{\alpha_{l_i} \in \Lambda_{l_i}} \left(\frac{x_i t^{l_i}}{l_i} \right)^{\alpha_{l_i}} \frac{1}{\alpha_{l_i}!} \times \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{j \neq l_1, \dots, l_r \\ \alpha_j \in \Lambda_j}} \left(\frac{t^j}{j} \right)^{\alpha_j} \frac{1}{\alpha_j!}. \quad (3.30)$$

Из формулы (3.28) и равенства (3.25) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\Lambda) \frac{t^n}{n!} = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} \left(\frac{t^j}{j} \right)^{\alpha_j} \frac{1}{\alpha_j!}. \quad (3.31)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $\Lambda_j = (q, 2q, 3q, \dots)$, $j = 1, 2, \dots$. Заметим, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^{ql}}{(ql)!} = \frac{1}{q} \sum_{h=1}^q \exp \{ye^{2\pi ih/q}\}, \quad (3.32)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Полагая $y = t^j/j$, из равенства (3.31) получаем выражение для производящей функции чисел ${}^q C_n$, определяющих количество подстановок степени n , у которых циклы каждой из длин могут встречаться lq раз, $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^q C_n \frac{t^n}{n!} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \sum_{h=1}^q \exp \left(\frac{t^j}{j} e^{2\pi ih/q} \right) \right). \quad (3.33)$$

Из этого равенства при $q = 2$ следует производящая функция для числа подстановок ${}^2 C_n$, у которых циклы каждой из длин либо не встречаются, либо встречаются четное число раз:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}^2 C_n \frac{t^n}{n!} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{t^j}{j} \right), \quad (3.34)$$

где $\operatorname{ch} y = (e^y + e^{-y})/2$.

4. *A*-подстановки. Подстановки, у которых длины циклов являются элементами последовательности $A \subseteq \mathbb{N}$, называются *A*-подстановками. Очевидно, что нумераторы *A*-подстановок (3.29)–(3.31) могут быть использованы для перечисления *A*-подстановок, если положить

$$\Lambda_j = \begin{cases} N_0, & j \in A, \\ (0), & j \notin A, \end{cases}$$

где $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Положим

$$a(t) = \sum_{j \in A} \frac{t^j}{j!} \quad (3.35)$$

и обозначим через C_{nk}^A число A -подстановок с k циклами, а через C_n^A — общее число A -подстановок. Тогда из формул (3.29) и (3.31) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x a(t)}, \quad (3.36)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A \frac{t^n}{n!} = e^{a(t)}, \quad (3.37)$$

где

$$C_n^A(x) = \sum_{k=0}^n C_{nk}^A(x) x^k, \quad (3.38)$$

причем $C_{00}^A = C_0^A = 1$.

Обозначая через $C_n^A(L_r, K_r)$, $L_r = (l_1, l_2, \dots, l_r)$, $K_r = (k_1, k_2, \dots, k_r)$, число A -подстановок, имеющих k_i циклов длины l_i , $l_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, r$, и полагая

$$\begin{aligned} C_n^A(x_1, x_2, \dots, x_r; L_r, K_r) &= \\ &= \sum_{\substack{k_1 l_1 + \dots + k_r l_r \leq n \\ k_i > 0}} C_n^A(L_r, K_r) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

из равенства (3.30) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^A(x_1, x_2, \dots, x_r; L_r, K_r) \frac{t^n}{n!} = \exp \left[a(t) + \sum_{j=1}^r (x_j - 1) \frac{t^{l_j}}{l_j} \right]. \quad (3.40)$$

5. Примеры A -подстановок. Подстановка s степени n , удовлетворяющая уравнению

$$s^2 = e, \quad (3.41)$$

где e — единичная подстановка, является инволюцией (см. § 2 гл. III). Инволюция содержит только циклы длины 1 и 2 и, следовательно, является A -подстановкой при $A = \{1, 2\}$. Если I_{nk} — число инволюций с k циклами, а I_n — общее число инволюций степени n , то из формул (3.36) и (3.37) с учетом формула (3.35) и (3.38) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n \frac{t^n}{n!} = e^{t+t^2/2}, \quad (3.42)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} I_{nk} \frac{t^n}{n!} x^k = e^{x(t+t^2/2)}, \quad (3.43)$$

где $I_0 = I_{00} = 1$.

Если $I_{nk}^{(1)}$ и $I_{nk}^{(2)}$ — числа инволюций степени n с k соответственно единичными и двоичными циклами, то из формулы (3.40) с учетом (3.39) при $r = 1$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n I_{nk}^{(1)} \frac{t^n}{n!} x^k = e^{xt + t^2/2}, \quad (3.44)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} I_{nk}^{(2)} \frac{t^n}{n!} x^k = e^{xt + \pi t^2/2}. \quad (3.45)$$

В общем случае решениями уравнения

$$s^d = e, \quad (3.46)$$

где d — натуральное число, а e — единичная подстановка, являются такие постановки s , у которых длины циклов представляют собой делители числа d . Ясно, что s есть A -подстановка, где $A = \{j; j|d\}$ ($j|d$ означает, что j делит d).

Пусть $Q_n(d)$ — число подстановок s степени n , которые являются решениями уравнения (3.46), а $Q_{nk}(d)$ — число таких подстановок, которые дополнительно имеют k циклов. Тогда из (3.36) и (3.37) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(d) \frac{t^n}{n!} = \exp \left\{ \sum_{j|d} \frac{t^j}{j} \right\}, \quad (3.47)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x; d) \frac{t^n}{n!} = \exp \left\{ x \sum_{j|d} \frac{t^j}{j} \right\}, \quad (3.48)$$

где

$$Q_n(x; d) = \sum_{k=0}^n Q_{nk}(d) x^k. \quad (3.49)$$

Дифференцируя обе части равенства (3.48) по t и вычисляя коэффициент при $t^n/n!$, приходим к соотношению

$$Q_{n+1}(x; d) = x \sum_{j|d} (n)_{j-1} Q_{n-j+1}(x; d), \quad (n)_0 = 1. \quad (3.50)$$

Полагая $x = 1$, получаем

$$Q_{n+1}(d) = \sum_{j|d} (n)_{j-1} Q_{n-j+1}(d), \quad (n)_0 = 1. \quad (3.51)$$

Если $d = p$, где p — простое число, то (3.50) и (3.51) принимают вид

$$Q_{n+1}(x; p) = x(Q_n(x; p) + (n)_{p-1} Q_{n-p+1}(x; p)),$$

$$Q_{n+1}(p) = Q_n(p) + (n)_{p-1} Q_{n-p+1}(p).$$

Из формул (3.47) и (3.48) следует, что производящие функции.

при $d = p$ имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(p) \frac{t^n}{n!} = e^{t + t^p/p}, \quad (3.52)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x; p) \frac{t^n}{n!} = e^{x(t + t^p/p)}. \quad (3.53)$$

Вычисляя коэффициент при $t^n/n!$, находим

$$Q_n(x; p) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \frac{x^{n-(p-1)k}}{p^k k! (n-pk)!}. \quad (3.54)$$

Полагая $x = 1$, получаем формулу

$$Q_n(p) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/p \rfloor} \frac{n!}{p^k k! (n-pk)!}. \quad (3.55)$$

6. Подстановки с конгруэнтными циклами. Подстановку s степени p будем называть подстановкой с *конгруэнтными циклами*, если существуют такие числа α и β , $1 \leq \beta \leq \alpha$, что длины циклов s сравнимы с β по модулю α . Обозначим через $S_n(\alpha, \beta)$ множество таких подстановок. Очевидно, что если $s \in S_n(\alpha, \beta)$, то s является A -подстановкой при $A = (\beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \dots)$. Роль функции $a(t)$ вида (3.35) играет функция

$$a(t; \alpha, \beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha j + \beta}}{\alpha j + \beta}. \quad (3.56)$$

С помощью корней степени α из единицы можно записать

$$a(t; \alpha, \beta) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\alpha} e^{-2\pi i \beta k t / \alpha} \ln(1 - te^{2\pi i k t / \alpha}), \quad (3.57)$$

где имеется в виду главное значение логарифма. Из формулы (3.57), в частности, следует, что при $\beta = \alpha$

$$a(t; \alpha, \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - t^\alpha). \quad (3.58)$$

Далее, если α — четное, то при $\beta = \alpha/2$

$$a(t; \alpha, \alpha/2) = \frac{1}{\alpha} \ln((1 + t^{\alpha/2})/(1 - t^{\alpha/2})). \quad (3.59)$$

Обозначим через $C_{nk}(\alpha, \beta)$ число подстановок $s \in S_n(\alpha, \beta)$, имеющих k циклов, а через $C_n(\alpha, \beta)$ — общее число подстановок в $S_n(\alpha, \beta)$ и положим

$$C_n(x; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^n C_{nk}(\alpha, \beta) x^k. \quad (3.60)$$

Тогда из формулы (3.36) с учетом (3.56), (3.58), (3.59) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x; \alpha, \alpha) \frac{t^n}{n!} = (1 - t^\alpha)^{-x/\alpha}, \quad (3.61)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x; \alpha, \alpha/2) \frac{t^n}{n!} = ((1 + t^{\alpha/2}) / (1 - t^{\alpha/2}))^{x/\alpha}. \quad (3.62)$$

Из равенств (3.61) и (3.62) находим

$$C_n(x; \alpha, \alpha) = \begin{cases} n! \binom{(x+n)/\alpha - 1}{n/\alpha}, & \alpha | n, \\ 0, & \alpha \nmid n, \end{cases} \quad (3.63)$$

$$C_n(x; \alpha, \alpha/2) = \begin{cases} n! \sum_{j=0}^{2n/\alpha} \binom{x/\alpha}{2n/\alpha - j} \binom{x/\alpha + j - 1}{j}, & \frac{\alpha}{2} | n, \\ 0 & \frac{\alpha}{2} \nmid n; \end{cases} \quad (3.64)$$

отсюда с учетом равенства $C_n(\alpha, \beta) = C_n(1; \alpha, \beta)$ при $x = 1$ получаем выражения для $C_n(\alpha, \alpha)$ и $C_n(\alpha, \alpha/2)$.

7. Четные и нечетные подстановки. Декрементом цикла длины l подстановки s назовем число $l - 1$. Декремент подстановки полагаем равным сумме декрементов циклов, на которые она разлагается. Таким образом, декремент подстановки s степени n , имеющей k циклов, равен $n - k$. Подстановка s называется четной, если ее декремент — четное число, и нечетной — в противном случае. Так как определение декремента зависит от степени подстановки, то ясно, что четные и нечетные подстановки не являются Λ -подстановками.

Найдем выражение для $C_n^e(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $C_n^o(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — цикловых индикаторов соответственно четных и нечетных подстановок. Заметим, что подстановка s из циклового класса $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ четна тогда и только тогда, когда имеет место равенство $(-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots} = 1$, т. е. когда циклы четной длины в совокупности встречаются четное число раз. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} C_n^e(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} \sum_{1\alpha_1+\dots+n\alpha_n=n} (1 + (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots}) \times \\ &\quad \times C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \\ C_n^o(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} \sum_{1\alpha_1+\dots+n\alpha_n=n} (1 - (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \dots}) \times \\ &\quad \times C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Из этих равенств получаем следующие формулы:

$$2C_n^e(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ + C_n(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots), \quad (3.65)$$

$$2C_n^o(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \\ - C_n(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots). \quad (3.66)$$

Обозначим через C_{nk}^e и C_{nk}^o число четных и соответственно нечетных подстановок степени n с k циклами. Полагая в (3.65) и (3.66) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, получаем

$$2 \sum_{k=0}^n C_{nk}^e x^k = x(x+1) \dots (x+n-1) + x(x-1) \dots (x-n+1),$$

$$2 \sum_{k=0}^n C_{nk}^o x^k = x(x+1) \dots (x+n-1) - x(x-1) \dots (x-n+1).$$

Из этих равенств, согласно (3.15) и (3.16), получаем формулы

$$C_{nk}^e = \frac{1}{2}(|s(n, k)| + s(n, k)), \quad C_{nk}^o = \frac{1}{2}(|s(n, k)| - s(n, k)),$$

где $s(n, k)$ — числа Стирлинга первого рода.

§ 4. Графы преобразований

1. Строение графа преобразования. Рассмотрим симметрическую группу \mathfrak{S}_n преобразований n -множества X . Для каждого $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ на множестве X определим отношение эквивалентности, полагая $x \sim x'$, если существуют такие целые неотрицательные числа i и j , что $\sigma^i(x) = \sigma^j(x')$, $x, x' \in X$. Соответствующие классы эквивалентности будем называть компонентами преобразования σ .

Рассмотрим ориентированный граф $\Gamma(X, \sigma)$, вершины которого помечены элементами множества X . Две вершины x и x' соединены дугой (x, x') , если $x' = \sigma(x)$. Этот ориентированный граф называется графиком преобразования σ . В силу однозначности преобразования σ из каждой вершины x графа $\Gamma(X, \sigma)$ выходит ровно одна дуга. Это свойство позволяет полностью описать строение графа $\Gamma(X, \sigma)$. Пусть X_i — компонента преобразования σ и σ_i — сужение преобразования σ на компоненту X_i , $X_i \subseteq X$. Граф $\Gamma(X_i, \sigma_i)$ будем называть компонентой связности графа $\Gamma(X, \sigma)$. Так как граф $\Gamma(X, \sigma)$ разбивается на компоненты связности, то достаточно дать описание каждой из этих компонент.

Предварительно напомним некоторые определения. Последовательность дуг графа $\Gamma(X, \sigma)$, в которой конец предыдущей дуги является началом следующей, называется путем. Путь называется элементарным, если все его вершины различны. Элементарный путь, у которого начальная вершина совпадает с конеч-

ной, называется *элементарным контуром*. Элементарный контур, содержащий одну вершину, называется *петлей*. Элемент $x \in X$ называется *циклическим* относительно преобразования $\sigma \in \Theta_n$, если существует такое целое число $p > 0$, что $\sigma^p(x) = x$. Соответствующую вершину x графа $\Gamma(X, \sigma)$ будем также называть *циклической*. Наименьшее целое число $h \geq 0$ называется *высотой* элемента $x \in X$ относительно преобразования $\sigma \in \Theta_n$, если существует такое натуральное число p , что $\sigma^{h+p}(x) = \sigma^h(x)$. Элемент высоты $h = 0$ является циклическим. Переходим теперь к описанию компонент связности $\Gamma(X_1, \sigma_1)$ графа $\Gamma(X, \sigma)$.

Лемма 1. *Все циклические вершины компоненты связности $\Gamma(X_1, \sigma_1)$ графа $\Gamma(X, \sigma)$ связаны единственным элементарным контуром.*

Действительно, пусть x — циклический элемент и $p > 0$ есть наименьшее число, такое, что $x = \sigma^p(x)$. Тогда все элементы последовательности $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)$ различны и в силу условия $x = \sigma^p(x)$ в графе $\Gamma(X_1, \sigma_1)$ связаны элементарным контуром. Допустим, что в X , существует циклический элемент x' , не принадлежащий указанной последовательности и такой, что $x' = \sigma^q(x')$. Так как x и x' принадлежат одной компоненте, то существуют такие i и j , что $\sigma^i(x) = \sigma^j(x')$. Следовательно, $\sigma^{(i-j)+i}(x) = \sigma^{iq}(x') = x'$. Отсюда следует, что x' принадлежит рассматриваемой последовательности, что противоречит выбору x' .

Из леммы вытекает, что сужение σ преобразования σ на циклические элементы представляет собой подстановку, степень которой совпадает с числом циклических элементов σ , а число циклов — с числом компонент σ . Эта подстановка σ называется *остовом* σ .

Пусть $x \in X_1$ — циклическая вершина $\Gamma(X, \sigma)$ и $\Gamma_x(X_1, \sigma_1)$ — подграф компоненты связности $\Gamma(X_1, \sigma_1)$, имеющий своими вершинами, помимо x , нециклические элементы x' , принадлежащие X , и такие, что $\sigma^i(x') = x$ при некотором $j = 1, 2, \dots$. Из однозначности преобразования σ следует, что каждая вершина этого подграфа x' , имеющая высоту h , связана с вершиной x единственным элементарным путем $x', \sigma(x'), \dots, \sigma^h(x'), \sigma^h(x') = x$. Ориентация всех этих путей направлена от нециклических вершин большей высоты к нециклическим вершинам меньшей высоты. Без учета ориентации подграф $\Gamma_x(X_1, \sigma_1)$ является корневым деревом с корнем в точке x . Отсюда вытекает лемма.

Лемма 2. *Подграф $\Gamma_x(X_1, \sigma_1)$ является корневым деревом, все ребра которого обладают ориентацией, направленной к корневой вершине x .*

Из лемм 1 и 2 вытекает теорема.

Теорема 1. *Граф $\Gamma(X, \sigma)$ состоит из одной или нескольких компонент связности. Каждая компонента связности состоит из единственного элементарного контура и корневых деревьев, корнями которых являются циклические вершины этого контура.*

2. A -преобразования. Пусть $A = (a_1, a_2, \dots)$ есть некоторая подпоследовательность из N . Обозначим через $\Theta_n(A)$ множество всех преобразований $\sigma \in \Theta_n$ множества X , для которых размеры контуров графа $\Gamma(X, \sigma)$ являются элементами последовательности A . Элементы $\Theta_n(A)$ будем называть A -преобразованиями. Ясно, что взаимно однозначное A -преобразование является A -подстановкой. Если $A = (1)$, то $\Theta_n(A)$ состоит из совокупности преобразований $\sigma \in \Theta_n$, таких, что граф $\Gamma(X, \sigma)$ является корневым лесом, причем у каждого корня имеется дополнительно петля.

Обозначим через $U(k, j; n_1, n_2, \dots, n_k; A)$ число A -преобразований $\sigma \in \Theta_n(A)$, имеющих j компонент и k циклических элементов, являющихся одновременно корнями k деревьев графа $\Gamma(X, \sigma)$, которые при фиксированном порядке обхода имеют соответственно n_1, n_2, \dots, n_k вершин.

Лемма 3. Если C_{kj}^A — число A -подстановок степени k с j циклами, то

$$U(k, j; n_1, n_2, \dots, n_k; A) = \frac{n!}{k!} \frac{n_1^{n_1-1} n_2^{n_2-1} \dots n_k^{n_k-1}}{n_1! n_2! \dots n_k!} C_{kj}^A, \quad (4.1)$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Действительно число способов образования остова $\sigma \in \Theta_n(A)$ равно $\binom{n}{k} C_{kj}^A$, число корневых деревьев с фиксированным номером корня и m вершинами равно m^{m-2} , количество способов распределения $n - k$ некорневых вершин для образования деревьев $\frac{(n-k)!}{(n_1-1)!(n_2-1)!\dots(n_k-1)!}$. Перемножая полученные величины и проводя необходимые упрощения, убеждаемся в справедливости леммы 3.

Обозначим через $U_n(k, j; A)$ число преобразований с k циклическими элементами и j компонентами. Через $U_n(k, j; A)$ очевидным образом выражаются числа преобразований $U_n(k; A)$ и $U_{n,j}(A)$ соответственно с k циклическими элементами и j компонентами, а также $U_n(A)$ — общее число A -преобразований $\sigma \in \Theta_n(A)$:

$$U_n(k; A) = \sum_{j=1}^k U_n(k, j; A), \quad (4.2)$$

$$U_{n,j}(A) = \sum_{k=j}^n U_n(k, j; A), \quad (4.3)$$

$$U_n(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k U_n(k, j; A). \quad (4.4)$$

Для удобства в дальнейшем будем полагать, что

$$U_n(0, 0; A) = U_{n,0}(A) = U_{0,n}(A) = U_0(A) = 1. \quad (4.5)$$

Кроме того, будем считать, что $U_n(k, j; A) = 0$, если нарушено

хотя бы одно из неравенств $j \leq k \leq n$. Найдем явное выражение для $U_n(k, j; A)$.

Лемма 4. Если C_k^A — число A -подстановок степени k с j циклами, то

$$U_n(k, j; A) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} C_k^A, \quad k = 0, 1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

Действительно, согласно лемме 3

$$U_n(k, j; A) = \frac{n!}{k!} C_k^A \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = n \\ n_i \geq 1}} \frac{\frac{n_1^{n_1-1} n_2^{n_2-1} \dots n_k^{n_k-1}}{n_1! n_2! \dots n_k!}}{n_1 + \dots + n_k = n}$$

Применяя тождество (2.10), получаем

$$U_n(k, j; A) = \frac{n!}{k!} \frac{k n^{n-k-1}}{(n-k)!} C_k^A.$$

Отсюда после очевидных преобразований получаем формулу (4.6).

В качестве следствия из леммы 4 и формулы (4.2) находим

$$U_n(k; A) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} C_k^A, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.7)$$

где C_k^A — число A -подстановок степени k . Аналогично из леммы 4 и формул (4.3) и (4.4) получаем

$$U_{nj}(A) = \sum_{k=j}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} C_k^A, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (4.8)$$

$$U_n(A) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} C_k^A, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

Рассмотрим теперь совокупность преобразований $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ без ограничений на контуры соответствующих графов. Обозначим через $U_n(k, j)$ число преобразований $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ с k циклическими элементами и j компонентами. Полагая $A = N$, из (4.6) получаем

$$U_n(k, j) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} |s(k, j)|, \quad (4.10)$$

где $s(k, j)$ — числа Стирлинга первого рода.

Аналогичным образом из формул (4.7) и (4.8) находим выражения для $U_n(k)$ и U_{nj} — чисел отображений с k циклическими элементами и j компонентами соответственно:

$$U_n(k) = k(n)_k n^{n-k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.11)$$

$$U_{nj} = \sum_{k=j}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} |s(k, j)|, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.12)$$

При $j = k$ из формулы (4.10), в силу равенства $s(k, k) = 1$, получаем выражение для числа лесов с n вершинами, состоящих из k

корневых деревьев:

$$r_n^{(k)} = U_n(k, k) = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}. \quad (4.13)$$

Эта формула совпадает с (2.13). При $k=1$ из (4.13) следует выражение для числа корневых деревьев с n вершинами:

$$r_n = U_n(1, 1) = n^{n-1}. \quad (4.14)$$

Из формулы (4.9) при $A=N$ получаем тождество

$$n^n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} k!. \quad (4.15)$$

Так как $|s(k, 1)|$ — число полноциклических подстановок степени k , то $|s(k, 1)| = (k-1)!$. Поэтому из (4.12) получаем следующее выражение для числа преобразований $\sigma \in S_n$ с одной компонентой:

$$U_{n1} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}. \quad (4.16)$$

3. Производящие функции A -преобразований. Рассмотрим производящую функцию от бесконечного числа переменных:

$$Q(t, x, z, y_1, y_2, \dots; A) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} U(k, j; n_1, \dots, n_k; A) x^k z^j \frac{(y_1 t)^{n_1} \dots (y_k t)^{n_k}}{(n_1 + \dots + n_k)!}, \quad (4.17)$$

где $U(0, 0, 0, \dots, 0; A) = 1$ и $U(k, j; n_1, \dots, n_k; A) = 0$, если часть переменных равна нулю, а часть отлична от нуля.

Найдем выражение производящей функции (4.17) через производящую функцию числа корневых деревьев

$$r(x) := \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{x^n}{n!}. \quad (4.18)$$

Умножим обе части (4.1) на $x^k z^j (y_1 t)^{n_1} \dots (y_k t)^{n_k} / (n_1 + \dots + n_k)!$ и просуммируем по всем значениям индексов. В результате получим

$$Q(t, x, z, y_1, y_2, \dots; A) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{kj} \frac{x^k}{k!} z^j r(y_1 t) \dots r(y_k t). \quad (4.19)$$

Полагая $y_1 = y_2 = \dots = 1$ и меняя порядок суммирования, из (4.17) получаем

$$Q(t, x, z, 1, 1, \dots; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k U_n(k, j; A) \frac{t^n}{n!} x^k z^j. \quad (4.20)$$

С другой стороны, полагая $y_1 = y_2 = \dots = 1$, из (4.19) находим

$$Q(t, x, z; 1, 1, \dots; A) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k C_{kj}^A \frac{(xr(t))^k}{k!} z^j. \quad (4.21)$$

Рассмотрим теперь производящую функцию

$$Q(t, x, z; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k U_n(k, j; A) \frac{t^n}{n!} x^k z^j. \quad (4.22)$$

Используя обозначение

$$a(t) = \sum_{j \in A} \frac{t^j}{j}$$

в формулу (3.36), из (4.20) и (4.21) получаем следующую теорему.

Теорема 2. Производящая функция $Q(t, x, z; A)$ следующим образом выражается через производящую функцию $r(t)$ для числа корневых деревьев:

$$Q(t, x, z; A) = \exp\{za[xr(t)]\}. \quad (4.23)$$

Из теоремы 2, полагая соответствие $z = 1$ и $x = 1$, получаем выражения для производящих функций A -преобразований по числу циклических точек:

$$\exp\{a[xr(t)]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n U_n(k; A) \frac{t^n}{n!} z^k, \quad (4.24)$$

и по числу компонент:

$$\exp\{za[r(t)]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n U_{nj}(A) \frac{t^n}{n!} z^j. \quad (4.25)$$

Полагая $z = x = 1$, из формулы (4.23) получаем производящую функцию для общего числа A -преобразований:

$$\exp\{a[r(t)]\} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(A) \frac{t^n}{n!}. \quad (4.26)$$

Рассмотрим теперь производящую функцию

$$q_n(x, z; A) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k U_n(k, j; A) x^k z^j. \quad (4.27)$$

Из (4.22) следует, что

$$Q(t, x, z; A) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x, z; A) \frac{t^n}{n!}. \quad (4.28)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (4.6) на $x^k z^j$ и суммируя по j и по k , получаем согласно (4.27)

$$q_n(x, z; A) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} C_k(z; A) x^k, \quad (4.29)$$

где

$$C_k(z; A) = \sum_{j=0}^k C_{kj}^A z^j. \quad (4.30)$$

Из (4.29) с учетом формулы (2.13) имеем

$$q_n(x, z; A) = \sum_{k=1}^n r_n^{(k)} C_k(z; A) x^k, \quad (4.31)$$

где $r_n^{(k)}$ — число лесов с n вершинами, состоящих из k корневых деревьев. Умножая обе части равенства (4.31) на $t^n/n!$ и суммируя по всем значениям $n = 0, 1, \dots$, с учетом (4.28) имеем

$$Q(t, x, z; A) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z; A) x^k \sum_{n=k}^{\infty} r_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}, \quad (4.32)$$

где полагаем $r_0^{(0)} = 1$. Принимая во внимание формулу (2.25) получаем

$$Q(t, x, z; A) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z; A) r^k(t) \frac{x^k}{k!}, \quad (4.33)$$

откуда с учетом формулы (3.36) находим выражение для $Q(t, x, z; A)$ вида (4.23).

Вычисляя коэффициент при $x^k z^j$ в обеих частях равенства (4.31), получаем формулу

$$U_n(k, j; A) = C_{kj}^A r_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad j = 0, 1, \dots; \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.34)$$

Впрочем, эта формула непосредственно вытекает из формул (2.13) и (4.6). Содержание равенства (4.34) может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Число A -преобразований n -множества с k циклическими элементами и j компонентами равно произведению числа A -подстановок степени k с j циклами на число лесов с n вершинами и k корневыми деревьями.

Доказательство теоремы сразу следует из того, что граф A -преобразования n -множества получается из корневого леса с n вершинами путем взаимно однозначного отображения его корней. Ясно, что это соображение может быть использовано при выводе равенства (4.34).

4. Производящие функции AB -преобразований. Пусть задана некоторая совокупность свойств B , которыми может обладать некоторое дерево. В качестве примера совокупности B можно рассматривать свойства, связанные с ограничениями на степени вершин дерева, на длину путей в дереве и т. п. Обозначим через $r_n(B)$ число корневых деревьев с n вершинами, обладающих совокупностью свойств B , а через $r_n^{(k)}(B)$ — число лесов с n вершинами, состоящих из k корневых деревьев рассматриваемого вида. A -преобразование n -множества называется AB -преобразованием, если корневые деревья, являющиеся подграфами графа A -преобразования, удовлетворяют совокупности свойств B .

Имеет место следующее обобщение теоремы 3.

Теорема 4. Число AB -преобразований с k циклическими элементами и j компонентами $U_n(k, j; AB)$ равно произведению числа A -подстановок степени k с j циклами C_{kj}^A на $r_n^{(k)}(B)$ — число лесов с n вершинами, состоящих из k корневых деревьев, обладающих совокупностью свойств B , т. е.

$$U_n(k, j; AB) = C_{kj}^A r_n^{(k)}(B). \quad (4.35)$$

Доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы 3.

Рассмотрим производящую функцию числа деревьев, обладающих совокупностью свойств B :

$$r(x; B) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(B) \frac{x^n}{n!}. \quad (4.36)$$

Аналогично формуле (2.12) имеем следующее выражение для числа лесов рассматриваемого вида:

$$r_n^{(k)}(B) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ j_i \geq 1}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} r_{j_1}(B) \dots r_{j_k}(B). \quad (4.37)$$

Из (4.36) и (4.37) получаем следующее обобщение формулы (2.25):

$$\frac{1}{k!} r^k(x; B) = \sum_{n=k}^{\infty} r_n^{(k)}(B) \frac{x^n}{n!}. \quad (4.38)$$

Умножим обе части равенства (4.35) на $x^k z^j t^n/n!$ и просуммируем по всем допустимым значениям индексов k, j, n . Получаем следующее обобщение формулы (4.23):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k U_n(k, j; AB) x^k z^j t^n/n! = \exp \{ za[xr(t; B)] \}. \quad (4.39)$$

5. Частные случаи. 1. Рассмотрим всевозможные преобразования n -множества без каких-либо ограничений на контуры и деревья соответствующего графа. Этому случаю соответствуют A -преобразования при $A = N$. Введем следующие обозначения:

$$U_n(k, j) = U_n(k, j; N), \quad U_n(k) = U_n(k; N),$$

$$U_{nj} = U_{nj}(N), \quad U_n = U_n(N), \quad C_{kj} = C_{kj}^N.$$

Из формул (4.22) и (4.23) в данном случае следует, что

$$[1 - xr(t)]^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k U_n(k, j) \frac{t^n}{n!} x^k z^j. \quad (4.40)$$

Левую часть равенства (4.40) при $|x| < 1/|t|$, $|t| < 1/e$ разложим по формуле бинома. Имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{z+k-1}{k} x^k r^k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n z(z+1)\dots(z+k-1) r_n^{(k)} x^k. \quad (4.41)$$

Из равенств (4.40) и (4.41), вычисляя коэффициенты при $x^k t^n/n!$ и применения затем формулу (2.13), получаем

$$\sum_{j=0}^k U_n(k, j) z^j = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k} z(z+1)\dots(z+k-1). \quad (4.42)$$

Вычисляя коэффициент при z^j в обеих частях этого равенства, получаем формулу для числа преобразований n -множества с k циклическими элементами и j компонентами:

$$U_n(k, j) = (n)_k n^{n-k-1} \frac{|s(k, j)|}{(k-1)!}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.43)$$

где $s(k, j)$ — числа Стирлинга первого рода. Ясно, что формула (4.43) совпадает с полученной ранее формулой (4.10).

2. Рассмотрим теперь случай, когда контуры графов A -преобразований могут быть только петлями. Это соответствует выбору $A = \{1\}$. Ясно, что в этом случае графы преобразований представляют собой леса, состоящие из корневых деревьев с петлями в корне. Так как $a(t) = t$, то из формулы (4.24) в данном случае получаем

$$\exp\{xr(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n r_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} x^k. \quad (4.44)$$

Вычисляя в обеих частях этого равенства коэффициент при x^k , получаем выведенную ранее формулу (2.25).

Аналогичным образом из формулы (4.26) в рассматриваемом случае получаем выражение для производящей функции для

L_n — числа лесов с n вершинами, состоящих из корневых деревьев:

$$e^{r(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{t^n}{n!}. \quad (4.45)$$

С учетом формулы (2.16) из равенства (4.45) получаем

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n L_{n-1} \frac{t^n}{n!}. \quad (4.46)$$

Вычисляя коэффициент при $t^n/n!$ в обеих частях равенства (4.46), приходим к формуле (2.13).

3. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — кратности вершин дерева и свойство B состоит в том, что $x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через \tilde{R}_n число свободных деревьев с n вершинами, обладающих этим свойством, а через R_n — соответствующее число корневых деревьев. Из алгоритма Прюфера следует, что каждому такому свободному дереву ставится в соответствие заполнение n различных ячеек $n-2$ различными предметами, причем каждая ячейка содержит не более одного предмета. Отсюда следует, что

$$\tilde{R}_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ n!/2, & n \geq 2, \end{cases} \quad (4.47)$$

$$R_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ nn!/2, & n \geq 2. \end{cases} \quad (4.48)$$

Производящие функции для этих величин при $|t| < 1$ имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{R}_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{t}{1-t} \right), \quad (4.49)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{2} \left(1 + \frac{1}{(1-t)^2} \right). \quad (4.50)$$

Согласно формуле (4.38) производящие функции для $\tilde{R}_n^{(k)}$ — числа свободных лесов — и $R_n^{(k)}$ — числа корневых лесов — имеют соответственно вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} \tilde{R}_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} = \frac{t^k}{2^k k!} \left(1 + \frac{t}{1-t} \right)^k, \quad (4.51)$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} R_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} = \frac{t^k}{2^k k!} \left(1 + \frac{1}{(1-t)^2} \right)^k. \quad (4.52)$$

Вычищая коэффициенты при $t^n/n!$, получаем следующие формулы:

$$\tilde{R}_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ \frac{n!}{2^k k!} \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} \binom{n-k+v-1}{v-1}, & n > k, \end{cases} \quad (4.53)$$

$$R_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ \frac{n!}{2^k k!} \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} \binom{n-k+2v-1}{2v-1}, & n > k. \end{cases} \quad (4.54)$$

Положим $A = N$ и обозначим через $V_n(k, j)$ число AB -преобразований n -множества с k циклическими элементами и j компонентами, причем B — указанное выше свойство деревьев. Из формулы (4.35) следует, что

$$V_n(k, j) = \begin{cases} |s(k, j)|, & n = k, \\ \frac{n! |s(k, j)|}{2^k k!} \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} \binom{n-k+2v-1}{2v-1}, & n > k. \end{cases} \quad (4.55)$$

Из формулы (4.55) суммированием по j , получаем формулу для $V_n(k)$ — числа AB -преобразований n -множества рассматриваемого вида с k циклическими элементами:

$$V_n(k) = \begin{cases} k!, & n = k, \\ \frac{n!}{2^k} \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} \binom{n-k+2v-1}{2v-1}, & n > k. \end{cases} \quad (4.56)$$

Отсюда суммированием по k получаем общее число AB -преобразований рассматриваемого вида:

$$V_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{2^k} \sum_{v=1}^k \binom{k}{v} \binom{n-k+2v-1}{2v-1}. \quad (4.57)$$

Наконец, формула (4.39) в данном случае имеет следующий вид:

$$\left[1 - \frac{xt}{2} \left(1 + \frac{1}{(1-t)^2} \right) \right]^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k V_n(k, j) \frac{t^n}{n!} x^k z^j. \quad (4.58)$$

4. Рассмотрим теперь деревья с n вершинами, у которых кратности вершин x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что имеется единственное значение i , такое, что $x_i = 2$, а для всех $j \neq i$ имеем $x_j \leq 1$. Такое свойство деревьев обозначим через B_1 . Снова используя алгоритм Прюфера, убеждаемся, что числа свободных и корневых деревьев

с n вершинами, обладающими свойством B_1 , соответственно равны

$$\tilde{R}_n(B_1) = \frac{n!}{4^2} (n-2)_2, \quad (4.59)$$

$$R_n(B_1) = \frac{n!}{4^2} n(n-2)_2. \quad (4.60)$$

Используя формулы (4.59) и (4.60) при $|t| < 1$, находим выражения для соответствующих производящих функций:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \tilde{R}_n(B_1) \frac{t^n}{n!} = \frac{t^4}{6(1-t)^3}, \quad (4.61)$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} R_n(B_1) \frac{t^n}{n!} = \frac{t^4(4-t)}{6(1-t)^4}. \quad (4.62)$$

С помощью формулы (4.38) из равенств (4.61) и (4.62) получаем формулы для чисел лесов с n вершинами, состоящих из k соответственно свободных и корневых деревьев:

$$R_n^{(k)}(B_1) = \frac{n!}{6^k k!} \binom{n-k-1}{3k-1}, \quad (4.63)$$

$$R_n^{(k)}(B_1) = \frac{n!}{6^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-j-1}{4k-1} 4^{k-j}. \quad (4.64)$$

С помощью формулы (4.35) из равенства (4.64) получаем выражение для числа отображений n -множества, для которых деревья соответствующих графов обладают свойством B_1 :

$$W_n(B_1) = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{6^k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n-j-1}{4k-1} 4^{k-j}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

§ 5. Блоки

В графе $\Gamma(X, W)$ вершина $x \in X$ называется *точкой сочленения*, если удаление этой вершины вместе с инцидентными ей ребрами увеличивает число компонент связности графа $\Gamma(X, W)$. Связный граф, не имеющий точек сочленения, называется *блоком*. Если n — число вершин графа, то при $n=1$ понятие блока не определено. При $n=2$ граф, имеющий единственное ребро, является блоком, причем обе вершины не являются точками сочленения. При $n \geq 2$ любое дерево с n вершинами не является блоком и все вершины, за исключением концевых, являются точками сочленения. С другой стороны, при $n \geq 2$ любой полный граф с n вершинами является блоком и ни одна из вершин не является точкой сочленения. Блоком связного графа $\Gamma(X, W)$

называется его максимальный связный петривиальный подграф, не имеющий точек сочленения. Если этот подграф совпадает со всем графом, то сам граф $\Gamma(X, W)$ является блоком. Примером блока графа является цикл, содержащий $n \geq 2$ вершины.

Ниже будем рассматривать класс графов с n вершинами, у которых совокупность ребер представляет собой произвольное k -сочетание из все возможных $\binom{n}{2}$ ребер, $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$.

Обозначим через C_n число связных графов в рассматриваемом классе, а через B_n — соответствующее число блоков с n вершинами. Рассмотрим производящие функции

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \quad (5.1)$$

$$B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \quad (5.2)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Производящие функции (5.1), (5.2) связаны соотношением

$$C'(x) = \exp\{B'[x C'(x)]\}, \quad (5.3)$$

где штрих означает производную по x .

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, введем некоторые обозначения. Граф называется *корневым*, если у него одна вершина, называемая *корнем*, выделена среди других вершин. Обозначим через $C_n^{(k)}$ число корневых связных графов с n вершинами, у которых корень принадлежит k блокам, а через $\tilde{C}_n^{(k)}$ — число таких же графов, но у которых корень не является помеченным, или, что то же самое, имеет фиксированную метку. Известно, что

$$C_n^{(k)} = n \tilde{C}_n^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.4)$$

где полагаем $C_1^{(0)} = 1$, $C_n^{(0)} = 0$, $n > 1$.

Обозначим через \hat{C}_n число корневых связных графов с n вершинами, а через \tilde{C}_n — число таких графов, но с непомеченным корнем. Очевидно, что

$$\hat{C}_n = n C_n, \quad \tilde{C}_n = n \tilde{C}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{C}_n = C_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Кроме того,

$$\hat{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{(k)}, \quad \tilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{C}_n^{(k)}. \quad (5.7)$$

Рассмотрим производящие функции

$$\tilde{C}_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_{n+1}^{(k)} \frac{x^n}{n!}, \quad (5.8)$$

$$C_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} C_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Из равенства (5.4) следует, что эти производящие функции связаны соотношением

$$\tilde{C}_k(x) = \frac{1}{x} C_k(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Суммируя обе части равенства (5.8) и обе части равенства (5.9) по k от 0 до ∞ и применив равенства (5.7), убеждаемся, что

$$\tilde{C}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x), \quad (5.11)$$

$$\tilde{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{C}_k(x). \quad (5.12)$$

Отсюда, с учетом равенства (5.10), следует, что

$$\tilde{C}(x) = \frac{1}{x} \tilde{C}(x) = C'(x). \quad (5.13)$$

Лемма 1. Число связных корневых графов с $n+1$ вершинами, у которых корень принадлежит k блокам и не является помеченным, вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{C}_{n+1}^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ j_i \geq 0}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} \tilde{C}_{j_1+1}^{(1)} \dots \tilde{C}_{j_k+1}^{(1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.14)$$

Рассмотрим k корневых графов с $j_1+1, \dots, j_k+1, j_1+\dots+\dots+j_k=n$, вершинами соответственно, причем в каждом из этих графов корень не помечен и принадлежит единственному блоку. Склепенная корни этих графов в один корень, получаем граф с $n+1$ вершинами, у которого корень не помечен и принадлежит k блокам. Обратная операция переводит граф с $n+1$ вершинами и неномеченым корнем, принадлежащим k блокам, в k графов, у каждого из которых непомеченный корень принадлежит единственному блоку.

В формуле (5.14) коэффициент $n!(k!j_1!\dots j_k!)^{-1}$ дает число вариантов распределения меток по графикам с j_1+1, \dots, j_k+1 вершинами соответственно, у которых непомеченные корни принадлежат каждый единственному блоку. Число способов построения таких графов равно $\tilde{C}_{j_1+1}^{(1)} \dots \tilde{C}_{j_k+1}^{(1)}$. Этим лемма доказана.

Равенство (5.14) эквивалентно следующему соотношению для производящих функций:

$$\tilde{C}_k(x) = \frac{1}{k!} (\tilde{C}_1(x))^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.15)$$

Суммируя по всем k обе части равенства (5.15) и принимая во внимание формулу (5.12), находим

$$\tilde{C}(x) = e^{\tilde{C}_1(x)}. \quad (5.16)$$

Лемма 2. Пусть $C_{nq}^{(1)}$ — число помеченных связанных корневых графов с n вершинами, у которых корень принадлежит единственному блоку с q вершинами. Тогда

$$C_{nq}^{(1)} = nB_n. \quad (5.17)$$

$$C_{nq}^{(1)} = B_q \frac{\binom{n}{q}}{(q-1)!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{q-1} = n-q \\ j_i \geq 0}} \frac{(n-q)!}{j_1! \dots j_{q-1}!} \tilde{C}_{j_1+1} \dots \tilde{C}_{j_{q-1}+1}, \quad (5.18)$$

где B_n — число блоков с n вершинами.

Прежде всего, если корень принадлежит блоку с n вершинами, то сам корневой граф является блоком и, следовательно, равенство (5.17) справедливо. Сумма в равенстве (5.18) представляет собой число способов образования $q-1$ связанных корневых графов с $n-q$ вершинами, у которых корни не помечены. К $q-1$ непомеченным корням добавляем еще один непомеченный корень. Затем $\binom{n}{q}$ способами выбираем q -сочетание для пометок этих корней и qB_q способами строим из них корневой блок. Умножая $\binom{n}{q} qB_q$ на упомянутую сумму, получаем число корневых связанных графов, у которых корень принадлежит единственному блоку с q вершинами. Этим формула (5.18) доказана.

Рассмотрим производящую функцию

$$C_q^{(1)}(x) = \sum_{n=q}^{\infty} C_{nq}^{(1)} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.19)$$

Из (5.18) следует, что

$$C_q^{(1)}(x) = B_q \frac{x^q}{(q-1)!} (\tilde{C}(x))^{q-1}, \quad (5.20)$$

где производящая функция $\tilde{C}(x)$ определена равенством (5.12). Из (5.13) и (5.20) следует, что

$$C_q^{(1)}(x) = \frac{x B_q}{(q-1)!} (\tilde{C}(x))^{q-1}. \quad (5.21)$$

Очевидно следующее равенство:

$$C_n^{(1)} = \sum_{q=2}^n C_{nq}^{(1)}, \quad (5.22)$$

выражающее тот факт, что размер единственного блока, которому принадлежит корень, принимает значения $q = 2, 3, \dots, n$.

Из (5.9) и (5.22) следует, что

$$C_1(x) = \sum_{q=2}^{\infty} C_q^{(1)}(x). \quad (5.23)$$

Теперь из формул (5.21) и (5.23) вытекает, что

$$C_1(x) = x \sum_{q=2}^{\infty} \frac{B_q (\tilde{C}(x))^{q-1}}{(q-1)!}. \quad (5.24)$$

Далее, из равенств (5.10) и (5.13) с учетом формулы (5.24) получаем

$$\tilde{C}_1(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{B_{q+1} (xC'(x))^q}{q!}. \quad (5.25)$$

Таким образом, согласно равенствам (5.2) и (5.25)

$$C_1(x) = B'(xC'(x)). \quad (5.26)$$

Подставляя это выражение для $C_1(x)$ в формулу (5.16) с учетом равенства (5.13), приходим к соотношению (5.3). Этим теорема доказана.

Выведем теперь некоторые дополнительные соотношения, являющиеся следствиями соотношений для производящих функций. Дифференцируя обе части равенства (5.16), получаем

$$\tilde{C}'(x) = \tilde{C}'_1(x) \tilde{C}(x). \quad (5.27)$$

Вычисления коэффициенты при $x^n/n!$ в обеих частях равенства (5.27), с учетом равенств (5.8) и (5.12) имеем

$$\tilde{C}_{n+2} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \tilde{C}_{j+2}^{(1)} \tilde{C}_{n-j+1},$$

что эквивалентно равенству

$$\tilde{C}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} \tilde{C}_{j+1}^{(1)} \tilde{C}_{n-j+1}. \quad (5.28)$$

Используя (5.4) и (5.6), из соотношения (5.28) получаем

$$C_{n+1} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \binom{n-1}{j-1} C_{j+1}^{(1)} C_{n-j+1}. \quad (5.29)$$

Из равенства (5.29) можно получить соотношение, связывающее величины C_n и B_n , $n = 0, 1, \dots$. Просуммируем по q обе части равенства (5.18) с учетом формулы (5.17). При этом во внимание формулу (5.6), в результате получим

$$C_n^{(1)} = \sum_{q=2}^n \frac{B_q}{(q-1)!} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{q-1} = n-q \\ j_i \geq 1}} \frac{n!}{j_1! \dots j_{q-1}!} C_{j_1+1} \dots C_{j_{q-1}+1}. \quad (5.30)$$

Из формул (5.29) и (5.30) получаем соотношение

$$C_{n+1} = B_{n+1} + \sum_{q=2}^n \binom{n-1}{q-1} B_q \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_q = n-q+1 \\ j_i \geq 1}} \frac{(n-j_q)(n-q)!}{j_1! \dots j_q!} \times \\ \times C_{j_1+1} \dots C_{j_{q-1}+1}. \quad (5.31)$$

Данное соотношение хотя и громоздко, но может быть использовано для табулирования величин B_n при известных значениях C_k , $k = 0, 1, \dots, n$, а также при асимптотическом анализе B_n , когда $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Если B_n — число блоков с n помеченными вершинами, то имеет место следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\binom{n}{2}} B_n = 1. \quad (5.32)$$

Иными словами, для больших n почти все графы являются блоками.

Из соотношения (5.29) с учетом формул (5.17) и (5.22) находим

$$B_n = C_n - R_{n1} - R_{n2}, \quad (5.33)$$

где

$$R_{n1} = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{j+1} \binom{n-2}{j-1} C_{j+1}^{(1)} C_{n-j}, \quad (5.34)$$

$$R_{n2} = \frac{1}{n} \sum_{q=2}^{n-1} C_{nq}^{(1)}. \quad (5.35)$$

Из очевидных оценок $C_n^{(1)}/n \leq C_n \leq 2^{\binom{n}{2}}$ следует, что

$$R_{n1} \leq \sum_{j=1}^{n-2} \binom{n-2}{j-1} 2^{\binom{j+1}{2} + \binom{n-j}{2}}. \quad (5.36)$$

Очевидно, что величина

$$R'_{n2} = \sum_{q=2}^{n-1} C_{nq}^{(1)}$$

равна числу корневых связных графов с n помеченными вершинами, причем корень принадлежит единственному блоку величины q , $2 \leq q \leq n-1$. Поэтому

$$R'_{n2} \leq \sum_{q=2}^{n-1} \binom{n}{q} q 2^{\binom{q}{2}} (n-q) 2^{\binom{n-q}{2}},$$

так как корневой блок с q вершинами можно построить не более чем $\binom{n}{q} q 2^{\binom{q}{2}}$ способами, а оставшаяся часть графа, содержащая точку сочленения, достраивается $(n-q) 2^{\binom{n-q}{2}}$ способами. Таким образом,

$$R_{n2} \leq (n-1) \sum_{q=2}^{n-1} \binom{n-2}{q-1} 2^{\binom{q}{2} + \binom{n-q}{2}}. \quad (5.37)$$

Из оценок (5.36) и (5.37) получаем

$$R_{n1} + R_{n2} \leq n \sum_{j=1}^{n-2} \binom{n-2}{j-1} 2^{\binom{j+1}{2} + \binom{n-j}{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$R_{n1} + R_{n2} \leq n 2^{\binom{n}{2}} \sum_{j=1}^{n-2} \binom{n-2}{j-1} 2^{-j(n-j-1)}.$$

Используя очевидную оценку

$$\sum_{j=1}^{n-2} \binom{n-2}{j-1} 2^{-j(n-j-1)} \leq \frac{n+3}{2^{n-2}},$$

находим

$$R_{n1} + R_{n2} \leq \frac{n(n+3) 2^{\binom{n}{2}}}{2^{n-2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\binom{n}{2}} (R_{n1} + R_{n2}) = 0. \quad (5.38)$$

Теперь разделим обе части равенства (5.33) на $2^{\binom{n}{2}}$ и заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\binom{n}{2}} C_n = 1. \quad (5.39)$$

В силу равенства (5.38) приходим к тому, что равенство (5.32) справедливо.

ОБЩАЯ КОМБИНАТОРНАЯ СХЕМА И ТЕОРИЯ ПОЙА

§ 1. Группы и эквивалентность отображений

1. GH -эквивалентность. Рассмотрим множества $X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ и обозначим через Y^X совокупность всех отображений $\sigma: X \rightarrow Y$. Каждому такому отображению поставим во взаимно однозначное соответствие вектор $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m))$, где $\sigma(i)$ — образ $i \in X$ при отображении $\sigma: X \rightarrow Y$. Множество всех векторов σ , соответствующих отображениям из Y^X , обозначим через \tilde{Y}^X . Пусть G — группа подстановок степени m , действующая на множестве X , а H — группа подстановок степени n , действующая на множестве Y . Если $g \in G$ и $h \in H$, то можно определить операцию действия элементами g и h на отображение σ соответственно слева и справа, приводящую к получению нового отображения $\sigma' : X \rightarrow Y$. Будем считать, что $\sigma' = g \circ \sigma * h$, если для векторов σ и σ' , соответствующих этим отображениям, имеет место равенство

$$(\sigma'(1), \sigma'(2), \dots, \sigma'(m)) = (h(\sigma(g(1))), h(\sigma(g(2))), \dots, h(\sigma(g(m)))), \quad (1.1)$$

где $g(i)$, $h(y)$ — образы при действии подстановок g и h на элементы $i \in X$, $y \in Y$ соответственно.

Определим теперь отношение эквивалентности на множестве \tilde{Y}^X . Будем считать, что σ и σ' связаны *бинарным отношением*, и записывать $\sigma \sim \sigma'$, если существуют такие элементы $g \in G$ и $h \in H$, что $\sigma' = g \circ \sigma * h$. Это бинарное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно и, следовательно, является отношением эквивалентности. Будем называть его *GH -эквивалентностью*. Очевидно, что отношение *GH -эквивалентности*, заданное на множестве \tilde{Y}^X , является по существу отношением эквивалентности на множестве Y^X . Это дает возможность удобного описания классов *GH -эквивалентности* путем разбиения на такие классы векторов множества \tilde{Y}^X .

В качестве примера рассмотрим случай, когда $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ и, следовательно, $\tilde{Y}^X = \{(a, a, a), (b, a, a), (a, b, a), (a, a, b), (b, b, a), (b, a, b), (a, b, b), (b, b, b)\}$. Пусть G — знакопеременная группа степени 3, а H — симметрическая группа степени 2, т. е.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}.$$

В этом случае на множестве \bar{Y}^x имеются два класса GH -эквивалентности, представителями которых могут быть векторы (a, a, a) и (a, a, b) .

2. Лемма Бернсаида. Обозначим через G группу подстановок, действующую на множестве X . На множестве X определим бинарное отношение, полагая $x \sim y$ для $x, y \in X$, если существует такая подстановка $s \in G$, что $y = s(x)$. Нетрудно проверить, что это бинарное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности на множестве X и, следовательно, определяет разбиение этого множества. Блоки разбиения будем называть *орбитами группы G* или ее *областями транзитивности*. Введенное выше понятие орбиты подстановки s совпадает с понятием орбиты циклической группы, состоящей из всех степеней этой подстановки.

Стабилизатор элемента $x \in X$ относительно группы G обозначим через $G(x)$ и определим с помощью равенства $G(x) = \{s; s(x) = x, s \in G\}$. Иными словами, $G(x)$ — это совокупность подстановок группы G , которые отображают элемент x в себя, или, как иногда говорят, оставляют его на месте. Ясно, что $G(x)$ образует подгруппу группы G , так как $ss'(x) = s'(s(x)) = s'(x) = x$, если $s, s' \in G(x)$. Если $y = \alpha(x)$, $\alpha \in G$, то стабилизаторы $G(x)$ и $G(y)$ сопряжены в группе G , а именно: $G(y) = \alpha^{-1}G(x)\alpha$. Действительно,

$$G(y) = \{s; s(y) = y, s \in G\} = \{\alpha^{-1}s\alpha; s(x) = x, s \in G\} = \alpha^{-1}G(x)\alpha.$$

Лемма Бернсаида. Число орбит $N(G)$ группы подстановок G , действующей на множестве X , равно среднему числу циклов единичной длины в подстановках группы G :

$$N(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \alpha_1(s), \quad (1.2)$$

где $\alpha_1(s)$ — число циклов единичной длины в подстановке s .

Разложим группу G на правые смежные классы по подгруппе $G(x)$: $G = G(x) \cup G(x)s_1 \cup \dots \cup G(x)s_{l-1}$. Положим $x_i = s_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, l-1$, и покажем, что множество $\{x, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}\}$ образует орбиту $Y = Y(x)$ группы G , представителем которой является элемент $x \in X$. Ясно, что все элементы x_1, \dots, x_{l-1} принадлежат Y . Допустим, что существует элемент $\bar{x} \in Y$, $\bar{x} \neq x$, $\bar{x} \neq x_i$, $i = 1, \dots, l-1$. Из условия $\bar{x} \in Y$ следует, что существует такая подстановка $\bar{s} \in G$, что $\bar{x} = \bar{s}(x)$. Ясно, что \bar{s} принадлежит одному из смежных классов, например $G(x)s_i$. Тогда существует такое $s \in G(x)$, что $\bar{s} = ss_i$. Отсюда вытекает, что $\bar{x} = \bar{s}(x) = ss_i(x) = s_i(x) = x_i$. Получили противоречие. Таким образом, $l = |Y(x)|$, и, следовательно, $|Y(x)||G(x)| = |G|$.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{N(G)}$ — орбиты группы G на множестве X и $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, N(G)$.

Имеем

$$\sum_{x \in X} |G(x)| = \sum_{i=1}^{N(G)} \sum_{x \in X_i} |G(x)| = \sum_{i=1}^{N(G)} |G(x_i)| |X_i| = N(G) |G|.$$

С другой стороны,

$$\sum_{x \in X} |G(x)| = \sum_{x \in X} \sum_{s \in G(x)} 1 = \sum_{s \in G} \sum_{x: s(x)=s} 1 = \sum_{s \in G} \alpha_s(s).$$

Приравнивая выражения для одной и той же величины, убеждаемся в справедливости леммы.

3. Степенная группа. По заданным группам подстановок G и H , действующим соответственно на множествах X и Y , построим группу подстановок H^G , которая действует на множестве Y^X . Действие элемента $(g; h) \in H^G$ на элемент $\sigma \in Y^X$ определим следующим образом. Будем считать, что

$$(g; h)(\sigma) = \sigma' \quad (1.3)$$

тогда и только тогда, когда $g \cdot \sigma * h = \sigma'$ для $\sigma, \sigma' \in Y^X$.

На множестве H^G определим операцию умножения \otimes , полагая

$$(g; h) \otimes (g'; h') = (g \cdot g'; h \cdot h').$$

Эта операция ассоциативна в силу ассоциативности соответствующих операций в группах G и H . Обратным по отношению к элементу $(g; h)$ является элемент $(g^{-1}; h^{-1})$, а единичный элемент в H^G имеет вид $(e; e')$, где e и e' — единичные элементы в группах G и H соответственно. Таким образом, множество H^G образует группу подстановок, называемую обычно степенной группой. Степень группы H^G , очевидно, равна $|Y|^{|X|}$. Порядок группы H^G , т. е. число ее элементов, равен $|G| \cdot |H|$.

Используя лемму Бернсаайда, определим теперь число классов GH -эквивалентности. Для циклового класса подстановок s степени d используем обозначение $\{s\} = \{1^{j_1(s)} 2^{j_2(s)} \dots d^{j_d(s)}\}$, где $j_i(s)$ — число циклов длины i в подстановке s .

Теорема 1. Число классов GH -эквивалентности на множестве Y^X равно

$$N(G, H) = \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \prod_{k=1}^{|X|} \left(\sum_{r \mid k} r j_r(h) \right)^{j_k(g)}, \quad (1.4)$$

где внутреннее суммирование ведется по всем делителям k .

Из определения следует, что GH -эквивалентность совпадает с эквивалентностью, определяемой степенной группой H^G на множестве Y^X . Поэтому, применяя лемму Бернсаайда, имеем

$$N(G, H) = \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \sum_{\sigma: g \cdot \sigma * h = \sigma} 1, \quad (1.5)$$

где $\sigma \in Y^X$. Достаточно вычислить внутреннюю сумму, т. е. определить число отображений σ , удовлетворяющих условию $g \circ \sigma * h = \sigma$.

Пусть область транзитивности подстановки $g \in G$, содержащая элемент $x \in X$, состоит из элементов $x, g(x), \dots, g^{k-1}(x)$. Тогда отображением $\sigma \in Y^X$, удовлетворяющим условию $g \circ \sigma * h = \sigma$, эти элементы переводятся в элементы $\sigma(x), h^{-1}(\sigma(x)), \dots, h^{-k+1}(\sigma(x))$. Отсюда следует, что если r — величина области транзитивности, содержащей элемент $\sigma(x)$, для подстановки $h \in H$, то r является делителем числа k . При отображении σ , удовлетворяющем условию $g \circ \sigma * h = \sigma$, число способов выбора образа элемента x , который принадлежит области транзитивности размера k для подстановки $g \in G$, равно $\sum_{r|k} r j_r(h)$. Это следует из того, что отображение σ в данном случае однозначно определяется указанием в качестве образа x одного из r элементов области транзитивности цикла длины r подстановки $h \in H$. Поскольку выбор значений образов различных элементов $x \in X$ осуществляется независимо, то

$$\sum_{\sigma: g \circ \sigma * h = \sigma} 1 = \prod_{k=1}^{|X|} \left(\sum_{r|k} r j_r(h) \right)^{h(k)}, \quad (1.6)$$

где полагаем $\left(\sum_{r|k} r j_r(h) \right)^{j_k(h)} = 1$, если $j_k(g) = 0$.

Применим теорему для определения числа классов GH -эквивалентности в рассмотренном выше примере. Имеем

$$N(G, H) = \frac{1}{6} \sum_{g \in G} 2^{j_1(g) + j_2(g) + j_3(g)}.$$

Следовательно, $N(G, H) = \frac{1}{6} [2^3 + 2 \cdot 2] = 2$. Выше это было установлено непосредственной классификацией.

4. G -эквивалентность и H -эквивалентность. Если группа H — единичная, т. е. $H = \{e'\}$, то отношение GH -эквивалентности будем называть G -эквивалентностью. В этом случае σ и σ' принадлежат одному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда существует такая подстановка $g \in G$, что $g \circ \sigma = \sigma'$. Это равенство означает, что $(\sigma'(1), \dots, \sigma'(m)) = (\sigma(g(1)), \dots, \sigma(g(m)))$, т. е. векторы Y^X принадлежат одному классу G -эквивалентности, если они отличаются перестановкой координат, отвечающей подстановке $g \in G$. В качестве следствия из теоремы 1 при $H = \{e'\}$ вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Число классов G -эквивалентности равно

$$N_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} n^{h(g)}, \quad (1.7)$$

где $n = |Y|$ и $k(g)$ — число циклов в подстановке $g \in G$.

Рассмотрим производящую функцию

$$C_m(t; G) = \sum_{k=1}^m C_{mk}(G) t^k, \quad (1.8)$$

где $C_{mk}(G)$ — число подстановок группы G , имеющих k циклов. Из (1.7) и (1.8) вытекает формула

$$N_G = \frac{1}{|G|} C_m(n; G). \quad (1.9)$$

Если $G = \{e\}$, то из (1.7) вытекает очевидное равенство

$$N_{\{e\}} = n^m. \quad (1.10)$$

Для случая, когда $G = S_n$, где S_n — симметрическая группа степени m , имеем

$$C_n(t; G) = t(t+1)\dots(t+m-1). \quad (1.11)$$

Поэтому из (1.9) и (1.11) следует, что

$$N_{S_m} = \binom{n+m-1}{m}. \quad (1.12)$$

В циклической группе подстановок $C^{(m)}$ степени m имеется $\varphi(k)$ подстановок, содержащих m/k циклов длины k , где $\varphi(k)$ — функция Эйлера и k является делителем m . Поэтому производящая функция (1.8) имеет вид

$$C_m(t; C^{(m)}) = \sum_{k|m} \varphi(k) t^{m/k}. \quad (1.13)$$

Отсюда следует формула

$$N_{C^{(m)}} = \frac{1}{m} \sum_{k|m} \varphi(k) n^{m/k}. \quad (1.14)$$

Рассмотрим теперь случай, когда группа G — единичная, т. е. $G = \{e\}$. В этом случае отношение GH -эквивалентности будем называть H -эквивалентностью. Элементы $\sigma, \sigma' \in Y^X$ принадлежат одному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда существует такая подстановка $h \in H$, что $\sigma * h = \sigma'$. Это означает, что $(\sigma'(1), \dots, \sigma'(m)) = (h(\sigma(1)), \dots, h(\sigma(m)))$, т. е. два вектора из Y^X принадлежат одному классу H -эквивалентности, если они могут быть получены один из другого с помощью подстановки множества Y , определяющего значения координат.

При $G = \{e\}$ из теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 3. Число классов H -эквивалентности равно

$$N_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} j_1^m(h), \quad (1.15)$$

где $m = |X|$, $j_1(h)$ — число единичных циклов в подстановке $h \in H$.

В частности, если $H = \text{единичная группа}$, $H = \{e'\}$, то

$$N_{(e')} = n^m. \quad (1.16)$$

Если $H = S_n$, где S_n — симметрическая группа степени n , и h_n — число подстановок степени n , не имеющих единичных циклов, то из формулы (1.15) имеем

$$N_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h_{n-k} k^m, \quad (1.17)$$

В циклической группе подстановок $C^{(n)}$ имеется единственная единичная подстановка, содержащая единичные циклы. Поэтому из формулы (1.15) имеем

$$N_{C^{(n)}} = n^{m-1}. \quad (1.18)$$

5. Классы эквивалентности. Совокупность элементов $(g; h) \in H^n$ таких, что $(g; h)(\sigma) = \sigma$, называется стабилизатором элемента $\sigma \in Y^x$ и обозначается H_σ^G . Иными словами,

$$H_\sigma^G = \{(g; h) : (g; h)(\sigma) = \sigma, g \in G, h \in H\}. \quad (1.19)$$

Ясно, что стабилизатор H_σ^G является подгруппой степенной группы H^n . Разложим группу H^n на смежные классы по подгруппе H_σ^G :

$$H^n = H_\sigma^G \cup H_\sigma^G(g_1; h_1) \cup \dots \cup H_\sigma^G(g_{l-1}; h_{l-1}).$$

Нетрудно убедиться, что $\sigma, (g_1; h_1)(\sigma), \dots, (g_{l-1}; h_{l-1})(\sigma) \in Y^x$ нечернивают класс эквивалентности, или орбиту, содержащую элемент $\sigma \in Y^x$. Ясно, что все эти элементы принадлежат орбите. Допустим, что имеется элемент σ , содержащийся в орбите, такой, что $\sigma \neq (g_i; h_i)(\sigma)$, $i = 0, 1, \dots, l-1$, $g_0 = e$, $h_0 = e'$. Но это противоречит тому, что σ принадлежит некоторому, скажем j -му, классу смежности, т. е.

$$\bar{\sigma} = (\tilde{g}; \tilde{h})(g_j; h_j)(\sigma) = (g_j; h_j)(\tilde{g} \circ \sigma \circ \tilde{h}) = (g_j; h_j)(\sigma),$$

где $(\tilde{g}; \tilde{h}) \in H_\sigma^G$.

Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. Число элементов из Y^x , принадлежащих орбите группы H^n , содержащей элемент $\sigma \in Y^x$, равно индексу стабилизатора в группе H^n , т. е.

$$K_\sigma(H^n) = \frac{|G| |H|}{|H_\sigma^G|}. \quad (1.20)$$

Это число совпадает с размером класса GH -эквивалентности, содержащего элемент $\sigma \in Y^x$.

Из формулы (1.20) следует, что размеры классов G -эквивалентности и H -эквивалентности, содержащих $\sigma \in Y^x$, даются соответственно формулами

$$K_\sigma(G) = |G|/|G_\sigma|, \quad (1.21)$$

$$K_\sigma(H) = |H|/|H_\sigma|, \quad (1.22)$$

где

$$G_\sigma = \{g: g * \sigma = \sigma; g \in G\}, \quad (1.23)$$

$$H_\sigma = \{h: \sigma * h = \sigma; h \in H\}. \quad (1.24)$$

Теорема 5. Пусть $G = S_m$, где S_m — симметрическая группа степени m . В этом случае σ и σ' , $\sigma, \sigma' \in Y^x$, G -эквивалентны тогда и только тогда, когда их первичные спецификации совпадают: $[\sigma] = [\sigma']$.

Действительно, если $\sigma' \sim \sigma$, то существует такая подстановка $g \in S_m$, что

$$(\sigma'(1), \dots, \sigma'(m)) = (\sigma(g(1)), \dots, \sigma(g(m))), \quad (1.25)$$

т. е. $[\sigma'] = [\sigma]$.

Обратно, если $[\sigma'] = [\sigma]$, то найдется такая подстановка $g \in S_m$, что справедливо равенство (1.25). Отсюда следует, что $\sigma' \sim \sigma$. Если G — произвольная группа подстановок, то из условия $\sigma \sim \sigma'$ следует, что $[\sigma] = [\sigma']$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Из теоремы 5 следует, что если $[\sigma] = [y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, то

$$K_\sigma(S_m) = \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \quad (1.26)$$

Теорема 6. Пусть $G = S_m$, $H = S_n$, где S_k — симметрическая группа степени k . В этом случае σ и σ' , $\sigma, \sigma' \in Y^x$, GH -эквивалентны тогда и только тогда, когда их вторичные спецификации совпадают: $[[\sigma]] = [[\sigma']]$.

Прежде всего заметим, что для любого $h \in H$

$$[[\sigma]] = [[\sigma * h]], \quad (1.27)$$

Далее, из равенства $\sigma' = g * \sigma * h$, $g \in S_m$, $h \in S_n$, следует, что $[\sigma'] = [\sigma * h]$, т. е. $[[\sigma']] = [[\sigma * h]]$. Отсюда, в силу равенства (1.27), следует, что $[[\sigma']] = [[\sigma]]$.

Обратно, равенство $[[\sigma']] = [[\sigma]]$ означает, что существует подстановка $h \in S_n$ такая, что $[\sigma'] = [\sigma * h]$. Отсюда следует, что $\sigma' = g * \sigma * h$, где $g \in S_m$.

Из теоремы 6 вытекает, что если $[[\sigma]] = [[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \dots m^{\beta_m}]]$, $1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$, $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m = n$, то

$$N(S_m, S_n) = Q_m(n), \quad (1.28)$$

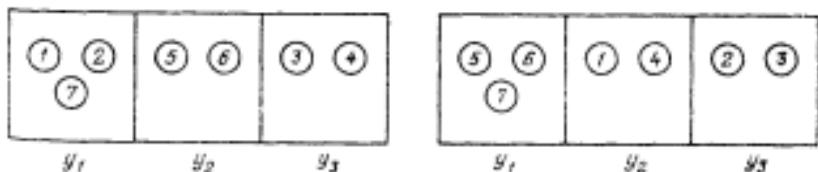
где $Q_n(m)$ — число разбиений m не более чем на n слагаемых, т. е. число векторов $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, такими, что

$$\beta_0 + 2\beta_1 + \dots + m\beta_m = m, \quad \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n = n. \quad (1.29)$$

§ 2. Общая комбинаторная схема

Решение комбинаторной задачи перечислительного характера обычно состоит из нескольких этапов. На первом этапе строится некоторая модель совокупности перечисляемых реальных объектов. Эта модель называется *комбинаторной схемой*. Примером комбинаторной схемы, часто встречающейся при решении перечислительных задач, является *урновая схема*. В этой схеме имеется m некоторых элементов, называемых предметами или частицами, и n ячеек, или урн. Задача состоит в том, чтобы определить количество различных размещений предметов по ячейкам при различных ограничениях на емкости ячеек и характер заполнения. Различимость размещений, естественно, зависит от того, считаем ли мы различимыми между собой предметы и соответственно ячейки. В зависимости от различимости исходных объектов — предметов и ячеек, можно рассматривать четыре вида урновых схем.

Для придания точного смысла понятию различимости используем интерпретацию размещения предметов в ячейки с помощью некоторого отображения одного множества в другое. Ясно, что каждому размещению m различных предметов в n различных ячейках соответствует отображение $\sigma: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$. Для построения модели, в которой ячейки различны, а предметы неразличимы (одинаковы), на множество отображений, соответствующих различимым размещениям предметов в ячейках, можно задать отношение эквивалентности. Два отображения будем считать *эквивалентными*, если отвечающие им размещения отличаются только по нумерацией предметов. Например, при $m = 7$, $n = 3$ двум размещениям

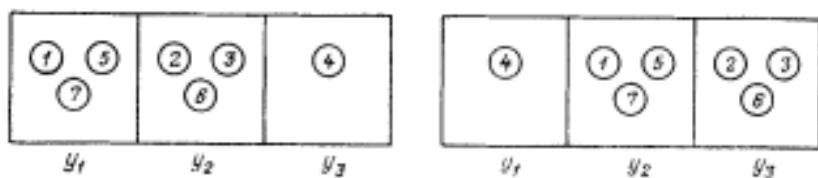


отвечают эквивалентные отображения. Перенумерация предметов может быть проведена в соответствии с подстановкой $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7) \rightarrow (5 \ 6 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 7)$.

Каждому различимому размещению m одинаковых предметов в n различных ячейках соответствует один и только один класс

эквивалентности, заданный на множестве отображений. Таким образом, любая перечислительная задача, касающаяся размещения одинаковых предметов в различных ячейках, сводится к некоторой задаче, связанной с определением числа классов эквивалентности на множестве соответствующих отображений.

Аналогичный подход может быть применен и к построению моделей, в которых ячейки перазличимы, а предметы различны или и ячейки и предметы перазличимы. Так, в случае, когда предметы различны, а ячейки перазличимы, при $m = 7$, $n = 3$ два заполнения



принадлежат одному классу эквивалентности, так как переперемещение ячеек первого заполнения в соответствии с подстановкой $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_1 \end{pmatrix}$ переводит его во второе заполнение. Именно так определяется отношение эквивалентности в этом случае.

Фактически отношение эквивалентности на множестве отображений $\sigma: X \rightarrow Y$, $|Y| = m$, $|X| = n$, относящееся к случаю перазличимых предметов и различных ячеек, является отношением G -эквивалентности, когда $G = S_m$, где S_m — симметрическая группа степени m . Аналогично, отношение эквивалентности для случая различных предметов и перазличимых ячеек представляет собой отношение H -эквивалентности на множестве отображений $\sigma: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, где $H = S_n$, S_n — симметрическая группа степени n . Случай размещения одинаковых предметов в одинаковых ячейках связан с отношением эквивалентности, представляющим собой GH -эквивалентность на множестве отображений $\sigma: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, где $G = S_m$, $H = S_n$.

Указанный подход к формализации понятия различимости для урловых схем может быть применен и к другим конкретным комбинаторным схемам. Целесообразность такой формализации связана не только с уточнением понятия различимости в этих схемах, но и с необходимостью решения вопроса об их идентификации с точки зрения определенного круга перечислительных задач.

Ниже нас будут интересовать классы комбинаторных схем, которые могут быть интерпретированы с помощью отображений $\sigma: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, причем различимость вариантов в этих схемах формулируется через GH -эквивалентность, где G и H — группы подстановок степеней m и n соответственно. Иными словами, каждому варианту комбинаторной схемы ставится во

иззаимно однозначное соответствие некоторый тип GH -эквивалентности. В этих условиях решение перечислительной задачи сводится к определению числа классов GH -эквивалентности, или, что то же самое, к определению числа элементов в факторном множестве по отношению GH -эквивалентности.

В каждом классе GH -эквивалентности выберем произвольного представителя. Совокупность таких представителей классов GH -эквивалентности будем называть *системой представителей*. Построение системы представителей является первым и важным этапом формализации комбинаторной задачи рассматриваемого типа. На этом этапе фактически строго определяются те различные объекты, которые подлежат перечислению на следующих этапах.

Следующие этапы связаны с перечислением систем представителей в соответствии с определенными характеристиками, в качестве которых можно рассматривать, например, первичные и вторичные спецификации соответствующих отображений. Решение перечислительной задачи для этих случаев начинается с вычисления соответствующей производящей функции, рассматриваемой или как формальный степенной ряд, или как аналитическая функция от нескольких переменных. Затем разнообразными методами находятся точные или асимптотические формулы для коэффициентов этой производящей функции, чем и завершается решение перечислительной задачи.

Методика построения производящих функций для произвольных групп G и H довольно сложна и не всегда приводит к обозримым результатам. В то же время формализация значительной части конкретных комбинаторных схем приводит к рассмотрению классов GH -эквивалентности, где либо $G = \{e\}$, либо $G = S_n$, либо $H = \{e'\}$, либо $H = S_n$. В соответствии с этим имеются четыре случая, которые мы будем называть частными случаями общей комбинаторной схемы.

Введем специальную терминологию, с помощью которой можно определять частные случаи общей комбинаторной схемы. Множество Y , $|Y| = n$, будем называть *n-базисом*. Представители класса GH -эквивалентности будем называть *n-выборкой*. В соответствии с этим при $G = \{e\}$, $H = \{e'\}$ представитель класса GH -эквивалентности называется *n-выборкой в некоммутативном несимметричном n-базисе*, а сам частный случай называется *случаем некоммутативного несимметричного n-базиса*.

Аналогично, случай $G = S_n$, $H = \{e'\}$ называется *случаем коммутативного несимметричного n-базиса*, а представители классов GH -эквивалентности называются *n-выборками в коммутативном несимметричном n-базисе*. Случай $G = \{e\}$, $H = S_n$ называется *случаем некоммутативного симметричного n-базиса*, а случай $G = S_n$, $H = S_n$ — *случаем коммутативного симметричного n-базиса*. Аналогично называются и соответствующие *n-выборки*.

Для этих случаев общей комбинаторной схемы ниже будет дана методика построения производящих функций для перечисления m -выборок с заданными значениями показателей первичных или соответственно вторичных спецификаций.

§ 3. Коммутативный несимметричный n -базис

1. Определения. Частный случай общей комбинаторной схемы, в котором $G = S_m$, $H = \{e'\}$, называется случаем *коммутативного несимметричного n -базиса*. В этом случае два отображения $\sigma: X \rightarrow Y$ и $\sigma': X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, эквивалентны, $\sigma \sim \sigma'$, если существует такая подстановка $g \in S_m$, что $g * \sigma = \sigma'$. Иными словами, $(\sigma'(1), \sigma'(2), \dots, \sigma'(m)) = (\sigma(g(1)), \sigma(g(2)), \dots, \sigma(g(m)))$. Отсюда вытекает, что $\sigma \sim \sigma'$ тогда и только тогда, когда $[\sigma] = [\sigma']$, т. е. их первичные спецификации совпадают. Отсюда следует, что первичная спецификация $[\sigma] = [y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$, произвольного представителя класса эквивалентности σ однозначно определяет этот класс эквивалентности. Фактически каждый класс эквивалентности однозначно определяется вектором $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$.

Элемент системы представителей классов G -эквивалентности в рассматриваемом случае будем называть *m -выборкой* в коммутативном несимметричном n -базисе. Каждой m -выборке в коммутативном несимметричном n -базисе ставится в соответствие совокупность векторов $(\sigma(g(1)), \dots, \sigma(g(m)))$, где подстановка g пробегает всю группу S_m . Эта совокупность векторов определяет *m -сочетание* из элементов n -множества. Отсюда следует, что каждой m -выборке в коммутативном несимметричном n -базисе ставится во взаимно однозначное соответствие m -сочетание из элементов n -множества.

С другой стороны, так как каждое размещение m одинаковых предметов в n различных ячейках однозначно определяется решением уравнения $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$ в целых неотрицательных числах, то каждой m -выборке в коммутативном несимметричном n -базисе ставится во взаимно однозначное соответствие размещения m одинаковых предметов в n различных ячейках.

Можно привести и другие примеры комбинаторных схем, которые описываются данным частным случаем общей комбинаторной схемы. Так, статистика Бозе — Эйнштейна определяется размещением неразличимых предметов в различных ячейках и, следовательно, охватывается данным частным случаем. Если в каждую ячейку при размещении попадает не более одного предмета, то соответствующая схема связана со статистикой Ферми — Дирака.

2. Нумератор. Рассмотрим вектор $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$, в котором компонента Λ_j , $1 \leq j \leq n$, является подпоследовательностью последовательности $N_0 = (0, 1, 2, \dots)$, т. е. $\Lambda_j \equiv N_0$, $j = 1, 2, \dots, n$. *Нумератором* в коммутативном несимметричном n -базисе назовем производящую функцию от $n+1$ переменных:

$$\Phi(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \Lambda) = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} t^{\alpha_j} x_j^{\alpha_j}, \quad (3.1)$$

где суммирование осуществляется по всем α_j , принимающим последовательные значения из Λ_j , $1 \leq j \leq n$. Осуществим перенесение n сумм в правой части и представим нумератор в следующем виде:

$$\Phi(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_j \in \Lambda_j}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (3.2)$$

где второе суммирование осуществляется по всевозможным векторам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, такими, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_j \in \Lambda_j$.

Из выражения для нумератора (3.2) следует, что каждому его слагаемому вида $t^m x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие m -выборку в коммутативном несимметричном n -базисе первичной спецификации $[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}]$ с условием, что показатель первичной спецификации α_j является элементом последовательности Λ_j , $1 \leq j \leq n$. В этом смысле можно говорить, что нумератор $\Phi(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \Lambda)$ перечисляет m -выборки в коммутативном несимметричном n -базисе с показателями первичной спецификации, определяемыми вектором Λ .

Выражение для нумератора позволяет найти выражение для производящей функции величин $C_{nm}(\Lambda)$, где $C_{nm}(\Lambda)$ — число m -выборок в коммутативном несимметричном n -базисе с первичными спецификациями вида $[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, где $\alpha_j \in \Lambda_j$, $1 \leq j \leq n$, $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$. Формально можно записать следующее равенство:

$$C_{nm}(\Lambda) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_j \in \Lambda_j}} 1, \quad (3.3)$$

где сумма в правой части содержит столько единиц, сколько имеется m -выборок рассматриваемого вида. Рассмотрим производящую функцию

$$\Psi_n(t; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}(\Lambda) t^m. \quad (3.4)$$

Из выражений (3.4) и (3.2) для нумератора $\Phi(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \Lambda)$ и равенств (3.3) и (3.4) следует, что

$$\varphi_n(t; \Lambda) = \Phi(t; 1, 1, \dots, 1, \Lambda) = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} t^{\alpha_j}. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) для производящей функции $\varphi_n(t; \Lambda)$ указывает простой способ для получения нумератора при заданном векторе $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$. Для этого в произведении n одинаковых скобок вида

$$(1+t+t^2+\dots)(1+t+t^2+\dots)\dots(1+t+t^2+\dots) \quad (3.6)$$

вычеркиваем в j -й скобке t^v , если $v \notin \Lambda_j$, $v = 0, 1, \dots$

Рассмотрим некоторые частные случаи, считая всюду ниже, что t принимает действительные значения и $|t| < 1$.

1°. Пусть $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \dots = \Lambda_n = N_0$, т. е. отсутствуют какие-либо ограничения на значения показателей первичной спецификации. Полагая $C_{nm} = C_{nm}(N_0)$, из формулы (3.5) имеем

$$\varphi_n(t; N_0) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} t^m = (1-t)^{-n}. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что число m -выборок в коммутативном несимметричном n -базисе равно

$$C_{nm} = \binom{n+m-1}{m}, \quad m = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Ясно, что величина C_{nm} одновременно равна количеству m -сочетаний с неограниченными повторениями из элементов n -множества, а также числу размещений m одинаковых предметов в n различных ячейках и, следовательно, числу решений уравнения $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$ в целых неотрицательных числах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

2°. Пусть $\Lambda_j = (q_j, q_j+1, q_j+2, \dots)$, где q_j — неотрицательное число, $1 \leq j \leq n$. Положим $q = q_1 + \dots + q_n$ и обозначим через $C_{nm}^{(q)}$ величину $C_{nm}(\Lambda)$ — с учетом того, что в данном случае эта величина зависит не от конкретных значений q_1, q_2, \dots, q_n , а только от их суммы. Из (3.5) имеем

$$\varphi_n(t; q) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^{(q)} t^m = t^q (1-t)^{-n}. \quad (3.9)$$

Отсюда получаем формулу

$$C_{nm}^{(q)} = \binom{n+m-q-1}{n-1}, \quad q = q_1 + q_2 + \dots + q_n. \quad (3.10)$$

из которой следует выражение для числа m -выборок в коммута-

тическом несимметричном \$n\$-базисе с условием сюръективности:

$$C_{nm}^{(k)} = \binom{m-1}{n-k}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

Если \$K_{nm}\$ — число композиций \$m\$ на \$n\$ слагаемых, а \$W_{nm}\$ — число размещений \$m\$ одинаковых предметов в \$n\$ ячейках при условии, что нет пустых ячеек, то

$$K_{nm} = W_{nm} := C_{nm}^{(n)} = \binom{m-1}{n-1}. \quad (3.42)$$

3*. Обозначим через \$C_{nm}^{(k)}(s)\$ число \$m\$-выборок в коммутативном несимметричном \$n\$-базисе, в которых \$k\$ фиксированных элементов \$n\$-базиса \$y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\$, и только они, встречаются ровно \$s\$ раз. Иными словами, \$C_{nm}^{(k)}(s)\$ равно числу \$m\$-выборок, имеющих первичные спецификации \$\left[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} \right]\$, такие что, \$\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_k} = s\$, \$\alpha_j \neq s\$ для \$j \neq i_1, i_2, \dots, i_k\$. Ясно, что в данном случае

$$\Lambda_j = \begin{cases} \{s\}, & j = i_1, \dots, i_k, \\ N_s \setminus \{s\}, & j \neq i_1, \dots, i_k, \end{cases}$$

где \$N_s \setminus \{s\}\$ получается из последовательности \$N_s = (0, 1, 2, \dots)\$ вычеркиванием элемента \$s\$.

Из формулы (3.5) получаем следующее выражение для производящей функции:

$$\sum_{m=k}^{\infty} C_{nm}^{(k)}(s) t^m = t^{ks} \left(\frac{1}{1-t} - t^s \right)^{n-k}. \quad (3.43)$$

Отсюда получаем формулу

$$C_{nm}^{(k)}(s) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \binom{n+m-(s+1)(k+j)-1}{m-s(k+j)}. \quad (3.44)$$

Эта формула определяет также число размещений \$m\$ одинаковых предметов в \$n\$ различных ячейках с условием, что \$k\$ фиксированных ячеек, и только они, содержат по \$s\$ предметов.

При \$s=0\$ из формулы (3.43) следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}^{(k)}(0) t^m = t^{n-k} (1-t)^{-(n-k)}. \quad (3.45)$$

Отсюда получаем выражение для числа \$m\$-выборок в коммутативном несимметричном \$n\$-базисе, в которых отсутствуют ровно \$k\$ фиксированных элементов \$n\$-базиса:

$$C_{nm}^{(k)}(0) = \binom{m-1}{n-k-1}. \quad (3.46)$$

Эта формула дает также число размещений m одинаковых предметов в n различных ячейках с условием, что k фиксированные ячейки, и только они, пустые.

4°. Обозначим через $Q_{nm}(k_1, k_2, \dots, k_s)$ число m -выборок в коммутативном несимметричном n -базисе с первичной спецификацией $\left[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} \right]$, удовлетворяющей условию $\alpha_{i_1} = k_1, \alpha_{i_2} = k_2, \dots, \alpha_{i_s} = k_s$. Величина $Q_{nm}(k_1, k_2, \dots, k_s)$ равна также числу размещений m одинаковых предметов в n различных ячейках с условием, что ячейки с номерами i_1, i_2, \dots, i_s содержат соответственно k_1, k_2, \dots, k_s предметов. В данном случае имеем

$$\Lambda_j = \begin{cases} (k_v), & j = i_v, \quad 1 \leq v \leq s, \\ N_0, & j \neq i_1, i_2, \dots, i_s. \end{cases}$$

Из формулы (3.5) получаем

$$\sum_{m=k}^{\infty} Q_{nm}(k) t^m = t^k (1-t)^{-(n-s)}, \quad (3.17)$$

где $Q_{nm}(k) = Q_{nm}(k_1, k_2, \dots, k_s)$, $k = k_1 + k_2 + \dots + k_s$, так как $Q_{nm}(k_1, k_2, \dots, k_s)$ зависит только от k . Из равенства (3.17) находим, что

$$Q_{nm}(k) = \binom{n+m-s-k-1}{m-k}. \quad (3.18)$$

5°. Рассмотрим векторы $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ и $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ с целыми неотрицательными координатами, такими, что $r_i \leq s_i$, $1 \leq i \leq n$, и обозначим через $C_{nm}(\bar{r}, \bar{s})$ число m -выборок в коммутативном несимметричном n -базисе с первичной спецификацией $\left[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} \right]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, удовлетворяющей условию $r_i \leq \alpha_i \leq s_i$, $1 \leq i \leq n$. Ясно, что $C_{nm}(\bar{r}, \bar{s})$ равно числу способов размещения m одинаковых предметов в n различных ячейках с условием, что емкость i -й ячейки ограничена сверху числом r_i , а сверху — числом s_i , $1 \leq i \leq n$. С другой стороны $C_{nm}(\bar{r}, \bar{s})$ равно числу решений (x_1, x_2, \dots, x_n) уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ в целых неотрицательных числах с условием, что $r_i \leq x_i \leq s_i$, $1 \leq i \leq n$.

Возьмем $\Lambda_j = (r_j, r_j+1, \dots, s_j)$, $1 \leq j \leq n$. Тогда из формулы (3.5) получаем

$$\sum_{m=1}^S C_{nm}(\bar{r}, \bar{s}) t^m = t^R (1-t^{d_1}) \dots (1-t^{d_n}) (1-t)^{-n}, \quad (3.19)$$

где $S = s_1 + \dots + s_n$, $R = r_1 + \dots + r_n$, $d_i = s_i - r_i + 1$, $1 \leq i \leq n$. И

равенства

$$(1 - t^{d_1}) \cdots (1 - t^{d_n}) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{1 < j_1 < \dots < j_k < n \\ d_{j_1} + \dots + d_{j_k} \leq m-R}} t^{d_{j_1} + \dots + d_{j_k}} \quad (3.20)$$

и формулы (3.49) следует, что

$$\begin{aligned} C_{nm}(r, s) &= \binom{n+m-R-1}{n-1} + \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{1 < j_1 < \dots < j_k < n \\ d_{j_1} + \dots + d_{j_k} \leq m-R}} \binom{n+m-R-d_{j_1}-\dots-d_{j_k}-1}{n-1}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отсюда при $r_i = r$, $s_i = s$, $1 \leq i \leq n$, $r \leq s$, получаем, что соответствующее число m -выборок равно

$$C_{nm}(r, s) = \sum_{k=0}^{\min(n, \frac{m-nr}{s-r+1})} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m - (r-1)n - (s-r+1)k - 1}{n-1}. \quad (3.22)$$

Из формулы (3.22), в частности, следует выражение для числа композиций $m = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $1 \leq x_i \leq s$:

$$K_{nm}(s) = \sum_{k=0}^{\min(n, \frac{m-n}{s})} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{m - sk - 1}{n-1}. \quad (3.23)$$

6°. Серии. Рассмотрим совокупность m -мерных векторов $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$, для которых $\gamma_i = 0, 1$, $1 \leq i \leq m$, и каждый вектор содержит m_0 нулей и m_1 единиц. Общее число таких векторов равно $\binom{m}{m_0}$. Максимальное число идущих подряд координат из нулей (единиц) называется *серией* из нулей (единиц). Обозначим через $N_m^0(k)$ ($N_m^1(k)$) число векторов с k сериями из нулей (единиц). Все множество векторов с k сериями из нулей разобьем на три класса в соответствии с тремя случаями:

а) Начальные координаты вектора образуют серию из нулей, последние координаты также образуют серию из нулей. В этом случае имеется k серий из нулей и $k-1$ серий из единиц и число векторов рассматриваемого вида равно числу решений системы уравнений $x_1 + \dots + x_k = m_0$, $y_1 + \dots + y_{k-1} = m_1$ в натуральных числах, т. е. равно $\binom{m_0-1}{k-1} \binom{m_1-1}{k-2}$.

б) Начальные координаты и последние координаты образуют серии из единиц. В этом случае имеется k серий из нулей и $k+1$ серий из единиц и число векторов равно $\binom{m_0-1}{k-1} \binom{m_1-1}{k}$.

в) Начальные координаты образуют серию из нулей, а последние координаты — серию из единиц, или наоборот. В этом случае имеется k серий из нулей и k серий из единиц и общее число векторов равно $2 \binom{m_0-1}{k-1} \binom{m_1-1}{k-1}$.

Суммируя величины, определяющие число векторов в классах, определяемых случаями а), б) и в), получаем число векторов с k сериями из нулей, равное

$$N_m^0(k) = \binom{m_0-1}{k-1} \binom{m_1-1}{k}. \quad (3.24)$$

Из соображений симметрии следует формула

$$N_m^1(k) = \binom{m_0-1}{k} \binom{m_1-1}{k-1}. \quad (3.25)$$

Обозначим через $N_m(k)$ число векторов с k сериями обоих видов. Заметим, что если $k=20$, где 0 — натуральное число, то все векторы, содержащие k серий, имеют вид, определяемый случаем в); если же $k=20+1$, то векторы определяются случаями а) и б). Отсюда следует, что

$$N_m(k) = \begin{cases} 2 \binom{m_0-1}{0-1} \binom{m_1-1}{0-1}, & k=20, \\ \binom{m_0-1}{0-1} \binom{m_1-1}{0} + \binom{m_0-1}{0} \binom{m_1-1}{0-1}, & k=20+1. \end{cases} \quad (3.26)$$

7*. Серии с ограничениями на длину. Ясно, что изложенная методика вывода формул для числа векторов с заданным количеством серий может быть распространена на случай, когда на длину серии наложены определенные ограничения. Обозначим через $N_m(k; \mu, v)$ число векторов, у которых имеются k серий, причем длина каждой серии из нулей не превосходит μ , а длина каждой серии из единиц не превосходит v . Число векторов, описываемых случаями а), б) и в), определяется соответственно числом решений следующих систем уравнений.

При $k=20+1$: а) $x_1 + \dots + x_{\mu+1} = m_0, y_1 + \dots + y_v = m_1;$

б) $x_1 + \dots + x_\mu = m_0, y_1 + \dots + y_{v+1} = m_1.$

При $k=20$: в) $x_1 + \dots + x_\mu = m_0, y_1 + \dots + y_v = m_1.$

Здесь $1 \leq x_i \leq \mu, 1 \leq y_i \leq v, 1 \leq i \leq n.$

Используя формулу (3.23), при $k = 2\theta$ находим

$$N_m(2\theta; \mu, \nu) = 2 \sum_{i=0}^{\theta} (-1)^i \binom{\theta}{i} \binom{m_0 - \mu i - 1}{\theta - 1} \sum_{j=0}^{\theta} (-1)^j \binom{\theta}{j} \binom{m_1 - \nu j - 1}{\theta - 1}. \quad (3.27)$$

Аналогично при $k = 2\theta + 1$ имеем

$$\begin{aligned} N_m(2\theta + 1; \mu, \nu) &= \\ &\cdots \sum_{i=0}^{\theta+1} (-1)^i \binom{\theta+1}{i} \binom{m_0 - \mu i - 1}{\theta} \sum_{j=0}^{\theta} (-1)^j \binom{\theta}{j} \binom{m_1 - \nu j - 1}{\theta - 1} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\theta} (-1)^i \binom{\theta}{i} \binom{m_0 - \mu i - 1}{\theta - 1} \sum_{j=0}^{\theta+1} (-1)^j \binom{\theta+1}{j} \binom{m_1 - \nu j - 1}{\theta}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

8°. Серии на окружности. Будем предполагать, что координаты вектора $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i = 0, 1, 1 \leq i \leq m$, расположены последовательно в равноотстоящих точках окружности. В этом случае число серий является всегда четным числом. Обозначим через $M_m(2k)$ число векторов рассматриваемого вида, имеющих при расположении на окружности $2k$ серий. Очевидно, что любой вектор, имеющий $2k$ или $2k + 1$ серий, при расположении на окружности имеет $2k$ серий. С другой стороны, разрезание в произвольном месте окружности, на которой расположен вектор с $2k$ сериями, дает вектор, имеющий $2k$ или $2k + 1$ серий. Отсюда следует соотношение

$$M_m(2k) = N_m(2k) + N_m(2k + 1). \quad (3.29)$$

Из формул (3.26) и (3.29) следует, что

$$M_m(2k) = \frac{m}{k} \binom{m_0 - 1}{k - 1} \binom{m_1 - 1}{k - 1}. \quad (3.30)$$

Формулу (3.30) можно вывести и другим способом, который позволяет найти ее обобщение на случай серий с ограничениями на длины. При фиксированном положении первой координаты число векторов $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i = 0, 1, 1 \leq i \leq m$, на окружности, имеющих $2k$ серий, равно количеству решений системы уравнений в натуральных числах

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = m_0, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_k = m_1, \quad (3.31)$$

т. е. равно $\binom{m_0 - 1}{k - 1} \binom{m_1 - 1}{k - 1}$. Для расположения на окружности первой координаты имеется m вариантов, деление на k исключает те варианты, которые отвечают некоторому, одному и тому же, циклическому сдвигу координат векторов (x_1, x_2, \dots, x_k) и (y_1, y_2, \dots, y_k) .

Данный вывод сохраняется, если рассматриваются серии ограниченной длины. Пусть $M_n(2k; \mu, v)$ — число векторов на окружности, имеющих $2k$ серий, причем длина серии из нулей не превосходит μ , а длина серий из единиц не превосходит v . Тогда, используя формулу (3.23), получаем

$$M_n(2k; \mu, v) = \frac{m}{k} \sum_{i=0}^{\min\left(k, \frac{m_0 - k}{\mu}\right)} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{m_0 - \mu i - 1}{k-i} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\min\left(k, \frac{m_1 - k}{v}\right)} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{m_1 - vi - 1}{k-j}. \quad (3.32)$$

Полагая $\mu = m_0$, получаем число векторов на окружности, у которых длина серии из единиц ограничена v :

$$M_n(2k; m_0, v) = \frac{m}{k} \binom{m_0 - 1}{k-1} \sum_{j=0}^{\min\left(k, \frac{m_1 - k}{v}\right)} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{m_1 - vi - 1}{k-j}.$$

Аналогично при $v = m_1$ из формулы (3.32) получаем число векторов на окружности, у которых длина серии из нулей ограничена μ :

$$M_n(2k; \mu, m_1) = \frac{m}{k} \binom{m_1 - 1}{k-1} \sum_{i=0}^{\min\left(k, \frac{m_0 - k}{\mu}\right)} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{m_0 - \mu i - 1}{k-i}.$$

Очевидно также, что

$$M_n(2k) = M(2k; m_0, m_1).$$

Упражнение 1. Показать, что если $L(m, n)$ — число m -выборок в коммутативном несимметричном n -балансе с условием сюръективности, то имеет место соотношение

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L(m, n-k) = \binom{n+m-1}{m}.$$

Вынести отсюда формулу

$$L(m, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+m-k-1}{m}.$$

2. Имеются m предметов первичной спецификации $\left[a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k} \right]$, $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$. Показать, что число способов размещения m в n различных ячейках равно

$$\prod_{i=1}^k \binom{m_i + n - 1}{m_i}.$$

3. Имеются m предметов вторичной спецификации $\left[\left[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m} \right] \right]$.
 $\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = n$. Показать, что число способов размещения их в n различных ячейках равно

$$U_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \prod_{i=1}^m \binom{n-i-1}{i}^{\beta_i}.$$

Если $V_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ — число способов размещения предметов заданной вторичной спецификации $\left[\left[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m} \right] \right]$ в n ячейках, среди которых нет пустых ячеек, то

$$V_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} U_{n-k}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m).$$

4. Для величин, указанных в упражнении 3, установить соотношения

a) $U_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = nU_n(\beta_1 - 1, \beta_2, \dots, \beta_m), \quad \beta_1 \geq 1,$

b) $V_n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = n[V_{n-1}(\beta_1 - 1, \beta_2, \dots, \beta_m) + V_{n-1}(\beta_1 - 1, \beta_2, \dots, \beta_m)].$

5. Для $C_{nm}(z)$ — числа размещений m одинаковых предметов в n различных ячейках с условием, что каждая ячейка содержит не более z предметов, вывести рекуррентные соотношения:

a) $C_{nm}(z) = \sum_{k=0}^z C_{n-1,m-k}(z);$

b) $C_{nm}(z) = C_{n,m-1}(z) + C_{n-1,m}(z) - C_{n-1,m-z-1}(z).$

§ 4. Некоммутативный несимметричный n -базис

Рассмотрим случай, когда группы G и H — единичные, т. е. $G = \{e\}$, $H = \{e'\}$, где e и e' — единичные подстановки степеней m и n соответственно. В этом случае каждый класс GH -эквивалентности содержит единственное отображение $\sigma: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, и система представителей классов эквивалентности совпадает с множеством всех отображений рассматриваемого вида. Каждый элемент этой системы представителей называется m -выборкой в некоммутативном несимметричном n -базисе.

Каждому размещению m различных предметов в n различных ячейках ставится во взаимно однозначное соответствие отображение $\sigma: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, где элементами множества X помечены предметы, а элементами множества Y — ячейки. Тем самым каждой m -выборке в некоммутативном несимметричном n -базисе ставится во взаимно однозначное соответствие размещение m различных предметов в n различных ячейках. Напомним, что схема размещения различных предметов в различных ячейках в физике тесно связана со статистикой Максвелла — Больцмана, описывающей поведение элементарных частиц.

Каждому m -размещению с повторениями элементов n -множества можно поставить во взаимно однозначное соответствие m -вектор $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m))$, где $\sigma: X \rightarrow Y$, $X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, и тем самым — m -выборку в некоммутативном несимметричном n -базисе.

Обозначим через $D_{nm}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе, имеющих первичную спецификацию $[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$. Имеет место формула

$$D_{nm}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m. \quad (4.1)$$

Действительно, каждой m -выборке в некоммутативном несимметричном n -базисе ставится во взаимно однозначное соответствие вектор $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(m))$, $\sigma: X \rightarrow Y$, $X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Число отображений σ указанного вида, таких, что $|\sigma| = [y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}]$, совпадает с правой частью равенства (4.1).

Пусть Λ_j — некоторая подпоследовательность последовательности $N_j = (0, 1, 2, \dots)$, $1 \leq j \leq n$, и $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$. *Нумератором* в некоммутативном несимметричном n -базисе называется производящая функция от $n+1$ переменных:

$$\Phi(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \Lambda) = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} x_j^{\alpha_j} t^{\frac{\alpha_j}{\alpha_j!}}, \quad (4.2)$$

где суммирование производится по всем α_j , пробегающим последовательность Λ_j , $1 \leq j \leq n$.

Представим нумератор (4.2) в виде

$$\Phi(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq n}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad (4.3)$$

где второе суммирование проводится по всем векторам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными координатами, такими, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_j \in \Lambda_j$, $1 \leq j \leq n$.

Из формулы (4.1) следует, что если $D_{nm}(\Lambda)$ — число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе с первичной спецификацией $[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n}]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$, $\alpha_j \in \Lambda_j$,

$\in \Lambda_j, 1 \leq j \leq n$, то

$$D_{nm}(\Lambda) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_j \in \Lambda_j, 1 < j < n}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (4.4)$$

Полагая $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, из равенств (4.3) и (4.4) получаем

$$\Phi(t; 1, 1, \dots, 1; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} D_{nm}(\Lambda) \frac{t^m}{m!}. \quad (4.5)$$

Теперь из равенств (4.2) и (4.5) следует, что

$$\tilde{\psi}(t; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} D_{nm}(\Lambda) \frac{t^m}{m!} = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j \in \Lambda_j} \frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!}, \quad (4.6)$$

где суммирование справа проводится по всем α_j , принимающим последовательные значения из Λ_j , $1 \leq j \leq n$. Из формулы (4.6) следует общий способ построения производящих функций для $D_{nm}(\Lambda)$, $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n)$, при любом виде последовательностей $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$, определяющих значения показателей первичной спецификации $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ m -выборок. Возьмем n одинарных скобок вида

$$(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots)(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots) \dots (1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots). \quad (4.7)$$

В i -й скобке вычеркиваем все члены вида $t^k/k!$, если $k \notin \Lambda_i$, $1 \leq i \leq n$. Оставшееся после вычеркивания произведение скобок представляет собой производящую функцию $\tilde{\phi}(t; \Lambda)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. $\Lambda_j = N_0 = (0, 1, 2, \dots)$, $1 \leq j \leq n$. В этом случае какие-либо ограничения на показатели первичных спецификаций m -выборок отсутствуют. Полагая $D_{nm} = D_{nm}(N_0)$, из равенства (4.6) имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_{nm} \frac{t^m}{m!} = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!} = e^{nt}. \quad (4.8)$$

Из этого равенства и формулы (4.4) следует, что общее число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе равно

$$D_{nm} = n^m = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_j \geq 0, 1 < j < n}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}. \quad (4.9)$$

Формула (4.8) дает число размещений m различных предметов в n различных ячейках.

2°. $\Lambda_j = N_j$, $1 \leq j \leq n$. В этом случае все показатели первичных спецификаций m -выборок строго положительны. Полагая $D_{km}^0 := D_{nm}(N)$, из равенства (4.6) имеем

$$\sum_{m=n}^{\infty} D_{nm} \frac{t^m}{m!} = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j=1}^{\infty} \frac{t^{\alpha_j}}{\alpha_j!} = (e^t - 1)^n. \quad (4.10)$$

Из равенства (4.10) следует, что

$$D_{km}^0 = \Delta^n 0^m = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m. \quad (4.11)$$

С учетом формулы (4.4) из равенства (4.11) получаем следующее тождество:

$$\Delta^n 0^m = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_j \geq 1, 1 \leq j \leq n}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}, \quad (4.12)$$

3°. $\Lambda_j = (r_j, r_j+1, \dots, s_j)$, $r_j \leq s_j$, $1 \leq j \leq n$, $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Обозначим через $Q_{nm}(\bar{r}, \bar{s})$ число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе с первичной спецификацией $\{y_1^{a_1} y_2^{a_2} \dots y_n^{a_n}\}$, удовлетворяющей условию $r_j \leq \alpha_j \leq s_j$, $1 \leq j \leq n$. Из равенства (4.6) следует, что

$$\sum_{m=R}^S D_{nm}(\bar{r}, \bar{s}) \frac{t^m}{m!} = \prod_{j=1}^n \sum_{k=r_j}^{s_j} \frac{t^k}{k!}, \quad (4.13)$$

где $R = r_1 + r_2 + \dots + r_n$, $S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$.

4°. Зафиксируем некоторое k элементов n -базиса. Не ограничивая общности, будем считать, что это элементы y_1, y_2, \dots, y_k . Обозначим через $D_{nm}\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе, в которых элементы y_1, y_2, \dots, y_k встретились соответственно q_1, q_2, \dots, q_k раз. Очевидно, что

$$D_{nm}\{q_1, q_2, \dots, q_k\} = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m \\ \alpha_i \geq q_i, 1 \leq i \leq k}} \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}, \quad (4.14)$$

Из равенства (4.6) следует, что

$$\sum_{m=Q}^{\infty} D_{nm}\{q_1, q_2, \dots, q_k\} \frac{t^m}{m!} = e^{(n-k)t} \prod_{i=1}^k \frac{t^{q_i}}{q_i!}. \quad (4.15)$$

Таким образом,

$$D_{nm} [q_1, \dots, q_k] = \frac{(m)_Q}{\prod_{i=1}^k q_i!} (n-k)^{m-Q},$$

где $Q = q_1 + q_2 + \dots + q_k$. В частности, если $q_1 = \dots = q_k = q$ и $D_{nm}^{(k)}[q] = D_{nm}[q, q, \dots, q]$, то

$$\sum_{m=kq}^{\infty} D_{nm}^{(k)}[q] \frac{t^m}{m!} = \frac{t^{qk}}{(q!)^k} e^{(n-k)t}. \quad (4.16)$$

Из равенства (4.16) следует, что

$$D_{nm}^{(k)}[q] = \frac{(m)_{kq}}{(q!)^k} (n-k)^{m-qk}. \quad (4.17)$$

5°. Обозначим через $D_{nm}(p_1, \dots, p_k; q_1, \dots, q_l)$ число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе с первичной спецификацией $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$, удовлетворяющей условиям

$$\alpha_i = p_i, \quad 1 \leq i \leq k; \quad \alpha_j \neq q_1, q_2, \dots, q_l, \quad k+1 \leq j \leq n. \quad (4.18)$$

Из равенства (4.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=p_1+\dots+p_k}^{\infty} D_{nm}(p_1, \dots, p_k; q_1, \dots, q_l) \frac{t^m}{m!} &= \\ &= \left(\prod_{i=1}^k \frac{t^{p_i}}{p_i!} \right) \left(e^t - \sum_{j=1}^l \frac{t^{q_j}}{q_j!} \right)^{n-k}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Вводя обозначение $D_{nm}^{(k)}(p, q) = D_{nm}(p, \dots, p; q)$, из равенства (4.19) получаем

$$\sum_{m=kp}^{\infty} D_{nm}^{(k)}(p, q) \frac{t^m}{m!} = \left(\frac{t^p}{p!} \right)^k \left(e^t - \frac{t^q}{q!} \right)^{n-k}. \quad (4.20)$$

Умножая обе части равенства (4.20) на $\binom{n}{k} x^k$ и суммируя по k , получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_{nm}(x; p, q) \frac{t^m}{m!} = \left(e^t + x \frac{t^p}{p!} - \frac{t^q}{q!} \right)^n, \quad (4.21)$$

$$D_{nm}(x; p, q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{nm}^{(k)}(p, q) x^k. \quad (4.22)$$

Из равенства (4.20) следует формула

$$D_{nm}^{(k)}(p, q) = \frac{1}{(pq)^k} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^{m-pk-qj} (m)_{pk+qj}}{(q!)^j}. \quad (4.23)$$

При $p = q = s$ из формулы (4.23) получаем выражение для числа m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе, в которых фиксированные элементы n -базиса y_1, y_2, \dots, y_k , и только они, встречаются ровно s раз:

$$D_{nm}^{(k)}(s) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^{m-s(k+j)} (m)_{s(k+j)}}{(s!)^{k+j}}, \quad (4.24)$$

Отсюда следует, что число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе, в которых ровно k элементов n -базиса встречаются s раз, равно

$$D_{nm}^{(k)}(s) = \binom{n}{k} D_{nm}^{(k)}(s), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.25)$$

Из формулы (4.24) следует, что, в частности,

$$D_{nm}^{(k)}(0) = \Delta^{n-k} 0^m = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} (n-k-j)^m, \quad (4.26)$$

и, следовательно, согласно формуле (4.25)

$$D_{nm}^{(k)}(0) = \binom{n}{k} \Delta^{n-k} 0^m, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.27)$$

Формула (4.27) определяет число размещений m различных предметов в n различных ячейках с условием, что k ячеек пусты.

Упражнение 1. Зафиксируем некоторые d , $1 \leq d \leq n$, элементов некоммутативного несимметричного n -базиса и назовем их *отмеченными*. Показать, что число m -выборок в некоммутативном несимметричном n -базисе, не содержащих k отмеченных элементов, $1 \leq k \leq d$, равно

$$Q_{nm}(d, k) = \binom{d}{k} \Delta^{d-k} (n-d)^m, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где $\Delta^{d-k} (n-d)^m = \Delta^{d-k} x^m |_{x=n-d}$.

2. Доказать тождество

$$\sum_{k=0}^d \binom{d}{k} \Delta^{d-k} (n-d)^m = n^m.$$

3. Пусть $D_{nm}(k_1, k_2, \dots, k_s)$ — число размещений m различных предметов в n различных ячейках с условием, что ячейки с номерами j_1, j_2, \dots, j_s

содержат соответственно k_1, k_2, \dots, k_s предметов. Показать, что

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_s + n - s)^m = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s \geq 0} D_{nm}(k_1, k_2, \dots, k_s) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}$$

Получить отсюда формулу

$$D_{nm}(k_1, k_2, \dots, k_s) = \frac{(m)_n (n-s)^{m-k}}{k_1! k_2! \dots k_s!}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_s = k.$$

4. Для $D_{nm}(s)$ — числа размещений m различных предметов в n различных ячейках с условием, что каждая ячейка содержит не более s предметов, вывести рекуррентные соотношения:

$$a) D_{nm}(s) = \sum_{k=0}^s \binom{m}{k} D_{n-1, m-k};$$

$$b) D_{n, m+1}(s) = n D_{n, m}(s) - n \binom{m}{s} D_{n-1, m-s}(s).$$

5. Для $E_{nm}(s)$ — числа размещений m различных предметов в n различных ячейках при условии, что каждая ячейка содержит не менее s предметов, вывести рекуррентные соотношения:

$$a) E_{nm}(s) = n E_{n, m-1}(s) + n \binom{m-1}{s-1} E_{n-1, m-s}(s);$$

$$b) E_{nm}(s) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{m!}{(s-1)!^k (m-sk-k)!} E_{n-k, m-sk+k+1}(s-1).$$

§ 5. Коммутативный симметричный n -базис

1. Определения. Пусть $G = S_m$ и $H = S_n$ — симметрические группы подстановок степеней m и n соответственно. Рассмотрим факторное множество классов GH -эквивалентности отображений $\sigma: X \rightarrow Y$, $|X| = m$, $|Y| = n$, и соответствующую этому факторному множеству систему представителей классов эквивалентности. Каждый элемент этой системы будем называть m -выборкой в коммутативном симметричном n -базисе.

Из теоремы 6 § 1 следует, что каждый класс GH -эквивалентности, $G = S_m$, $H = S_n$, однозначно определяется вторичной спецификацией $[\{\sigma\}]$ входящих в него отображений $\sigma \in Y^X$, где $[\{\sigma\}] = [[0^{\beta_0} 1^{\beta_1} \dots m^{\beta_m}]]$, $1\beta_1 + \dots + m\beta_m = m$, $\beta_0 + \dots + \beta_m = n$. Таким образом, каждому классу эквивалентности ставится во взаимно однозначное соответствие разбиение натурального числа m , т. е. представление его в виде суммы $1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$, где $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m \leq n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — целые неотрицательные числа. Величина $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$ определяет число слагаемых в разбиении.

Рассмотрим комбинаторную схему размещения m различных предметов в n различных ячейках. Два размещения будем считать эквивалентными, если они отличаются перенумерацией либо ячеек, либо предметов. Каждый класс эквивалентности будем называть *размещением* m одинаковых предметов в n однапаковых ячейках. Ясно, что каждому такому размещению ставится во взаимно однозначное соответствие m -выборка в коммутативном симметричном n -базисе.

2. Нумератор. Рассмотрим последовательность $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$, элементами которой являются последовательности $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ с элементами из $N_j = (0, 1, 2, \dots)$, т. е. $\Lambda_j \subseteq N_j$, $j = 1, 2, \dots$. *Нумератор* в коммутативном симметричном n -базисе определим как производящую функцию

$$\Psi(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda) := \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} (x_j t^j)^{\beta_j}, \quad (5.1)$$

где суммирование проходит по всем β_j , пробегающим последовательно значения из Λ_j , $j = 1, 2, \dots$

Нумератор (5.1) можно записать в виде

$$\Psi = (t; x_1, x_2, \dots; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{\substack{\beta_1+2\beta_2+\dots+m\beta_m=m \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_m^{\beta_m}, \quad (5.2)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям числа m , в которых слагаемое j встречается β_j раз, причем β_j — элемент последовательности Λ_j , $j = 1, 2, \dots$. Каждому слагаемому вида $t^m x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_m^{\beta_m}$ в нумераторе можно поставить во взаимно однозначное соответствие разбиение m , в котором слагаемое величиной j встречается β_j раз, $\beta_j \in \Lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$. В этом смысле можно говорить, что нумератор $\Psi(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda)$ *перечисляет* разбиения с определенными Λ -ограничениями на частоту, с которой встречается каждое слагаемое.

Пусть $R_{m,n}(\Lambda)$ — число разбиений m на n слагаемых, частота, с которой встречается каждое слагаемое, определяется Λ , а $R_m(\Lambda)$ — общее число таких разбиений. Формально можно записать, что

$$R_{m,n}(\Lambda) := \sum_{\substack{\beta_1+2\beta_2+\dots+m\beta_m=n \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} 1, \quad (5.3)$$

$$R_m(\Lambda) := \sum_{\substack{\beta_1+2\beta_2+\dots+m\beta_m=m \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} 1. \quad (5.4)$$

Число m -выборок в коммутативном симметричном n -базисе, в которых показатели вторичных спецификаций есть $\beta_j \in \Lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$, равно

$$Q_m(n; \Lambda) = \sum_{k=0}^n R_{mk}(\Lambda), \quad (5.5)$$

где полагаем $R_{m0}(\Lambda) = Q_m(0; \Lambda) = R_0(\Lambda) = 1$, $R_{mk}(\Lambda) = 0$, $k > m$.

Из выражений для нумератора (5.1) и (5.2) и формул (5.3), (5.4) следует, что

$$\Psi(t; 1, 1, \dots; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(\Lambda) t^m = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} t^{\beta_j}, \quad (5.6)$$

$$\Psi(t; x, x, \dots; \Lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{n=0}^m R_{mn}(\Lambda) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} (xt)^{\beta_j}. \quad (5.7)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задания последовательности Λ .

1°. Пусть $\Lambda_j = N_j = (0, 1, 2, \dots)$, $j = 1, 2, \dots$, и $R_{m0} = R_{mn}(N_j)$, $R_n = R_n(N_0)$. Из формул (5.6) и (5.7) следует, что

$$R(t) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m t^m = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - t^j)^{-1}, \quad (5.8)$$

$$R(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m R_{mn} t^m x^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - xt^j)^{-1}. \quad (5.9)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$R_n(t) = \sum_{m=n}^{\infty} R_{mn} t^m. \quad (5.10)$$

Нетрудно проверить, что

$$R(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(t) x^n. \quad (5.11)$$

Из (5.9) вытекает функциональное соотношение

$$(1 - xt)R(t, x) = R(t, xt). \quad (5.12)$$

Подставляя сюда выражение для $R(t, x)$ из формулы (5.11) и вычисляя коэффициенты при x^n в обеих частях полученного равенства, находим

$$R_n(t) = \frac{t}{1 - t^n} R_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.13)$$

где $R_0(t) = 1$. Последовательно применяя соотношения (5.13), получаем

$$R_n(t) = \frac{t^n}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^n)}. \quad (5.14)$$

Из формулы (5.5) следует, что $Q_m(n) = Q_m(n; N_0)$ есть число разбиений m на не более чем n слагаемых, и это число совпадает с количеством m -выборок в коммутативном симметричном n -базисе.

Из формулы (5.5) вытекает равенство

$$Q(t, n) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(n) t^m = \sum_{k=0}^n R_k(t). \quad (5.15)$$

Применяя метод математической индукции, из равенств (5.14) и (5.15) получаем формулу

$$Q(t, n) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^n)}. \quad (5.16)$$

2°. Обозначим через $R_m^{(r,s)}$ число разбиений m , содержащих слагаемые величиной j , с условием, что $r \leq j \leq s$. Для перечисления таких разбиений следует взять

$$\Lambda_j = \begin{cases} N_0, & r \leq j \leq s, \\ \{0\}, & j < r \text{ или } j > s. \end{cases}$$

Из общего вида производящей функции (5.6) следует, что

$$R^{(r,s)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m^{(r,s)} t^m = \frac{1}{(1-t^r)(1-t^{r+1})\dots(1-t^s)}. \quad (5.17)$$

В частности, если $R_m^{(n)}$ — число разбиений m на слагаемые, не превосходящие n , то $R_m^{(n)} = R_m^{(1,n)}$ и из (5.17) имеем

$$R^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m^{(n)} t^m = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^n)}. \quad (5.18)$$

3°. Обозначим через V_{mn} число разбиений m на n различных слагаемых, а через V_m — общее число разбиений m на различные слагаемые. Положим $V_{n0} = V_s = 1$ и $V_{nn} = 0$, $n > m$. Выбирая $\Lambda_j = (0, 1)$ для $j = 1, 2, \dots$, из формул (5.6) и (5.7) получаем

$$V(t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m t^m = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + t^j), \quad (5.19)$$

$$V(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m V_{mn} t^m x^n = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + xt^j). \quad (5.20)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$V_n(t) = \sum_{m=n}^{\infty} V_{mn} t^m. \quad (5.21)$$

Из (5.20) и (5.21) следует, что

$$V(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) x^n. \quad (5.22)$$

Помимо функционального соотношения

$$V(t, x) = (1 + xt)V(t, xt), \quad (5.23)$$

вытекающее из равенства (5.20).

Подставляя выражение для $V(t, x)$ из формулы (5.22) в соотношение (5.23) и вычисляя коэффициенты при x^n в обеих частях полученного равенства, находим

$$V_n(t) = \frac{t^n}{1 - t^n} V_{n-1}(t). \quad (5.24)$$

Из соотношения (5.24) с учетом равенства $V_1(t) = t/(1-t)$ окончательно получаем

$$V_n(t) = \frac{t^{\binom{n+1}{2}}}{(1-t)(1-t^2)\dots(1-t^n)}. \quad (5.25)$$

4°. Суммируем полученные выше результаты. Из равенств (5.15), (5.16), (5.18) и (5.25) следует, что

$$\sum_{m+n}^{\infty} R_{mn} t^{m+n} := \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(n) t^m := \sum_{m=0}^{\infty} R_m^{(n)} t^m = \sum_{m=\binom{n+1}{2}}^{\infty} V_{mn} t^{m-\binom{n+1}{2}}.$$

Отсюда находим

$$R_{m+n,n} := Q_m(n) := R_m^{(n)} := V_{m+\binom{n+1}{2}, n}. \quad (5.26)$$

Равенства (5.26) заключают в себе содержание следующей теоремы.

Теорема 4. Число разбиений $m+n$ на n слагаемых равно: числу разбиений m не более чем на n слагаемых, числу разбиений m на слагаемые, не превосходящие n , и числу разбиений $m+\binom{n+1}{2}$ на n различных слагаемых.

Рассмотрим простейший пример, полагая $m=5$, $n=2$. В этом случае $m+n=7$ и имеются три разбиения 7 на 2 слагаемых: $1+6$, $2+5$, $3+4$. Разбиения 5 на слагаемые, число которых не превосходит 2, выглядят следующим образом: 5 , $1+4$, $2+3$, и разбиения 5 на слагаемые, не превосходящие 2 имеют вид: $1+1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+2+2$. Наконец, $m+\binom{n+1}{2}=8$, и разбиения 8 на два различных слагаемых имеют вид: $1+7$, $2+6$, $3+5$.

5*. Графом Ферре разбиения $m = 1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + t\beta_n$, $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = n$, называется точечный граф, содержащий n строк, каждая из которых содержит число точек, равное величине соответствующего слагаемого разбиения, причем максимальному слагаемому соответствует первая строка. Например, граф Ферре разбиения $9 = 1 + 2 + 2 + 4$ имеет вид



Если строки графа Ферре сделать столбцами и наоборот, то полученный граф будет соответствовать разбиению, называемому сопряженным с исходным. Так, разбиению $9 = 1 + 2 + 2 + 4$ соответствует сопряженное разбиение $9 = 1 + 1 + 3 + 4$. Ясно, что разбиение, сопряженное сопряженному, совпадает с исходным.

Обозначим через W_m число разбиений m с максимальным по величине слагаемым, равным n . Из строения графов Ферре исходного и сопряженного разбиений следует, что это число совпадает с количеством разбиений m на n слагаемых, т. е.

$$W_m = R_{mn}. \quad (5.27)$$

Аналогичным образом путем рассмотрения графов Ферре исходного и сопряженного разбиений устанавливается полученное ранее равенство

$$R_m^{(n)} = Q_m(n), \quad (5.28)$$

означающее, что число разбиений m на слагаемые, не превосходящие n , равно числу разбиений m на слагаемые, число которых не превосходит n .

Рассмотрим граф Ферре разбиения m , содержащего n слагаемых. Добавим в первую строку графа $n - 1$ точек, в следующую строку — $n - 2$ точек и т. д.; наконец, в предпоследнюю строку — одну точку, последнюю строку оставим неизменной. В результате получим граф разбиения $m + \binom{n}{2}$ на n различных слагаемых. К любому графу Ферре разбиения $m + \binom{n}{2}$ на n различных слагаемых можно применить обратное преобразование, состоящее в удалении из предпоследней строки последние точки, из следующей строки — последних двух точек и т. д.; наконец, из первой строки — последних $n - 1$ точек. В результате получим граф Ферре разбиения m на n слагаемых. Таким образом, доказано равенство

$$R_{mn} = V_{m + \binom{n}{2}, n}, \quad (5.29)$$

вытекающее из равенств (5.26).

6°. Денумерант $D(m; a_1, a_2, \dots, a_n)$ определяет число разбиений m на слагаемые величины a_1, a_2, \dots, a_n , т. е. число решений (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = m. \quad (5.30)$$

Из формулы (5.6) следует, что производящая функция денумеранта имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} D(m; a_1, a_2, \dots, a_n) t^m = \frac{1}{(1-t^{a_1})(1-t^{a_2}) \dots (1-t^{a_n})}. \quad (5.31)$$

Это выражение позволяет получить рекуррентное соотношение $D(m; a_1, a_2, \dots, a_n) = D(m - a_n; a_1, a_2, \dots, a_n) +$

$$+ D(m; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \quad (5.32)$$

с начальным условием

$$D(m; a_1) = \begin{cases} 1, & a_1 \mid m, \\ 0, & a_1 \nmid m. \end{cases} \quad (5.33)$$

Полагая $a_i = l$, $i = 1, 2, \dots, n$, получаем выражение для числа разбиений m на слагаемые, не превосходящие n : $R_m^{(n)} = D(m; 1, 2, \dots, n)$. Соотношение (5.32) в этом случае принимает вид

$$R_m^{(n)} = R_{m-n}^{(n)} + R_m^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.34)$$

причем выполнены условия $R_m^{(n)} = R_m$, $n \geq m \geq 1$, $R_m^{(0)} = 0$, $m \geq 1$.

7°. Различные слагаемые. Обозначим через $R_{mn}^{(k)}$ число разбиений m на n слагаемых, среди которых k различных, и рассмотрим производящую функцию

$$R(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n R_{mn}^{(k)} t^m x^n y^k, \quad (5.35)$$

где полагаем $R_{00}^{(0)} = 1$. Покажем, что

$$R(t, x, y) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + xt^j(y-1)}{1 - xt^j} \right). \quad (5.36)$$

Действительно, правая часть равенства представима в виде

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + xt^j(y-1)}{1 - xt^j} \right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + y \sum_{\beta_j=1}^{\infty} (xt^j)^{\beta_j} \right).$$

Перемножая скобки в правой части, получаем

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + y \sum_{\beta_j=1}^{\infty} (xt)^{\beta_j} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{1\beta_1+\dots+m\beta_m=m} x^{\beta_1+\dots+\beta_m} y^{\gamma_1+\dots+\gamma_m},$$

где

$$\gamma_j = \begin{cases} 1, & \beta_j > 0, \\ 0, & \beta_j = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $\beta_1 + \dots + \beta_m$ равно числу слагаемых, а $\gamma_1 + \dots + \gamma_m$ — числу различных слагаемых разбиения $1\beta_1 + \dots + m\beta_m = m$. Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{1\beta_1+\dots+m\beta_m=m} x^{\beta_1+\dots+\beta_m} y^{\gamma_1+\dots+\gamma_m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{1\beta_1+\dots+m\beta_m=n \\ \beta_1+\dots+\beta_m=k}} 1 \right) t^m x^n y^k.$$

Так как сумма в круглых скобках есть величина $R_{mn}^{(k)}$, то формула (5.36) доказана.

Рассмотрим производящую функцию

$$R_n(t, y) = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^n R_{mn}^{(k)} t^m y^k. \quad (5.37)$$

Из равенства (5.35) следует

$$R(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(t, y) x^n. \quad (5.38)$$

Формула (5.36) позволяет получить функциональное соотношение

$$(1 - xt)R(t, x, y) = (1 + xt(y - 1))R(t, xt, y). \quad (5.39)$$

Подставляя выражение для $R(t, x, y)$ из формулы (5.38) в соотношение (5.39), находим

$$R_n(t, y) = \frac{t + (y - 1)t^n}{1 - t^n} R_{n-1}(t, y). \quad (5.40)$$

Непосредственно устанавливается, что

$$R_1(t, y) = \frac{yt}{1-t}. \quad (5.41)$$

Применяя соотношение (5.40) многократно, с учетом равенства

(5.41) получаем

$$R_n(t, y) = \frac{t^n [1 + (y - 1)] [1 + t(y - 1)] \dots [1 + t^{n-1}(y - 1)]}{(1 - t)(1 - t^2) \dots (1 - t^n)}. \quad (5.42)$$

С учетом формулы (5.14) из равенства (5.42) получаем

$$R_n(t, y) = R_n(t) \prod_{j=0}^{n-1} [1 + t^j(y - 1)], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.43)$$

8°. Совершенные разбиения. Рассмотрим разбиения числа 7 следующего вида:

$$1+1+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+4,$$

$$1+2+4, \quad 1+2+2+2. \quad (5.44)$$

Каждое из этих разбиений обладает тем свойством, что содержит одно, и только одно, разбиение любого числа, меньшего m . При этом, естественно, однократовые слагаемые рассматриваются как неразличимые. Например, для разбиения $1+1+1+4$ имеем $1=1$, $2=1+1$, $3=1+1+1$, $4=4$, $5=1+4$, $6=1+1+4$. Разбиение натурального числа m называется совершенным, если оно содержит одно, и только одно, разбиение каждого числа, меньшего m .

Теорема 2. Каждому совершенному разбиению натурального числа m можно поставить во взаимно однозначное соответствие упорядоченное разложение числа $m+1$ на множители, большие единицы.

Действительно, пусть в совершенном разбиении m имеется $q_1 - 1$ единичных слагаемых, $m \geq q_1 > 1$. Тогда каждому из натуральных чисел, меньших q_1 , ставится в соответствие единственное разбиение с единичными слагаемыми. Ясно, что число q_1 должно быть следующим по величине после единицы слагаемым совершенного разбиения m . Если число слагаемых величины q_1 равно $q_2 - 1$, $q_2 > 1$, то следующее по величине слагаемое совершенного разбиения m равно $q_1 q_2$, и т. д. Таким образом, если величина максимального слагаемого в совершенном разбиении равна $q_1 q_2 \dots q_{k-1}$ и оно встречается $q_k - 1$ раз, $q_k > 1$, то имеет место равенство $m = (q_1 - 1) + q_1(q_2 - 1) + \dots + q_1 q_2 \dots q_k (q_k - 1)$, где $q_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, k$. Отсюда следует, что

$$m+1 = q_1 q_2 \dots q_k, \quad q_i > 1, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Теорема доказана.

Например, совершенным разбиениям вида (5.44) числа 7 соответствуют следующие упорядоченные разложения на множители числа 8: $8; 4 \cdot 2; 2 \cdot 2 \cdot 2; 2 \cdot 4$.

Упражнения. 1. Пусть d — общий наибольший делитель чисел a_1, a_2, \dots, a_k . Показать, что денумерант $D(m; a_1, \dots, a_k)$ удовлетворяет соотношению

$$D(m; a_1, \dots, a_k) = D\left(\frac{m}{d}; \frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_k}{d}\right), \quad d \mid m,$$

$$D(dm + r; da_1, \dots, da_k) = 0, \quad r = 0, 1, \dots, d - 1.$$

2. Используя тождество $1/(1-t) = (1-t)(1-t^2)\dots(1-t^{2^n})\dots$, доказать, что каждое число имеет единственное представление в двоичной системе.

3. Пусть $R_m^e(R_m^0)$ — количество разбиений m с четным (нечетным) числом слагаемых. Показать, что при $m > 1$ $R_m^e = R_m^0$.

4. Пусть $K_{m,n}(s)$ — число композиций m с n слагаемыми, ни одно из которых не превосходит s . Вывести рекуррентные соотношения:

$$\text{а)} \quad K_{m,n}(s) = K_{m-1,n}(s) + K_{m-1,n-1}(s) - K_{m-s-1,n-1}(s);$$

$$\text{б)} \quad K_{m,n}(s) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} K_{m-k,n-k}(s-1).$$

5. Показать, что если $K_m(s)$ — число композиций m со слагаемыми, ни одно из которых не превосходит s , то

$$\text{а)} \quad \frac{t - t^{s+1}}{1 - 2t + t^{s+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} K_m(s) t^m;$$

$$\text{б)} \quad K_m(s) = 2K_{m-1}(s) + K_{m-s-1}(s) = \delta_{1,m} - \delta_{s+1,m},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

6. Пусть $K_m(s)$ — число композиций m со слагаемыми, ни одно из которых не превосходит s , и имеется по крайней мере одно слагаемое, равное s . Показать, что

$$\frac{(1-t)^2 t^s}{(1-2t+t^s)(1-2t+t^{s+1})} = \sum_{m=s}^{\infty} \tilde{K}_m(s) t^m,$$

7. Доказать тождество:

$$mR_m = \sum_{k=0}^{m-1} \sigma(m-k) R_k,$$

где R_m — число разбиений m , а $\sigma(n)$ — сумма положительных делителей n .

§ 6. Некоммутативный симметрический n -базис

1. Определения. Рассмотрим случай общей комбинаторной схемы, в котором $G = \{e\}$, $H = S_n$, где e — единичная подстановка степени m , а S_n — симметрическая группа степени n . В этом случае два отображения σ и σ' , $\sigma, \sigma' \in Y^X$, $|X| = m$, $|Y| = n$,

принадлежат одному классу GH -эквивалентности, если существует подстановка $h \in S_n$ такая, что $(\sigma'(1), \dots, \sigma'(m)) = (h(\sigma(1)), \dots, h(\sigma(m)))$, т. е. векторы, отвечающие σ и σ' , могут быть переведены один в другой некоторой подстановкой множества Y . Ясно, что такие векторы имеют одинаковые вторичные спецификации.

Элементы системы представителей классов GH -эквивалентности при $G = \{e\}$, $H = S_n$ будем называть m -выборками в некоммутативном симметричном n -базисе.

Если занумеровать m предметов элементами множества $X = \{1, 2, \dots, m\}$, а n ячеек — элементами множества Y , $|Y| = n$, то каждому размещению m различных предметов в n различных ячейках, как было указано, отвечает вектор $(\sigma(1), \dots, \sigma(m))$, где $\sigma: X \rightarrow Y$. Ясно, что совокупность векторов вида $(h(\sigma(1)), \dots, h(\sigma(m)))$, где h пробегает множество всех подстановок степени n , отвечает единственному размещению m различных предметов в n одинаковых ячейках. Отсюда следует, что каждой m -выборке в некоммутативном симметричном n -базисе ставится во взаимно однозначное соответствие размещение m различных предметов в n одинаковых ячейках.

Если отображение $\sigma: X \rightarrow Y$ сюръективно, то вектору $(\sigma(1), \dots, \sigma(m))$ ставится во взаимно однозначное соответствие размещение m различных предметов в n различных ячейках с условием, что каждая ячейка не пустая. В этом случае совокупности векторов вида $(h(\sigma(1)), \dots, h(\sigma(m)))$, $h \in S_n$, ставится во взаимно однозначное соответствие m -выборка в некоммутативном симметричном n -базисе, в которой каждый элемент n -базиса встречается по крайней мере один раз. В свою очередь каждой такой m -выборке можно поставить во взаимно однозначное соответствие некоторое разбиение

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m, \quad X_i \cap X_j = \emptyset, \quad (6.1)$$

множества X на m блоков. Отсюда следует, что общее число m -выборок в некоммутативном симметричном n -базисе равно числу разбиений m -множества с количеством блоков, не превосходящим n .

Обозначим через $T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ число разбиений m -множества X на блоки, имеющих вторичную спецификацию $[[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}]]$, $1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m$, т. е. содержащих β_i блоков размера i , $1 \leq i \leq m$. Имеет место формула

$$T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \frac{m!}{(1!)^{\beta_1} (2!)^{\beta_2} \dots (m!)^{\beta_m} \beta_1! \beta_2! \dots \beta_m!}, \quad (6.2)$$

$$\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m.$$

Действительно, расположим все блоки фиксированного разбиения m -множества X вторичной спецификации $[[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}]]$ на прямой в некотором заданном порядке. Любое другое разбиение

ние X такой же вторичной спецификации получается перестановкой элементов на прямой. Отсюда следует, что общее число таких разбиений равно частному от деления $m!$ на число эквивалентных перестановок, не дающих новых разбиений. Эквивалентные перестановки получаются при перестановке элементов внутри блоков и при перестановке между собой блоков одинакового объема. Отсюда следует, что число эквивалентных перестановок равно $(1!)^{\beta_1} (2!)^{\beta_2} \dots (m!)^{\beta_m} \beta_1! \beta_2! \dots \beta_m!$. Этим формула (6.2) доказана.

Рассмотрим последовательность $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$, элементами которой являются подпоследовательности из $N_s = (0, 1, 2, \dots)$, т. е. $\Lambda_j \subseteq N_s$, $j = 1, 2, \dots$. Обозначим через $T_{ns}(\Lambda)$ число разбиений m -множества X на n блоков с условием, что для вторичных спецификаций разбиений $[[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}]]$ выполнено условие $\beta_j \in \Lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$; через $T_n(\Lambda; k, l)$ обозначим число разбиений m -множества с указанным условием, содержащих k блоков размера l , через $T_m(\Lambda)$ обозначим общее число разбиений m -множества с указанным условием. Можно записать, что

$$T_m(\Lambda) = \sum_{\substack{\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \quad (6.3)$$

$$T_{mn}(\Lambda) = \sum_{\substack{\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m = n \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \quad (6.4)$$

$$T_m(\Lambda; k, l) = \sum_{\substack{1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m \\ \beta_j = l \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m). \quad (6.5)$$

Из формулы (6.4) следует, что число m -выборок в некоммутативном симметричном n -базисе со вторичными спецификациями $[[1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots m^{\beta_m}]]$, такими, что $\beta_j \in \Lambda_j$, $j = 1, 2, \dots$, равно

$$U_{nm}(\Lambda) = \sum_{\substack{1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + m\beta_m = m \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m = n \\ \beta_j \in \Lambda_j, j = 1, \dots, m}} T(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m). \quad (6.6)$$

В приведенных выше формулах полагаем $T_o(\Lambda) = T_n(\Lambda) = U_{oo}(\Lambda) = T_o(\Lambda, 0, 0) = 1$.

2. Нумератор. Рассмотрим производящую функцию вида

$$\Psi(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x_j t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}, \quad (6.7)$$

где суммирование проводится по всем β_j , принимающим значения из последовательности Λ_j , являющейся подпоследовательностью из $N_s = (0, 1, 2, \dots)$, и $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$.

Правая часть в равенстве (6.7) определяет производящую функцию от t , так как вычисление коэффициента при t^m сводится к вычислению такого коэффициента в выражении

$$\prod_{j=1}^m \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x_j t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}.$$

Производящая функция (6.7) называется *нумератором* в некоммутативном симметричном n -базисе.

Осуществляя перемножение в правой части равенства (6.7) и вычисляя коэффициент при $t^m/m!$, находим

$$\overline{\Psi}(t; x_1, x_2, \dots; \Lambda) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{\substack{i\beta_1 + \dots + m\beta_m = m \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} \frac{m!}{(1!)^{\beta_1} \dots (m!)^{\beta_m} \beta_1! \dots \beta_m!} x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m}. \quad (6.8)$$

Нумератор (6.7) с учетом его записи в виде (6.8) позволяет находить выражения для производящих функций чисел $T_n(\Lambda)$, $T_{n,k}(\Lambda)$, $T_n(\Lambda; k, l)$. Действительно, полагая в равенстве (6.8) $x_1 = x_2 = \dots = 1$, имеем

$$\overline{\Psi}(t; 1, 1, \dots; \Lambda) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{\substack{i\beta_1 + \dots + m\beta_m = m \\ \beta_j \in \Lambda_j, 1 \leq j \leq m}} \frac{m!}{(1!)^{\beta_1} \dots (m!)^{\beta_m} \beta_1! \dots \beta_m!}.$$

Отсюда с учетом равенств (6.3) и (6.7) находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m(\Lambda) \frac{t^m}{m!} = \prod_{j=1}^m \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}. \quad (6.9)$$

Аналогично, полагая $x_1 = x_2 = \dots = x$ и соответственно $x_i = 1$, $i \neq l$, $x_l = x$, из равенств (6.7), (6.8) и формул (6.4), (6.5) получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m T_{m,n}(\Lambda) \frac{t^m}{m!} x^n = \prod_{j=1}^m \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{x t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}, \quad (6.10)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-l} T_m(\Lambda; l, k) \frac{t^m}{m!} x^k =$$

$$= \sum_{\beta_l \in \Lambda_l} \left(\frac{x t^l}{l!} \right)^{\beta_l} \frac{1}{\beta_l!} \prod_{j \neq l}^m \sum_{\beta_j \in \Lambda_j} \left(\frac{t^j}{j!} \right)^{\beta_j} \frac{1}{\beta_j!}. \quad (6.11)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задания Λ .

Положим $\Lambda_j = N_0 = (0, 1, 2, \dots)$, $j = 1, 2, \dots$, и обозначим $T_m = T_m(N_0)$, $T_{mn} = T_{mn}(N_0)$, $T_n(k, l) = T_n(N_0; k, l)$. Из формул (6.9)–(6.11) следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m \frac{t^m}{m!} = e^{et-1}, \quad (6.12)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} \frac{t^m}{m!} x^n = e^{x(et-1)}, \quad (6.13)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor m/1 \rfloor} T_m(k, l) \frac{t^m}{m!} x^k = \exp \left\{ et - 1 + (x-1) \frac{t^l}{l!} \right\}. \quad (6.14)$$

Числа T_m , $m = 0, 1, \dots$, как указывалось ранее, представляют собой *числа Белла*. Число T_n определяет количество разбиений n -множества на блоки. Дифференцируя обе части равенства (6.12) и вычисляя коэффициенты при $t^m/m!$, приходим к рекуррентному соотношению для чисел Белла:

$$T_{m+1} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} T_{m-k}, \quad T_0 = 1. \quad (6.15)$$

Путем разложения в ряд правой части равенства (6.12) и вычисления коэффициента при $t^m/m!$ получаем *формулу Добинского*:

$$T_m = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^m}{k!}. \quad (6.16)$$

Из равенства (6.13) находим, что

$$\sum_{m=n}^{\infty} T_{mn} \frac{t^m}{m!} = \frac{1}{n!} (et-1)^n. \quad (6.17)$$

Отсюда следует, что для T_{nn} — числа разбиений n -множества на n блоков — имеет место равенство (см. (4.57) гл. I)

$$T_{nn} = \sigma(m, n), \quad (6.18)$$

где $\sigma(m, n)$ — числа Стирлинга второго рода. Из равенства (6.18) следуют формулы

$$T_m = \sum_{k=0}^m \sigma(m, k), \quad (6.19)$$

$$U_{mn} = \sum_{k=0}^n \sigma(m, k), \quad (6.20)$$

где U_{nn} — число n -выборок в некоммутативном симметричном n -базисе.

3. A -разбиения. Пусть A есть некоторая подпоследовательность из N . Будем считать, что разбиение m -множества относится к классу A -разбиений, если размеры соответствующих блоков являются элементами фиксированной последовательности A . Обозначим через T_m^A число A -разбиений m -множества, через T_{mn}^A — число A -разбиений с n блоками и через $T_m^A(k, l)$ — число A -разбиений с k блоками размера l . Возьмем

$$\Lambda_j = \begin{cases} N_0, & j \in A, \\ (0), & j \notin A, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots,$$

и рассмотрим производящую функцию

$$a(t) = \sum_{j \in A} \frac{t^j}{j!}. \quad (6.21)$$

Тогда из выражений для производящих функций (6.9)–(6.11) находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} T_m^A \frac{t^m}{m!} = e^{a(t)}, \quad (6.22)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m T_{mn}^A \frac{t^m}{m!} x^n = e^{x a(t)}, \quad (6.23)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor m/l \rfloor} T_m^A(k, l) \frac{t^m}{m!} x^k = \exp \left\{ (x-1) \frac{t^l}{l!} + a(t) \right\}. \quad (6.24)$$

Например, если рассматриваются разбиения, в которых размеры блоков ограничены снизу и сверху соответственно числами r и s , то $a(t) = \sum_{j=r}^s \frac{t^j}{j!}$ и соответствующие производящие функции следуют из равенств (6.22)–(6.24).

Дифференцируя обе части равенства (6.22) и вычисляя коэффициенты при $t^m/m!$, получаем рекуррентное соотношение

$$T_{m+1}^A = \sum_{j \in A} \binom{m}{j-1} T_{m-j+1}^A.$$

Упражнения. 1. Показать, что число разбиений m -множества на блоки, содержащие не более двух элементов, равно

$$Q_m = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{m!}{k! (m-2k)! 2^k}, \quad m = 1, 2, \dots$$

2. Пусть T_{mn}^e и T_{mn}^0 — число разбиений m -множества на n блоков, содержащих соответственно четное и нечетное число элементов. Показать, что

$$a) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m T_{mn}^e \frac{t^m}{m!} x^n = e^{x(\cosh t - 1)},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m T_{mn}^0 \frac{t^m}{m!} x^n = e^{x \operatorname{sh} t},$$

где $\operatorname{sh} t$ и $\cosh t$ — соответственно гиперболические синус и косинус;

$$b) \quad T_{mn}^e = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} n^j \sigma(m-j, 2n),$$

$$T_{mn}^0 = \frac{1}{2^n n!} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{n}{j} (n-2j)^m,$$

где $\sigma(m, n)$ — число Стирлинга второго рода.

3. Обозначим через $\widehat{\sigma}(m, k)$ число разбиений m -множества на k блоков, среди которых нет единичных. Числа $\widehat{\sigma}(m, k)$ называются *присоединенными* числами Стирлинга второго рода. Положим

$$a_m(x) = \sum_{k=0}^m \sigma(m, k) x^k, \quad b_m(x) = \sum_{k=0}^m \widehat{\sigma}(m, k) x^k,$$

где $\sigma(m, k)$ — числа Стирлинга второго рода. Вывести следующие соотношения:

$$a) \quad b_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} a_{m-k}(x) x^k;$$

$$b) \quad a_m(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} b_{m-k}(x) x^k;$$

$$v) \quad b_{m+1}(x) = x b'_m(x) + m x b_{m-1}(x);$$

$$r) \quad \widehat{\sigma}(m+1, k) = k \widehat{\sigma}(m, k) + m \widehat{\sigma}(m-1, k-1).$$

§ 7. Теорема Поя

1. Основная теорема. Один из наиболее общих методов перечисления классов эквивалентности отображений относительно групп подстановок был разработан Поя. Изложению основных идей этого метода и посвящен данный параграф.

Пусть $\sigma: X \rightarrow Y$ — отображение m -множества X в n -множество Y и Y^X — совокупность всех таких отображений. В соответствии с терминологией Поя элементы множества X называются *местами*, элементы Y — *фигурами* и элементы Y^X — *конфигурациями*.

Будем предполагать, что группа подстановок G действует на множестве X и определяет отношение G -эквивалентности на множестве Y^X , причем $\sigma \sim \sigma'$, если существует такая подстановка $g \in G$, что $\sigma'(x) = \sigma(g(x))$ для всех $x \in X$. Каждому элементу $y \in Y$ поставим в соответствие k -мерный вектор (s_1, s_2, \dots, s_k) , координаты которого принимают значения из некоторого числового кольца K . Этот вектор будем называть *характеристикой* y и записывать $\omega(y) = (s_1, s_2, \dots, s_k)$. В результате определено некоторое отображение $\omega: Y \rightarrow K^{(k)}$, где $K^{(k)} = K \times K \times \dots \times K$ — декартово произведение с k сомножителями. Это отображение будем называть *весом фигур*. Сумму весов двух фигур $\omega(y_1) = (s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_k^{(1)})$ и $\omega(y_2) = (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \dots, s_k^{(2)})$ определим равенством $\omega(y_1) + \omega(y_2) = (s_1^{(1)} + s_1^{(2)}, s_2^{(1)} + s_2^{(2)}, \dots, s_k^{(1)} + s_k^{(2)})$.

В соответствии с этим характеристику конфигурации $\sigma \in Y^X$ определим с помощью равенства

$$W(\sigma) = \sum_{x \in X} \omega(\sigma(x)). \quad (7.1)$$

Этим равенством определено отображение $W: Y^X \rightarrow K^{(k)}$, которое будем называть *весом конфигураций*.

Обозначим через $a(s_1, s_2, \dots, s_k)$ число фигур $y \in Y$, имеющих характеристику (s_1, s_2, \dots, s_k) , и рассмотрим производящую функцию

$$F(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_k)} a(s_1, s_2, \dots, s_k) z_1^{s_1} z_2^{s_2} \dots z_k^{s_k}, \quad (7.2)$$

где суммирование ведется по всем значениям весовой функции фигур. Функцию (7.2) будем называть *производящей функцией весовой спецификации фигур*.

Из (7.1) следует, что если $\sigma \sim \sigma'$, то $W(\sigma) = W(\sigma')$, т. е. различные значения характеристик допускаются только для неэквивалентных конфигураций. В соответствии с этим обозначим через $b_m(s_1, s_2, \dots, s_k)$ число неэквивалентных конфигураций $\sigma \in Y^X$ с заданным значением характеристики, равным (s_1, s_2, \dots, s_k) , причем $m = |X|$. Рассмотрим производящую функцию

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_k)} b_m(s_1, s_2, \dots, s_k) z_1^{s_1} z_2^{s_2} \dots z_k^{s_k}, \quad (7.3)$$

где суммирование проводится по всем значениям весовой функции конфигураций.

Функция (7.3) называется *производящей функцией весовой спецификации конфигураций*, не эквивалентных относительно группы G . Введем в рассмотрение циклический индекс группы

G , представляющий собой многочлен вида (см. (5.10), гл. I)

$$Z(t_1, t_2, \dots, t_m; G) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{i_1 + 2i_2 + \dots + mi_m = m}} C(j_1, j_2, \dots, j_m; G) t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_m^{j_m}, \quad (7.4)$$

где $C(j_1, j_2, \dots, j_m; G)$ — число элементов циклового класса $\{1^{j_1} 2^{j_2} \dots m^{j_m}\}$ группы подстановок G и суммирование ведется по всем (j_1, j_2, \dots, j_m) , таким, что $i_1 + 2i_2 + \dots + mi_m = m$.

Теорема Пойа. Производящая функция весовой спецификации конфигураций, не эквивалентных относительно группы подстановок G , выражается через циклический индекс этой группы и производящую функцию весовой спецификации фигур соотношением

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_k) =$$

$$= Z(F(z_1, \dots, z_k), F(z_1^2, \dots, z_k^2), \dots, F(z_1^m, \dots, z_k^m); G). \quad (7.5)$$

Определим группу подстановок \bar{G} , действующую на множестве Y^X и являющуюся гомоморфным образом группы G . Гомоморфизм $\gamma: G \rightarrow \bar{G}$ определим следующим образом. Считаем, что $\gamma(g) = \bar{g}$, $g \in G$, $\bar{g} \in \bar{G}$, если $\bar{g}(\sigma) = \sigma(g(x))$ для всех $x \in X$. Группа \bar{G} определяет на множестве Y^X отношение эквивалентности, при котором $\sigma \approx \sigma'$, если $\bar{g}(\sigma) = \sigma'$. Очевидно, что если $\sigma \sim \sigma'$, где \sim есть G -эквивалентность, то $\sigma \approx \sigma'$, причем верно и обратное. Таким образом, отношения эквивалентности \sim и \approx , определяемые соответственно группами G и \bar{G} , совпадают.

Обозначим через $b_m(s_1, s_2, \dots, s_k; \bar{g})$ число конфигураций с характеристикой (s_1, s_2, \dots, s_k) , являющихся неподвижными точками подстановки $\bar{g} \in \bar{G}$. Согласно лемме Бернсайда

$$b_m(s_1, s_2, \dots, s_k) = \frac{1}{|\bar{G}|} \sum_{g \in \bar{G}} b_m(s_1, s_2, \dots, s_k; \bar{g}). \quad (7.6)$$

Если H — ядро гомоморфизма $\gamma: G \rightarrow \bar{G}$, при котором $\bar{g} = \gamma(g)$, то из условия $\bar{g}(\sigma) = \sigma$ следует, что $\sigma(hg(x)) = \sigma(x)$, где $h \in H$. Таким образом, если Δ — произвольная система представителей правых смежных классов G по подгруппе H , то имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_m(s_1, s_2, \dots, s_k; g) &= \frac{1}{|\bar{G}|} \sum_{\alpha \in \Delta} \sum_{h \in H} b_m(s_1, s_2, \dots \\ &\dots, s_k; h\alpha) = \frac{1}{|\bar{G}|} \sum_{g \in \bar{G}} b_m(s_1, s_2, \dots, s_k; \bar{g}) \end{aligned}$$

Теперь из (7.6) следует, что

$$b_m(s_1, s_2, \dots, s_k) = \frac{1}{|\bar{G}|} \sum_{g \in \bar{G}} b_m(s_1, s_2, \dots, s_k; g). \quad (7.7)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_k; g) = \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_k)} b_m(s_1, s_2, \dots, s_k; g) z_1^{s_1} z_2^{s_2} \dots z_k^{s_k}, \quad (7.8)$$

где суммирование проводится по всем значениям характеристик конфигураций, инвариантных относительно действия подстановки $g \in G$. Из (7.3) и (7.7) имеем

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_k) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_k; g). \quad (7.9)$$

Пусть $\sigma(g(x)) = \sigma(x)$ для $g \in G$ и всех $x \in X$. Если X_j — орбита из l элементов, на которой действует цикл g_j подстановки g , то в силу равенств $\sigma(g_j(x)) = \sigma(g_j^2(x)) = \dots = \sigma(g_j^l(x)) = \sigma(x)$ для $x \in X_j$ убеждаемся, что конфигурация σ постоянна на X_j . Следовательно, множество конфигураций, инвариантных при действии подстановки $g \in G$, может быть получено путем независимого задания значений σ на орбитах подстановки g . Отсюда следует, что если $g = g_1 g_2 \dots g_d$ — разложение g в произведение независимых циклов и $b(s_1^{(j)}, \dots, s_k^{(j)}; g_j)$ — число конфигураций с характеристикой $(s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, \dots, s_k^{(j)})$, являющихся сужением на орбиту X_j всего множества конфигураций, инвариантных при действии цикла g_j , то

$$b_m(s_1, s_2, \dots, s_k; g) := \sum_{\substack{s_1^{(1)} + s_2^{(2)} + \dots + s_k^{(d)} = s_1 \\ \dots \\ s_1^{(1)} + s_2^{(2)} + \dots + s_k^{(d)} = s_k}} b(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_k^{(1)}; g_1) \dots \\ \dots b(s_1^{(d)}, s_2^{(d)}, \dots, s_k^{(d)}; g_d). \quad (7.10)$$

Для $i = 1, 2, \dots, d$ рассмотрим производящие функции вида

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_k; g_i) := \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_k)} b(s_1, s_2, \dots, s_k; g_i) z_1^{s_1} z_2^{s_2} \dots z_k^{s_k}.$$

Из (7.8) и (7.10) следует, что

$$\Phi_n(z_1, z_2, \dots, z_k; g) = \varphi(z_1, z_2, \dots, z_k; g_1) \varphi(z_1, z_2, \dots, z_k; g_2) \dots \\ \dots \varphi(z_1, z_2, \dots, z_k; g_d). \quad (7.11)$$

Пусть $\sigma(g(x)) = \sigma(x)$ для $g \in G$ и всех $x \in X$, и пусть \bar{y} — постоянное значение, которое конфигурация σ принимает на орбите X_j размера l , соответствующей циклу g_j подстановки g . Если $\omega(\bar{y}) = (s_1, s_2, \dots, s_k)$, то характеристика сужения конфигурации \bar{y} *

σ на орбиту X_j имеет вид $(s_1l, s_2l, \dots, s_kl)$. Следовательно,

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_k; g_j) = \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_k)} a(s_1, s_2, \dots, s_k) z_1^{s_1^j} z_2^{s_2^j} \dots z_k^{s_k^j}. \quad (7.12)$$

Это означает, что производящая функция $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_k; g_j)$ зависит только от величины l орбиты, соответствующей циклу g_j , подстановки $g \in G$. Из формул (7.2) и (7.12) следует, что

$$\Phi(z_1, z_2, \dots, z_k; g_j) = F(z_1^j, z_2^j, \dots, z_k^j). \quad (7.13)$$

Теперь из (7.9), (7.11) и (7.13) находим

$$\begin{aligned} \Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_k) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_m = m}} C(j_1, j_2, \dots, j_m; G) \times \\ &\times F^{j_1}(z_1, z_2, \dots, z_k) F^{j_2}(z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2) \dots F^{j_m}(z_1^m, z_2^m, \dots, z_k^m). \end{aligned}$$

С учетом (7.4) данная формула эквивалентна формуле (7.5). Теорема доказана.

2. Первичные спецификации. Рассмотрим совокупность отображений $\sigma: X \rightarrow Y$, где $X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, группа G , действующая на множестве X , определяет отношение G -эквивалентности на множестве Y^X . В качестве характеристики элемента y , возьмем n -мерный вектор $\omega(y_i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, у которого единственная i -я координата равна единице, $1 \leq i \leq n$. Тогда производящая функция весовой спецификации множества Y имеет вид

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 + z_2 + \dots + z_n. \quad (7.14)$$

Ясно, что конфигурация σ тогда и только тогда имеет первичную спецификацию $[\sigma] = [y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}]$, когда вес конфигураций равен $\omega(\sigma) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Поэтому, если $C_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; G)$ — число конфигураций первичной спецификации $[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}]$, не эквивалентных относительно группы G , то производящая функция

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_n; G) =$$

$$= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m} C_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; G) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n} \quad (7.15)$$

согласно теореме Пойа, имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_n; G) &= Z(z_1 + \dots + z_n, z_1^2 + \dots \\ &\dots + z_n^2, \dots, z_1^m + \dots + z_n^m; G), \quad (7.16) \end{aligned}$$

где $Z(t_1, t_2, \dots, t_m; G)$ — циклический индекс группы G . Из фор-

мулы (7.16) при $z_1 = \dots = z_n = 1$ следует формула для числа эквивалентности, порождаемых группой G на множестве Y^x :

$$C_{nm}(G) = Z(n, n, \dots, n; G). \quad (7.17)$$

1°. Рассмотрим случай, когда $G = S_m$, где S_m — симметрическая группа степени m . Так как $C_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; S_m) = 1$, то из (7.15) следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_n; S_m) t^m = \prod_{j=1}^n (1 - z_j t)^{-1}. \quad (7.18)$$

Правую часть равенства преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n (1 - z_j t)^{-1} &= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \ln (1 - z_j t)^{-1} \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n z_j^k \right) \frac{t^k}{k} \right\}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Используя (7.16) и (7.19), из (7.18) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} Z \left(\sum_{j=1}^n z_j, \sum_{j=1}^n z_j^2, \dots, \sum_{j=1}^n z_j^m; S_m \right) t^m &= \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n z_j^k \right) \frac{t^k}{k} \right\}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Полагая в обеих частях последнего равенства $z_1 = \dots = z_n = 1$, с учетом равенства (7.17) находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}(S_m) t^m = (1 - t)^{-n}.$$

Из этого равенства следует, что

$$C_{nm} = C_{nm}(S_m) = \binom{n+m-1}{m}.$$

Этот результат хорошо известен, так как C_{nm} есть число m -изборок в коммутативном несимметричном n -базисе.

2°. Рассмотрим теперь случай, когда $G = C_m$, где C_m — циклическая группа подстановок степени m , соответствующих всем возможным циклическим сдвигам. В этом случае отображение σ эквивалентно отображению σ' , если векторы $(\sigma(1), \dots, \sigma(m))$ и $(\sigma'(1), \dots, \sigma'(m))$ отличаются циклическим сдвигом. Если $D_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; C_m)$ — число неэквивалентных отображений первичной спецификации $[y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}]$, то для производящей

функции

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_n; C_m) =$$

$$= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} D_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; C_m) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n} \quad (7.21)$$

в силу теоремы Пойа имеем

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_n; C_m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \varphi(d) (z_1^d + z_2^d + \dots + z_n^d)^{m/d}, \quad (7.22)$$

так как циклический индекс группы C_m имеет вид (см. (5.12) гл. I)

$$Z(t_1, t_2, \dots, t_m; C_m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \varphi(d) t_d^{m/d}, \quad (7.23)$$

где $\varphi(d)$ — функция Эйлера и суммирование ведется по всем делителям числа m . Из (7.21) и (7.22) вытекает следующая формула:

$$D_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; C_m) = \frac{1}{m} \sum_{d|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \varphi(d) \frac{(m/d)!}{(\alpha_1/d)! \dots (\alpha_n/d)!} \quad (7.24)$$

где суммирование осуществляется по всем делителям $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — наибольшего общего делителя чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Из формул (7.17) и (7.23) получаем выражение для общего числа классов эквивалентности, т. е. решение задачи о числе циклических последовательностей (см. (3.56) гл. II):

$$N_{nm} = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \varphi(d) n^{m/d}. \quad (7.25)$$

3°. Задача об ожерельях. Пусть имеется запас из n шариков, содержащих δ_i шариков цвета c_i , $i = 1, 2, \dots, k$, $n = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k$. Будем располагать $m \leq n$ выбранных из запаса шариков в m равноотстоящих точках окружности. Класс расположений шариков на окружности, отличающихся циклическим сдвигом, будем называть *ожерельем*.

Если Y — множество заданных некоторым образом меток n шариков и $X = \{1, 2, \dots, m\}$, то каждое расположение m шариков на окружности определяется некоторым отображением $\sigma: X \rightarrow Y$. Каждому ожерелью ставится во взаимно однозначное соответствие класс эквивалентности на множестве Y^X , индуцируемый циклической группой C_m .

Для числа ожерелей первичной спецификации цветов $[c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_k^{\alpha_k}]$, где α_i — число шариков цвета c_i в ожерелье,

$1 \leq i \leq k$, имеет место формула

$$N_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{1}{m} \sum_{d|\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}} \varphi(d) \frac{(m/d)!}{(\alpha_1/d)! \dots (\alpha_k/d)!} \delta_1^{\alpha_1/d} \dots \delta_k^{\alpha_k/d}, \quad (7.26)$$

где суммирование осуществляется по всем делителям $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ наибольшего общего делителя чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Вывод этой формулы аналогичен выводу формулы (7.24).

Производящая функция весовой спецификации фигур в данном случае имеет вид

$$\Phi_m(z_1, z_2, \dots, z_k; C_m) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k = m} N_m(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_k^{\alpha_k} = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \varphi(d) (\delta_1 z_1^d + \delta_2 z_2^d + \dots + \delta_k z_k^d)^{m/d}. \quad (7.27)$$

Формула (7.26) следует из равенства (7.27).

3. Деревья. Будем рассматривать множество Y всевозможных корневых деревьев, у которых все вершины, кроме корня, одинаковы. На множестве Y определим одномерную характеристику, считая, что вес дерева $y \in Y$ равен числу содержащихся в нем вершин. Тогда функция весовой спецификации множества Y имеет вид

$$r(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n, \quad (7.28)$$

где r_n — число корневых деревьев с n вершинами.

Очевидно, что каждому дереву с m ребрами в корне можно поставить во взаимно однозначное соответствие m корневых деревьев. Поэтому каждому корневому дереву можно поставить во взаимно однозначное соответствие класс эквивалентности на множестве Y^X , $X = \{1, 2, \dots, m\}$, где отношение эквивалентности определяется S_m — симметрической группой степени m . Производящая функция весовой спецификации неэквивалентных фигур имеет вид

$$r_m(z) = \sum_{n=m+1}^{\infty} r_{nm} z^n, \quad (7.29)$$

где r_{nm} — число деревьев с n вершинами и m ребрами, инцидентными корню. Согласно теореме Поля имеем

$$r_m(z) = z Z(r(z), r(z^2), \dots, r(z^m); S_m), \quad (7.30)$$

где множитель z в правой части учитывает необходимость добавления корневой вершины к фигуре из m корневых деревьев для образования единого корневого дерева.

Из выражения производящей функции для циклового индикатора симметрической группы S_m следует, что производящая функция для циклического индекса S_m имеет вид (см. (3.9) гл. IV)

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z(u_1, u_2, \dots, u_m; S_m) t^m = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \frac{t^k}{k} \right). \quad (7.31)$$

Из равенства (7.31) следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z(r(z), r(z^2), \dots, r(z^m); S_m) t^m = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} r(z^k) \frac{t^k}{k} \right). \quad (7.32)$$

Теперь из очевидного равенства $r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(z)$, $r_0(z) = z$, и из (7.30) и (7.32) получаем известное соотношение Кэли — Нойса:

$$r(z) = z \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(z^k)}{k} \right). \quad (7.33)$$

Отсюда можно получить рекуррентное соотношение

$$r_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r_{n-k+1} \sum_{d|n} dr_d. \quad (7.34)$$

Действительно, из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(z^n)}{n}$$

следует, что

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} dr_d. \quad (7.35)$$

Далее, из соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right), \quad A_0 = 1, \quad (7.36)$$

вытекает, что

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k A_{n-k}. \quad (7.37)$$

Из (7.33) и (7.36), согласно (7.37), следует, что

$$r_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k r_{n-k+1}. \quad (7.38)$$

Подставляя в этом равенстве вместо a_k его выражение из формулы (7.35), приходим к соотношению (7.34).

4. Связные графы. Рассмотрим в качестве множества Y совокупность всех связных графов. Выбирая, как и выше, в качестве характеристики элемента $y \in Y$ число вершин, рассмотрим производящую функцию весовой спецификации множества Y :

$$c(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad (7.39)$$

где c_n — число связных графов с n вершинами. Каждому графу с m компонентами связности можно поставить во взаимно однозначное соответствие класс эквивалентности на множестве Y^X , где $X = \{1, 2, \dots, m\}$, а отношение эквивалентности определяется симметрической группой S_m . Производящая функция весовой спецификации неэквивалентных фигур записывается следующим образом:

$$g_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} g_{nm} z^n,$$

где g_{nm} — число графов с n вершинами и m компонентами связности, причем $g_{n0} = 1$. Из теоремы Пойа следует, что

$$g_n(z) = Z(c(z), c(z^2), \dots, c(z^n); S_m). \quad (7.40)$$

Обозначим через g_n общее число графов с n вершинами и положим $g_0 = 1$. Из очевидного равенства $g_n = \sum_{m=0}^n g_{nm}$ следует, что

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(z). \quad (7.41)$$

Из (7.40) и (7.41) с учетом соотношения (7.32), верного для произвольной производящей функции $r(z)$, находим

$$g(z) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(z^k)}{k} \right\}. \quad (7.42)$$

В силу формул (7.35) и (7.37) из (7.42) следует, что

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k g_{n-k}, \quad (7.43)$$

где

$$a_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} d c_d. \quad (7.44)$$

Из соотношений (7.43) и (7.44) можно получить формулы для определения числа связных графов. Применяя формулу

обращения к равенству (7.44), получим

$$c_n = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} a_{n/d}, \quad (7.45)$$

$$a_n = g_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k a_k g_{n-k}. \quad (7.46)$$

Эти формулы позволяют получить выражение c_n для числа связных графов с n вершинами через общее число графов g_n .

Упражнение. 1. Пусть $Z(S_n) = Z(t_1, t_2, \dots, t_n; S_n)$ — циклический индекс S_n — симметрической группы степени n . Вывести рекуррентное соотношение

$$Z(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z(S_{n-k}) t_k.$$

2. Показать, что циклический индекс знакопеременной группы A_n степени n следующим образом выражается через циклический индекс симметрической группы S_n :

$$Z(t_1, t_2, \dots, t_n; A_n) = Z(t_1, t_2, \dots, t_n; S_n) + Z(t_1, -t_2, t_3, -t_4, \dots; S_n).$$

3. Пусть $\omega: X \rightarrow K$ — весовая функция, отображающая конечное множество X в коммутативное кольцо K и постоянная на орбитах группы подстановок G , действующей на множестве X . Значение $\omega(x)$ есть вес элемента $x \in X$; под весом орбиты $X_i \subseteq X$, обозначаемым $\omega(X_i)$, понимаем вес $\omega(x)$ для $x \in X_i$, $1 \leq i \leq N(G)$, где $N(G)$ — общее число орбит. Показать, что

$$\sum_{i=1}^{N(G)} \omega(X_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} \omega(x).$$

4. Пусть $G|Y$ — сужение множества подстановок группы G на множество Y , где Y — объединение орбит группы G , действующей на множестве X . Показать, что если $j_1(g|Y)$ — число исподвижных точек сужения $g \in G$ на множество Y , то число орбит сужения группы G на Y равно

$$N(G|Y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} j_1(g|Y).$$

5. Прямое произведение групп G и H , действующих соответственно на множествах X и Y , $X \cap Y = \emptyset$, есть группа $G \times H$ степени $|X| + |Y|$ и порядка $|G| \cdot |H|$, действующая на множестве $U = X \cup Y$ следующим образом: если $g \times h \in G \times H$, то

$$g \times h(u) = \begin{cases} g(u), & u \in X, \\ h(u), & u \in Y. \end{cases}$$

Показать, что для циклических индексов групп G , H и $G \times H$ имеет место равенство

$$Z(t_1, t_2, \dots, t_n; G \times H) = Z(t_1, t_2, \dots, t_n; G) \cdot Z(t_1, t_2, \dots, t_n; H).$$

ГЛАВА VI
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ
В КОМБИНАТОРНОМ АНАЛИЗЕ

**§ 1. Вероятностные распределения
и случайные величины**

1. Вероятностное пространство. Рассмотрим некоторый эксперимент, который допускает неограниченные повторения при фиксированном комплексе условий и результаты которого случайны, т. е. не могут быть предсказаны до его проведения. Такой эксперимент называется *случайным испытанием*, а его результаты — *исходами* случайного испытания.

Множество Ω , элементы которого можно интерпретировать как исходы случайного испытания, будем называть *пространством элементарных событий*, а его элементы — *элементарными событиями*. Система подмножеств \mathcal{F} пространства элементарных событий Ω называется *σ-алгеброй*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) из условия $A \in \mathcal{F}$ следует, что $\bar{A} \in \mathcal{F}$;
- 3) если $\{A_n\}$ — последовательность множеств из \mathcal{F} , то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Отметим достаточность наличия одного включения, так как другое получается в качестве следствия в силу равенства:

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$. Если на множестве Ω задана некоторая σ-алгебра его подмножеств \mathcal{F} , то пару $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$ называют *измеримым пространством*. Любое подмножество $A \subseteq \Omega$ называется *событием*. Говорят, что событие A является частным случаем события B , если $A \subseteq B$. Событие, состоящее из элементарных событий, принадлежащих либо событию $A \in \mathcal{F}$, либо событию $B \in \mathcal{F}$, есть сумма этих событий $A \cup B$. Произведение событий $A \cap B$ состоит из элементарных событий, принадлежащих одновременно $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$. Разность событий $A \setminus B$ есть множество элементарных событий, принадлежащих $A \in \mathcal{F}$, но не принадлежащих $B \in \mathcal{F}$. Событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ называется *отрицанием* события $A \in \mathcal{F}$. Все множество Ω называется *достоверным событием*, а пустое множество $\emptyset = \bar{\Omega}$ — *невозможным событием*. События $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$ называются *несовместными*, если $A \cap B = \emptyset$.

Например, эксперимент состоит в том, что наугад бросается кубик, грани которого помечены числами от 1 до 6. Выпадение некоторой грани в результате одного бросания является элементарным исходом. В качестве событий можно рассматривать следующие: A — число на выпавшей грани нечетное; B — число на выпавшей грани простое; C — число на выпавшей грани четное. Очевидно, что $A \subseteq B$, $C = \bar{A}$, $A \cup C = \Omega$.

Вероятность P есть числовая функция, заданная на σ -алгебре \mathcal{F} измеримого пространства (Ω, \mathcal{F}) и удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) P(A) \geq 0 \text{ для любого } A \in \mathcal{F};$$

2) для всякой последовательности $\{A_i\}$ попарно несовместных событий справедливо равенство $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;

$$3) P(\Omega) = 1.$$

Тройка (Ω, \mathcal{F}, P) называется вероятностным пространством.

Из определения вероятности вытекает ряд ее очевидных свойств:

$$1. P(\emptyset) = 0, \text{ так как } \emptyset \cup \Omega = \Omega.$$

$$2. P(\bar{A}) + P(A) = 1, \text{ так как } A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

3. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$, так как $P(A) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$. Отсюда, в частности, следует, что $P(A) \leq 1$.

4. Для любых событий A_1, A_2, \dots, A_n

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k,$$

где

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Эта формула является одним из вариантов формул метода исключения — исключения, когда в качестве весов элементов берутся вероятности (см. (1.9) гл. II).

5. Для любых событий A_1, A_2, \dots, A_n справедливо неравенство

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k),$$

которое следует из неравенств Бонферрони (см. (2.5), гл. II).

Если пространство элементарных событий Ω дискретно, т. е. $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, где ω_1, ω_2 — элементарные события, то для вероятности события A справедливо равенство $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$,

где суммирование ведется по всем элементарным событиям, принадлежащим A . Сумма ряда, стоящего в правой части равенства,

всегда определена, так как он абсолютно сходится в силу условий $P(\omega) \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.

В частности, в указанном выше примере с бросаниями кубика положим $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6$. Тогда $P(A) = P(C) = 1/2$, $P(B) = 2/3$.

Для событий $A, B \in \mathcal{F}$ при $P(B) > 0$ условная вероятность события A при условии, что событие B произошло, определяется формулой

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Для последовательности событий (B_1, B_2, \dots) такой, что $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots$, и события $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ справедлива формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) P(A|B_j).$$

Так, в приведенном выше примере условная вероятность выпадения грани с четным номером при условии, что этот номер — простое число, равна $P(C|B) = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$. Аналогично, условная вероятность выпадения грани с нечетным номером при условии его простоты равна $P(A|B) = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$.

Если теперь D — событие, состоящее в том, что номер выпавшей грани делится на 3, то согласно формуле полной вероятности

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(C)P(D|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

События A_1, A_2, \dots, A_n взаимно независимы, если $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$ для любых $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Ясно, что если события A и B независимы, то $P(A|B) = P(A)$.

В рассматриваемом примере события A и D (соответственно C и D) независимы, так как $P(D|A) = P(D|C) = P(D) = 1/3$.

2. Случайные величины. Случайной величиной ξ на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) называется функция $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, отображающая Ω в множество действительных чисел \mathbf{R} , такая, что для любого $x \in \mathbf{R}$ множество $\{\xi < x\} = \{\omega: \xi(\omega) < x\}$ принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} . Функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$ называется функцией распределения случайной величины ξ . Функция $F_\xi(x)$ определена на всей действительной оси, не убывает и непрерывна слева. Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1.$$

Если случайная величина ξ дискретна, т. е. принимает с положительными вероятностями только значения x_1, x_2, \dots , $x_1 < x_2 < \dots$, то вероятности

$$P(\xi = x_k) = F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k), \quad \sum_{x_k} P(\xi = x_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

определяют распределение ξ .

Случайная величина ξ имеет *распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$, если

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Функция распределения в этом случае имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k < x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если для ее функции распределения $F_\xi(x)$ существует такая функция $f_\xi(x) \geq 0$, что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(y) dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(y) dy = 1.$$

Функция $f_\xi(x)$ называется *плотностью распределения* ξ .

Примером непрерывной случайной величины может служить случайная величина, имеющая *нормальное распределение* с параметрами (m, σ) , определяемое функцией распределения вида

$$F_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(u-m)^2/(2\sigma^2)} du,$$

где $\sigma > 0$.

Для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, определенных на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$, вектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется *n-мерной случайной величиной*, а функция $F(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n)$ — ее *функцией распределения*. Случайная величина $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ непрерывна, если существует функция $f(y_1, \dots, y_n) \geq 0$, называемая *плотностью распределения*, такая, что

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = 1. \end{aligned}$$

Случайная величина (ξ_1, \dots, ξ_n) имеет независимое n -мерное нормальное распределение, если плотность ее распределения имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, \dots, x_n)},$$

где $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ — положительно определенная квадратичная форма и $|A|$ — детерминант матрицы $A = (a_{ij})$.

Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n называются *независимыми*, если $F(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n)$. Случайные величины бесконечной последовательности (ξ_1, ξ_2, \dots) независимы, если для них последнее равенство выполнено при любых n . Если n -мерная случайная величина (ξ_1, \dots, ξ_n) непрерывна и ξ_1, \dots, ξ_n независимы, то для плотностей распределений справедливо равенство $f(x_1, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \dots f_{\xi_n}(x_n)$. Для дискретных независимых случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n имеет место формула

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) \dots P(\xi_n = x_n).$$

§ 2. Моменты случайных величин

1. Интеграл Стильесса. Определим интеграл Стильесса для функции распределения $F(x)$ и функции $g(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ действительной прямой. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, так, чтобы $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, и образуем суммы

$$s_n := \sum_{i=1}^n m_i [F(x_i) - F(x_{i-1})], \quad S_n := \sum_{i=1}^n M_i [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

где m_i и M_i — соответственно нижняя и верхняя границы функции $g(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Из равномерной непрерывности $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $M_i - m_i < \varepsilon$ при $x_i - x_{i-1} < \delta$ для всех $1 \leq i \leq n$. Таким образом, $S_n - s_n < \varepsilon [F(b) - F(a)]$, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_a^b g(x) dF(x). \quad (2.1)$$

Этот предел называется *интегралом Стильесса* от функции $g(x)$ по функции $F(x)$.

Если $F(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $F'(x)$, то существует такая точка \tilde{x}_i , $x_{i-1} \leq \tilde{x}_i \leq x_i$, что $F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})F'(\tilde{x}_i)$. В этом случае интеграл Стильесса

сводится к обычному интегралу Римана и

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \int_a^b g(x) F'(x) dx.$$

Соответствующий интеграл Стильеса с бесконечными пределами определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b g(x) dF(x).$$

В дальнейшем будем считать, что интеграл Стильеса от функции $g(x)$ по функции $F(x)$ существует, если существует соответствующий интеграл от функции $|g(x)|$.

2. Моменты. Пусть случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . *Математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x), \quad (2.2)$$

где $F(x)$ — функция распределения ξ . Если ξ — дискретная случайная величина, такая, что $P(\xi = x_k) > 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то соответствующий интеграл Стильеса сводится к сумме и математическое ожидание имеет вид

$$M\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k P(\xi = x_k). \quad (2.3)$$

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x)$ математическое ожидание выражается интегралом Римана:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx. \quad (2.4)$$

Из свойств интеграла Стильеса вытекают свойства математического ожидания:

- 1) $M(a\xi + b) = aM\xi + b$, где a и b — постоянные;
- 2) $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$, если существуют $M\xi_1$ и $M\xi_2$;
- 3) если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, то

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2; \quad (2.5)$$

4) если $h(\xi)$ — неотрицательная функция случайной величины ξ , то для любого $\varepsilon > 0$

$$P(h(\xi) \geq \varepsilon) \leq Mh(\xi)/\varepsilon. \quad (2.6)$$

Это неравенство вытекает из очевидной оценки

$$Mh(\xi) \geq \int_{x:h(x) \geq \varepsilon}^{\infty} h(x) dF(x) \geq \varepsilon P(h(\xi) \geq \varepsilon).$$

Дисперсия случайной величины ξ определяется равенством

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \quad (2.7)$$

Из определения вытекают следующие свойства дисперсии:

1) $D(C\xi) = C^2 D\xi$, где C — постоянная;

2) если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, то

$$D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2. \quad (2.8)$$

Из свойства 4) математического ожидания вытекает неравенство Чебышева:

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq D\xi/\varepsilon^2. \quad (2.9)$$

Если для случайной величины ξ существует величина $M_k = M\xi^{(k)}$, то она называется ее *моментом k-го порядка*. Аналогично $M(\xi)^{(k)}$ и $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$, если они существуют, называются соответственно *абсолютным* и *центральным моментами k-го порядка*. Из свойств математического ожидания следуют соотношения

$$M_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu_j M_1^{k-j}, \quad (2.10)$$

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} M_j M_1^{k-j}, \quad (2.11)$$

где $\mu_0 = M_0 = 1$ и $k = 0, 1, \dots$

Факториальные и биномиальные моменты определяются равенствами

$$[M]_k = M(\xi)_k, \quad (2.12)$$

$$B_k = M\binom{\xi}{k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.13)$$

где $(\xi)_k = \xi(\xi - 1)\dots(\xi - k + 1)$ и $\binom{\xi}{k} = (\xi)_k/k!$, $k = 1, 2, \dots$, $(\xi)_0 = 1$. Используя $s(k, j)$ и $\sigma(k, j)$ — числа Стирлинга первого и второго рода, нетрудно установить равенства

$$[M]_k = B_k \cdot k!, \quad (2.14)$$

$$[M]_k = \sum_{j=0}^k s(k, j) M_j, \quad (2.15)$$

$$M_k = \sum_{j=0}^k \sigma(k, j) [M]_j. \quad (2.16)$$

В качестве примера вычислим некоторые моменты для нормального распределения и распределения Пуассона. Центральный момент k -го порядка для нормального распределения с параметрами (m, σ) имеет вид

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Преобразованием $z = (x - m)/\sigma$ интеграла в правой части этого равенства выражение для μ_k приводим к виду

$$\mu_k = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^k e^{-z^2/2} dz.$$

Отсюда следует, что $\mu_k = 0$ для $k = 2r + 1$, $r = 0, 1, \dots$. Вычисление μ_{2r} , $r = 1, 2, \dots$, проведем с использованием тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{t}}, \quad t > 0.$$

Так как интеграл сходится равномерно для $t > 0$, то, дифференцируя его r раз по t , получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} e^{-tx^2/2} dx = \frac{(2r)!}{2^r r!} t^{-r-1/2}.$$

Подавая в обеих частях этого равенства $t = 1$, окончательно получаем

$$\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{2^r r!} \sigma^{2r}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Для закона Пуассона с параметром $\lambda > 0$ имеем следующее выражение для k -го биномиального момента:

$$B_k = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}.$$

Отсюда следует, что

$$B_k = \lambda^k / k!, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.18)$$

3. Индикаторы. Рассмотрим случайные события A_1, A_2, \dots, A_n . Случайная величина ξ_i называется *индикатором* события A_i , если

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & A_i \text{ наступило при испытании,} \\ 0, & A_i \text{ не наступило при испытании.} \end{cases}$$

Если ξ — случайная величина, равная числу наступивших при испытании событий из совокупности A_1, A_2, \dots, A_n , то $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

Рассмотрим тождество

$$\binom{\xi}{k} = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \binom{\xi_1}{k_1} \binom{\xi_2}{k_2} \dots \binom{\xi_n}{k_n},$$

где суммирование ведется по всем решениям уравнения $k_1 + \dots + k_n = k$ в целых неотрицательных числах. Возьмем математические ожидания от обеих частей этого равенства. Находим выражение для k -го биномиального момента случайной величины ξ :

$$B_{kn} = \sum_{1 < j_1 < \dots < j_k < n} P(\xi_{j_1} = 1, \dots, \xi_{j_k} = 1). \quad (2.19)$$

Из формулы

$$B_{kn} = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} P(\xi = j), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.20)$$

следует формула, дающая выражение распределения ξ через биномиальные моменты:

$$P(\xi = r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} B_{kn}, \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

В справедливости этой формулы легко убедиться непосредственной подстановкой в нее выражения для B_{kn} . Теперь, если $P(A_{j_1} \dots A_{j_k})$ — вероятность наступления событий A_{j_1}, \dots, A_{j_k} и

$$S_{kn} = \sum_{1 < j_1 < \dots < j_k < n} P(A_{j_1} \dots A_{j_k}),$$

то в силу того, что

$$P(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = P(\xi_{j_1} = 1, \dots, \xi_{j_k} = 1), \quad (2.22)$$

получаем равенство

$$B_{kn} = S_{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.23)$$

Если $P_n(r)$ — вероятность наступления ровно r событий из совокупности A_1, \dots, A_n , то из равенства $P_n(r) = P(\xi = r)$ следует, что

$$P_n(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_{kn}, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad (2.24)$$

т. е. мы пришли к формулам метода включения — исключения, когда веса элементов задаются вероятностным распределением. Для упрощения вычислений при оценке распределения случайной величины ξ могут быть использованы неравенства

Бонферрони. Согласно второму из неравенств (2.6) гл. II имеем

$$0 \leq P_n(r) = \sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} B_{kn} \leq \binom{r+2v}{r} B_{r+2v,n}, \quad (2.25)$$

$$0 \leq v \leq (n-r)/2, \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

Используя эти неравенства, при некоторых условиях найдем предельное выражение для распределения (2.21), когда $n \rightarrow \infty$.

4. Пределная теорема. Установим условия, при которых распределение случайной величины ξ при $n \rightarrow \infty$ будет стремиться к распределению Пуассона.

Теорема 4. Если при любом $k = 0, 1, \dots$ для биномиальных моментов B_{kn} случайной величины ξ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{kn} = \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (2.26)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \quad r = 0, 1, \dots \quad (2.27)$$

Иными словами, теорема утверждает, что из сходимости при $n \rightarrow \infty$ биномиальных моментов распределения ξ к биномиальным моментам распределения Пуассона с параметром λ следует сходимость и самого распределения ξ к распределению Пуассона с тем же параметром.

Для доказательства теоремы возьмем произвольное $r > 0$ и выберем такое v , что при фиксированном r

$$\frac{\lambda^{r+2v}}{r!(2v)!} < \frac{r}{\mu_0 \lambda}. \quad (2.28)$$

Рассмотрим неравенство

$$\left| P_n(r) - \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \right| \leq R_1 + R_2 + R_3, \quad (2.29)$$

где

$$R_1 = \left| P_n(r) - \sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} B_{kn} \right|,$$

$$R_2 = \left| \sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \left[B_{kn} - \frac{\lambda^k}{k!} \right] \right|,$$

$$R_3 = \left| \sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \right|.$$

Из неравенства $R_3 < \frac{\lambda^{r+2v}}{r!(2v)!} e^\lambda$ и условия (2.28), определяющего

выбор v , следует, что

$$R_1 < e/3. \quad (2.30)$$

Из равенства (2.26) вытекает существование такого n_1 , что для всех $n > n_1$

$$\left| B_{r+2v,n} - \frac{\lambda^{r+2v}}{(r+2v)!} \right| < \frac{\epsilon}{6 \binom{r+2v}{r}}.$$

Из неравенства (2.28) следует, что для $n > n_1$ и выбранном v $\binom{r+2v}{r} B_{r+2v,n} < \frac{\epsilon}{3}$, а следовательно, согласно неравенству (2.25)

$$R_1 < e/3. \quad (2.31)$$

Наконец, из равенства (2.26) следует существование такого n_2 , что для всех $n > n_2$

$$\sup_{r < k < r+2v-1} \binom{k}{r} \left| B_{kn} - \frac{\lambda^k}{k!} \right| < \frac{\epsilon}{6v}.$$

Это означает, что для всех $n > n_2$

$$R_2 < e/3. \quad (2.32)$$

Выберем $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Тогда для всех $n > n_3$ из неравенств (2.29)–(2.32) следует, что

$$\left| P_n(r) - \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \right| < \epsilon.$$

Этим теорема доказана.

5. Формула обращения. Формулу обращения типа (2.24), дающую выражение вероятностного распределения через биномиальные моменты, можно получить и в общем случае, когда дискретная случайная величина не обязательно ограниченная. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если биномиальные моменты B_k дискретной случайной величины ξ существуют для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ и

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} B_k^{1/k} < \infty, \quad (2.33)$$

то

$$P(\xi = r) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\binom{k}{r}}{(1+\rho)^{k+1}} \sum_{j=r}^k (-1)^{j-r} \binom{k-r}{j-r} d^{k-j} B_j, \quad (2.34)$$

где d — неотрицательное число, большее $\rho^2 - 1$.

Если $\rho < 1$, то можно выбрать $d = 0$ и формула (2.34) принимает вид

$$P(\xi = r) = \sum_{k=r}^{\infty} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} B_k, \quad r = 0, 1, \dots \quad (2.35)$$

Например, для случайной величины ξ , имеющей распределение Пуассона с параметром λ , в силу формулы (2.18) имеем $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k^{1/k} = 0$. Поэтому из формул (2.35) и (2.18) следует, что

$$P(\xi = r) = \sum_{k=r}^{\infty} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \quad r = 0, 1, \dots$$

Фактически в теореме 2 сформулированы условия, при которых дискретное распределение определяется однозначно своими биномиальными моментами, и дано выражение распределения через эти моменты. Вопрос об однозначности определения вероятностного распределения по его моментам наиболее важное значение имеет при изучении сходимости распределений при наложении сходимости соответствующих моментов.

Теорема 3. Пусть $\{F_n(x)\}$ — последовательность функций распределения, все моменты которых

$$M_{kn} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_n(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

конечны, и пусть при каждом $k \geq 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{kn} = M_k$. Тогда существует подпоследовательность $\{F_{n_j}(x)\}$ последовательности $\{F_n(x)\}$, сходящаяся в точках непрерывности к функции распределения $F(x)$, имеющей M_1, M_2, \dots своими моментами. Если эти моменты однозначно определяют $F(x)$, то последовательность $\{F_n(x)\}$ сходится в точках непрерывности к $F(x)$.

Известно, что нормальное распределение и распределение Пуассона однозначно определяются своими моментами. Общий признак однозначности определения момента μ_j , $j = 0, 1, \dots$ распределения состоит в том, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_j} \right)^{1/(2j)} = \infty.$$

Например, для биномиального распределения $P_j = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$, $p + q = 1$, $j = 0, 1, \dots, n$, факториальные моменты имеют вид

$$[M]_{kk} = (n)_k p^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Если при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие $pr \rightarrow \lambda$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [M]_{kn} = \lambda^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Так как λ^k есть k -й факториальный момент для распределения Пуассона с параметром λ , то отсюда следует, что биномиальное распределение при $n \rightarrow \infty$, $pr \rightarrow \lambda$, сходится к распределению Пуассона с параметром λ .

§ 3. Неотрицательные целочисленные матрицы

1. Число матриц. Пусть матрица $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, имеет в качестве элементов целые неотрицательные числа и $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = N$. Каждой такой матрице можно поставить во взаимно однозначное соответствие N -мультимножество над $n+m$ -множеством. Следовательно, число таких матриц равно $\binom{n+m}{N}$. *Линией* матрицы будем называть ее строку или столбец. Таким образом, матрица $n \times m$ имеет $n+m$ линий. Линия называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.

Обозначим через $C_r(N; n, m)$ число матриц $n \times m$ рассматриваемого вида, имеющих r нулевых линий, $r = 0, 1, \dots, n+m$. Покажем, что

$$C_r(N; n, m) = \sum_{k=r}^{n+m} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \binom{(n-i)(m-k+i)+N-1}{N},$$

$$r = 0, 1, \dots, n+m. \quad (3.1)$$

Занумеруем некоторым образом линии матрицы A и обозначим через A_j свойство, состоящее в том, что j -я линия является нулевой, а через $M(A_{j_1} \dots A_{j_k})$ — число матриц, обладающих свойствами A_{j_1}, \dots, A_{j_k} . Если среди линий, занумерованных j_1, \dots, j_k , имеется i строк и $k - i$ столбцов, то

$$M(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = \binom{(n-i)(m-k+i)+N-1}{N}. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n+m} M(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \times$$

$$\times \binom{(n-i)(m-k+i)+N-1}{N}. \quad (3.3)$$

Теперь, применяя формулу (1.9) гл. II метода включения — исключения, приходим к равенству (3.1).

2. Асимптотические формулы. При больших значениях n и m вычисления по формуле (3.1) представляются достаточно сложными. Поэтому естественно на основе этой точной формулы попытаться получить асимптотическое представление для $C_r(N; n, m)$ при $N, n, m \rightarrow \infty$. Для получения асимптотических формул удобно сформулировать соответствующую вероятностную задачу. Будем считать, что на множество целочисленных неотрицательных $n \times m$ -матриц задано вероятностное распределение, полагая, что каждая матрица при случайном испытании появляется с вероятностью $\binom{nm + N - 1}{N}^{-1}$. Рассмотрим случайную величину $\xi_{nm}(N)$, равную числу нулевых линий в случайно выбранной матрице A . Если A_j — событие, состоящее в том, что выбранная наугад матрица обладает свойством A_j , и ξ_j — индикатор события A_j , то из равенства

$$P(\tilde{A}_{j_1} \dots \tilde{A}_{j_k}) = M(A_{j_1} \dots A_{j_k}) \binom{nm + N - 1}{N}^{-1},$$

следует, что биномиальный момент $\xi_{nm}(N)$ имеет следующее выражение:

$$B_h(n, m) = \binom{nm + N - 1}{N}^{-1} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \binom{(n-i)(m-k+i) + N - 1}{N}, \quad (3.4)$$

и, следовательно,

$$P(\xi_{nm}(N) = r) = \frac{C_r(N; n, m)}{\binom{nm + N - 1}{N}} = \sum_{h=r}^{n+m} (-1)^{h-r} \binom{h}{r} B_h(n, m), \quad (3.5)$$

$$r = 0, 1, \dots, n + m.$$

Теорема 1. Пусть $n = \alpha m$, $0 < \alpha \leq 1$ и при $m \rightarrow \infty$ существует предел $N/m - 1$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда случайная величина $\xi_{nm}(N)$ в пределе имеет распределение Пуассона с параметром λ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\xi_{nm}(N) = r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}, \quad r = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

здесь $\lambda = 2e^{-1}$ при $\alpha = 1$ и $\lambda = e^{-1}$ при $0 < \alpha < 1$.

Для доказательства теоремы докажем две леммы.

Лемма 1. При выполнении условий теоремы имеет место следующее равенство:

$$E_m(h, t) = \binom{(n-t)(m-k+t) + N - 1}{N} \binom{nm + N - 1}{N}^{-1} =$$

$$= \exp \left\{ -N \left(\frac{t}{n} + \frac{k-t}{m} \right) + o(1) \right\}, \quad (3.7)$$

здесь $o(1) \rightarrow 0$ равномерно для всех $1 \leq i \leq k$, $k \leq m^{1-\delta}$, $1/2 < \delta < 1$.

Проводя элементарные преобразования, находим

$$E_m(k, i) = \prod_{j=(n-i)(m-k+i)}^{nm-1} \left(1 + \frac{N}{j}\right)^{-1}.$$

При выполнении условий теоремы имеем

$$\ln E_m(k, i) = -N \sum_{j=(n-i)(m-k+i)}^{nm-1} \frac{1}{j} + R_m,$$

причем для достаточно больших m

$$R_m < CN^2 \sum_{j=(n-i)(m-k)}^{nm-1} \frac{1}{j^2},$$

где C — абсолютная постоянная. Заменяя соответствующие суммы интегралами, нетрудно убедиться, что

$$\ln E_m(k, i) = -N \ln \frac{nm-1}{(n-i)(m-k+i)} + O\left(\frac{(\ln m)^2}{m^\delta}\right),$$

где остаточный член при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно для всех i и k , $1 \leq i \leq k \leq m^{1-\delta}$.

Разлагая в ряд логарифм в правой части последнего равенства, получаем

$$\ln E_m(k, i) = -N \left(\frac{i}{n} + \frac{k-i}{m} \right) + O\left(\frac{\ln m}{m^{2\delta-1}}\right) + O\left(\frac{(\ln m)^2}{m^\delta}\right),$$

где остаточные члены стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$ равномерно для всех $1 \leq i \leq k \leq m^{1-\delta}$. Этим лемма 1 доказана.

Лемма 2. При выполнении условий теоремы имеем

$$R_h(n, m) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} E_m(k, i) = \frac{1}{k!} \left(e^{-\gamma} + \frac{\alpha e^{-\gamma/\alpha}}{m^{1/\alpha-1}} \right)^k (1 + o(1)), \quad (3.8)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно для всех $1 \leq k \leq n+m$.

Используя очевидные равенства

$$\binom{n}{i} = \frac{n^i}{i!} \left(1 + O\left(\frac{1}{m^{2\delta-1}}\right)\right), \quad \binom{m}{k-i} = \frac{m^{k-i}}{(k-i)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{m^{2\delta-1}}\right)\right),$$

в которых остаточные члены при $m \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к нулю для всех $0 \leq i \leq k \leq m^{1-\delta}$, находим, что

$$R_h(n, m) = \frac{1}{k!} (e^{\ln m - N/m} + e^{\ln n - N/m})^k (1 + o(1)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ равномерно для всех $k \leq m^{1-\delta}$. Из этого равенства вытекает справедливость леммы 2.

Используя лемму 2, убеждаемся, что при $\alpha = 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_k(n, m) = \frac{1}{k!} (2e^{-\gamma})^k, \quad (3.9)$$

а при $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_k(n, m) = \frac{1}{k!} (e^{-\gamma})^k \quad (3.10)$$

для $k = 0, 1, \dots$. Отсюда справедливость теоремы вытекает на основе предельной теоремы § 2.

3. 0,1-матрицы. Рассмотрим класс $n \times m$ 0,1-матриц, имеющих ровно N элементов, равных 1. Общее число матриц рассматриваемого вида равно $\binom{nm}{N}$. Обозначим через $C_r^0(N; n, m)$ число таких матриц с r нулевыми линиями. Покажем, что

$$C_r^0(N; n, m) = \sum_{k=r}^{n+m} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \binom{(n-i)(m-k+i)}{N}, \quad (3.11)$$

$$r = 0, 1, \dots, n+m.$$

Вывод этой формулы проводится методом включения — исключения так же, как вывод формулы (3.1). Единственное отличие состоит в том, что в данном случае

$$M(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = \binom{(n-i)(m-k+i)}{N}.$$

На множестве $n \times m$ 0,1-матриц с N единицами зададим равномерное вероятностное распределение, считая, что при случайном испытании каждая матрица может появиться с вероятностью $\binom{nm}{N}^{-1}$. Из тех же соображений, что и в п. 2, следует, что k -й биномиальный момент случайной величины $\xi_{nm}^0(N)$, равной числу нулевых линий в случайной 0,1-матрице, имеет вид

$$B_k^0(n, m) = \binom{nm}{N}^{-1} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \binom{(n-i)(m-k+i)}{N}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $n = \alpha m$, $0 < \alpha \leq 1$ и при $m \rightarrow \infty$ существует предел $N/m - \ln m \rightarrow \gamma$. Тогда случайная величина $\xi_{nm}^0(N)$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ , причем

$$\lambda = \begin{cases} 2e^{-\gamma}, & \alpha = 1, \\ e^{-\gamma}, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом, при одних и тех же условиях, когда N — число распределаемых в ячейках матрицы $n \times m$ единиц — сравнительно мало и имеет порядок $m(\ln m + \gamma)$, асимптотические распределения случайных величин $\xi_{nm}(N)$ и $\xi_{nm}^*(N)$ совпадают.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 2

$$E_m^0(k, i) = \binom{(n-i)(m-k+i)}{N} \binom{nm}{N}^{-1} = \exp\left\{-N\left(\frac{i}{n} + \frac{k-i}{m}\right) + o(1)\right\},$$

т. е. $E_m^0(k, i)$ имеет такое же асимптотическое представление, что и величина $E_m(k, i)$ (см. формулу (3.7)). Отсюда следует, что биномиальные моменты $B_k(n, m)$ и $B_k^0(n, m)$ имеют одно и то же асимптотическое представление (3.8), из которого следуют два предельных выражения для $B_k^0(n, m)$ вида (3.9) и (3.10). Отсюда и следует справедливость теоремы 2.

Рассмотрим теперь множество $n \times m$ 0,1-матриц, у которых i -я строка содержит r_i единиц и $1 \leq i \leq n$. Общее число таких матриц равно $\prod_{i=1}^n \binom{m}{r_i}$. Если A_j — свойство матрицы рассматриваемого вида, состоящее в том, что ее j -й столбец нулевой, то число матриц, обладающих свойствами A_{j_1}, \dots, A_{j_h} , $1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq m$, равно

$$M(A_{j_1} \dots A_{j_h}) = \prod_{i=1}^n \binom{m-r_i}{r_i}.$$

Применяя формулы метода включения — исключения, с использованием этого равенства получаем выражение для числа 0,1-матриц с r нулевыми столбцами:

$$D_{nm}(r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{m}{k} \prod_{i=1}^n \binom{m-r_i}{r_i}, \quad r = 0, 1, \dots, m. \quad (3.13)$$

Если на множество 0,1-матриц задать равномерное вероятностное распределение, при котором любая из матриц появляется при случайному испытанию с вероятностью $\prod_{i=1}^n \binom{m}{r_i}^{-1}$, то для распределения случайной величины ξ_{nm} , равной числу нулевых столбцов в выбранной наугад матрице, получаем выражение

$$P(\xi_{nm} = r) = \sum_{k=r}^n (-1)^{k-r} \binom{k}{r} B_k(n, m), \quad (3.14)$$

где $B_k(n, m)$ — биномиальный момент ξ_{nm} — вычисляется по формуле

$$B_k(n, m) = \frac{(m)_{n-k}}{k!} \prod_{i=1}^n (m - r_i)_k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Теорема 3. Если при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n r_i - \ln m \rightarrow \gamma, \quad (3.16)$$

$$\frac{\ln m}{m} \max_{1 \leq i \leq n} r_i \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

то случайная величина ξ_m в пределе имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = e^{-\gamma}$.

Из формулы (3.15) имеем

$$B_k(n, m) k! = (m)_k \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{r_i}{m-j} \right).$$

Для оценки сверху и снизу выражения, стоящего в правой части этого равенства, используем неравенства $e^{-t/(1-t)} \leq 1-t \leq e^{-t}$, $0 < t < 1$. Применяя эти неравенства, получаем

$$\exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{r_i}{m-r_i-j} \right\} \leq \frac{k!}{(m)_k} B_k(n, m) \leq \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{r_i}{m-j} \right\}. \quad (3.18)$$

Из условий теоремы при $m \rightarrow \infty$ следуют оценки

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{r_i}{m-j} = \frac{k}{m} \sum_{i=1}^n r_i + O \left(\frac{\ln m}{m} \right),$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{r_i}{m-r_i-j} = \frac{k}{m} \sum_{i=1}^n r_i + O \left(\frac{\ln m}{m} \max_{1 \leq i \leq n} r_i \right).$$

Применяя эти оценки и используя условия (3.16) и (3.17) теоремы, из неравенства (3.18) при любом k имеем

$$\left| B_k(n, m) - \frac{1}{k!} e^{-\gamma} \right| = o(1),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Это означает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_k(n, m) = \frac{1}{k!} (e^{-\gamma})^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и справедливость теоремы вытекает из предельной теоремы § 2

§ 4. Покрытия множеств

1. Покрытия. Пусть X_1, X_2, \dots, X_k — непустые различные подмножества X , являющиеся элементами булевана 2^X . Напомним, что подмножество $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ булевана 2^X является покрытие

множества X , если

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k. \quad (4.1)$$

Подмножества X_1, X_2, \dots, X_k множества X называются *блоками покрытия*. Покрытие, содержащее k блоков, называется *k -блочным*. Если $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, то покрытие X является *разбиением*. Если $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то покрытию (4.1) можно поставить в соответствие матрицу инцидентности $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in X_i, \\ 0, & x_j \notin X_i. \end{cases}$$

У матрицы A все k строк различны, не являются нулевыми и A не имеет нулевых столбцов. Ясно, что каждая матрица инцидентности с такими свойствами однозначно определяет k -блочное покрытие n -множества. Обратно, каждому k -блочному покрытию соответствуют $k!$ таких $k \times n$ 0,1-матриц, отличающихся перестановками строк.

Обозначим через D_{nk} число k -блочных покрытий n -множества, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Покажем, что

$$D_{nk} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2^{n-j}-1}{k}, \quad k = 1, \dots, 2^n - 1, \quad (4.2)$$

где $D_{c,k} = 0$ при $k \geq 1$.

Рассмотрим множество $k \times n$ 0,1-матриц с различными строками, ни одна из которых не является пустой. Будем считать, что матрица A , принадлежащая этому множеству, обладает свойством A_j , если ее j -й столбец является пустым. Число матриц, одновременно обладающих свойствами A_{j_1}, \dots, A_{j_k} , $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, равно $M(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = (2^{n-j_1} - 1)(2^{n-j_2} - 2) \dots (2^{n-j_k} - k) = (2^{n-j_k} - 1)_k$. Применяя метод включения — исключения, получаем число 0,1-матриц рассматриваемого вида без пустых столбцов, равное $k! D_{nk}$:

$$k! D_{nk} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (2^{n-j} - 1)_k.$$

Отсюда следует формула (4.2).

Если D_n — общее число покрытий n -множества, то

$$D_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} D_{nk}, \quad (4.3)$$

Суммируя по k обе части равенства (4.2), с учетом соотношения (4.3) получаем

$$D_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} 2^{2^{n-j}-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.4)$$

Эта формула может быть непосредственно получена методом включения — исключения.

Рассмотрим $2^{2^n-1}-1$ непустых подмножеств булеана 2^x множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Подмножество булеана 2^x обладает свойством A_j , если оно не покрывает элемент x_j , $1 \leq j \leq n$. Число непустых подмножеств булеана, не покрывающих элементы $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, равно

$$M(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = 2^{2^{n-k}-1} - 1.$$

Ясно, что D_n равно числу непустых подмножеств булеана, не обладающих ни одним из свойств A_1, A_2, \dots, A_n . Поэтому согласно методу включения — исключения

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2^{2^{n-k}-1} - 1). \quad (4.5)$$

Проводя очевидные упрощения, из формулы (4.5) получаем формулу (4.4). Применяя неравенства Бонферрони, получаем оценку

$$1 - n/2^{2^n-1} \leq D_n 2^{2^n-1} \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D_n / 2^{2^n-1}) = 1. \quad (4.6)$$

Это означает, что относительная доля подмножеств булеана 2^x n -множества X , которые не покрывают всех элементов X , не превосходит $n/2^{2^n-1}$ и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Формуле (4.4) можно придать более компактный вид, используя выражение для n -й конечной разности функции 2^{2^x} (см. (4.39) гл. I):

$$\Delta^n 2^{2^x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k+x}}.$$

Полагая $\Delta^n 2^{2^x} = \Delta^n 2^{2^x}|_{x=0}$, отсюда, с учетом формулы (4.4), получаем

$$D_n = (1/2) \Delta^n 2^{2^x}. \quad (4.7)$$

Отметим также, что для числа покрытий D_n n -множества имеет место соотношение

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_j = 2^{2^n-1}, \quad D_0 = 1. \quad (4.8)$$

Обозначим через $2^X \setminus \emptyset$ булевы n -множества X без пустого множества \emptyset . Разобьем все непустые подмножества $2^X \setminus \emptyset$ на n классов, относя к j -му классу все подмножества, которые одновременно являются покрытиями всех j -подмножеств множества X , $1 \leq j \leq n$. Число таких покрытий равно $\binom{n}{j} D_j$, $j=1, \dots, n$. Количество непустых подмножеств $2^X \setminus \emptyset$ равно $2^{2^n - 1} - 1$. Отсюда и следует соотношение (4.8).

2. Минимальные покрытия. Покрытие (4.1) множества X называется *минимальным*, если для любого i , $1 \leq i \leq k$, существует такой элемент $x \in X$, что $x \in X_i$, но $x \notin X_j$, $j \neq i$. Элемент x в этом случае называется однократно покрытым. Ясно, что при удалении любого блока из минимального покрытия оно перестает быть покрытием множества X .

Примером минимального покрытия множества X является его разбиение. В этом случае каждый элемент множества X является однократно покрытым. Очевидно, что верно и обратное: любое покрытие множества X , в котором каждый элемент является однократно покрытым, представляет собой разбиение этого множества.

Каждому блоку минимального покрытия соответствует по крайней мере один однократно покрытый элемент. Поэтому, если j — число однократно покрытых элементов минимального k -блочного покрытия, то $k \leq j \leq n$.

Каждому минимальному k -блочному покрытию $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ с однократно покрытыми элементами соответствует матрица инцидентности. Она представляет собой 0,1-матрицу $k \times n$ с различными непулевыми строками. Все столбцы матрицы непулевые, причем столбцы с номерами l_1, l_2, \dots, l_k , $1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n$, содержат по единственной единице. Это соответствует тому, что элементы $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_k} \in X$ являются однократно покрытыми. Если $a_{i,l_s} = 1$, $1 \leq s \leq j$, то это означает, что элемент x_{l_s} однократно покрыт блоком X_i , $1 \leq i \leq k$.

Если минимальное k -блочное покрытие является разбиением, то все столбцы соответствующей матрицы инцидентности содержат ровно по одной единице. Обозначим через $(A)_i$ и $(A)_j$ соответственно i -ю и j -ю строки матрицы инцидентности A . Определим их скалярное произведение

$$((A)_i, (A)_j) = \sum_{l=0}^n a_{il} a_{jl}.$$

Ясно, что если минимальное k -блочное покрытие $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ является разбиением, то

$$((A)_i, (A)_j) = \begin{cases} |X|_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4.9)$$

т. е. строки соответствующей матрицы инцидентности являются ортогональными.

Обозначим через $L_n(k, j)$ число минимальных k -блочных покрытий n -множества X , содержащих j однократно покрытых элементов. Для $2 \leq k \leq j \leq n$ все такие покрытия перечисляем следующим образом. Выбираем $\binom{n}{j}$ способами j однократно покрытых элементов и $\sigma(j, k)$ способами осуществляя их разбиение на k блоков, где $\sigma(j, k)$ — число Стирлинга второго рода. Затем $(2^k - k - 1)^{n-j}$ способами определяем блоки, к которым относятся остальные $n - j$ элементов, каждый из которых принадлежит по крайней мере двум блокам. Таким образом, для $2 \leq k \leq j \leq n$ имеем

$$L_n(k, j) = \binom{n}{j} \sigma(j, k) (2^k - k - 1)^{n-j}. \quad (4.10)$$

Так как $L_n(1, n) = 1$, $n \geq 1$, $L_n(1, j) = 0$, $1 \leq j < n$, то при условии $0^0 = 1$ эта формула оказывается верной и для $1 \leq k \leq j \leq n$.

Из формулы (4.10) следует выражение для $L_n(k)$ — числа минимальных k -блочных покрытий n -множества:

$$L_n(k) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \sigma(j, k) (2^k - k - 1)^{n-j}. \quad (4.11)$$

Используя формулу для чисел $\sigma(j, k)$ с учетом того, что $\sigma(j, k) = 0$, $j < k$, из формулы (4.11) получаем окончательную формулу для чисел $L_n(k)$:

$$L_n(k) = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} (2^k - s - 1)^n. \quad (4.12)$$

Вводя обозначение $\Delta^k (2^k - k - 1)^n = \Delta^k x^n|_{x=2^k-k-1}$, формулу (4.12) можно записать в следующем виде:

$$L_n(k) = \frac{1}{k!} \Delta^k (2^k - k - 1)^n. \quad (4.13)$$

Отсюда следует выражение для числа минимальных покрытий множества:

$$L_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \Delta^k (2^k - k - 1)^n, \quad L_0 = 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.14)$$

Из (4.12) вытекает другая формула для чисел L_n :

$$L_n = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k=0}^{n-s} \frac{1}{k!} (2^{s+k} - s - 1)^n. \quad (4.15)$$

Из формулы (4.10) следует также выражение для $L_n^{(j)}$ — числа минимальных покрытий n -множества с j однократно покрытыми элементами:

$$L_n^{(j)} = \binom{n}{j} \sum_{k=1}^j \sigma(j, k) (2^k - k - 1)^{n-j}. \quad (4.16)$$

Отсюда при $j = n$ следует известная формула для числа разбиений n -множества:

$$T_n = L_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n \sigma(n, k).$$

Формулу (4.10) можно вывести путем определения числа различных матриц инцидентности, каждая из которых отвечает k -блочному покрытию n -множества с j однократно покрытыми элементами. Число 0,1-матриц $k \times j$, каждая из которых соответствует k -блочному разбиению j -множества, равно $\sigma(j, k)$. Если к такой матрице добавить $n - j$ столбцов, содержащих более одной единицы, то в результате получим матрицу инцидентности рассматриваемого вида. Число способов добавления таких $n - j$ столбцов равно $\binom{n}{j} (2^k - k - 1)^{n-j}$. Отсюда и следует формула (4.10).

С помощью перечисления соответствующих матриц инцидентности можно вывести и формулу (4.12). Рассмотрим множество $(2^k - 1)^n$ 0,1-матриц $k \times n$ без нулевых столбцов. Матрица A обладает свойством A_i , если в i -й строке, $1 \leq i \leq k$, не имеется единицы, удаление которой приводит к нулевому столбцу в матрице A . Число матриц, обладающих свойствами A_{i_1}, \dots, A_{i_s} , $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k$, равно $M(A_{i_1} \dots A_{i_s}) = (2^k - s - 1)^n$. Применив метод включения — исключения, находим число матриц, не обладающих ни одним из свойств A_1, A_2, \dots, A_k :

$$L_n(k) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} (2^k - s - 1)^n.$$

Каждая из 0,1-матриц $k \times n$, не обладающих ни одним из свойств A_1, A_2, \dots, A_k , имеет k столбцов с номерами, скажем, l_1, l_2, \dots, l_k , содержащих по единственной единице. Такой матрице A можно поставить в соответствие минимальное k -членное покрытие n -множества. Для этого возьмем в качестве однократно покрытых элементы $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_k} \in X = \{x_1, \dots, x_n\}$, а матрицу A будем рассматривать как матрицу инцидентности некоторого минимального покрытия $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$. Так как имеется $k!$ соответствий между элементами $x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_k}$ и блоками X_1, X_2, \dots

..., X_n , то число покрытий рассматриваемого вида равно $L_n(k) = \frac{1}{k!} \tilde{L}_n(k)$, что приводит к формуле (4.12).

З. Предельные теоремы. Исследуем теперь асимптотическое поведение при неограниченном возрастании n и k величины $L_n(k)$ — числа минимальных k -членных покрытий n -множества. Так как величина $L_n(k)$ может быть получена методом включения — исключения, то, сформулировав задачу в вероятностных терминах, можно было бы применить прием, изложенный в § 2 и использующий неравенства Бонферрони. Однако возможен и иной подход, без использования этих неравенств.

Будем изучать асимптотическое поведение $L_n(k)$ при $n, k \rightarrow \infty$ в зависимости от характера роста величины

$$\gamma_{nk} = \frac{n}{2^k - 1} - \ln k. \quad (4.17)$$

Оказывается, что если величина γ_{nk} ограничена, то имеет место асимптотическая формула

$$L_n(k) = \frac{(2^k - 1)^n}{k!} e^{-\epsilon - \gamma_{nk}} (1 + o(1)), \quad (4.18)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n, k \rightarrow \infty$. Эта асимптотическая формула может быть получена в качестве следствия из следующей теоремы.

Теорема 1. Если

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \gamma_{nk} = \gamma < \infty, \quad (4.19)$$

то имеет место равенство

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \frac{k! L_n(k)}{(2^k - 1)^n} = e^{-\epsilon - \gamma}. \quad (4.20)$$

Для доказательства теоремы выберем число δ такое, что $1/6 < \delta < 1/2$, и рассмотрим неравенство

$$\left| \frac{k! L_n(k)}{(2^k - 1)^n} - e^{-\epsilon - \gamma} \right| \leq R_1 + R_2 + R_3, \quad (4.21)$$

где согласно формуле (4.12),

$$R_1 = \left| \frac{k! L_n(k)}{(2^k - 1)^n} - \sum_{s=0}^{\lfloor k^{1/2-\delta} \rfloor - 1} (-1)^s \binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^k - 1}\right)^n \right|, \quad (4.22)$$

$$R_2 = \left| e^{-\epsilon - \gamma_{nk}} - \sum_{s=0}^{\lfloor k^{1/2-\delta} \rfloor - 1} (-1)^s \binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^k - 1}\right)^n \right|, \quad (4.23)$$

$$R_3 = |e^{-\epsilon - \gamma} - e^{-\epsilon - \gamma_{nk}}|; \quad (4.24)$$

[s] означает целую часть от s .

Оценим сначала величину R_1 . Прежде всего заметим, что при выполнении условий теоремы для $1 \leq s \leq [k^{1/2-\delta}]$ и $n, k \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\binom{k}{s} = \frac{k^s}{s!} (1 + \theta_1(k)), s \ln k + n \ln \left(1 - \frac{s}{2^k - 1}\right) = -s\gamma_{nh} + \theta_2(k),$$

где $\theta_1(k) \leq C_1 \frac{1}{k^{\delta}}$, $\theta_2(k) \leq C_2 \left(\frac{\ln k}{k^\delta}\right)^2$, C_1, C_2 — абсолютные постоянные. Из этих оценок для всех $1 \leq s \leq [k^{1/2-\delta}]$ следует асимптотическая формула

$$\binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^k - 1}\right)^n = \frac{1}{s!} e^{-s\gamma_{nh}} + \theta_3(k), \quad (4.25)$$

где $\theta_3(k) \leq C_3 \left(\frac{\ln k}{k^\delta}\right)^2$, C_3 — абсолютная постоянная. Из формулы (4.12) имеем

$$R_1 < \left| \sum_{s=[k^{1/2-\delta}]}^k (-1)^s \binom{k}{s} \left(1 - \frac{s}{2^k - 1}\right)^n \right|.$$

Применяя очевидное неравенство

$$1 - t < e^t, \quad 0 < t < 1, \quad (4.26)$$

и переходя к сумме модулей, получаем

$$R_1 < \sum_{s=[k^{1/2-\delta}]}^k \frac{1}{s!} e^{-s\gamma_{nh}}.$$

Отсюда следует содержащая абсолютную постоянную C_4 оценка

$$R_1 < C_4 \frac{\exp(-\gamma_{nh}[k^{1/2-\delta}])}{[k^{1/2-\delta}]!}, \quad (4.27)$$

которая стремится к нулю при $n, k \rightarrow \infty$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k_1 , что для всех $k > k_1$ имеем $R_1 < \varepsilon/3$.

Переходим к оценке R_2 . Используя асимптотическую оценку (4.25), имеем

$$R_2 \leq C_5 \frac{(\ln k)^2}{k^{\delta-1/2}} + C_6 \frac{\exp(-\gamma_{nh} \cdot k^{1/2-\delta})}{[k^{1/2-\delta}]!}, \quad (4.28)$$

где C_5 и C_6 — абсолютные постоянные. Так как при $k \rightarrow \infty$ правая часть неравенства (4.28) стремится к нулю, то существует такое k_2 , что для всех $k > k_2$ имеем $R_2 < \varepsilon/3$, где $\varepsilon > 0$ — выбранная ранее величина.

Наконец, из равенства (4.19) следует существование такого k_3 , что для всех $k > k_3$ имеем $R_3 < \varepsilon/3$. Так как $R_1 + R_2 + R_3 < \varepsilon$ для

всех $k > \max(k_1, k_2, k_3)$, то из неравенства (4.21) следует справедливость теоремы.

Заметим, что из доказательства теоремы следует также справедливость асимптотической формулы (4.18). Действительно, из равенств (4.22), (4.23) и оценок (4.27), (4.28) следует, что

$$\left| \frac{k! L_n(k)}{(2^k - 1)^n} - e^{-\gamma_{nk}} \right| \leq C_3 \frac{(\ln k)^2}{k^{3k-1/2}} + C_4 \frac{\exp(-\gamma_{nk} k^{1/2-\delta})}{|k^{1/2-\delta}|}.$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то формула (4.18) доказана. Эта формула может быть записана также и в следующем виде:

$$L_n(k) = \frac{(2^k - 1)^n}{k!} \left[e^{-\ln k - n(2^k - 1)} + o(1) \right], \quad (4.29)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n, k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда абсолютная величина γ_{nk} не остается ограниченной при $n, k \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Если $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \gamma_{nk} = \infty$, то имеет место равенство

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \frac{k! L_n(k)}{(2^k - 1)^n} = 1. \quad (4.30)$$

Из формулы (4.12), применяя неравенство (4.26), имеем

$$\left| \frac{k! L_n(k)}{(2^k - 1)^n} - 1 \right| \leq \sum_{s=1}^n \frac{e^{-s\gamma_{nk}}}{s!}.$$

Так как $\sum_{s=1}^n \frac{e^{-s\gamma_{nk}}}{s!} < e^{-\gamma_{nk} + s^{-\gamma_{nk}}}$, где правая часть неравенства стремится к нулю при $\gamma_{nk} \rightarrow \infty$, то равенство (4.30) справедливо.

Из равенства (4.30) следует асимптотическая формула

$$L_n(k) = \frac{(2^k - 1)^n}{k!} [1 + o(1)], \quad (4.31)$$

справедливая в том случае, когда $n/(2^k - 1) - \ln k \rightarrow \infty$ при $n, k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma_{nk} \rightarrow -\infty$ при $n, k \rightarrow \infty$. Из формулы (4.17) следует, что для выполнения этого условия необходимо, чтобы $n/(2^k - 1) < \ln k$ для достаточно больших n и k .

Теорема 3. Если

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{nk}}{\ln k} = -\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (4.32)$$

то имеет место равенство

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \frac{k! L_n(k)}{(2^k - 1)^n} \left(1 - \frac{1}{k^{1-a}}\right)^k = 1. \quad (4.33)$$

Из равенства (4.32) для всех $1 \leq s \leq k$ имеем

$$\left(1 - \frac{s}{2^k - 1}\right)^n = \frac{1}{s(1-a)} (1 + o(k)), \quad (4.34)$$

где $o(k) < C(k^2 \ln k)/2^k$, C — абсолютная постоянная. Используя оценку (4.34), из формулы (4.12) получаем

$$L_n(k) = \frac{(2^k - 1)^n}{k!} \left(1 - \frac{1}{k^{1-a}}\right)^k (1 + o(k)),$$

где $o(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и следует равенство (4.33).

§ 5. Производящие функции и предельные теоремы

1. Производящие функции моментов. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$ и для этой случайной величины существуют все моменты

$$M_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.1)$$

причем интегралы в равенстве (5.1) сходятся абсолютно. *Производящую функцию* моментов случайной величины ξ определим равенством

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \frac{t^k}{k!}, \quad (5.2)$$

если ряд в правой части равенства (5.2) абсолютно сходится для всех $|t| \leq \delta$, $\delta > 0$. В этом случае можно записать

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} dF(x), \quad (5.3)$$

где интеграл сходится для всех $|t| < \delta$, $\delta > 0$.

Если случайная величина η выражается через случайную величину ξ соотношением $\eta = (\xi - a)/b$, где a, b — некоторые постоянные, то соответствующие производящие функции моментов $g_n(t)$ и $g_1(t)$ связаны равенством

$$g_n(t) = e^{-at/b} g_1(t/b). \quad (5.4)$$

Например, если η имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$, то

$$F_{\eta}(x) = P(\eta < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

и, следовательно,

$$g_{\xi}(t) = e^{t^2/2}. \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что для нормально распределенной случайной величины ξ с параметрами (m, σ) , где

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(u-m)^2/(2\sigma^2)} du,$$

имеем

$$g_{\xi}(t) = \exp \left(mt + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right). \quad (5.6)$$

Производящая функция моментов $g(t)$ тесным образом связана с характеристической функцией $\varphi(t)$ случайной величины ξ , где

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x), \quad i = \sqrt{-1},$$

и, следовательно, $\varphi(t) = g(it)$.

Отметим, что существование производящей функции моментов в некоторой окрестности точки $t = 0$ эквивалентно аналитичности характеристической функции соответствующей случайной величины. Для нормального распределения с параметрами (m, σ)

$$\varphi_{m,\sigma}(t) = \exp \left(imt - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right). \quad (5.7)$$

Производящая функция моментов $g(t)$, если она существует при $|t| \leqslant \sigma$, единственный образом определяет соответствующую функцию распределения $F(x)$.

Если ξ — целочисленная неотрицательная случайная величина с производящей функцией

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, \quad (5.8)$$

где $p_j = P(\xi = j)$, причем ряд в правой части сходится при некотором $x = x_0 > 1$, то все моменты M_k , $k = 0, 1, \dots$, этой случайной величины существуют и для производящей функции моментов имеет место равенство

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \frac{t^k}{k!} = P(e^t), \quad (5.9)$$

где ряд сходится при $|t| < \ln x_0$. Для такой целочисленной случайной величины существуют также и производящие функции

факториальных и биномиальных моментов:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [M]_k \frac{t^k}{k!}, \quad (5.10)$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k, \quad (5.11)$$

где ряды сходятся при $|t| < x_0 - 1$ и

$$h(t) = B(t) = P(t+1). \quad (5.12)$$

Например, для распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$ имеем $p_j = e^{-\lambda} \lambda^j / j!$, $j = 0, 1, \dots$, и, следовательно,

$$P(x) = e^{\lambda(x-1)}. \quad (5.13)$$

Отсюда следует, что

$$g(t) = e^{\lambda(e^{t-1})}, \quad h(t) = B(t) = e^{\lambda t}. \quad (5.14)$$

Из равенств (5.14) следуют выражения для факториальных и биномиальных моментов закона Пуассона с параметром λ :

$$[M]_k = \lambda^k, \quad B_k = \lambda^k / k!, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.15)$$

2. Теорема непрерывности. Рассмотрим последовательность (ξ_n) целочисленных неотрицательных случайных величин и последовательность соответствующих им производящих функций $P_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Распределение вероятностей p_k , $k = 0, 1, \dots$, называется *предельным* при $n \rightarrow \infty$ для распределения $P(\xi_n = k)$, $k = 0, 1, \dots$, случайной величины ξ_n , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Справедлива следующая теорема, называемая *теоремой непрерывности* для производящих функций.

Теорема 1. Для выполнения равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n = k) = p_k$, $k = 0, 1, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы для любого x , $0 \leq x < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = P(x),$$

где $P(x)$ — производящая функция распределения p_k , $k = 0, 1, \dots$

Например, для случайной величины ξ_n , имеющей биномиальное распределение

$$P(\xi_n = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}, \quad p + q = 1, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (5.16)$$

производящая функция выражается следующим образом:

$$P_n(x) = (px + q)^n. \quad (5.17)$$

Если при $n \rightarrow \infty$ имеем $np \rightarrow \lambda < \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = e^{\lambda x - \lambda}$, т. е. биномиальное распределение в качестве предельного имеет распределение Пуассона с параметром λ .

3. Предельные теоремы. Пусть $F(x) = P(\xi < x)$ и $F_n(x) = P(\xi_n < x)$ — функции распределения случайных величин ξ и ξ_n , $n = 1, 2, \dots$. Говорят, что $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$ при $n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ в каждой точке непрерывности $F(x)$. В дальнейшем часто будет использоваться теорема, принадлежащая Куртиссу.

Теорема 2. Пусть $F_n(x)$, $g_n(t)$ — соответственно функция распределения и производящая функция моментов случайной величины ξ_n , $n = 1, 2, \dots$. Если $g_n(t)$ существует при $|t| < t_1$ для всех $n > n_0$ и если существует функция $g(t)$, определенная и ограниченная для всех $|t| \leq t_2 < t_1$, $t_2 > 0$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = g(t)$ при $|t| < t_2$, то существует случайная величина ξ с функцией распределения $F(x)$, такая, что $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$, причем сходимость равномерна в каждом интервале непрерывности $F(x)$. Производящая функция моментов ξ существует при $|t| \leq t_2$ и равна $g(t)$ на этом отрезке.

Например, если случайная величина ξ_n имеет биномиальное распределение (5.16), то согласно равенству (5.17), производящая функция моментов имеет вид

$$g_n(t) = (pe^t + q)^n. \quad (5.18)$$

Рассмотрим случайную величину

$$\eta_n = (\xi_n - np)/\sqrt{npq}. \quad (5.19)$$

Согласно формуле (5.4) для нее производящая функция моментов имеет вид $g_n(t) = e^{-t\sqrt{npq}}(pe^{t/\sqrt{npq}} + q)^n$.

Имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n(t) = e^{t^2/2}. \quad (5.20)$$

В правой части, согласно формуле (5.5), стоит производящая функция моментов нормального распределения с параметрами $(0, 1)$. Согласно теореме Куртисса отсюда следует, что случайная величина η_n в пределе имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

При решении вероятностных задач в комбинаторном анализе часто из асимптотической оценки производящей функции соответствующей целочисленной случайной величины уже можно получить информацию о характере ее предельного распределения. В частности, имеет место следующая предельная теорема.

Теорема 3. Пусть для последовательности случайных величин ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, каждая из которых имеет производящую

функцию моментов, при $n \rightarrow \infty$ производящие функции ξ_n обладают асимптотическим представлением

$$P_n(x) = x^{r_n} e^{h_n(x)} (1 + o(1)), \quad (5.21)$$

где r_n — числовая последовательность, $h_n(x)$ обладает тремя первыми производными $h'_n(x)$, $h''_n(x)$, $h'''_n(x)$ в некоторой окрестности $1 - \delta \leq x \leq 1 + \delta$, $\delta > 0$, $h'''_n(x)$ непрерывна и $o(1) \rightarrow 0$ равномерно для всех x , $1 - \delta \leq x \leq 1 + \delta$.

Тогда, если при $n \rightarrow \infty$

$$h'_n(1) + h''_n(1) \rightarrow \infty \quad (5.22)$$

и равномерно для всех x , $1 - \delta \leq x \leq 1 + \delta$, $\delta > 0$,

$$\frac{h'''_n(x)}{(h'_n(1) + h''_n(1))^{3/2}} \rightarrow 0, \quad (5.23)$$

то случайная величина $\eta_n = (\xi_n - r_n - h'_n(1)) / \sqrt{h'_n(1) + h''_n(1)}$ в пределе имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

Действительно, разложим $h_n(x)$ по формуле Тейлора для $1 - \delta \leq x \leq 1 + \delta$:

$$h_n(x) = h_n(1) + h'_n(1)(x - 1) + h''_n(1)(x - 1)^2/2 + \\ + h'''_n(1 + \theta(x - 1))(x - 1)^3/6, \quad 0 < \theta < 1. \quad (5.24)$$

Поставив $\sigma_n^2 = h'_n(1) + h''_n(1)$, из равенства (5.24) находим, что для $-\delta' \leq t \leq \delta'$, $\delta' > 0$, имеет место равенство

$$h_n(e^{t/\sigma_n}) = h_n(1) + h'_n(1)t/\sigma_n + [h'_n(1) + h''_n(1)]t^2/(2\sigma_n^2) + o(1). \quad (5.25)$$

Для производящей функции моментов случайной величины η_n имеем следующее выражение:

$$g_n(t) = e^{-\left(r_n + h'_n(1)\right)t/\sigma_n} P_n(e^{t/\sigma_n}). \quad (5.26)$$

Из равенства (5.21) следует, что

$$g_n(t) = \exp[-h'_n(1)t/\sigma_n + h_n(e^{t/\sigma_n})] (1 + o(1)).$$

С учетом формулы (5.25) и условия (5.22) находим, что для всех $|t| < \delta'$, $\delta' > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = e^{rt}$. Отсюда, согласно теореме 2, следует, что η_n при $n \rightarrow \infty$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

Для случайной величины ξ_n с биномиальным распределением (5.16) согласно формуле (5.17) имеем $P_n(x) = e^{n \ln(px+q)}$, т. е. $r_n = 0$, $h_n = n \ln(px+q)$, и, следовательно,

$$h'_n(1) = np, \quad h''_n(1) = npq, \quad h'''_n(x) = \frac{2np^2}{(px+q)^3}.$$

Так как условия теоремы (5.22) и (5.23) выполнены, то случайная величина ξ_n вида (5.19) асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

4. Центральная предельная теорема. Для характеристических функций имеет место теорема, аналогичная теореме Куртисса.

Теорема 4. Пусть (ξ_n) — последовательность случайных величин и $(\varphi_n(t))$, $(F_n(t))$ — соответствующие последовательности характеристических функций и функций распределения. Если существует непрерывная в точке $t = 0$ функция $\varphi(t)$, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ для любого t , то существует такая случайная величина ξ с функцией распределения $F(x)$, что $F_n(x)$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к $F(x)$ равномерно в любом интервале непрерывности $F(x)$. Характеристическая функция ξ равна $\varphi(t)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ и стремление к пределу равномерно в каждом конечном интервале.

В качестве следствия из этой теоремы может быть получена центральная предельная теорема, которую мы дадим в формулировке А. М. Ляпунова.

Теорема 5. Пусть дана последовательность серий (ξ_{kn}) , $k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$, взаимно независимых случайных величин, имеющих математические ожидания $m_{kn} = M\xi_{kn}$, дисперсии $\sigma_{kn}^2 = D\xi_{kn}$ и абсолютные моменты $C_{kn} = M(|\xi_{kn} - m_{kn}|^{2+\delta})$, $\delta > 0$, причем

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_{kn}^2, \quad C_n^{2+\delta} = \sum_{k=1}^n C_{kn},$$

Тогда, если выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{\sigma_n} = 0, \quad (5.27)$$

то при $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n (\xi_{kn} - m_{kn})$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n (\xi_{kn} - m_{kn}) < x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (5.28)$$

При применении теоремы 5 удобно использовать ряд следствий. Следствие 1. Если $P(\xi_{kn} = 1) = p_k = p_k(n)$, $P(\xi_{kn} = 0) = q_k = q_k(n)$, $p_k + q_k = 1$, $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}$ взаимно независимы и

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n p_k q_k \rightarrow \infty, \quad (5.29)$$

то при $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n (\xi_{kn} - p_k)$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Действительно, выбирая $\delta = 1$, имеем $m_{kn} = M\xi_{kn} = p_k$, $\sigma_{kn}^2 = D\xi_{kn} = p_k q_k$, $M(|\xi_{kn} - p_k|^3) = p_k q_k (p_k^2 + q_k^2) \leq p_k q_k$. Отсюда следует, что условие (5.27) выполнено, так как

$$\frac{C_n}{\sigma_n} \leq \left(\sum_{k=1}^n p_k q_k \right)^{-1/6} \rightarrow 0. \quad (5.30)$$

Следствие 2. Если существует такая последовательность положительных чисел (s_{in}) , $i = 1, 2, \dots, n$, что для взаимно независимых случайных величин $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}$ выполнено условие $|\xi_{in}| \leq s_{in}$, $1 \leq i \leq n$, причем при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n D\xi_{in} \rightarrow \infty, \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{\sigma_n} \max_{1 \leq i \leq n} s_{in} \rightarrow 0, \quad (5.32)$$

то случайная величина $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n (\xi_{in} - M\xi_{in})$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Действительно, в этом случае при $\delta > 0$

$$C_n^{2+\delta} = \sum_{i=1}^n M(|\xi_{in} - M\xi_{in}|^{2+\delta}) \leq \left(2 \max_{1 \leq i \leq n} s_{in} \right)^\delta \sigma_n^2.$$

Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{C_n}{\sigma_n} \leq \left(\frac{2}{\sigma_n} \max_{1 \leq i \leq n} s_{in} \right)^{\delta/(2+\delta)} \rightarrow 0.$$

Следствие 3. Если взаимно независимые случайные величины $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}$ равномерно ограничены подходящей постоянной C , $|\xi_{in}| \leq C$, $1 \leq i \leq n$, то случайная величина $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{i=1}^n (\xi_{in} - M\xi_{in})$, $\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n D\xi_{in} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Следствие 3 тривиальным образом вытекает из следствия 2.

5. Инверсии перестановок. На множестве $n!$ перестановок множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ зададим вероятностное распределение путем вписывания любой перестановки вероятности $1/n!$.

Будем говорить, что элемент $i_k \in X$, $1 \leq k \leq n$, образует r инверсий в перестановке (i_1, i_2, \dots, i_n) , если он расположен впереди r элементов, имеющих меньшие значения. Так, в перестановке (2 1 4 3 5) 2 образует одну инверсию, 4 — ни одной, 4 — одну инверсию и т. д. Обозначим через ξ_{kn} , $1 \leq k \leq n$, число инверсий, образованных k -м элементом, $1 \leq k \leq n$, в случайной подстановке степени n . Число перестановок, для которых элемент k образует одно и то же число инверсий j , $0 \leq j \leq k-1$, равно $\binom{n}{k} (k-1)! (n-k)!$. Отсюда следует, что

$$P(\xi_{kn} = j) = 1/k, \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

Отметим, что число инверсий, образуемых элементом k в случайной перестановке, не зависит от взаимного расположения элементов 1, 2, ..., $k-1$, т. е. от числа инверсий, образуемых этими элементами. Отсюда следует, что ξ_{kn} не зависит от $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{(k-1)n}$. Независимость ξ_{kn} от $\xi_{(k+1)n}, \dots, \xi_{nn}$ следует из определения инверсии. Таким образом, случайные величины $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}$ взаимно независимы. Для среднего значения и дисперсии ξ_{kn} , $1 \leq k \leq n$, имеют место формулы

$$\begin{aligned} m_{kn} &= \frac{k-1}{2}, \\ \sigma_{kn}^2 &= \frac{k^2-1}{12}, \\ C_{kn} &= M\left(\left|\xi_{kn} - \frac{k-1}{2}\right|^3\right) \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k j^3. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_{kn}^2$, $C_n^3 = \sum_{k=1}^n C_{kn}$, то при $n \rightarrow \infty$ $C_n/\sigma_n = O(1/n^{1/6}) \rightarrow 0$. Следовательно, согласно теореме 5 случайная величина $\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n \left(\xi_{kn} - \frac{k-1}{2}\right)$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормальна.

Случайная величина $\eta_n = \xi_{1n} + \xi_{2n} + \dots + \xi_{nn}$ представляет собой общее число инверсий в случайной перестановке степени n . Кроме того, при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2} = \frac{n^2}{4} (1 + o(1)), \quad \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^2-1}{12}\right) = \frac{n^3}{36} (1 + o(1)).$$

Поэтому окончательно можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. Если η_n — число инверсий в случайной равновероятной подстановке степени n , то случайная величина $\eta_n = \frac{\eta_n - n^2/4}{n^{3/2}/6}$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

6. Циклы подстановок. Рассмотрим случайный процесс, состоящий из n шагов. Шаг с номером k состоит в случайном равновероятном выборе $s(k)$ — образа элемента k , $1 \leq k \leq n$, случайной подстановки s из совокупности элементов, отличных от уже выбранных образов $s(1), \dots, s(k-1)$. Так как в качестве образа $s(k)$ может быть равновероятно выбран любой из $n-k+1$ элементов множества $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{s(1), \dots, s(k-1)\}$, то в результате каждой подстановки степени n может быть получена с вероятностью $1/n!$.

Шагу процесса с номером k поставим в соответствие случайную величину $\xi_{k,n}$, $1 \leq k \leq n$, которая равна 1, если на этом шаге выбран элемент, замыкающий цикл подстановки, и 0 — в противном случае. Так как среди $n-k+1$ образов $s(k)$ имеется только единственный, замыкающий цикл, то $P(\xi_{k,n} = 1) = 1/(n-k+1)$, $P(\xi_{k,n} = 0) = (n-k)/(n-k+1)$. Случайные величины $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{n,n}$ взаимно независимы и удовлетворяют условиям следствия 1 из теоремы 5, причем условие (5.29) выполнено, так как при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \frac{n-k}{(n-k+1)^2} = \ln n + O(1) \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ случайная величина

$$\frac{1}{\sigma_n} \sum_{k=1}^n \left(\xi_{k,n} - \frac{1}{n-k+1} \right), \text{ где } \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{(n-k+1)^2},$$

асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Ясно, что случайная величина $\xi_n = \sum_{k=1}^n \xi_{k,n}$ равна общему числу циклов в случайной подстановке. Кроме того, при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k+1} = \ln n + C + o(1), \quad (5.33)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{n-k}{(n-k+1)^2} = \ln n + C - \frac{\pi^2}{6} + o(1), \quad (5.34)$$

где $C = 0,5772\dots$ есть постоянная Эйлера. Поэтому окончательно получаем следующую теорему.

Теорема 7. Если ξ_n — число циклов случайно равновероятно выбранной подстановки степени n , то случайная величина

$\xi'_n = (\xi_n - \ln n) / \sqrt{\ln n}$ имеет в пределе нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

Отметим, что эта теорема легко может быть получена также и с использованием теоремы 2. Так как число подстановок степени n , имеющих k циклов, равно $|s(n, k)|$, где $s(n, k)$ — числа Стирлинга первого рода, то распределение ξ_n — числа циклов в случайной подстановке — имеют вид

$$P(\xi_n = k) = |s(n, k)|/n!, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.35)$$

Отсюда следует выражение для производящей функции ξ_n :

$$P_n(x) = \binom{x + n - 1}{n} = \frac{\Gamma(n + x)}{\Gamma(x)\Gamma(n + 1)}, \quad (5.36)$$

где $\Gamma(x)$ есть гамма-функция. Применяя формулу Стирлинга для оценки гамма-функции при $y \rightarrow \infty$:

$$\Gamma(y + 1) = \sqrt{2\pi} y^{y+1/2} e^{-y+0/(12y)}, \quad 0 < y < 1,$$

находим следующее асимптотическое представление при $n \rightarrow \infty$:

$$P_n(x) = \frac{n^{x-1}}{\Gamma(x)} (1 + o(1)), \quad (5.37)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ равномерно для всех x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$, $0 < \delta < 1$. Отсюда вытекает асимптотическое представление для производящей функции моментов случайной величины $\xi'_n = (\xi_n - \ln n) / \sqrt{\ln n}$:

$$g_n(t) = \exp \{-t\sqrt{\ln n} + (e^{t/\sqrt{\ln n}} - 1) \ln n\} (1 + o(1))$$

для всех t , $-\delta' < t < \delta'$, $\delta' > 0$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = e^{t^2/2}$, и справедливость теоремы 7 вытекает из теоремы 2.

7. Возрастания перестановок. Элементы a_i и a_{i+1} перестановки (a_1, a_2, \dots, a_n) чисел $1, 2, \dots, n$ образуют *возрастание*, если $a_i < a_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$. Будем предполагать, что элементу a_i предшествует возрастание. Отметим, что в этом состоит отличие в определении возрастаний в перестановках от определения, данного в § 3 гла. III.

Обозначим через A_{nk} число перестановок степени n с k возрастаниями. Очевидно, что $A_{n1} = A_{nn} = 1$ и $A_{nk} = A_{n, n-k+1}$. Для удобства положим $A_{k,0} = 1$. Если из перестановки (a_1, a_2, \dots, a_n) , имеющей k возрастаний, удалим элемент n , то в k случаях расположения этого элемента между элементами, образующими возрастание, получим перестановки степени $n - 1$ с k возрастаниями; в остальных $n - k + 1$ случаях полученная перестановка имеет $k - 1$ возрастаний. Отсюда следует рекуррентное соотношение

$$A_{nk} = (n - k + 1)A_{n-1, k-1} + kA_{n-1, k}. \quad (5.38)$$

Индукцией по n с использованием этого рекуррентного соотношения нетрудно получить формулу

$$A_{nk} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.39)$$

Пусть теперь η_n — случайная величина, равная числу возрастаний в случайно равновероятно выбранной перестановке степени n . Тогда

$$P(\eta_n = k) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.40)$$

Рассмотрим независимые непрерывные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, каждая из которых равномерно распределена на интервале $(0, 1)$. Найдем функцию распределения суммы этих случайных величин $F_n(x) = P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < x)$. Очевидно, что

$$P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < x) = V(\Omega_x), \quad (5.41)$$

где $V(\Omega_x)$ — объем n -мерного симплекса $\Omega_x = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 + \dots + x_n < x, 0 \leq x \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$. Будем считать, что точка (x_1, \dots, x_n) n -мерного симплекса $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n); x_1 + \dots + x_n < x, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ обладает свойством A_k , если $x_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$. Объем части Ω , точки которой обладают одновременно свойствами A_{j_1}, \dots, A_{j_k} , вычисляется по формуле

$$V(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = \begin{cases} (x - k)^n / n!, & k \leq x, \\ 0, & k > x. \end{cases} \quad (5.42)$$

Применяя метод включения — исключения, находим

$$V(\Omega_x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k S_k, \quad (5.43)$$

где

$$S_k = V(\Omega), \quad S_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} V(A_{j_1} \dots A_{j_k}), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (5.44)$$

$\lfloor x \rfloor$ — целая часть от x .

Из формул (5.42) и (5.43) получаем выражение для функции распределения

$$F_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^j \binom{n}{j} (x - j)^n, \quad (5.45)$$

Непосредственно из формул (5.40) и (5.45) следует, что $P(\eta_n = k) = F_n(k) - F_n(k-1)$, $k = 1, 2, \dots, n$, т. е. $F_n(x)$ при

$x = 1, 2, \dots, n$ совпадает с функцией распределения случайной величины η_n .

Случайные величины $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}$ равномерно ограничены, и $M\xi_{kn} = 1/2$, $D\xi_{kn} = 1/12$. Поэтому согласно следствию 3 из теоремы 5 случайная величина $\left(\sum_{k=1}^n \xi_{kn} - n/2 \right) / \sqrt{n/12}$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 8. Если η_n — число возрастаний в случайной перестановке степени n , то при $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\eta_n = (\eta_n - n/2) / \sqrt{n/12}$ в пределе имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

8. Производящие функции — многочлены. При рассмотрении комбинаторных задач часто встречается ситуация, когда производящая функция $P_n(x)$ случайной величины ξ_n имеет вид

$$P_n(x) = x^m \frac{F_n(x)}{F_n(1)}, \quad (5.46)$$

где для различных действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m} < 0$

$$F_n(x) = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_{n-m}), \quad (5.47)$$

т. е. $F_n(x)$ — многочлен с различными действительными отрицательными корнями. Положим

$$M_n = m + \sum_{j=1}^{n-m} \frac{1}{1 - \alpha_j}, \quad (5.48)$$

$$\sigma_n^2 = \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\alpha_j}{(1 - \alpha_j)^2}. \quad (5.49)$$

Теорема 9. Если производящая функция $P_n(x)$ случайной величины ξ_n задается равенствами (5.46) и (5.47) и при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{n-m} \frac{\alpha_j}{(1 - \alpha_j)^2} \rightarrow \infty, \quad (5.50)$$

то случайная величина $(\xi_n - M_n)/\sigma_n$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Представим производящую функцию $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = x^m \left(\frac{1}{1 - \alpha_1} x + \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) \dots \left(\frac{1}{1 - \alpha_{n-m}} x + \frac{\alpha_{n-m}}{1 - \alpha_{n-m}} \right), \quad (5.51)$$

Из этого представления следует, что существует случайная величина η_n такая, что $\eta_n = \eta_{1n} + \eta_{2n} + \dots + \eta_{n-m,n} + m$, где $\eta_{1n}, \eta_{2n}, \dots, \eta_{n-m,n}$ взаимно независимы и $P(\eta_{in}=1)=1/(1+\alpha_i)$. $P(\eta_{in}=0)=\alpha_i/(1+\alpha_i)$, $1 \leq i \leq n-m$. Случайные величины $\eta_{1n}, \eta_{2n}, \dots, \eta_{n-m,n}$ удовлетворяют условиям следствия 1 из теоремы 5, поэтому случайная величина $(\xi_n - M_n)/\sigma_n$ при $n \rightarrow \infty$ распределена асимптотически нормально с параметрами $(0, 1)$. Так как η_n и ξ_n имеют одну и ту же производящую функцию, то отсюда следует асимптотическая нормальность ξ_n с теми же параметрами.

В качестве следствия из теоремы 9 дадим другое доказательство теоремы 7. Производящая функция случайной величины ξ_n , равной числу циклов в случайно и равновероятно выбранной подстановке, имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x(x+1)\dots(x+n-1),$$

т. е. имеет представление вида (5.51) при $m=1$, $\alpha_i=i$, $1 \leq i \leq n-1$. Так как при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{(1+\alpha_j)^2} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{(1+j)^2} \rightarrow \infty,$$

то условие (5.50) теоремы 9 выполнено. Следовательно, с учетом равенств (5.33) и (5.34) случайная величина $(\xi_n - \ln n)/\sqrt{\ln n}$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Сформулируем еще одну теорему об асимптотической нормальности случайной величины, производящая функция которой является многочленом.

Теорема 10. Пусть случайная величина ξ_n имеет производящую функцию

$$P(x; s_1, s_2, \dots, s_n) = \prod_{j=1}^n (p_{0j} + p_{1j}x + \dots + p_{sj,j}x^{sj}), \quad (5.52)$$

$$s_j = s_j(n), \quad p_{0j} + p_{1j} + \dots + p_{sj,j} = 1, \quad 1 \leq j \leq n,$$

и при $n \rightarrow \infty$ выполнены условия

$$D\xi_n \rightarrow \infty, \quad (5.53)$$

$$\frac{1}{\sqrt{D\xi_n}} \max_{1 \leq j \leq n} s_j \rightarrow 0. \quad (5.54)$$

Тогда случайная величина $(\xi_n - M\xi_n)/\sqrt{D\xi_n}$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, 1)$.

Рассмотрим взаимно независимые случайные величины $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}$, причем ξ_{jn} имеет производящую функцию $p_{0j} + p_{1j}x + \dots + p_{sj,j}x^{sj}$. Из равенства (5.52) следует, что

распределения случайных величин $\xi_{1n} + \xi_{2n} + \dots + \xi_{nn}$ и η_n совпадают и теперь справедливость теоремы 10 вытекает из следствия 2 теоремы 5, так как условия (5.31) и (5.32) эквивалентны условиям (5.53) и (5.54).

Для иллюстрации теоремы 10 дадим другое завершение доказательства теоремы 6. В процессе доказательства теоремы 6 было установлено, что число инверсий η_n в случайной равновероятной подстановке степени n представляется в виде суммы независимых случайных величин $\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}$, $\eta_n = \xi_{1n} + \xi_{2n} + \dots + \xi_{nn}$, причем ξ_{nn} имеет следующее распределение:

$$P(\xi_{nn} = j) = \frac{1}{k}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5.55)$$

Следовательно, производящая функция случайной величины η_n имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (1 + x + \dots + x^k). \quad (5.56)$$

Так как $D\xi_{nn} = (2n^2 + 3n^2 - 5n)/72$ и $\max_{1 \leq j \leq n} s_j = n-1$, то условия теоремы 10 выполнены, и этим завершено доказательство теоремы 6.

9. Локальная теорема. Говорят, что последовательность (ξ_n) взаимно независимых случайных величин удовлетворяет локальной теореме, если при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_m \left| \sigma_n P \left(\sum_{j=1}^n \xi_j = m \right) - \frac{1}{V^{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{(m - M_n)^2}{2\sigma_n^2} \right\} \right| \rightarrow 0, \quad (5.57)$$

где $M_n = \sum_{j=1}^n M\xi_j$, $\sigma_n^2 = \sum_{j=1}^n D\xi_j$.

Сформулируем некоторые достаточные условия, когда имеет место локальная теорема.

Теорема 11. Пусть (ξ_n) — последовательность целочисленных взаимно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, $p_{nj} = P(\xi_n = j)$ и пусть выполнены следующие условия:

- 1) $p_{nn} \geq p_{nm}$ для всех n и m ;
- 2) наибольший общий делитель таких m , что $\frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{j=1}^n p_{nj} p_{jm} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, равен единице;
- 3) при $n \rightarrow \infty$ имеем $\sigma_n \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{j=1}^n M |\xi_j - M\xi_j|^3 = O(\sigma_n^3). \quad (5.58)$$

Тогда

$$\sup_n \left| \sigma_n P \left(\sum_{j=1}^n \xi_j = m \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{(m - M_n)^2}{2\sigma_n^2} \right\} \right| = O \left(\frac{1}{\sigma_n} \right). \quad (5.59)$$

В качестве примера приложения теоремы 11 найдем асимптотическую формулу для $C_{nm}(\bar{s})$ — числа m -выборок в коммутативном несимметричном n -базисе, в которых j -й элемент n -базиса встречается не более чем s_j раз, $1 \leq j \leq n$, $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Рассмотрим взаимно независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такие, что $P(\xi_j = m) = 1/(s_j + 1)$, $m = 0, 1, \dots, s_j$, и положим $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Имеем

$$M_n = M_{\eta_n} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n s_j, \quad \sigma_n^2 = D_{\eta_n} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^n s_j(s_j + 2).$$

Будем предполагать, что при $n \rightarrow \infty$ случайные величины ξ_j равномерно ограничены, т. е. существует постоянная s такая, что $s_j \leq s$, $1 \leq j \leq n$. В этих условиях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n M |\xi_j - M_{\xi_j}|^3 &\leq s \sigma_n^3, \\ \frac{1}{\ln n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(s_j + 1)^2} &\geq \frac{n}{s^2 \ln n} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

когда $n \rightarrow \infty$. Таким образом, все условия теоремы выполнены и имеет место равенство (5.59).

С другой стороны, из вида производящей функции

$$\sum_{m=0}^{2M_n} C_{nm}(\bar{s}) t^m = \prod_{j=1}^n (1 + t + t^2 + \dots + t^{s_j})$$

следует, что $P(\eta_n = m) = C_{nm}(\bar{s}) / \prod_{j=1}^n (1 + s_j)$, $m = 0, 1, \dots$

Следовательно, если при $n \rightarrow \infty$ величины s_j , $1 \leq j \leq n$, и $(m - M_n)/\sigma_n$ ограничены, то имеет место асимптотическая формула

$$C_{nm}(\bar{s}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ - \frac{(m - M_n)^2}{2\sigma_n^2} \right\} \prod_{j=1}^n (1 + s_j) \left(1 + O \left(\frac{1}{\sigma_n} \right) \right). \quad (5.60)$$

Отметим, что формула (5.60) остается верной и при более слабом ограничении, когда при $n \rightarrow \infty$

$$\max_{1 \leq j \leq n} s_j / \sum_{j=1}^n s_j (s_j + 2) \rightarrow 0.$$

§ 6. Разбиения конечных множеств

1. Производящие функции. Из предыдущего известно, что число разбиений n -множества X на k блоков равно числу Стирлинга второго рода $\sigma(n, k)$, причем

$$x^n = \sum_{k=0}^n \sigma(n, k) (x)_k, \quad (6.1)$$

где $\sigma(0, 0) = 1$, $\sigma(n, k) = 0$, $k > n$. Умножая обе части равенства (6.1) на $t^n/n!$ и суммируя по $n = 0, 1, \dots$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{r=0}^n \sigma(n, r) (x)_r. \quad (6.2)$$

Рассматривая обе части этого равенства как формальные степенные ряды по степеням $t^n/n!$, возьмем от обеих его частей r -ю конечную разность по x . Взятие конечной разности от формального степенного ряда фактически сводится к сложению некоторых степенных рядов, поэтому результат является снова степенным рядом. Из равенства (6.2) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta^h x^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{r=0}^n \sigma(n, r) \Delta^h (x)_r. \quad (6.3)$$

Используя формулы

$$\Delta^h x^n = \begin{cases} \sum_{j=0}^h (-1)^j \binom{k}{j} (k-j+x)^n, & k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\Delta^h (x)_r = \begin{cases} (r)_h (x)_{r-h}, & k < r, \\ k!, & k = r, \\ 0, & k > r, \end{cases} \quad (6.5)$$

из равенства (6.3) получаем

$$\sum_{j=0}^h (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{n=0}^{\infty} (k-j+x)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{r=k}^n \sigma(n, r) (r)_h (x)_{r-h}. \quad (6.6)$$

Полагая в обеих частях равенства $x = 0$ и используя легко доказываемую индукцией формулу для формального степенного ряда

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(mt)^n}{n!},$$

получаем

$$\frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - 1 \right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.7)$$

Будем теперь рассматривать обе части равенства (6.7) как степенные ряды от действительного переменного t . Используя оценку

$$\sigma(n, k) \leq n^k / (n)_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.8)$$

вытекающую из равенства (6.1), и формулу Стирлинга для оценки факториалов, нетрудно установить, что ряд в правой части равенства (6.7) абсолютно сходится при $0 \leq t < 1/e$. Поэтому для этих значений t имеем

$$\frac{1}{k!} (e^t - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.9)$$

Умножим обе части равенства (6.9) на x^k и просуммируем по $k = 0, 1, \dots$. Получим

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.10)$$

Применив оценку (6.8) и формулу Стирлинга для факториалов, можно получить следующую оценку $0 \leq t < 1/e$:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k) \frac{t^n}{n!} \leq \frac{(et)^k}{k! \sqrt{2\pi k}} \frac{1}{1-e^t}. \quad (6.11)$$

С помощью этого неравенства нетрудно установить, что двойной ряд в правой части равенства (6.10) сходится абсолютно для $0 \leq x < \infty$, $0 \leq t < 1/e$, и поэтому допустима перестановка знаков суммирования, приводящая к равенству

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n \sigma(n, k) x^k. \quad (6.12)$$

Так как при любом действительном $0 \leq x < \infty$ функция $e^{x(e^t-1)}$ — целая, то равенство (6.12) справедливо для всех t , $|t| < \infty$.

Используя формулу для чисел Белла

$$T_n = \sum_{k=0}^n \sigma(n, k), \quad T_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.13)$$

определенную общее число разбиений n -множества, приходим к известному равенству:

$$e^{x(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{t^n}{n!}. \quad (6.14)$$

Рассмотрим многочлен

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \sigma(n, k) x^k. \quad (6.15)$$

Используя формулу для чисел $\sigma(n, k)$

$$\sigma(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \quad (6.16)$$

и условие $\sigma(n, k) = 0, k > n$, можно записать

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n. \quad (6.17)$$

В правой части этого равенства можно поменять порядок суммирования, так как по существу обе суммы являются конечными. Проводя далее замену переменных суммирования, окончательно получаем

$$f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n x^k}{k!}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.18)$$

для всех $|x| < \infty$.

Отметим, что формула (6.18) может быть также найдена из равенства

$$e^{x(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (6.19)$$

являющегося следствием равенств (6.12) и (6.15).

2. Асимптотические формулы. Основное содержание данного пункта состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Если при любом действительном фиксированном x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$, $0 < \delta < 1$, $R = R(x)$ есть единственное при достаточно больших n действительное решение уравнения

$$R \ln \frac{R}{x} = n, \quad (6.20)$$

то для $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \sigma(n, k) x^k$ имеет место формула

$$f_n(x) = \frac{R^n e^{R-n-x}}{\sqrt{n/R+1}} (1 + o(1)), \quad (6.21)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$, $0 < \delta < 1$.

Для доказательства теоремы воспользуемся формулой (6.18). Ряд в правой части равенства (6.18) сходится при любом фикси-

рованием n , причем для всех x таких, что $1 - \delta < x < 1 + \delta$, $0 < \delta < 1$, сходимость равномерная. Общий член ряда при фиксированном x достигает своего максимального значения при k , близких к R , где $R = R(x)$ — действительное решение уравнения (6.20). Представим ряд (6.18) в виде четырех сумм:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n x^k}{k!} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (6.22)$$

в которых пределы суммирования удовлетворяют соответственно условиям

$$1 \leq k \leq R - \sqrt{n} - 1, \quad R - \sqrt{n} \leq k \leq R + \sqrt{n},$$

$$R + \sqrt{n} + 1 \leq k \leq n^2, \quad n^2 + 1 \leq k \leq \infty. \quad (6.23)$$

Заметим, что при $1 - \delta < x < 1 + \delta$, $0 < \delta < 1$ и $n \rightarrow \infty$ из уравнения (6.20) следует, что

$$R = \frac{n}{\ln n} (1 + o(1)), \quad (6.24)$$

поэтому при достаточно больших n все пределы (6.23) положительны.

Оценим сначала сумму S_2 . Для оценки $k!$ при $k \rightarrow \infty$ применим формулу Стирлинга

$$k! = \sqrt{2\pi k^{k+1/2}} e^{-k+\theta_k/(12k)}, \quad 0 < \theta_k < 1.$$

В результате получаем

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=R-\sqrt{n}}^{R+\sqrt{n}} (xe)^k k^{n-k-1/2} (1 + o(1)), \quad (6.25)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$. Используя асимптотическое представление

$$(xe)^{k-R} \frac{k^{n-k-1/2}}{R^{n-R-1/2}} = \exp \left\{ -\frac{(k-R)^2}{2R} \left(\frac{n}{R} + 1 \right) \right\} (1 + o(1)), \quad (6.26)$$

формулу (6.25) запишем следующим образом:

$$S_2 = \frac{(xe)^R R^{n-R}}{\sqrt{2\pi \left(\frac{n}{R} + 1 \right)}} \sum_{k=R-\sqrt{n}}^{R+\sqrt{n}} \exp \left\{ -\frac{(k-R)^2}{2R} \left(\frac{n}{R} + 1 \right) \right\} \times \\ \times \sqrt{\frac{\frac{n}{R} + 1}{R}} (1 + o(1)), \quad (6.27)$$

причем в (6.26) и (6.27) $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для

всех x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$. Введем обозначения

$$z_k = (k - R) \sqrt{\frac{n/R + 1}{R}}, \quad \Delta z_k = \sqrt{\frac{n/R + 1}{R}}$$

и воспользуемся формулой

$$\sum_{k=R-\sqrt{n}}^{R+\sqrt{n}} e^{-z_k^2/2} \Delta z_k = \int_{-\sqrt{n/R}}^{\sqrt{n/R}} e^{-z^2/2} dz (1 + o(1)), \quad (6.28)$$

где $o(1)$ имеет порядок $O(\Delta z_k)$ и равномерно стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ для всех $1 - \delta < x < 1 + \delta$. Заменяя интеграл в равенстве (6.28) на интеграл с бесконечными пределами и внося при этом погрешность экспоненциального характера, равномерно стремящуюся к нулю при $n \rightarrow \infty$, с учетом формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi} \quad (6.29)$$

из равенства (6.27) получаем

$$S_2 = \frac{R^n e^{R-n}}{\sqrt{n/R + 1}} (1 + o(1)), \quad (6.30)$$

где $o(1) \rightarrow$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех $1 - \delta < x < 1 + \delta$.

Суммы S_1 и S_3 оцениваются следующим образом. Так как общие члены в этих суммах убывают: в S_1 — при убывании k , а в S_3 — при возрастании k , то, пользуясь их асимптотическими оценками при $k = R - \sqrt{n}$ и $k = R + \sqrt{n}$ соответственно, имеем

$$S_1 < (xe)^R R^{n-R+1/2} e^{-(n/R)^2/2} (1 + o(1)),$$

$$S_3 < (xe)^R R^{n-R-1/2} n^2 e^{-(n/R)^2/2} (1 + o(1)).$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ следуют оценки, равномерные для всех x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$:

$$S_1/S_2 = o(1), \quad S_3/S_2 = o(1). \quad (6.31)$$

Наконец, для S_4 при $n \rightarrow \infty$ имеем следующую равномерную для $1 - \delta < x < 1 + \delta$ оценку:

$$S_4 \leq n^{2n} \left(\frac{e(1 + \delta)}{n^2} \right)^{n^2} = o(1). \quad (6.32)$$

Собирая оценки (6.30) — (6.32) и используя равенство (6.22), убеждаемся, что S_2 дает главный вклад в асимптотическую оценку ряда (6.22). Теперь справедливость равенства (6.21) следует из формулы (6.18) и оценки (6.30).

Следствие. Для чисел Белла, определяемых равенством (6.13), при $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$T_n = \frac{r^n e^{r-n-1}}{\sqrt{n/r+1}} (1 + o(1)), \quad (6.33)$$

где r — единственное при $n \rightarrow \infty$ решение уравнения

$$r \ln r = n. \quad (6.34)$$

Так как $T_n = f_n(1)$, то равенства (6.33) и (6.34) следуют соответственно из равенств (6.21) и (6.20) при $x = 1$, причем $r = R(1)$.

3. Случайные разбиения. На множество разбиений n -множества X зададим равномерное вероятностное распределение, при котором каждое разбиение имеет вероятность $1/T_n$, где T_n — число Белла, равное общему числу разбиений n -множества. Обозначим через ξ_n случайную величину, равную числу блоков в случайном разбиении. Точное распределение этой случайной величины имеет вид

$$P(\xi_n = k) = \sigma(n, k)/T_n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.35)$$

где $\sigma(n, k)$ — число Стирлинга второго рода, равное количеству разбиений n -множества на k блоков.

Производящая функция случайной величины ξ_n имеет вид

$$P_n(x) = f_n(x)/f_n(1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.36)$$

где $f_n(x)$ определено равенством (6.15).

Найдем биномиальные моменты B_{kn} , $k = 0, 1, \dots$, случайной величины ξ_n , воспользовавшись формулой

$$B_{kn} = \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.37)$$

где $P_n^{(k)}(x)$ — k -я производная $P_n(x)$.

Для k -й производной $f_n^{(k)}(x)$ функции $f_n(x)$ из равенства (6.12) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x) \frac{x^n}{n!} = (e^x - 1)^k e^{x(e^x-1)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{1}{k!} f_n^{(k)}(1) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \sigma(j, k) T_{n-j}$$

Отсюда с учетом равенств (6.36) и (6.37) получаем

$$B_{kn} = \frac{1}{T_n} \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \sigma(j, k) T_{n-j}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.38)$$

Используя эту формулу и связь между биномиальными и обычными моментами, можно получить выражение для k -го обычного момента. Однако обычные моменты имеют более простое выражение, если их получать с помощью следующего приема. Рассмотрим рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга второго рода (см. (4.58) гл. I):

$$\sigma(n, j) = \sigma(n - 1, j - 1) + j\sigma(n - 1, j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.39)$$

Суммируя обе части равенства (6.39) по j , получаем

$$\sum_{j=1}^n j\sigma(n, j) = T_{n+1} - T_n.$$

Отсюда следует формула для математического ожидания случайной величины ξ_n :

$$M\xi_n = \frac{T_{n+1}}{T_n} - 1. \quad (6.40)$$

Далее, умножая на j обе части равенства (6.39) и суммируя по j , находим

$$\sum_{j=1}^n j^2\sigma(n, j) = T_{n+2} - 2T_{n+1}.$$

Таким образом,

$$M\xi_n^2 = \frac{T_{n+2}}{T_n} - 2\frac{T_{n+1}}{T_n}.$$

Следовательно, дисперсия случайной величины ξ_n имеет следующее выражение:

$$D\xi_n = \frac{T_{n+2}}{T_n} - \left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right)^2 - 1. \quad (6.41)$$

Используя асимптотическую формулу (6.33) для чисел Белла, при $n \rightarrow \infty$ из равенства (6.40) получаем $M\xi_n = r(1 + o(1))$. При $x = 1$ применим формулу (6.24), дающую асимптотическое выражение r через n . В результате получаем окончательное выражение при $n \rightarrow \infty$:

$$M\xi_n = \frac{n}{\ln n}(1 + o(1)). \quad (6.42)$$

Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место также следующая асимптотическая формула для дисперсии:

$$D\xi_n = \frac{n}{(\ln n)^2}(1 + o(1)). \quad (6.43)$$

Перейдем к доказательству следующей предельной теоремы.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ случайная величина

$$\eta_n = \frac{\xi_n - n/\ln n}{\sqrt{n/\ln n}}$$

в пределе имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой 2 § 5. Из равенств (6.21) и (6.33) следует, что производящая функция случайной величины ξ_n в теореме 2 имеет при $n \rightarrow \infty$ следующее асимптотическое представление:

$$P_n(x) = e^{h_n(x)} (1 + o(1)), \quad (6.44)$$

где

$$h_n(x) = R - r + n \ln \frac{R}{r} - x + 1 + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+n/r}{1+n/R} \right)$$

и $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$. При $n \rightarrow \infty$ производные $h_n(x)$ имеют вид

$$h'_n(x) = R/x - 1 + o(1),$$

$$h''_n(x) = -\frac{n}{x^2(n/R+1)} + o(1),$$

$$h'''_n(x) = \frac{2n}{x^3(n/R+1)} - \frac{n^2}{x^3 R (n/R+1)^3} + o(1).$$

Применяя формулу (6.24), находим

$$h'_n(1) = \frac{n}{\ln n} (1 + o(1)),$$

$$h''_n(1) + h''_n(1) = \frac{n}{(\ln n)^2} (1 + o(1)),$$

$$\frac{h'''_n(x)}{(h'_n(1) + h''_n(1))^{3/2}} = O\left(\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}\right) = o(1),$$

причем все оценки равномерны для $1 - \delta < x < 1 + \delta$. Таким образом, все условия теоремы 2 § 5 выполнены, и теорема 2 доказана.

Упражнение 4. Используя производящую функцию для чисел Стирлинга второго рода

$$\frac{1}{k!} (e^t - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k) \frac{t^n}{n!},$$

вывести рекуррентное соотношение

$$\sigma(n+1, k) = \sum_{j=0}^{n-k+1} \binom{n}{j} \sigma(n-j, k-1), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

2. Рекуррентное соотношение (1) вывести путем рассмотрения классов разбиений множества в зависимости от размера блока, содержащего фиксированный элемент.

3. Методом, применяемым в упражнении 2, вывести рекуррентное соотношение

$$\sigma(n, k) = \sigma(n-1, k-1) + k\sigma(n-1, k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

4. Соотношение (2) вывести из равенства

$$x^n = \sum_{k=1}^n \sigma(n, k)(x)_k,$$

определенного числа Стирлинга второго рода.

5. Из рекуррентного соотношения (1) получить соотношение для чисел Белла

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_{n-k}, \quad T_0 = 1.$$

6. Индукцией по k показать, что для k -й производной функции $R = R(x)$, являющейся решением уравнения

$$R \ln \frac{R}{x} = n, \quad (3)$$

при ограничении x и $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$R^{(k)}(x) = \frac{n}{(\ln n)^{k+1}} (1 + o(1)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

7. Показать, что для производных функция

$$\Psi(x) = \ln \left(\frac{R}{1 + R/n} \right),$$

где $R = R(x)$ определяется уравнением (3), при ограниченном x и $n \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические представления

$$\Psi^{(k)}(x) = O\left(\frac{1}{(\ln n)^k}\right), \quad k = 1, 2, 3.$$

§ 7. Конечные топологии

1. Основные понятия. Пусть A — конечное множество и 2^A — булеван, соответствующий этому множеству. Некоторое подмножество булевана $\mathfrak{A} \subseteq 2^A$ называется *конечной топологией* на A , если выполнены следующие условия:

1) $\emptyset, A \in \mathfrak{A}$, где \emptyset — пустое множество;

- 2) $A_1 \cup A_2 = \mathbb{A}$ для любых $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{A}$;
 3) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ для любых $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{A}$.

Элементы конечной топологии \mathbb{A} называются *открытыми множествами*. Множество A называется *носителем топологии \mathbb{A}* , а пара (A, \mathbb{A}) — *топологическим пространством*. Топология, содержащая все элементы булевана 2^A множества A , называется *дискретной топологией* с носителем A . Топология, носителем которой является пустое множество \emptyset , называется *тривиальной*.

Теорема 1. *Конечная топология с носителем, являющимся n -множеством, $n > 1$, содержащая больше чем $3 \cdot 2^{n-1}$ открытых множеств, совпадает с дискретной топологией с тем же носителем.*

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — носитель топологии \mathbb{A} и $O(a_i)$ — пересечение всех открытых множеств \mathbb{A} , содержащих a_i , $1 \leq i \leq n$. Обозначим через k число различных множеств в семействе $\{O(a_1), O(a_2), \dots, O(a_n)\}$. Если $k = 1$, то $O(a_1) = \dots = O(a_n) = A$ и топология содержит всего два элемента: множество A и пустое множество \emptyset . Поэтому данный случай исключаем из рассмотрения. Будем считать, что $k > 1$. Заметим, что каждое открытое множество может быть представлено в виде объединения элементов семейства $\{O(a_1), O(a_2), \dots, O(a_n)\}$, т. е. это семейство является базой топологии \mathbb{A} . Действительно, если $A' = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}\}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n$, то ясно, что $O(a_{j_i}) \subseteq A'$, $1 \leq i \leq s$. С другой стороны, очевидно, что $A' \subseteq O(a_{j_1}) \cup \dots \cup O(a_{j_s})$. Следовательно, $A' = O(a_{j_1}) \cup \dots \cup O(a_{j_s})$.

Покажем теперь, что любая топология \mathbb{A} , не совпадающая с дискретной, содержит менее чем $3 \cdot 2^{n-1}$ элементов. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть в семействе $\{O(a_1), \dots, O(a_n)\}$ не существует пары $(O(a_i), O(a_j))$ такой, что $O(a_i) \subset O(a_j)$, $O(a_i) \neq O(a_j)$. Тогда все открытые множества топологии \mathbb{A} получаются путем объединений по $j = 1, 2, \dots, k$ элементов базы. Число полученных открытых множеств, с учетом пустого множества, равно $1 + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$. Если $k = n$, то топология дискретна; если же $k \leq n - 1$, то число открытых множеств топологии $N(\mathbb{A})$ удовлетворяет условию $N(\mathbb{A}) \leq 2^{n-1} < 3 \cdot 2^{n-1}$.

Случай 2. В семействе $\{O(a_1), \dots, O(a_n)\}$ существует ровно одна пара $(O(a_i), O(a_j))$ такая, что $O(a_i) \subset O(a_j)$, $O(a_i) \neq O(a_j)$. В этом случае из каждого объединения, содержащего $j = 2, 3, \dots, k$ элементов семейства, надо удалить все объединения, содержащие одновременно $O(a_i)$ и $O(a_j)$. Следовательно общее число открытых множеств топологии \mathbb{A} , с учетом пустого множества, равно

$$N(\mathbb{A}) = 1 + \binom{k}{1} + \sum_{j=2}^k \left[\binom{k}{j} - \binom{k-2}{j-2} \right] = 2^k - 2^{k-2}.$$

Отсюда следует, что при любом $2 \leq k \leq n$ $N(\mathbb{A}) \leq 3 \cdot 2^{n-1}$.

Случай 3. В семействе $\{O(a_1), \dots, O(a_n)\}$ существует по крайней мере одна пара $(O(a_i), O(a_j))$ такая, что $O(a_i) \subset O(a_j)$, $O(a_i) \neq O(a_j)$. Ясно, что число $N(\mathfrak{A})$ в данном случае не превосходит соответствующего числа в случае 2, т. е. $N(\mathfrak{A}) \leq 3 \cdot 2^{n-1}$.

Таким образом, установлено, что число элементов топологии, не являющейся дискретной, не превосходит величины $3 \cdot 2^{n-1}$. всякая топология, содержащая число элементов, большее $3 \cdot 2^{n-1}$, является дискретной.

2. Цепочечные топологии. Севокупность элементов $\emptyset, A_1, \dots, A_r, A$ булеана 2^A n -множества A , удовлетворяющая условию $\emptyset \subset A_1 \subset \dots \subset A_r \subset A$, образует конечную топологию с носителем A , которую будем называть *цепочечной*, а число r — ее *рангом*. Обозначим через $T_r(n)$ число цепочечных топологий ранга r , носителем которых является n -множество. Каждой цепочечной топологии с открытыми множествами $\emptyset \subset A_1 \subset \dots \subset A_r \subset A$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие упорядоченное разбиение n -множества на $r+1$ блоками:

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots \cup (A_r \setminus A_{r-1}).$$

Отсюда следует, что

$$T_r(n) = \sigma(n, r+1)(r+1)! = \Delta^{r+1} 0^n, \quad r = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.1)$$

Если $T(n)$ — общее число цепочечных топологий, носителем которых является n -множество, и $T(0) = 1$, то

$$T(n) = \sum_{r=0}^n \Delta^{r+1} 0^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7.2)$$

Рассмотрим многочлен

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k 0^n x^k. \quad (7.3)$$

Используя выражение для производящей функции чисел Моргана

$$(e^t - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \Delta^k 0^n \frac{t^n}{n!}, \quad (7.4)$$

для всех $|t| < \ln(1 + 1/|x|)$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1 - x(e^t - 1)}. \quad (7.5)$$

Отсюда следует, что

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k k^n}{(1+x)^{k+1}}. \quad (7.6)$$

Ряд в правой части равенства (7.6) сходится абсолютно для всех $x > 0$. В силу очевидного равенства $T(n) = f_n(1)$, полагая в обеих частях равенства (7.6) $x = 1$, получаем формулу

$$T(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{2^{n+1}}. \quad (7.7)$$

3. Асимптотические формулы. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$f_n(x) = \frac{n!}{(1+x)(\ln(1+1/x))^{n+1}} (1 + o(1)), \quad (7.8)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ равномерно для всех x , $1-\delta < x < 1+\delta$, $0 < \delta < 1$.

В формуле (7.6), дающей выражение $f_n(x)$, общий член ряда в правой части равенства принимает максимальное значение при $k = r$, где $r = \left[\frac{n}{\ln(1+1/x)} \right]$, $[y]$ — целая часть от y . Поэтому естественно ожидать, что основной вклад в значение суммы ряда дают слагаемые, не слишком далеко отстоящие от максимально-го слагаемого. В соответствии с этим соображением представим $f_n(x)$ в виде четырех сумм:

$$f_n(x) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (7.9)$$

в которых пределы суммирования соответственно имеют вид $1 \leq k \leq r - n^{1/2+\varepsilon} - 1$, $r - n^{1/2+\varepsilon} \leq k \leq r + n^{1/2+\varepsilon}$, $r + n^{1/2+\varepsilon} + 1 \leq k \leq n^2$, $n^2 + 1 \leq k < \infty$, где полагаем $0 < \varepsilon < 1/2$ и

$$r = \left[\frac{n}{\ln(1+1/x)} \right]. \quad (7.10)$$

Начнем с оценки суммы S_1 . Имеем

$$S_1 = \frac{x^r r^n}{(1+x)^{r+1}} \sum_{j=-n^{1/2+\varepsilon}}^{n^{1/2+\varepsilon}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{j\sqrt{n}}{r} \right)^2 \right\} (1 + o(1)), \quad (7.11)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех $1-\delta < x < 1+\delta$. Заменим сумму в (7.11) интегралом и подставляя вместо r его значение из (7.10), получаем

$$S_1 = \frac{n^{n+1/2} e^{-n}}{(1+x)(\ln(1+1/x))^{n+1}} \int_{-n^{1/2}\ln(1+1/x)}^{n^{1/2}\ln(1+1/x)} e^{-y^2/2} dy (1 + o(1)). \quad (7.12)$$

Переходя в интеграле к бесконечным пределам и внося при этом погрешность экспоненциального характера, получаем

$$S_1 = \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}}{(1+x)(\ln(1+1/x))^{n+1}} (1 + o(1)). \quad (7.13)$$

В (7.12) и (7.13) $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно для всех $1 - \delta < x < 1 + \delta$.

Суммы S_1 и S_2 оцениваются одинаковым способом. Имеем

$$S_1 = \frac{x^r r^n}{(1+x)^{r+1}} \sum_{j=-r}^{-n^{1/2+\varepsilon}} \left(\frac{x}{1+x}\right)^j \left(1 + \frac{j}{r}\right)^n, \quad (7.14)$$

$$S_2 = \frac{x^r r^n}{(1+x)^{r+1}} \sum_{j=-n^{1/2+\varepsilon}+1}^{n^2-r-1} \left(\frac{x}{1+x}\right)^j \left(1 + \frac{j}{r}\right)^n. \quad (7.15)$$

Общие члены сумм в равенствах (7.14) и (7.15) с ростом j убывают, а при наименьших по абсолютной величине значениях j имеют экспоненциальное представление при $n \rightarrow \infty$. Используя этот факт, находим

$$S_1 < \frac{x^r r^{n+1}}{(1+x)^{r+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(n^\varepsilon \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^2\right) (1 + o(1)), \quad (7.16)$$

$$S_2 < \frac{x^r r^{n+1}}{(1+x)^{r+1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(n^\varepsilon \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^2\right) (1 + o(1)). \quad (7.17)$$

Из неравенств (7.16) и (7.17) при $n \rightarrow \infty$ следуют равномерные для всех x , $1 - \delta < x < 1 + \delta$, оценки

$$S_1/S_2 = o(1), \quad S_2/S_1 = o(1). \quad (7.18)$$

Наконец, для S_4 имеем оценку

$$S_4 < \frac{x^{n^2+1} n^{2n}}{(1+x)^{n^2+2}} \frac{e^{1/n}}{1 - xe^{1/n}/(1+x)}. \quad (7.19)$$

Так как $x/(1+x) < 1$ для любых $x > 0$, то из неравенства (7.19) следует, что при $n \rightarrow \infty$ $S_4 \rightarrow 0$ равномерно для всех $1 - \delta < x < 1 + \delta$.

Теперь, собирая оценки (7.13), (7.16), (7.17) и (7.19), с учетом равенства (7.9) и формулы Стирлинга приходим к формуле (7.8). Другой ее вывод дан в § 5 гл. III (см. (5.36)).

Следствие. При $n \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула для числа цепочечных топологий, носителями которых являются n -множества:

$$T(n) = \frac{n!}{2(1n2)^{n+1}} (1 + o(1)). \quad (7.20)$$

Формула (7.20) получается из формулы (7.8) при $x = 1$.

4. Случайные топологии. На множестве из $T(n)$ цепочечных топологий, носителями которых являются n -множества, зададим равномерное вероятностное распределение и рассмотрим случайную величину ξ_n , представляющую собой ранг случайно выбранной цепочечной топологии. Вероятностное распределение

ξ_n имеет вид

$$P(\xi_n = k) = \frac{\Delta^{k+1} 0^n}{T(n)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (7.21)$$

Производящая функция случайной величины ξ_n имеет следующее выражение:

$$P_n(x) = \frac{f_n(x)}{f_n(1)} = \frac{1}{T(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k k^n}{(1+x)^{k+1}}. \quad (7.22)$$

Из теоремы 2 следует, что при $n \rightarrow \infty$ эта производящая функция имеет асимптотическое представление ($1 - \delta < x < 1 + \delta$)

$$P_n(x) = \frac{2}{1+x} \left(\frac{\ln 2}{\ln(1+1/x)} \right)^{n+1} (1 + o(1)). \quad (7.23)$$

Введем обозначения

$$\mu = \frac{1}{2 \ln 2}, \quad \sigma^2 = \frac{1 - \ln 2}{(2 \ln 2)^2}. \quad (7.24)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. При $n \rightarrow \infty$ случайная величина $\eta_n = (\xi_n - \mu n)/(\sigma \sqrt{n})$ имеет в пределе асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Производящая функция моментов случайной величины η_n имеет следующее выражение:

$$M_n(t) = e^{-\mu nt/(\sigma \sqrt{n})} P_n(e^{t/(\sigma \sqrt{n})}). \quad (7.25)$$

Заменой $x = \exp\{t/(\sigma \sqrt{n})\}$ отобразим окрестность $1 - \delta \leq x \leq 1 + \delta$ в некоторую ненулевую окрестность точки $t = 0$. Из равенства (7.25), используя асимптотическое представление (7.23), получаем

$$M_n(t) = e^{-\mu V \sqrt{n}/\sigma} \frac{2}{1 + e^{t/(\sigma \sqrt{n})}} \left(\frac{\ln 2}{\ln(1 + e^{-t/(\sigma \sqrt{n})})} \right)^{n+1} (1 + o(1)). \quad (7.26)$$

Используем теперь при $n \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение

$$\frac{\ln(1 + \exp\{-t/(\sigma \sqrt{n})\})^{n+1}}{(\ln 2)^{n+1}} =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{t \sqrt{n}}{2\sigma \ln 2} - \frac{1 - \ln 2}{(2 \ln 2)^2} \frac{t^2}{2\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right\}. \quad (7.27)$$

Тогда из (7.25) и (7.26) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t) = e^{t^2/2}.$$

Таким образом, в некоторой окрестности точки $t = 0$ производящая функция моментов случайной величины η_n при $n \rightarrow \infty$ сходится к производящей функции моментов нормального распределения с параметрами $(0, 1)$. Согласно теореме Куртина отсюда следует, что случайная величина η , в пределе имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$.

Упражнение 1. Показать, что топология \mathfrak{A} с носителем $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и базой $\{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, \{x_n, x_n\}$ содержит $3 \cdot 2^{n-2}$ элементов.

2. Показать, что производящая функция

$$P_n(x) = \frac{1}{T(n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k k^n}{(1+x)^{n+1}}$$

удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$P'_n(x) = \frac{1}{x(x+1)} \frac{T(n+1)}{T(n)} P_{n+1}(x) - \frac{1}{1+x} P_n(x). \quad (1)$$

3. Используя дифференциально-разностное уравнение (1), вывести формулы для среднего и дисперсии ранга случайной цепочечной топологии, носителем которой является n -множество:

$$M_{\mathfrak{A}_n}^{\text{с}} = \frac{n+1}{2 \ln 2} - \frac{1}{2}, \quad D_{\mathfrak{A}_n}^{\text{с}} = \frac{1 - \ln 2}{(2 \ln 2)^2} (n+1) - \frac{1}{4}.$$

§ 8. Разделяющие системы множеств

1. Структуры и булевы алгебры. Множество \mathfrak{S} называется *структурой*, если на нем определены бинарные операции умножения \cdot и сложения $+$, ставящие в соответствие каждой паре элементов $a, b \in \mathfrak{S}$ их произведение $a \cdot b$ и сумму $a + b$, причем эти операции коммутативны и ассоциативны, т. е. $a \cdot b = b \cdot a$, $a + b = b + a$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, и удовлетворяют условиям *идемпотентности*: $a \cdot a = a$, $a + a = a$ и *поглощения*: из $a \cdot b = a$ следует, что $a + b = b$, и обратно. Если сложение и умножение в структуре \mathfrak{S} связаны законом дистрибутивности, т. е. для любых $a, b, c \in \mathfrak{S}$ $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, то структура \mathfrak{S} называется *дистрибутивной*.

Если в структуре \mathfrak{S} имеется такой элемент a_0 , что для всякого $b \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство $a_0 \cdot b = a_0$, то a_0 называется *нулем* структуры \mathfrak{S} . Если в структуре \mathfrak{S} имеется элемент a_1 такой, что для любого элемента $b \in \mathfrak{S}$ справедливо равенство $a_1 \cdot b = b$, то элемент a_1 называется *единицей* структуры \mathfrak{S} . Структура \mathfrak{S} , со-

держащая нуль a_0 и единицу a_1 , называется *структурой с дополнениями*, если для любого элемента $a \in \mathfrak{S}$ существует такой элемент $\bar{a} \in \mathfrak{S}$, что $a \cdot \bar{a} = a_0$, $a + \bar{a} = a_1$. Дистрибутивная структура с дополнениями называется *булевой алгеброй*.

Примером булевой алгебры является структура подмножеств конечного множества X , в которой в качестве сложения и умножения используются операции объединения и пересечения множеств. Нулем в данном случае является пустое множество \emptyset , а единицей — само множество X .

Всякая конечная булева алгебра изоморфна некоторой булевой алгебре, представляющей собой булеван 2^X некоторого конечного множества X с заданными на нем операциями объединения, пересечения и дополнения множеств. Такую булеву алгебру будем обозначать $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$.

Если булева алгебра \mathfrak{B} совпадает с наименьшей булевой алгеброй, содержащей систему множеств $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, то говорят, что \mathfrak{B} порождается системой множеств E , и пишут $\mathfrak{B} = \langle E \rangle$.

Множество E называется *системой образующих* булевой алгебры \mathfrak{B} . Система множеств $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ конечного множества X называется *разделяющей* для этого множества, если для любых различных элементов $x, x' \in X$ можно указать такое множество e_k , $1 \leq k \leq m$, что $x \in e_k, x' \notin e_k$ либо $x \notin e_k, x' \in e_k$.

Теорема 1. *Система подмножеств $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ конечного множества X тогда и только тогда является системой образующих булевой алгебры $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$, когда система E является разделяющей для множества X .*

Пусть E — система образующих булевой алгебры \mathfrak{B} . Покажем, что она является разделяющей системой для множества X . Выражение вида $z = e_{i_1} \cap \dots \cap e_{i_r} \cap \bar{e}_{i_{r+1}} \cap \dots \cap \bar{e}_{i_l}$, где $i_1, \dots, i_r, i_{r+1}, \dots, i_l$ — некоторое l -сочетание из чисел $1, 2, \dots, m$, будем называть импликантой. Любой элемент $b \in \mathfrak{B}$ можно представить в виде

$$b = \bigcup_{k=1}^m z_k,$$

где z_1, z_2, \dots — импликанты. Рассмотрим элементы x и x' , $x \neq x'$, и положим $b = \{x\}$. Пусть $\{x\} = \bigcup_{k=1}^m z_k$ и найдется импли-

кант $z_k = e_{i_1} \cap \dots \cap e_{i_r} \cap \bar{e}_{i_{r+1}} \cap \dots \cap \bar{e}_{i_l}$ такая, что $\{x\} \subseteq z_k$ и, следовательно, $x \in z_k$. С другой стороны, так как $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$, то $\{x'\}$ не может принадлежать ни одной из импликант, включающих $\{x\}$, и, следовательно, $x' \notin z_k$. Отсюда следует существование либо такого p , $1 \leq p \leq r$, что $x \in e_{i_p}, x' \notin e_{i_p}$, либо такого $q, r+1 \leq q \leq l$, что $x \in e_{i_q}, x' \notin e_{i_q}$. В первом случае e_{i_p} разделяет x и x' . Во втором случае \bar{e}_{i_q} , а следовательно, и e_{i_q} разделяют x и x' . Таким образом, E — разделяющая система для множества X .

Допустим теперь, что E — разделяющая система для множества X . Для любого $b = \{x_1, x_2, \dots, x_s\} \in \mathfrak{B}$ можно записать $b = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_s\}$. Поэтому достаточно показать, что любое однозначное множество $\{x\}$, $x \in X$, входит в булеву алгебру \mathfrak{B}_1 , порожденную системой множеств E . Каждому $x \neq x'$, $x, x' \in X$, поставим в соответствие множество e_x такое, что $x \in e_x$, $x' \notin e_x$, причем либо $e_x \in E$, либо $\bar{e}_x \in E$. Выбрав $e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots$, отвечающие всевозможным значениям $x' \in X$, рассмотрим произведение

$$z = e_{\mu_1} \cap e_{\mu_2} \cap \dots \quad (8.1)$$

Это произведение представляет собой импликанту, и $z = \{x\}$. Теорема доказана.

Положим $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и каждому элементу $b \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие вектор $(e_1(b), \dots, e_n(b))$, где $e_i(b) = 1$, если $x_i \in b$, и $e_i(b) = 0$, если $x_i \notin b$.

Пусть $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ есть система элементов булевой алгебры \mathfrak{B} . Рассмотрим матрицу из m n -мерных вектор-строк, соответствующих этой системе:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_1(e_1) & e_2(e_1) & \dots & e_n(e_1) \\ e_1(e_2) & e_2(e_2) & \dots & e_n(e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1(e_m) & e_2(e_m) & \dots & e_n(e_m) \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Теорема 2. Для того чтобы векторы

$$\varepsilon^{(i)} = (e_i(e_1), e_i(e_2), \dots, e_i(e_n))^T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.3)$$

являющиеся вектор-столбцами матрицы ε , отвечали системе образующих $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ булевой алгебры \mathfrak{B} , построенной на булеване n -множества X , необходимо и достаточно, чтобы эти векторы были попарно различны.

Допустим, что $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ есть система образующих булевой алгебры, но найдутся такие p и q , $p \neq q$, что $\varepsilon^{(p)} = \varepsilon^{(q)}$. Это означает, что x_p и x_q принадлежат одной и той же подсистеме системы E . Пришли к противоречию, так как $x_p \neq x_q$ и E — разделяющая система.

Обратно, если все векторы $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots, \varepsilon^{(n)}$ различны, то система E является разделяющей, а следовательно, является системой образующих булевой алгебры \mathfrak{B} .

Следствие 1. Для того чтобы система элементов $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ была системой образующих булевой алгебры, необходимо, чтобы было выполнено неравенство

$$m \geq \log_2 n. \quad (8.4)$$

Действительно, при заданных m и n число способов выбора матриц e , удовлетворяющих условию, что все столбцы попарно различны, равно $2^m(2^n - 1) \dots (2^n - n + 1)$. Отсюда следует, что для существования матрицы e необходимо выполнение условия $2^m \geq n$, из которого вытекает требуемое неравенство.

Следствие 2. Минимальное число образующих булевой алгебры \mathfrak{B} , построенной на булеане n -множества X , удовлетворяет равенству

$$m = \lceil \log_2 n \rceil, \quad (8.5)$$

где $\{w\}$ — наименьшее целое, большее или равное w .

Действительно, возьмем $X = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и рассмотрим двоичные записи чисел $0, 1, \dots, n-1$. Число разрядов для записи в двоичной системе числа, не превосходящего $n-1$, равно $\lceil \log_2 n \rceil$. Рассмотрим систему множеств $E_0 = \{e_1^0, e_2^0, \dots, e_{\lceil \log_2 n \rceil}^0\}$, где

$$e_j^0 = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} \delta_i 2^{i-1}, \delta_i = 0, 1; i \neq j; \delta_j = 1 \right\}, \quad (8.6)$$

т. е. e_j^0 — множество чисел из X , таких, что в их двоичном разложении j -й разряд равен 1. Ясно, что E_0 — разделяющая система. Действительно, если $x \neq x'$, $x, x' \in X$, то в двоичном разложении x и x' найдется такой j -й разряд, что для x этот разряд равен 1, а для x' — нулю, или наоборот. В первом случае $x \in e_j^0$, $x' \notin e_j^0$, а во втором $x \notin e_j^0$, $x' \in e_j^0$, т. е. e_j^0 разделяет элементы x и x' .

Систему образующих E_0 , содержащую минимальное число элементов, будем называть *минимальной*.

2. Случайные образующие булевой алгебры. Пусть на 2^n элементах булевой алгебры \mathfrak{B} задано равномерное вероятностное распределение и $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ — система случайно и независимо выбранных элементов из \mathfrak{B} . Обозначим через B_{nm} событие, состоящее в том, что E есть система образующих булевой алгебры \mathfrak{B} .

Теорема 3. Если $P(B_{nm})$ — вероятность того, что случайно и независимо выбранная система $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ является системой образующих булевой алгебры \mathfrak{B} , то имеет место формула

$$P(B_{nm}) = (2^n)_n / 2^{mn}.$$

Действительно, если элементы e_1, e_2, \dots, e_m равновероятны, то строки матрицы e являются равновероятными и для любых i и j

$$P(e_i(e_j) = 1) = P(e_i(e_j) = 0) = 1/2. \quad (8.7)$$

В силу независимости выбора e_1, e_2, \dots, e_m векторы $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$

независимы и каждое из 2^m значений принимается с вероятностью $1/2^m$. Событие B_{nm} состоит в том, что векторы $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}$ различны. Число способов выбора n различных m -мерных двоичных векторов равно $(2^m)_n = 2^m(2^m - 1)\dots(2^m - n + 1)$. Общее число способов выбора таких векторов равно 2^{mn} . Делия первое число на второе, получаем требуемую формулу:

Теорема 4. Пусть $(m_j), (n_j)$, $j = 1, 2, \dots$ — последовательности целых положительных чисел, такие, что предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (m_j - 2 \log_2 n_j) = \alpha \quad (8.8)$$

существует. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P(B_{n_j, m_j}) = \begin{cases} 1, & \alpha = +\infty, \\ \exp\{-1/2^{\alpha+1}\}, & -\infty < \alpha < \infty, \\ 0, & \alpha = -\infty. \end{cases} \quad (8.9)$$

Запишем вероятность $P(B_{nm})$ в виде

$$P(B_{nm}) = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - j/2^m).$$

Используя неравенство $e^{-t/(1-t)} < 1 - t < e^{-t}$, $0 < t < 1$, получаем следующие оценки:

$$\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2^{m+1}-2(n-1)}\right) < P(B_{nm}) < \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2^{m+1}}\right).$$

Отсюда следует, что если $\lim_{n, m \rightarrow \infty} (m - 2 \log_2 n) = \alpha$, $-\infty < \alpha < \infty$, то

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(B_{nm}) = \exp\left\{-\frac{1}{2^{\alpha+1}}\right\}. \quad (8.10)$$

При $\alpha \rightarrow +\infty$ и $\alpha \rightarrow -\infty$ этот предел соответственно равен 1 и 0. Теорема доказана.

Из теоремы 4 следует, что для порождения с некоторой положительной вероятностью булевой алгебры число элементов в случайно и равновероятно выбранной системе образующих должно удовлетворять асимптотическому равенству $m \approx 2 \log_2 n + \alpha$. Напомним, что минимальное число образующих равно $m_0 = \lceil \log_2 n \rceil$.

Теоремы 3 и 4 могут быть сформулированы в несколько ином виде. Обозначим через $\mathfrak{B}^{(n)}$ наименьшую булеву алгебру, порожденную случайно и равновероятно выбранными m образующими. Пусть v_n — случайная величина, представляющая собой наименьшее целое число, для которого $\mathfrak{B}^{(v_n)} = \mathfrak{B}$. Так как $P(v_n \leq m) = P(B_{nm})$, то из теоремы 3 следует, что

$$P(v_n \leq m) = (2^m)_n / 2^{mn}. \quad (8.11)$$

Отсюда, с учетом теоремы 4, вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(v_n \leq 2 \log_2 n + \alpha) = e^{-1/2^{\alpha+1}}. \quad (8.12)$$

3. Схема выбора без возвращения. Будем предполагать, что случайный выбор образующих элементов из булевой алгебры \mathfrak{B} , построенной на булеане n -множества X , происходит по схеме без возвращения. Это означает, что после выбора l элементов следующий $(l+1)$ -й элемент выбирается независимо и с вероятностью $1/(2^n - l)$. В этом случае вероятность выбора m фиксированных элементов $e_1, e_2, \dots, e_m \in \mathfrak{B}$ равна $1/(2^n)_m$.

Обозначим через B_{nm}^* событие, состоящее в том, что при случайном выборе без возвращения элементов $e_1, e_2, \dots, e_m \in \mathfrak{B}$ в соответствующей им матрице ϵ все столбцы различны. Рассмотрим событие D_{nm} , состоящее в том, что при выборе с возвращением все элементы e_1, e_2, \dots, e_m оказались различными. Для вероятностей соответствующих событий имеет место равенство

$$P(B_{nm}^*) = \frac{P(B_{nm} \cap D_{nm})}{P(D_{nm})}.$$

Из очевидных неравенств $P(B_{nm}) - P(\bar{D}_{nm}) \leq P(B_{nm} \cap D_{nm}) \leq P(B_{nm})$ вытекают следующие оценки:

$$\frac{P(B_{nm}) - P(\bar{D}_{nm})}{1 - P(\bar{D}_{nm})} \leq P(B_{nm}^*) \leq \frac{P(B_{nm})}{1 - P(\bar{D}_{nm})}.$$

Событие \bar{D}_{nm} состоит в том, что среди случайно выбранных m двоичных n -мерных векторов есть хотя бы одна пара совпадающих. Поэтому справедлива оценка

$$P(\bar{D}_{nm}) \leq \binom{m}{2} / 2^n. \quad (8.13)$$

Очевидно, что если $m = o(2^{n/2})$, то $P(\bar{D}_{nm}) = o(1)$. Поэтому из оценки для $P(B_{nm}^*)$ и теоремы 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Если $(m_j), (n_j)$, $j = 1, 2, \dots$ — последовательности целых положительных чисел, такие, что существует предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (m_j - 2 \log_2 n_j) = \alpha, \quad (8.14)$$

то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P(B_{n_j, m_j}^*) = \begin{cases} 1, & \alpha = +\infty, \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2^{\alpha+1}} \right\}, & -\infty < \alpha < \infty, \\ 0, & \alpha = -\infty. \end{cases} \quad (8.15)$$

4. Разделяющие системы функций. Понятие разделяющей системы множеств можно естественным образом обобщить путем

рассмотрения разделяющих систем функций. Пусть X — заданное n -множество, $n \geq 2$, на котором определены функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$, $x \in X$, со значениями из k -множества Y . Система функций $F = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ является *разделяющей*, если для любой пары элементов $x, x' \in X$, $x \neq x'$, существует такая функция $f_s(x)$, что $f_s(x) \neq f_s(x')$, $1 \leq s \leq m$.

Разделяющие системы функций можно характеризовать и другими способами. Множество $A \subseteq X$ будем называть *уровневым* множеством для функции $f(x)$, заданной на множестве X , если A содержит все элементы $x \in X$ такие, что $f(x) = y$, где $y \in Y$ фиксировано, Y — область значений $f(x)$. Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ и $A_{11}, \dots, A_{1k}, A_{21}, \dots, A_{2k}, \dots, A_{m1}, \dots, A_{mk}$ — совокупность уровневых множеств, отвечающих системе функций F .

Теорема 6. Система функций является разделяющей тогда и только тогда, когда соответствующая совокупность уровневых множеств является разделяющей.

Действительно, пусть $x \neq x'$, $x, x' \in X$ и существует такое $1 \leq s \leq m$, что $f_s(x) \neq f_s(x')$, $f_s(x) = y_p$, $f_s(x') = y_q$, $1 \leq p, q \leq k$. Тогда A_{sp} — уровневое множество функции $f_s(x)$ — удовлетворяет условиям $x \in A_{sp}$, $x' \notin A_{sp}$. В силу произвольности выбора $x, x' \in X$, $x \neq x'$, отсюда следует, что совокупность уровневых множеств является разделяющей. Для доказательства достаточности те же рассуждения следуют провести в обратном порядке.

Рассмотрим теперь матрицу, отвечающую системе функций $F = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, заданной на множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1) & f_m(x_2) & \cdots & f_m(x_n) \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

Теорема 7. Система функций F является разделяющей тогда и только тогда, когда все столбцы соответствующей матрицы F являются попарно различными.

Справедливость теоремы вытекает непосредственно из определения разделяющей системы функций.

Система функций F , определенных на n -множестве X , называется *минимальной разделяющей* системой функций, если никакая ее собственная подсистема $F' \subset F$ не является разделяющей.

Теорема 8. Если $F = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ есть минимальная разделяющая система функций, определенных на n -множестве X , то

$$m \leq n - 1, \quad (8.17)$$

и эта оценка наилучшая.

Сформулированная теорема утверждает, что если разделяющая система функций, определенных на n -множестве X , содер-

жит не менее n функций, то из них можно выбрать $n - 1$ функций, образующих разделяющую систему. Ясно, что данное утверждение справедливо при $n = 2$, так как в разделяющей системе $F = (f_1(x), f_2(x))$ при $X = \{x_1, x_2\}$ либо функция $f_1(x)$ удовлетворяет условию $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$, т. е. образует разделяющую систему $F' = (f_1(x))$, либо $f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$ и $F' = (f_2(x))$.

Будем доказывать теорему индукцией по n . Пусть F — разделяющая система функций, определенных на множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$. Ясно, что эта система является разделяющей и на множестве $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и, следовательно, по предположению индукции существует разделяющая система функций $F' = (f_1(x), \dots, f_{n-1}(x))$, рассматриваемых как определенные на множестве X' .

Матрица

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_n) \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

имеет различные столбцы. Рассмотрим вектор-столбец $(f_1(x_{n+1}), \dots, f_{n-1}(x_{n+1}))^T$. Если этот вектор отличается от любого из вектор-столбцов указанной матрицы, то система функций F' является разделяющей на множестве X , и теорема доказана.

Пусть теперь существует такое i , $1 \leq i \leq n$, что $f_i(x_{n+1}) = \dots = f_i(x_j)$, $j = 1, \dots, n - 1$, т. е. рассматриваемый столбец совпадает с некоторым, естественно, единственным i -м столбцом матрицы. Тогда в системе функций F должна существовать такая функция f , что $f(x_{n+1}) \neq f(x_i)$, так как в противном случае элементы x_i и x_{n+1} нельзя было бы разделить с помощью системы F . Система функций $F'' = (f_1(x), \dots, f_{n-1}(x), f(x))$ является разделяющей на множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, так как столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) & f_1(x_{n+1}) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) & f_2(x_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_n) & f_{n-1}(x_{n+1}) \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) & f(x_{n+1}) \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

все различны.

Рассмотрим систему функций $F = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x))$, определенных на множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, такую, что

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x \neq x_i, \end{cases}$$

для всех $1 \leq i \leq n - 1$. Ясно, что F является разделяющей системой функций и эта система содержит $n - 1$ функций. Теорема доказана.

5. Энтропия и оптимальные разделяющие системы функций. На множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ зададим равномерное вероятностное распределение, полагая, что каждый из элементов X имеет одну и ту же вероятность $1/n$. Функцию $f(x)$, определенную на множестве X , можно рассматривать как случайную величину. Если $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ есть область значений функции $f(x)$ и значение y_j принимается $f(x)$ при l_j значениях аргумента, то

$$P(f(x) = y_j) = \frac{l_j}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad \sum_{j=1}^k l_j = n.$$

Энтропия вероятностного распределения (p_1, p_2, \dots, p_r) , $\sum_{j=1}^r p_j = 1$, определяется формулой

$$H(p_1, p_2, \dots, p_r) = - \sum_{j=1}^r p_j \log_2 p_j,$$

где полагаем $0 \cdot \log_2 0 = 0$.

Очевидно, что $H(p_1, p_2, \dots, p_r) \geq 0$ и $H(p_1, p_2, \dots, p_r) = 0$ тогда и только тогда, когда найдется такое i , $1 \leq i \leq r$, что $p_i = 1$, $p_j = 0$, $j \neq i$. Энтропия $H(p_1, p_2, \dots, p_r)$ достигает своего максимального значения при $p_1 = \dots = p_r = 1/r$, причем

$$H(p_1, p_2, \dots, p_r) \leq H(1/r, 1/r, \dots, 1/r) = \log_2 r.$$

Это свойство следует из выпуклости функции $\varphi(x) = -x \ln x$, $0 < x < 1$, и известного неравенства для выпуклых функций

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \varphi(x_i) \leq \varphi\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_i\right).$$

При задании равномерного вероятностного распределения на n -множестве X энтропия функции $f(x)$, представляющей собой случайную величину, определяется равенством

$$H[f(x)] = - \sum_{j=1}^k P(f(x) = y_j) \log_2 P(f(x) = y_j).$$

Энтропия системы функций $F = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, заданных на n -множестве X , определяется равенством

$$H[f_1(x), \dots, f_m(x)] =$$

$$= - \sum_{v_1, \dots, v_m} P(f_1(x) = v_1, \dots, f_m(x) = v_m) \log_2 P(f_1(x) = v_1, \dots, f_m(x) = v_m),$$

где v_i принимает все возможные значения функции $f_i(x)$, $1 \leq i \leq m$.

Непосредственно из определения следует, что

$$H[f_1(x), \dots, f_m(x)] \leq \sum_{i=1}^m H[f_i(x)].$$

Если система функций $F = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ — разделяющая на n -множестве X , то все векторы $(f_i(x_i), \dots, f_n(x_i))$, $1 \leq i \leq n$, различны и, следовательно,

$$P(f_1(x) = f_1(x_i), \dots, f_n(x) = f_n(x_i)) = 1/n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Отсюда следует, что для разделяющей системы функций на n -множестве X имеет место равенство

$$H[f_1(x), \dots, f_n(x)] = \log_2 n.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 9. Если $F = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ есть разделяющая система функций, определенных на n -множестве X , и $H[f_i(x)]$ — энтропия функции $f_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, при задании равномерного распределения на множестве X , то имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^m H[f_i(x)] \geq \log_2 n.$$

Отметим, что равенство в данной оценке достигается тогда и только тогда, когда функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$, рассматриваемые как случайные величины, являются независимыми. В этом случае разделяющую систему F называют *оптимальной* разделяющей системой функций.

6. Задачи поиска. Рассмотрим следующую задачу, относящуюся к области медицины. Имеется n болезней, которые мы обозначим элементами множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. У каждой из болезней есть определенный набор симптомов, характеризующих эту болезнь. Вместе с тем известно, что один и тот же симптом может относиться не к одной, а к нескольким болезням из множества X . Поэтому естественно каждому симпту ставить в соответствие некоторое подмножество множества X тех болезней, которые сопровождаются появлением этого симптома. Совокупность всех m симптомов, сопровождающих болезни из множества X , обозначим через e_1, e_2, \dots, e_m , где $e_i \subseteq 2^X$ и e_i — множество болезней, имеющих i -й симптом.

Для того чтобы отличить болезни x_i и x_j , $i \neq j$, необходимо существование такого симптома e_k , что $x_i \in e_k$, $x_j \notin e_k$ или $x_j \in e_k$, $x_i \notin e_k$. Такие разделяющие болезни симптомы существуют тогда и только тогда, когда система множеств $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ является разделяющей.

Другая задача относится к области отыскания неисправностей в приборах. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество неисправностей некоторого прибора. Для определения характера неисправ-

ностей прибор не разбирается, а измеряются некоторые m величин, которые являются значениями заданных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$, определенных на множество X . Для того чтобы с помощью таких измерений отмечать неисправности, необходимо и достаточно, чтобы система функций $F = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ была разделяющей. В этом случае условие $x^* = x_i$ выполняется тогда и только тогда, когда $(f_1(x^*), \dots, f_m(x^*)) = (f_1(x_i), \dots, f_m(x_i))$, $1 \leq i \leq n$, где векторы $(f_1(x_i), \dots, f_m(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, предполагаются заранее вычисленными.

Конечно, данную задачу можно просто решить с помощью одновременной функции f , осуществляющей блекцию множества X в некоторое множество Y , $|Y| = n$. Однако найти систему измерений работы реального прибора, отвечающую такой функции, — задача, как правило, довольно сложная.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $Y \subseteq X$. Множество Y разделяет элементы x_i и x_j , $x_i, x_j \in X$, если либо $x_i \in Y, x_j \notin Y$, либо $x_i \notin Y, x_j \in Y$. Случайно и равновероятно выбираются:

- любое из $2^n - 1$ подмножеств n -множества X ;
- любое из k -подмножеств n -множества X .

Показать, что математическое ожидание числа разделяемых пар элементов n -множества равно:

$$a) E_1 = \binom{n}{2} - \frac{2^{n-2}}{2^n - 1};$$

$$b) E_2 = \binom{n}{2} - \binom{k}{2}.$$

2. Пусть из множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ случайно и равновероятно выбираются r k -подмножества по схеме без возвращения и ξ — случайная величина, равная числу подмножеств, разделяющих фиксированную пару элементов x_i и x_j . Показать, что при $n \rightarrow \infty$ и $r k^2 / n^2 \rightarrow \lambda$, случайная величина $\binom{n}{2} - \xi$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ , т. е.

$$P\left(\binom{n}{2} - \xi = v\right) = \frac{\lambda^v}{v!} e^{-\lambda}, \quad v = 0, 1, \dots$$

3. Пусть система из n подмножеств $\{x_{i_1}, x_{j_1}\}, \dots, \{x_{i_n}, x_{j_n}\}$ множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ разделяет любую пару элементов этого множества и A — матрица инцидентности этой системы подмножеств и множества X . Показать, что существуют противоречивые подстановки s и s' степени n , $s(i) \neq s'(i)$, $1 \leq i \leq n$, такие, что $A = S + S'$, где S и S' — подстановочные матрицы, соответствующие s и s' .

ГЛАВА VII
ПЕРМАНЕНТЫ И ТРАНСВЕРСАЛИ

§ 1. Свойства перманентов

1. Определения. Обозначим через $M_{nm}(K)$ множество матриц $n \times m$, $n \leq m$, с элементами из коммутативного кольца K . *Перманент* ряда A матрицы $A = (a_{ij}) \in M_{nn}(K)$ определяется равенством

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma: X \rightarrow Y} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}, \quad (1.1)$$

где суммирование проводится по всем инъективным отображениям σ множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ в множество $Y = \{1, 2, \dots, m\}$.

Если $\sigma(i) = j_i$, $1 \leq i \leq n$, то (j_1, j_2, \dots, j_n) есть n -размещение из множества $Y = \{1, 2, \dots, m\}$ и перманент матрицы A можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{per} A = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \quad (1.2)$$

где суммирование проводится по всем n -размещениям (j_1, \dots, j_n) из множества $\{1, 2, \dots, m\}$.

Два элемента a_{ij} и a_{kl} матрицы A будем называть *неколлинеарными*, если $i \neq k$, $j \neq l$. Назовем n -вектор $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n})$ *диагональю* матрицы A , если координаты этого вектора являются попарно неколлинеарными элементами матрицы A , а $a_{1j_1} \dots a_{nj_n} =$ диагональным произведением. Согласно формуле (1.2) перманент матрицы A есть сумма всех диагональных произведений этой матрицы. Число слагаемых в этой сумме равно $(m)_n$. Если $m = n$, то

$$\operatorname{per} A = \sum_{s \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, s(i)}, \quad (1.3)$$

где суммирование проводится по всем подстановкам $s \in S_n$, где S_n — симметрическая группа степени n .

Из формулы (1.3) следует, что при $m = n$ перманент имеет определенную связь с понятием определителя $\det A$ соответствующей матрицы A . Уточним эту связь.

Рассмотрим H — подгруппу симметрической группы S_n и $M_n(K)$ — множество матриц $n \times n$ с элементами из кольца K с единицей. Гомоморфное отображение $\chi: H \rightarrow K$ будем называть

характером группы H . Рассмотрим функцию Шура $d_{\chi}^H : M_n(K) \rightarrow K$, определяемую с помощью формулы

$$d_{\chi}^H(A) = \sum_{s \in H} \chi(s) \prod_{i=1}^n a_{i,s(i)}, \quad (1.4)$$

где $d_{\chi}^H(A)$ — образ $A \in M_n(K)$ при отображении d_{χ}^H , $s(i)$ — образ i при подстановке $s \in H$ и суммирование проводится по всей подгруппе H . Заметим, что если $H = S_n$, $\chi(s) = 1$, то $d_{\chi}^{S_n}(A) = \operatorname{reg} A$. Если $H = S_n$ и

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & s \text{ четная}, \\ -1, & s \text{ нечетная}, \end{cases}$$

то $d_{\chi}^{S_n}(A) = \det A$.

2. Перманенты и определители. Учитывая аналогию выражений для перманента и определителя матрицы $A \in M_n(K)$, естественно попытаться найти общую формулу, сводящую вычисление перманента к вычислению определителя соответствующей матрицы. Один из подходов к решению этой задачи состоит в отыскании линейного преобразования T n^2 -мерного векторного пространства $M_n(K)$, такого, что

$$\operatorname{reg} T(A) = \det A \quad (1.5)$$

для всех $A \in M_n(K)$.

Ограничимся случаем, когда K — кольцо действительных чисел, и положим $M_n = M_n(K)$. Для этого случая Пойа рассматривал в качестве линейного преобразования T умножение на -1 одинаково расположенных на фиксированных местах элементов всех матриц $A \in M_n$. Ясно, что для $A \in M_2$ такое преобразование T существует и определяется равенством

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Однако случай $n = 2$ представляет собой исключение, так как справедлива следующая теорема.

Теорема. При $n \geq 3$ не существует линейного преобразования Пойа, при котором $\operatorname{reg} T(A) = \det A$.

Сначала докажем теорему при $n = 3$. Допустим, что такое линейное преобразование Пойа T существует. Тогда для каждой диагонали матрицы $A \in M_3$, соответствующей четной подстановке $s \in S_3$, на -1 умножается четное число ее элементов. Все три диагонали, соответствующие четным подстановкам, не имеют общих элементов, поэтому общее число элементов матрицы A , умножаемых на -1 , является четным. С другой стороны, число умножаемых на -1 элементов диагонали, отвечающей нечетной

подстановке $s \in S_2$, должно быть нечетным. Отсюда вытекает, что общее число умножаемых на -1 элементов матрицы $A \in M_3$ должно быть нечетным. Получили противоречие.

При $n > 3$ достаточно построить класс матриц $A \in M_n$, для которого линейного преобразования Пойа не существует. В качестве такого класса возьмем матрицы вида $A = -\text{diag}(A', I_{n-3})$, где $A' \in M_3$, I_{n-3} — единичная матрица порядка $n-3$. В левом верхнем углу матрицы A стоит некоторая матрица $A' \in M_3$, а в правом центральном — матрица I_{n-3} , остальные элементы нулевые. Очевидно, что $\text{per } A = \text{per } A'$ и $\det A = \det A'$; а так как при $n=3$ теорема доказана, то отсюда следует, что она верна и для произвольного n .

В заключение отметим, что теорема верна и для произвольного линейного преобразования, однако доказательство этого факта мы не будем здесь приводить.

Отметим, что если $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, и элементы a_{ij} неотрицательны, то

$$|\det A| \leq \text{per } A \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (1.6)$$

Эти неравенства сразу следуют из формулы (1.2). Если элементы матрицы A могут быть и отрицательными, то неравенства (1.6) могут не выполняться, в чем легко убедиться, положив

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Свойства перманента. Обозначим через Γ_{rm} множество векторов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ с целочисленными координатами, $1 \leq \omega_i \leq m$, $i = 1, \dots, r$. Положим

$$G_{rm} = \{(\omega_1, \dots, \omega_r) \in \Gamma_{rm} : 1 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_r \leq m\}, \quad (1.7)$$

$$Q_{rm} = \{(\omega_1, \dots, \omega_r) \in \Gamma_{rm} : 1 \leq \omega_1 < \dots < \omega_r \leq m\}. \quad (1.8)$$

Рассмотрим множество $M_{nm} = M_{nm}(K)$ матриц $n \times m$ с элементами из кольца K ; положим $M_n = M_{nn}$. Для матрицы $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in G_{pn}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q) \in G_{qm}$ обозначим через $A[\alpha|\beta]$ матрицу $p \times q$, в которой в i -й строке и j -м столбце стоит элемент $a_{\alpha_i \beta_j}$. В частности, если $\alpha \in Q_{pn}$, $\beta \in Q_{qm}$, то $A[\alpha|\beta]$ есть подматрица A , расположенная в пересечении строк и столбцов, номера которых определяются соответственно α и β .

Через $A(\alpha|\beta)$ будем обозначать матрицу, полученную из матрицы A вычеркиванием строк и столбцов, номера которых определяются соответственно α и β . Матрица $A(\alpha|\beta)$ называется дополнением к матрице $A[\alpha|\beta]$. Матрицы $A(\alpha|-)$ и $A(-|\beta)$ получены соответственно вычеркиванием только строк, номера которых определяются α , и только столбцов, номера которых определяются β .

Сформулируем ряд свойств перменента.

1°. Если $A \in M_{nm}$, $n \leq m$, Π и Π_1 — подстановочные матрицы порядков n и m , то

$$\operatorname{per} \Pi A \Pi_1 = \operatorname{per} A.$$

Обозначим через π и π_1 подстановки, соответствующие подстановочным матрицам Π и Π_1 . Тогда

$$\Pi = (\delta_{\pi(i), j}) = (\delta_{i, \pi^{-1}(j)}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\Pi_1 = (\delta_{\pi_1(i), j}) = (\delta_{i, \pi_1^{-1}(j)}), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Если $\Pi A \Pi_1 = (\tilde{a}_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, то

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \delta_{\pi(i), k} a_{kl} \delta_{l, \pi_1^{-1}(j)} = a_{\pi(i), \pi_1^{-1}(j)},$$

т. е. матрица $\Pi A \Pi_1$ получается из матрицы A перестановками строк и столбцов в соответствии с подстановками π и π_1^{-1} . Отсюда следует, что

$$\operatorname{per} \Pi A \Pi_1 = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} a_{\pi(1), j_1} \cdots a_{\pi(n), j_n},$$

где суммирование ведется по всевозможным инъективным отображениям $\gamma: \{\pi(1), \dots, \pi(n)\} \rightarrow \{\pi_1^{-1}(1), \dots, \pi_1^{-1}(m)\}$, таким, что $\gamma(\pi(i)) = j_i$, $i = 1, \dots, n$. Так как $\{\pi(1), \dots, \pi(n)\} = \{1, \dots, n\}$, $\{\pi_1^{-1}(1), \dots, \pi_1^{-1}(m)\} = \{1, \dots, m\}$, то $\operatorname{per} \Pi A \Pi_1 = \operatorname{per} A$.

2°. Если $A = (a_{ij}) \in M_n$ и A^T — транспонированная матрица A , то

$$\operatorname{per} A^T = \operatorname{per} A. \tag{1.9}$$

Положим $A^T = (a_{ij}^T)$, где $a_{ij}^T = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Тогда

$$\operatorname{per} A^T = \sum_{s \in S_n} a_{s(1), 1} \cdots a_{s(n), n},$$

где S_n — симметрическая группа. Осуществим взаимно однозначное отображение диагоналей матрицы A : $\gamma(a_{s(1), 1}, \dots, a_{s(n), n}) = a_{1, s^{-1}(1)} \cdots a_{n, s^{-1}(n)}$. В результате получаем

$$\operatorname{per} A^T = \sum_{s \in S_n} a_{1, s^{-1}(1)} \cdots a_{n, s^{-1}(n)} = \operatorname{per} A.$$

3°. Функция $\text{per } A$, $A \in M_{n \times n}$, $n \leq m$, является полилинейной функцией строк матрицы A . Обозначим через A_1, A_2, \dots, A_n строки матрицы A . Будем записывать матрицу A в следующем виде: $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T$. В соответствии с этим $\text{per } A = \text{per}(A_1, A_2, \dots, A_n)^T$. В этих обозначениях свойство полилинейности перманентной функции можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{per} \left(\sum_{k=1}^n \gamma_{1k} A_k, \dots, \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} A_k \right)^T &= \\ &= \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n \gamma_{1,k_1} \dots \gamma_{n,k_n} \text{per}(A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_n})^T, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\gamma_i \in K$, и если $A_k = (a_{ki}, \dots, a_{kn})$, то $\gamma A_k = (\gamma a_{ki}, \dots, \gamma a_{kn})$ для $\gamma \in K$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{per} \left(\sum_{k=1}^n \gamma_{1k} A_k, \dots, \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} A_k \right)^T &= \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \sum_{k_1=1}^n \gamma_{1,k_1} a_{k_1, j_1} \dots \sum_{k_n=1}^n \gamma_{n,k_n} a_{k_n, j_n}, \end{aligned}$$

где (j_1, \dots, j_n) есть n -размещение из чисел 1, 2, ..., m . Меняя порядок суммирования в правой части последнего равенства, приходим к соотношению (1.10).

4°. Пусть $A(a_{ij}) \in M_{n \times m}$, $2 \leq n \leq m$. Для получения разнообразных рекуррентных соотношений, используемых при вычислении перманентов, полезно следующее соотношение:

$$\text{per } A = \text{per } A_{ij} + a_{ij} \text{per } A(i|j), \quad (1.11)$$

где A_{ij} получается из матрицы A заменой элемента a_{ij} нулем, а $A(i|j)$ — вычеркиванием i -й строки и j -го столбца. Соотношение (1.11) называется *разложением перманента матрицы A по элементу a_{ij}* . Разобьем все диагональные произведения перманента на два класса в соответствии с тем, входит в них элемент a_{ij} в качестве произведения или нет. Сумма диагональных произведений, не содержащих a_{ij} , равна $\text{per } A_{ij}$, а сумма содержащих a_{ij} произведений равна $a_{ij} \text{per } A(i|j)$. Отсюда следует равенство (1.11).

Обобщим теперь равенство (1.11). В частности, покажем, что для любой матрицы $A \in M_{n \times m}$, $2 \leq n \leq m$, и любого $\alpha \in Q_{rn}$ справедливо разложение

$$\text{per } A = \sum_{\beta \in Q_{rn}} \text{per } A[\alpha | \beta] \text{per } A(\alpha | \beta), \quad (1.12)$$

называемое *разложением Лапласа для перманентов*. В частности,

для любого i , $1 \leq i \leq n$, имеет место разложение

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{per} A(i|j), \quad (1.13)$$

называемое разложением перманента матрицы A по i -й строке.

Если $A \in M_n$, то для любого $\beta \in Q_{rn}$ справедливо равенство

$$\operatorname{per} A = \sum_{\alpha \in Q_{rn}} \operatorname{per} A[\alpha|\beta] \operatorname{per} A(\alpha|\beta),$$

являющееся другим вариантом разложения Лапласа для перманентов. В частности, для любого j , $1 \leq j \leq n$,

$$\operatorname{per} A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \operatorname{per} A(i|j). \quad (1.14)$$

Докажем справедливость разложения (1.12), из которого последующие разложения получаются в качестве следствий. Каждое из $(m)_r$ диагональных произведений матрицы A , сумма которых равна $\operatorname{reg} A$, разобьем на два произведения, содержащие соответственно r и $n - r$ элементов диагонали. К первому произведению отнесем элементы, расположенные в строках, определяемых $\alpha \in Q_{rn}$, а ко второму — элементы из остальных $n - r$ строк. Пусть элементы первого произведения принадлежат столбцам, номера которых определяются $\beta \in Q_{rm}$. Тогда первое произведение является диагональным произведением матрицы $A[\alpha|\beta]$. Элементы второго произведения принадлежат столбцам, номера которых не входят в $\beta \in Q_{rm}$. Следовательно, второе произведение является диагональным произведением матрицы $A(\alpha|\beta)$. Отсюда следует, что сумма диагональных произведений матрицы A , отвечающих фиксированным $\alpha \in Q_{rn}$ и $\beta \in Q_{rm}$, равна $\operatorname{per} A[\alpha|\beta] \operatorname{per} A(\alpha|\beta)$. Суммируя по всем $\beta \in Q_{rm}$, получаем сумму всех диагональных произведений, т. е. перманент матрицы A . Отсюда и следует формула (1.12).

5°. Для равенства нулю перманента $n \times m$ матрицы A достаточно выполнения любого из следующих условий:

- матрица A имеет нулевую строку; при $m = n$ достаточно наличия и нулевого столбца;
- матрица A имеет $m - n + 1$ нулевых столбцов.

Справедливость условия а) следует из разложения вида (1.14) перманента матрицы A по нулевой строке. Достаточность условия б) вытекает из разложения Лапласа для перманента матрицы A вида (1.12), в котором $\alpha = \{1, 2, \dots, n\}$. Ясно, что $\operatorname{per} A[1, 2, \dots, n|\beta] = 0$ при любом $\beta \in Q_{nm}$, так как $n \times n$ матрица $A[1, 2, \dots, n|\beta]$ всегда содержит хотя бы один нулевой столбец.

6°. Если $A, B \in M_n$, то

$$\operatorname{per}(A+B) = \sum_{r=0}^n \sum_{\alpha, \beta \in Q_{rn}} \operatorname{per} A[\alpha | \beta] \cdot \operatorname{per} B(\alpha | \beta), \quad (1.15)$$

где при $r=0$ $\operatorname{per} A[\alpha, \beta]=1$, $\operatorname{per} B(\alpha, \beta)=\operatorname{per} B$, а при $r=n$ $\operatorname{per} A[\alpha, \beta]=\operatorname{per} A$, $\operatorname{per} B(\alpha, \beta)=1$.

Положим $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$. Имеем

$$\operatorname{per}(A+B) = \sum_{s \in S_n} \prod_{i=1}^n (a_{i,s(i)} + b_{i,s(i)}). \quad (1.16)$$

Рассмотрим тождество

$$\prod_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{r=0}^n \sum_{\alpha \in Q_{r,n}} \prod_{i=1}^r x_{\alpha_i} \prod_{i=r+1}^n y_{\alpha'_i}, \quad (1.17)$$

где $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha'_{r+1}, \dots, \alpha'_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Используя тождество (1.17), из (1.16) получаем

$$\operatorname{per}(A+B) = \sum_{r=0}^n \sum_{\alpha \in Q_{r,n}} \left(\sum_{s \in S_n} \prod_{i=1}^r a_{\alpha_i, s(\alpha_i)} \prod_{i=r+1}^n b_{\alpha'_i, s(\alpha'_i)} \right). \quad (1.18)$$

Выражение в скобках в правой части равенства (1.18) представляет собой пермент некоторой матрицы, у которой i -я строка является α_i -й строкой матрицы A , $i = 1, \dots, r$, и α'_i -й строкой матрицы B , $i = r+1, \dots, n$. Применяя к этому перменту формулу разложения Лапласа, получаем, что выражение в скобках равно

$$\sum_{\alpha \in Q_{rn}} \operatorname{per} A[\alpha | \beta] \operatorname{per} B(\alpha | \beta).$$

Теперь формула (1.15) следует из равенства (1.18).

7°. Прежде чем сформулировать очередное свойство пермента, сформулируем и докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Gamma_{nm}$ и $[\omega] = [1^{a_1} 2^{a_2} \dots m^{a_m}]$ — первичная спецификация ω , где $a_i = a_i(\omega)$ определяет число появлений i в качестве координаты ω . Обозначим $\mu(\omega) = \prod_{i=1}^m a_i(\omega)!$. Теперь, если $f(\omega_1, \dots, \omega_n)$ — произвольная числовая функция от натуральных аргументов, то

$$\sum_{\omega \in \Gamma_{nm}} f(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{\omega \in \Gamma_{nm}} \frac{1}{\mu(\omega)} \sum_{s \in S_n} f(\omega_{s(1)}, \dots, \omega_{s(n)}), \quad (1.19)$$

где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Для доказательства равенства (1.19) множество Γ_{nm} разобьем на классы эквивалентности. Будем считать,

что $\omega \sim \omega'$, если $[\omega] = [\omega']$. Ясно, что каждый класс эквивалентности содержит единственный элемент множества G_{nm} . Осуществляя все возможные $n!$ перестановок координат этого элемента, получим все векторы, принадлежащие данному классу эквивалентности, причем каждый вектор повторится $\mu(\omega)$ раз. Таким образом, суммирование значений функции f по всем $\omega \in G_{nm}$ в правой части равенства (1.19) осуществляется сначала по элементам одного класса эквивалентности, а затем по всем таким классам.

Покажем теперь, что для любых матриц $B \in M_{nm}$, $C \in M_{nn}$, $n \leq m$, справедливо равенство

$$\operatorname{per}(BC) = \sum_{\omega \in G_{nm}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per} B[1, \dots, n | \omega] \operatorname{per} C[\omega | 1, \dots, n], \quad (1.20)$$

которое называется *формулой Бине — Коши* для перменентов.

Обозначим через $(BC)_i$ i -ю строку матрицы BC . Тогда $(BC)_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} C_k$, где C_k — k -я строка C , и, следовательно,

$$\operatorname{per}(BC) = \operatorname{per} \left(\sum_{k=1}^m b_{1k} C_k, \dots, \sum_{k=1}^m b_{nk} C_k \right)^T.$$

Используя свойство полилинейности перменентной функции (1.10), отсюда получаем

$$\operatorname{per}(BC) = \sum_{\omega \in \Gamma_{n,m}} \prod_{i=1}^n b_{i,\omega_i} \operatorname{per}(C_{\omega_1}, \dots, C_{\omega_n})^T, \quad (1.21)$$

где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Используя (1.19), преобразуем правую часть:

$$\operatorname{per}(BC) = \sum_{\omega \in G_{nm}} \frac{1}{\mu(\omega)} \sum_{s \in S_n} \prod_{i=1}^n b_{i,\omega_{s(i)}} \operatorname{per}(C_{\omega_{s(1)}}, \dots, C_{\omega_{s(n)}})^T.$$

Из свойства 4° перменента следует, что

$$\operatorname{per}(C_{\omega_{s(1)}}, \dots, C_{\omega_{s(n)}})^T = \operatorname{per}(C_{\omega_1}, \dots, C_{\omega_n})^T = \operatorname{per} C[\omega | 1, \dots, n].$$

Таким образом,

$$\operatorname{per}(BC) = \sum_{\omega \in G_{nm}} \frac{1}{\mu(\omega)} \operatorname{per} C[\omega | 1, \dots, n] \sum_{s \in S_n} \prod_{i=1}^n b_{i,\omega_{s(i)}}.$$

Из этого равенства с учетом того, что

$$\sum_{s \in S_n} \prod_{i=1}^n b_{i,\omega_{s(i)}} = \operatorname{per} B[1, \dots, n | \omega],$$

получаем формулу (1.20).

4. Вычисление перменентов. Заметим, что пермененты не обладают рядом свойств, аналогичных свойствам детерминанта, что создает трудности при их вычислении. Так, свойство, аналогичное свойству детерминанта $\det(AB) = \det A \det B$, для перменента, вообще говоря, не имеет места:

$$\operatorname{per} \begin{bmatrix} (1 & 1) \\ (1 & 1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \operatorname{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{per} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Правда, в некоторых случаях аналог этого свойства имеет место и для перменентов. Так, если $A \in M_n$ и A состоит из квадратных матриц $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$, расположенных вдоль главной диагонали, а все элементы A вне полей $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$ равны нулю, т. е. $A = \operatorname{diag}(A^{(1)}, \dots, A^{(k)})$, то

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per} A^{(1)} \operatorname{per} A^{(2)} \dots \operatorname{per} A^{(k)}. \quad (1.22)$$

Это равенство сразу следует из формулы (1.12) разложения Лапласа для перменентов.

Пусть s_1 и s_2 — некоторые подстановки степени n , а Π_1 и Π_2 — соответствующие им подстановочные матрицы. Матрицу $(\alpha\Pi_1 + \beta\Pi_2)$, где α и β — действительные числа, назовем *оболочкой*, натянутой на матрицы Π_1 и Π_2 . Покажем, что для перменента оболочки имеет место формула

$$\operatorname{per} (\alpha\Pi_1 + \beta\Pi_2) = \prod_{j=1}^k (\alpha^{l_j} + \beta^{l_j}), \quad (1.23)$$

где l_1, l_2, \dots, l_k — длины циклов подстановки $s_1^{-1}s_2$.

Будем предполагать, что подстановка $s_1^{-1}s_2$ записывается в виде произведения независимых циклов:

$$s_1^{-1}s_2 = (a_1, \dots, a_{l_1}) (b_1, \dots, b_{l_2}) \dots (c_1, \dots, c_{l_k}).$$

Рассмотрим подстановку

$$s = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_{l_1} & b_1 & \dots & b_{l_2} & \dots & c_1 & \dots & c_{l_k} \\ 1 \dots l_1 & l_1 + 1 \dots l_1 + l_2 & \dots & n - l_k + 1 \dots n \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$s^{-1} \cdot s_1^{-1}s_2 \cdot s = (1, \dots, l_1) (l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2) \dots (n - l_k + 1, \dots, n),$$

Если Π — подстановочная матрица, соответствующая подстановке s , $\tilde{\Pi} = \Pi^{-1}\Pi_1^{-1}\Pi_2\Pi$, I — единичная матрица, то $\operatorname{per}(\alpha\Pi_1 + \beta\Pi_2) = \operatorname{per}(\alpha I + \beta \tilde{\Pi})$. Заметим, что $\tilde{\Pi} = \operatorname{diag}(\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2, \dots, \tilde{\Pi}_k)$, где $\tilde{\Pi}_i$ — подстановочная матрица порядка l_i , отвечающая циклу $(l_1 + \dots + l_{i-1} + 1, l_1 + \dots + l_{i-1} + 2, \dots, l_1 + \dots + l_{i-1} + l_i)$. Таким образом,

$$\operatorname{per} (\alpha\Pi_1 + \beta\Pi_2) = \operatorname{per} A_1 \operatorname{per} A_2 \dots \operatorname{per} A_k, \quad (1.24)$$

где A_i есть матрица $l_i \times l_i$, $1 \leq i \leq k$, вида

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha & \beta \\ \beta & & & \alpha \end{pmatrix}$$

где вне двух диагоналей расположены нулевые элементы. Разложением $\operatorname{per} A_i$ по элементу, стоящему в последней строке и первом столбце, получаем формулу

$$\operatorname{per} A_i = \alpha^{l_i} + \beta^{l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.25)$$

Теперь формула (1.23) следует из (1.24) и (1.25).

При $\alpha = \beta = 1$ из (1.23) получаем

$$\operatorname{per} (\Pi_1 + \Pi_2) = 2^k, \quad (1.26)$$

где k — число циклов в подстановке $s_1^{-1}s_2$.

Рассмотрим 0,1-матрицу $n \times n$, у которой (i, j) -й элемент равен единице, если $j - i \in \{-1, 0, 1, \dots, k-2\}$, причем $3 \leq k \leq n/2 + 1$, $n \geq 4$. Матрицы такого типа называются *теплицевыми*. Обозначим через $D(n, k)$ перманент такой матрицы, так что

$$D(n, k) = \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & 1 & 1 \end{array} \right|_{k-1}$$

Разложением этого перманента по первой строке можно убедиться, что

$$D(n, k) = \sum_{i=1}^{k-1} D(n-i, k). \quad (1.27)$$

Полагая $F(n) = D(n, 3)$, из этого соотношения получаем

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2), \quad F(1) = 1, \quad F(2) = 2. \quad (1.28)$$

Числа $F(n)$ называются *числами Фибоначчи*.

Рассмотрим 0,1-матрицу $n \times n$, являющуюся суммой подстановочных матриц, соответствующих степеням полиноциклической подстановки $c = (1, 2, \dots, n)$. Введем обозначение

$$Q(n, k) = \operatorname{per} \sum_{i=0}^{k-1} C^i, \quad (1.29)$$

где C' — подстановочная матрица, отвечающая подстановке c .

При $k = 3$ имеем

$$Q(n, 3) = \operatorname{per} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Путем разложения $Q(n, 3)$ по трем единичным элементам, стоящим в левом нижнем углу матрицы, при $n \geq 5$ получаем $Q(n, 3) = D(n - 1, 3) + 2D(n - 2, 3) + 2$, т. е. $Q(n, 3)$ имеет следующее выражение через числа Фибоначчи:

$$Q(n, 3) = F(n - 1) + 2F(n - 2) + 2. \quad (1.30)$$

Используя рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи, при $n \geq 5$ можно получить соотношение:

$$Q(n, 3) = Q(n - 1, 3) + Q(n - 2, 3) - 2. \quad (1.31)$$

Можно показать, что аналогичные соотношения имеют место и для $k = 4$: $Q(n, 4) = Q(n - 1, 4) + Q(n - 2, 4) + Q(n - 3, 4) - 4$, $n \geq 7$. Аналогичные, но более сложные линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами известны для некоторых других значений $Q(n, k)$, $k \geq 5$.

Отыскание значений перменентов из линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами приводит к необходимости решения так называемых линейных рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами (см. задачи 15–20 гл. III).

Однородным линейным рекуррентным уравнением с постоянными коэффициентами a_1, \dots, a_k будем называть уравнение

$$f(x + k) + a_1 f(x + k - 1) + a_2 f(x + k - 2) + \dots + a_k f(x) = 0. \quad (1.32)$$

Его решение $f(x)$ будем искать в виде

$$f(x) = \lambda^x, \quad (1.33)$$

где λ — неизвестное число, $\lambda \neq 0$. Подставляя (1.33) в (1.32), получаем уравнение для определения λ :

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \dots + a_k = 0, \quad (1.34)$$

которое называется *характеристическим уравнением* для рекуррентного уравнения (1.32). Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — корни уравнения (1.34), то для любых постоянных c_1, c_2, \dots, c_k функция

$$f(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \dots + c_k \lambda_k^x \quad (1.35)$$

также является решением уравнения (1.32). Более того, если корни уравнения (1.34) простые, то функция (1.35) является общим решением уравнения (1.32), т. е. подходящим выбором по-

стоянных c_1, c_2, \dots, c_k из выражения (1.35) может быть получено любое частное решение уравнения (1.32). Если корень λ_k имеет кратность l_k , то в сумме (1.35) вместо слагаемого $c_k \lambda_k^x$ ему соответствует выражение $(c_k + c_k^{(1)}x + \dots + c_k^{(l_k-1)}x^{l_k-1}) \lambda_k^x$.

Например, рассматривая рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи (1.28) как рекуррентное уравнение с постоянными коэффициентами, находим его общее решение $F(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Используя условия $F(1) = 1, F(2) = 2$, находим

$$c_1 = \frac{2 - \lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad c_2 = -\frac{2 - \lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

С учетом того, что $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$, получаем

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Отсюда, с учетом равенства (1.30), следует формула

$$Q(n, 3) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + 2. \quad (1.36)$$

5. Формула Райзера. Для матрицы $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $n \leq m$, $a_{ij} \in K$, имеет место следующая формула, принадлежащая Райзеру:

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=m-n}^{m-1} (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} S_k, \quad (1.37)$$

где

$$S_k = \sum_{1 < j_1 < \dots < j_k < m} \prod_{i=1}^n (a_{i1} + \dots + a_{im} - a_{ij_1} - \dots - a_{ij_k}).$$

Для вывода формулы (1.37) применим метод включения — исключения. В качестве элементов будем рассматривать m^n отображений множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в множество $\{1, 2, \dots, m\}$.

Отображению $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$ припишем вес $a_{1l_1} a_{2l_2} \dots a_{nl_n}$. Обозначим

через A , свойство отображения $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$, состоящее в том, что среди чисел l_1, l_2, \dots, l_n отсутствует число j , $1 \leq j \leq m$. По определению перменант матрицы A равен суммарному весу таких отображений, для которых выполнены ровно $m - n$ свойств из совокупности A_1, A_2, \dots, A_n . Если $M(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k})$ — суммарный вес отображений, для которых одновременно выполнены свойства $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_k}$, то, применяя формулы метода

включения — исключения (1.9) гл. II, получаем

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=m-n}^m (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} S_k, \quad (1.38)$$

где

$$S_k = \sum_{1 < j_1 < \dots < j_k < m} M(A_{j_1} \dots A_{j_k}). \quad (1.39)$$

Суммарный вес всех m^n отображений, очевидно, равен

$$S_0 = \prod_{i=1}^n (a_{i1} + \dots + a_{im}).$$

Для вычисления $M(A_{j_1} \dots A_{j_k})$ нужно в данном произведении элементы вида $a_{ij_1}, a_{ij_2}, \dots, a_{ij_k}$, $i = 1, \dots, n$, положить равными нулю. Следовательно,

$$M(A_{j_1} \dots A_{j_k}) = \prod_{i=1}^n (a_{i1} + \dots + a_{im} - a_{ij_1} - \dots - a_{ij_k}). \quad (1.40)$$

Теперь формула (1.37) следует из формул (1.38) — (1.40).

При $m = n$ формула (1.37) принимает вид

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{1 < j_1 < \dots < j_k < n} \prod_{i=1}^n (a_{i1} + \dots + a_{in} - a_{ij_1} - \dots - a_{ij_k}). \quad (1.41)$$

Формулу (1.37) можно записать в несколько более компактном виде. Для матрицы $B = (b_{ij})$ положим $r_i(B) = \sum_j b_{ij}$ и обозначим через Λ_k совокупность $n \times (m-k)$ подматриц матрицы A , таких, что

$$\Lambda_k = \{A(-|\beta); \beta \in Q_{k,n}\}, \quad m-n \leq k \leq m. \quad (1.42)$$

Тогда

$$S_k = \sum_{B \in \Lambda_k} \prod_{i=1}^n r_i(B), \quad m-n \leq k \leq m,$$

и формула (1.37) принимает вид

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=m-n}^{m-1} (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} \sum_{B \in \Lambda_k} \prod_{i=1}^n r_i(B). \quad (1.43)$$

При $m = n$ эта формула имеет вид

$$\operatorname{per} A = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{B \in \Lambda_n} \prod_{i=1}^n r_i(B), \quad (1.44)$$

где $\Lambda_n = \{A\}$.

Используя неравенства Бонферрони, из формулы (1.43) получаем следующие оценки для перманента матрицы с неотрицательными элементами:

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \Lambda_{m-n}} \prod_{i=1}^n r_i(B) - (m-n+1) \sum_{B \in \Lambda_{m-n+1}} \prod_{i=1}^n r_i(B) &\leqslant \operatorname{per} A \leqslant \\ &\leqslant \sum_{B \in \Lambda_{m-n}} \prod_{i=1}^n r_i(B). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Аналогичным образом из формулы (1.44) следуют более наглядные оценки:

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{v=1}^n \prod_{i=1}^n \sum_{j \neq v} a_{ij} \leqslant \operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad (1.46)$$

справедливые для $n \times n$ матрицы A с неотрицательными элементами.

§ 2. Перманенты и трансверсали

1. Норма вектора. На множестве $B = \{0, 1\}$ определим операции сложения $+$ и умножения \cdot удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1, \quad 0 + 0 = 0;$
- 2) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$

Помимо ассоциативности и коммутативности операций предполагаем, что они связаны законом дистрибутивности. В этом случае говорят, что множество B представляет собой булево кольцо из двух элементов.

Для двух m -векторов $b = (b_1, \dots, b_m)$ и $b' = (b'_1, \dots, b'_m)$, $b_i, b'_i \in B$, определим операцию булева сложения:

$$b + b' = (b_1 + b'_1, \dots, b_m + b'_m).$$

Эта операция коммутативна и ассоциативна, и, следовательно, с помощью этой операции на множестве $B^{(m)} = B \times \dots \times B$ определена полугруппа, которую удобно обозначить также $B^{(m)}$.

Нормой m -вектора $b \in B^{(m)}$ назовем число его координат, равных единице. Норму вектора b будем обозначать через $\|b\|$. Норма m -вектора $b \in B^{(m)}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\|b\| = 0$ тогда и только тогда, когда $b = (0, 0, \dots, 0);$
- 2) для любых $b, b' \in B^{(m)}$ справедливо неравенство

$$\|b + b'\| \leq \|b\| + \|b'\|. \quad (2.1)$$

Действительно, если D и D' — множества равных единице координат m -векторов b и b' , то $|D| = \|b\|$, $|D'| = \|b'\|$, $|D + D'| =$

$= |D \cup D'|$. Поэтому неравенство (2.1) является следствием неравенства $|D \cup D'| \leq |D| + |D'|$.

2. Критерий для 0,1-матрицы. Рассмотрим 0,1-матрицу размера $n \times m$, $n \leq m$, и сформулируем необходимые и достаточные условия, которым она должна удовлетворять для того, чтобы ее перманент был положителен.

Теорема 1. Пусть 0,1-матрица $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, имеет строки A_1, A_2, \dots, A_n . Для того чтобы

$$\operatorname{reg} A > 0, \quad (2.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\|A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}\| \geq k \quad (2.3)$$

для всех $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$.

Эту теорему будем называть *критерием положительности перманента 0,1-матрицы*.

Необходимость. Если $\operatorname{reg} A > 0$, то существует такое n -размещение j_1, \dots, j_n из чисел $1, 2, \dots, m$, что $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = 1$. Отсюда следует, что для всех $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, имеем $a_{i_1 j_{i_1}} a_{i_2 j_{i_2}} \dots a_{i_k j_{i_k}} = 1$. Здесь $a_{i_s j_{i_s}}$, $1 \leq s \leq k$, является j_{i_s} -й координатой i_s -й вектор-строки A_{i_s} матрицы A , причем $j_{i_u} \neq j_{i_v}$, $u \neq v$, так как $(j_{i_1}, j_{i_2}, \dots, j_{i_k})$ есть часть размещения (j_1, j_2, \dots, j_n) . Отсюда следует, что у вектора $A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}$ имеется по крайней мере k координат, равных единице, и значит, выполнено условие (2.3).

Достаточность. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 1$ матрица A состоит из одной строки. Неравенство (2.3) в этом случае означает, что хотя бы один элемент этой строки равен единице. В этом случае ясно, что неравенство (2.2) выполнено. Допустим, что из неравенства (2.3) следует неравенство (2.2) для любой матрицы A' , составленной не более, чем из $n - 1$ строк матрицы A . Рассмотрим два случая.

Случай 1. Для всех $1 \leq k \leq n - 1$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, выполнены усиленные неравенства

$$\|A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}\| \geq k + 1. \quad (2.4)$$

Разложим $\operatorname{reg} A$ по первой строке. Имеем

$$\operatorname{reg} A = \sum_{j=1}^m a_{1j} \operatorname{reg} A(1 \mid j), \quad (2.5)$$

где $A(1 \mid j)$ — матрица, полученная из A вычеркиванием первой строки и j -го столбца.

Из условия $\|A_{1j}\| \geq 1$, вытекающего из неравенства (2.3), следует, что среди элементов a_{11}, \dots, a_{1m} имеется по крайней мере

один элемент $a_{is} = 1$. Из (2.5) следует, что

$$\operatorname{per} A \geq \operatorname{per} A(1|s). \quad (2.6)$$

Из неравенства (2.4) следует, что для всех $1 \leq k \leq n-1$, $2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$,

$$\left\| A_{i_1}^{(s)} + A_{i_2}^{(s)} + \dots + A_{i_k}^{(s)} \right\| \geq k, \quad (2.7)$$

где $A_i^{(s)}$ — i -я строка матрицы A без s -й координаты. Из предположения индукции следует, что

$$\operatorname{per} A(1|s) > 0. \quad (2.8)$$

Теперь из неравенств (2.6) и (2.8) следует справедливость теоремы для рассматриваемого случая.

Случай 2. Этот случай характеризуется тем, что существуют k строк, $1 \leq k \leq n-1$, для которых неравенство (2.3) превращается в равенство. Перестановкой строк, не меняющей перменента, всегда можно сделать так, чтобы таким свойством обладали первые k строк, т. е.

$$\|A_1 + A_2 + \dots + A_k\| = k, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (2.9)$$

В силу предположения индукции для матрицы $A[1, \dots, k|-]$, $1 \leq k \leq n-1$, состоящей из первых k строк матрицы A , имеем

$$\operatorname{per} A[1, \dots, k|-] > 0. \quad (2.10)$$

Из разложения

$$\operatorname{per} A[1, \dots, k|-] = \sum_{\beta \in Q_{km}} \operatorname{per} A[1, \dots, k|\beta]$$

следует, что существует такое $\beta \in Q_{km}$, что $\operatorname{per} A[1, \dots, k|\beta] > 0$. Перестановкой столбцов матрицы A , не меняющей $\operatorname{per} A$, можно всегда сделать так, чтобы таким свойством обладало $\beta = \{1, \dots, k\}$, т. е.

$$\operatorname{per} A[1, \dots, k|1, \dots, k] > 0. \quad (2.11)$$

Из разложения Лапласа

$$\operatorname{per} A = \sum_{\beta \in Q_{km}} \operatorname{per} A[1, \dots, k|\beta] \operatorname{per} A(1, \dots, k, \beta)$$

следует, что

$$\operatorname{per} A \geq \operatorname{per} A[1, \dots, k|1, \dots, k] \operatorname{per} A(1, \dots, k|1, \dots, k). \quad (2.12)$$

Покажем теперь, что

$$\operatorname{per} A(1, \dots, k|1, \dots, k) > 0. \quad (2.13)$$

Обозначим через $\bar{A}_{k+1}, \dots, \bar{A}_n$ строки матрицы $A(1, \dots, k|1, \dots, k)$. Покажем, что эта матрица удовлетворяет условиям (2.3).

Для всех $1 \leq l \leq n-k$, $1 \leq v_1 < \dots < v_l \leq n-k$, покажем, что

$$\|\bar{A}_{k+v_1} + \dots + \bar{A}_{k+v_l}\| \geq l. \quad (2.14)$$

Обозначим через \bar{A}_j , $k+1 \leq j \leq n$, m -вектор, полученный из вектора \bar{A}_j добавлением k первых нулевых координат. Имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{A}_{k+v_1} + \dots + \bar{A}_{k+v_l}\| = \\ = \|\bar{A}_{k+v_1} + \dots + \bar{A}_{k+v_l}\| + \|A_1 + \dots + A_k\| - k \geq \\ \geq \|A_1 + \dots + A_k + \bar{A}_{k+v_1} + \dots + \bar{A}_{k+v_l}\| - k. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из условия (2.11) следует, что первые k координат вектора $A_1 + \dots + A_k$ равны единице. Отсюда следует, что $A_1 + \dots + A_k + \bar{A}_{k+v_1} + \dots + \bar{A}_{k+v_l} = A_1 + \dots + A_k + A_{k+v_1} + \dots + A_{k+v_l}$. В силу (2.3) имеем

$$\|A_1 + \dots + A_k + A_{k+v_1} + \dots + A_{k+v_l}\| \geq k+l. \quad (2.16)$$

Теперь условие (2.14) вытекает из соотношений (2.15) и (2.16). По предположению индукции из (2.14) вытекает справедливость неравенства (2.13), и теорема следует из неравенства (2.12) в силу (2.11) и (2.13).

3. Оценки перманента. Заметим, что условие (2.3) теоремы 1 оказываются достаточными не только для положительности перманента, но позволяют также получить содержательную оценку снизу для величины перманента 0,1-матрицы. Соответствующая теорема принадлежит Радо.

Теорема 2. Если для 0,1-матрицы $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, со строками A_1, A_2, \dots, A_n выполнено условие (2.3) и условие

$$\|A_1\| \leq \|A_2\| \leq \dots \leq \|A_n\|, \quad (2.17)$$

то для перманента этой матрицы имеет место неравенство

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{\min\{n, \|A_1\|\}} (\|A_i\| - i + 1). \quad (2.18)$$

Неравенство (2.18) докажем индукцией по n . При $n=1$ оно сводится к очевидному равенству $\operatorname{per} A = \|A_1\|$ и, значит, верно.

Будем предполагать, что неравенство (2.18) справедливо для любой матрицы, содержащей $n-1$ строк, если для нее выполнено условие (2.3). Рассмотрим такие же два случая, как и при доказательстве теоремы 1.

Случай 1. Для матрицы A выполнено условие (2.4). Это означает, что условие (2.3) справедливо для любой подматрицы, полученной из A вычеркиванием произвольных строки и столбца.

Разложим перменент матрицы A по первой строке. Имеем

$$\operatorname{per} A = \sum_{j: a_{1j}=1} \operatorname{per} A(1|j), \quad (2.19)$$

где $A(1|j)$ — матрица, полученная из A вычеркиванием первой строки и j -го столбца. Для этой матрицы выполнено условие (2.3). Обозначим через A'_2, A'_3, \dots, A'_n строки матрицы $A(1|j)$ при некотором j , $1 \leq j \leq m$. Так как вектор A'_v получается из вектора A_v , $2 \leq v \leq n$, вычеркиванием j -й координаты, то, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\|A'_2\| \leq \|A'_3\| \leq \dots \leq \|A'_n\|. \quad (2.20)$$

Это условие может оказаться невыполненным, если $\|A_\mu\| = \|A_\nu\|$, $\mu \leq \nu$, а $\|A'_\mu\| = \|A'_\nu\| + 1$. В этом случае перестановкой строк, не меняющей $\operatorname{per} A$, можно придать им должную нумерацию.

Используя условие (2.20), применим к оценке $\operatorname{per} A(1|j)$ предположение индукции. Имеем

$$\operatorname{per} A(1|j) \geq \prod_{v=1}^{\min(n-1, \|A'_2\|)} (\|A'_{v+1}\| - v + 1). \quad (2.21)$$

Так как $\|A'_v\| \geq \|A_v\| - 1$, то, подставляя в правую часть неравенства (2.21) A_v вместо A'_v и проводя замену индексов $i = v + 1$, получаем оценку, не зависящую от j :

$$\operatorname{per} A(1|j) \geq \prod_{i=2}^{\min(n, \|A_2\|)} (\|A_i\| - i + 1).$$

Усиливая это неравенство заменой в верхнем пределе $\|A_2\|$ на $\|A_1\|$ и подставляя полученную оценку в (2.19), получаем

$$\operatorname{per} A \geq \|A_1\| \prod_{i=2}^{\min(n, \|A_1\|)} (\|A_i\| - i + 1).$$

Эта оценка совпадает с оценкой (2.18).

Случай 2. Не ограничивая общности, считаем, что для матрицы A выполнено условие (2.9). Так как $\|A_1\| \leq \|A_2\| \leq \dots \leq \|A_k\|$ и подматрица A' , имеющая строки A_1, A_2, \dots, A_k , удовлетворяет условию (2.3), то

$$\operatorname{per} A \geq \operatorname{per} A' \geq \prod_{i=1}^{\min(k, \|A_1\|)} (\|A_i\| - i + 1). \quad (2.22)$$

Так как $\|A_i\| \leq k \leq n-1$, то

$$\min(k, \|A_1\|) = \|A_1\| = \min(n, \|A_1\|).$$

С учетом этого равенства из неравенства (2.22) следует оценка (2.18). Теорема доказана.

Следствие. Если для 0,1-матрицы A , имеющей строки A_1, A_2, \dots, A_n и m столбцов, $n \leq m$, выполнено условие (2.3) и $d = \|A_1\| \leq \|A_2\| \leq \dots \leq \|A_n\|$, (2.23)

то

$$\operatorname{per} A \geq \begin{cases} d!, & d \leq n, \\ (d)_n, & d \geq n. \end{cases} \quad (2.24)$$

Применим неравенство (2.18). В первом случае имеем $\min(n, \|A_1\|) = d \leq n$. Поэтому

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^d (d - i + 1) = d!.$$

Во втором случае имеем $\min(n, \|A_1\|) = n \leq d = \|A_1\|$. Поэтому получаем

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^n (d - i + 1) = (d)_n.$$

4. Неотрицательные матрицы. Прямоугольную матрицу $A(a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, элементы которой являются действительными числами, будем называть *неотрицательной* и обозначать $A \geq 0$, если $a_{ij} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Матрица A называется *положительной*, что обозначается $A > 0$, если $a_{ij} > 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Критерий положительности перманента 0,1-матрицы, составляющий содержание теоремы 1, распространить на случай произвольной неотрицательной матрицы с числовыми элементами. Рассмотрим неотрицательную матрицу $A = -(a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $a_{ij} \geq 0$. Решеткой матрицы A назовем 0,1-матрицу $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, такую, что

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} > 0, \\ 0, & a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\operatorname{per} A > 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{per} \tilde{A} > 0$, так как $\operatorname{per} A$ и $\operatorname{per} \tilde{A}$ имеют положительные диагональные произведения, отмеченные одними и теми же индексами. Отсюда следует

Теорема 3. Если \tilde{A} — 0,1-матрица размера $n \times m$ со строками $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$, являющаяся решеткой неотрицательной матрицы A , то $\operatorname{per} A > 0$ тогда и только тогда, когда для всех $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$, выполнены условия

$$\|\tilde{A}_{i_1} + \dots + \tilde{A}_{i_k}\| \geq k. \quad (2.25)$$

Эту теорему будем называть *критерием положительности перманента неотрицательной матрицы*. Используя критерий положи-

жительности перманента неотрицательной матрицы, можно получить критерий равенства нулю перманента такой матрицы.

Теорема 4. Пусть A — неотрицательная $n \times m$ -матрица, $n \leq m$. Для того чтобы перманент матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно существование подматрицы $k \times (m - k + 1)$ -матрицы A , $1 \leq k \leq n$, имеющей только нулевые элементы.

Сначала рассмотрим случай, когда $m = n$. Пусть матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_{ij} \geq 0$, имеет строки A_1, \dots, A_n . Из условия $\operatorname{per} A = 0$ следует существование таких $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, что для строк $\tilde{A}_{i_1}, \dots, \tilde{A}_{i_k}$ решетки

$$\|\tilde{A}_{i_1} + \dots + \tilde{A}_{i_k}\| < k. \quad (2.26)$$

Это означает, что у вектора $\tilde{A}_{i_1} + \dots + \tilde{A}_{i_k}$ имеются по крайней мере $n - k + 1$ нулевых координат. Отсюда следует, что нулевыми являются те же $n - k + 1$ координат и у векторов A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , т. е. матрица A имеет нулевую $k \times (n - k + 1)$ -подматрицу.

Обратно, если имеется нулевая подматрица $k \times (n - k + 1)$, расположенная в строках с номерами i_1, \dots, i_k , то у вектора $\tilde{A}_{i_1} + \dots + \tilde{A}_{i_k}$ имеются по крайней мере $n - k + 1$ нулевых координат, т. е. $\|\tilde{A}_{i_1} + \dots + \tilde{A}_{i_k}\| < k$. Для случая $m = n$ теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай $n \times m$ -матрицы A , когда $n < m$. Рассмотрим $m \times m$ -матрицу $B = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, где C есть $(m - n) \times m$ -матрица, все элементы которой равны 1. Условие $\operatorname{per} B = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда матрица B , а следовательно, и матрица A содержат нулевую $k \times (m - k + 1)$ -подматрицу. Выбирая $\alpha = \{n + 1, \dots, m\}$ и применяя разложение Лапласа для $\operatorname{per} B$, имеем

$$\operatorname{per} B = (m - n)! \sum_{\beta \in Q_{m-n,m}} \operatorname{per} B(n+1, \dots, m | \beta).$$

Заметим, что

$$\sum_{\beta \in Q_{m-n,m}} \operatorname{per} B(n+1, \dots, m | \beta) = \sum_{\beta \in Q_{m-n,m}} \operatorname{per} A(- | \beta) = \operatorname{per} A.$$

Таким образом,

$$\operatorname{per} B = (m - n)! \operatorname{per} A. \quad (2.27)$$

Отсюда следует, что $\operatorname{per} B = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{per} A = 0$, и, значит, теорема доказана и при $n < m$.

5. Трансверсали. Пусть X — конечное множество и (X_1, X_2, \dots, X_n) — семейство его непустых подмножеств, которое может

содержать и совпадающие подмножества. Иными словами, семейство — это n -вектор, координаты которого принимают значения из булеана 2^X , за исключением пустого подмножества. Трансверсалю семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) будем называть n -вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) такой, что $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Трансверсаль (x_1, x_2, \dots, x_n) иногда называют системой различных представителей семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) . Сформулируем критерий существования трансверсали семейства подмножеств, принадлежащий Ф. Холлу.

Теорема 5. Для существования трансверсали (x_1, x_2, \dots, x_n) семейства подмножеств (X_1, X_2, \dots, X_n) множества X необходимо и достаточно, чтобы для всех $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, выполнялись $2^n - 1$ неравенства

$$|X_{i_1} \cup X_{i_2} \cup \dots \cup X_{i_k}| \geq k. \quad (2.28)$$

Доказательство критерия Ф. Холла опирается на критерий положительности перманента 0,1-матрицы, сформулированный в теореме 1. Семейству (X_1, X_2, \dots, X_n) подмножеств множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ поставим в соответствие 0,1-матрицу $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in X_i, \\ 0, & x_j \notin X_i. \end{cases}$$

Матрицу A будем называть *матрицей инцидентности* семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) . Если $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})$ является трансверсалю семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) , то в матрице инцидентности существует диагональ $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n})$ такая, что $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = 1$. Очевидно, верно и обратное. Таким образом, каждой трансверсали семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) в соответствующей матрице инцидентности ставится в соответствие диагональ с положительным произведением. Значит, если $R(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — число трансверсалей семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) , то

$$R(X_1, X_2, \dots, X_n) = \operatorname{per} A. \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что трансверсаль семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) существует тогда и только тогда, когда для соответствующей матрицы инцидентности выполнено условие $\operatorname{per} A > 0$. Согласно теореме 1 это условие имеет место тогда и только тогда, когда для всех $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, выполнены неравенства $|A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}| \geq k$. Ясно, что норма вектора $A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_k}$ равна $|X_{i_1} \cup X_{i_2} \cup \dots \cup X_{i_k}|$. Отсюда следует теорема.

Из условия (2.29) и теоремы 2 вытекает формула для оценки снизу числа трансверсалей семейства (X_1, X_2, \dots, X_n) :

$$R(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq \prod_{i=1}^{\min\{n, |X_i|\}} (|X_i| - i + 1), \quad (2.30)$$

в предположении, что подмножества семейства упорядочены в соответствии с условием $|X_1| \leq |X_2| \leq \dots \leq |X_n|$. Если к этому условию добавлено неравенство $|X_1| \geq d$, то из следствия теоремы 2 получаем оценки М. Холла:

$$R(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq \begin{cases} d!, & d \leq n, \\ (d)_n, & d \geq n. \end{cases} \quad (2.31)$$

6. Латинские прямоугольники и квадраты. Матрицу $\mathcal{L}_{km} = (l_{ij})$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$, будем называть *латинским $k \times m$ -прямоугольником*, если ее строки $\mathcal{L}_m^{(1)}, \dots, \mathcal{L}_m^{(k)}$ представляют собой перестановки элементов $1, 2, \dots, m$, а каждый из столбцов не содержит повторяющихся элементов. Латинский $m \times m$ -прямоугольник называется *латинским квадратом* порядка m и обозначается \mathcal{L}_m . Очевидно, что и столбцы латинского квадрата \mathcal{L}_m представляют собой перестановки элементов $1, 2, \dots, m$.

Сформулируем и докажем теорему М. Холла, которую будем называть *критерием существования латинского прямоугольника*.

Теорема 6. Для любого латинского $k \times m$ -прямоугольника \mathcal{L}_{km} существует перестановка элементов $1, 2, \dots, m$, присоединение которой к \mathcal{L}_{km} дает латинский $(k+1) \times m$ -прямоугольник $\mathcal{L}_{k+1, m}$. Число способов присоединения не меньше $(m-k)!$.

Обозначим через Q_j множество элементов, принадлежащих j -му столбцу \mathcal{L}_{km} , $j = 1, \dots, m$, и положим $\bar{Q}_j = \{1, 2, \dots, m\} \setminus Q_j$, $j = 1, \dots, m$. Покажем, что семейство $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m)$ удовлетворяет критерию существования трансверсали. Возьмем фиксированный элемент $\mu \in \{1, 2, \dots, m\}$. Из свойств \mathcal{L}_{km} следует, что μ встречается ровно k раз среди множеств Q_1, Q_2, \dots, Q_m , а следовательно, ровно $m-k$ раз среди их дополнений $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m$. Отсюда следует, что элемент μ среди множеств $\bar{Q}_{v_1}, \dots, \bar{Q}_{v_l}$, $1 \leq v_1 < \dots < v_l \leq m$, $1 \leq l \leq m$, встречается не более $m-k$ раз. Так как общее число элементов во всей совокупности множеств $\bar{Q}_{v_1}, \dots, \bar{Q}_{v_l}$ с учетом их повторений равно $(m-k)l$, то число различных элементов в $\bar{Q}_{v_1} \cup \dots \cup \bar{Q}_{v_l}$ не менее l . Отсюда следует, что $|\bar{Q}_{v_1} \cup \dots \cup \bar{Q}_{v_l}| \geq l$, т. е. для семейства $\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m$ существует трансверсаль (r_1, r_2, \dots, r_m) , представляющая собой перестановку элементов $1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим теперь $k+1$ строк $\mathcal{L}_m^{(1)}, \dots, \mathcal{L}_m^{(k)}, \mathcal{L}_m^{(k+1)}$, где $\mathcal{L}_m^{(k+1)} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$. Они образуют латинский $(k+1, m)$ -

прямоугольник, так как $r_j \in \bar{Q}_j$, $Q_j \cap \bar{Q}_j = \emptyset$, $j = 1, \dots, m$, и, следовательно, в его столбцах нет повторяющихся элементов.

Из неравенства $|\bar{Q}_j| = m - k \leq m$ следует, что для оценки снизу числа трансверсалей $R(\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m)$ следует применять первое из неравенств (2.31). Таким образом, число способов присоединения m -перестановки к латинскому прямоугольнику $\mathcal{L}_{k,n}$ для получения латинского прямоугольника $\mathcal{L}_{k+1,n}$, равное $R(\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m)$, оценивается следующим образом:

$$R(\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m) \geq (m-k)! . \quad (2.32)$$

Следствие. Если $L(k, m)$ — число латинских $k \times m$ -прямоугольников и $L(m)$ — число латинских квадратов порядка m , то

$$L(k, m) \geq \prod_{j=0}^{k-1} (m-j)! , \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (2.33)$$

$$L(m) \geq \prod_{k=1}^m k! . \quad (2.34)$$

Неравенство (2.33) доказывается индукцией по k . Очевидно, что $L(1, m) = m!$. Допустим, что $L(k, m) \geq \prod_{j=0}^{k-1} (m-j)!$. Из теоремы 6 следует, что $L(k+1, m) = L(k, m) \cdot R(\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m)$. Оценивая снизу $R(\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_m)$ с помощью неравенства (2.32), убеждаемся в справедливости оценки (2.33). Неравенство (2.34) получается из (2.33) при $k = m$.

§ 3. Нераразложимые и вполне нераразложимые матрицы

1. Нераразложимые матрицы. Неотрицательная матрица A называется *разложимой*, если существует такая подстановочная матрица Π , что

$$\Pi A \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где B и D — квадратные матрицы, а 0 — матрица, состоящая из нулевых элементов, называемая *нулевой* матрицей. Если матрица не является разложимой, то она называется *нераразложимой*.

Если A есть $n \times n$ -матрица, соответствующая некоторому линейному преобразованию n -мерного пространства R с базисом e_1, e_2, \dots, e_n , то матрица $\Pi A \Pi^{-1}$ соответствует тому же линейному преобразованию, но с переставленными базисными векторами $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}$. Подпространство $R' \subset R$ называется *инвариантным* относительно линейного преобразования A , если $AR' \subseteq R'$. Матрица A является разложимой тогда и только тогда, когда соответствующее ей преобразование n -мерного векторного пространства R имеет k -мерное инвариантное подпространство, причем

22*

$k < n$. Рассмотрим k -ю степень неотрицательной $n \times n$ -матрицы A : $A^k = (a_{ij}^{(k)})$, $i, j = 1, \dots, n$. Если матрица $A \geq 0$ неразложима, то для любой пары индексов $1 \leq i, j \leq n$ существует такое целое число k , что $a_{ij}^{(k)} > 0$.

Характер собственных значений и собственных векторов неразложимой матрицы описывается следующей теоремой Фробениуса.

Теорема 1. Неразложимая неотрицательная матрица A всегда имеет положительное собственное значение λ_0 , являющееся простым корнем характеристического уравнения этой матрицы. Этому собственному значению соответствует положительный собственный вектор x . Модули всех других собственных значений не превосходят λ_0 .

Если имеется $k - 1$ собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$, таких, что $\lambda_0 = |\lambda_1| = \dots = |\lambda_{k-1}|$, то все они являются корнями уравнения $\lambda^k = \lambda_0^k$. При $k \geq 1$ существует такая подстановочная матрица Π , что

$$\Pi A \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где A_{12}, \dots, A_{k1} — квадратные матрицы, а по главной диагонали стоят квадратные нулевые матрицы.

Неразложимая матрица $A \geq 0$ называется *примитивной*, если существует такое $k \geq 1$, что $A^k > 0$. Если $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ — собственные значения матрицы A с максимальным модулем, то для примитивной матрицы $k = 1$. В случае $k \geq 1$ неразложимая матрица A называется *шупримитивной*.

Теорема 2. Если неотрицательная $n \times n$ -матрица A неразложима и I — единичная матрица, то матрица $A + I$ примитива, причем

$$(A + I)^{n-1} > 0. \quad (3.3)$$

Обозначим через $J_0(x)$ число нулевых координат вектора x . Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого вектор-столбца $x \geq 0$ ($x \neq 0$) справедливо равенство $J_0((A + I)^{n-1}x) = 0$, что эквивалентно неравенству $(A + I)^{n-1}x > 0$.

Для установления этого неравенства достаточно показать, что $J_0((A + I)x) < J_0(x)$. Допустим, что $J_0((A + I)x) = J_0(x)$. Тогда из равенства $y = x + Ax$ следует, что векторы x и y имеют один и те же нулевые координаты. Перепонумерацией координат вектор-столбцы x и y можно привести к виду

$$x = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u > 0, \quad v > 0,$$

тогда векторы u и v имеют одну и ту же размерность l . Запишем матрицу A в виде $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где A_{11} есть $l \times l$ -матрица. Тогда из равенства

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

следует, что $A_{21}u = 0$, $u > 0$. Отсюда $A_{21} = (0)$, что противоречит неразложимости матрицы A .

2. Вполне неразложимые матрицы. Неотрицательная матрица A называется *частично разложимой*, если существуют такие подстановочные матрицы Π и Π_1 , что

$$A\Pi_1 = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где B и D — квадратные матрицы, а 0 — нулевая матрица. Ясно, что матрица A частично разложима тогда и только тогда, когда она содержит нулевую $s \times (n-s)$ -подматрицу, $1 \leq s \leq n-1$. Если неотрицательная матрица A не является частично разложимой, то она называется *вполне неразложимой*. Рассмотрим некоторые свойства вполне неразложимых матриц.

Свойство 1. *Неотрицательная матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда для любой ее нулевой подматрицы $p \times q$, $1 \leq p, q \leq n-1$, имеет место неравенство*

$$p+q < n. \quad (3.5)$$

Действительно, наличие обратного неравенства $p+q \geq n$ означает наличие нулевой подматрицы $p \times (n-p)$, $1 \leq p \leq n-1$, что может быть тогда и только тогда, когда матрица A частично разложима. Фактически перефразировкой свойства 1 является следующее свойство.

Свойство 2. *Неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = -1, 2, \dots, n$, вполне неразложима тогда и только тогда, когда для любого непустого множества $X \subset N = \{1, 2, \dots, n\}$ выполнены условия*

$$\left| \bigcup_{i \in X} \Gamma_i \right| > |X|, \quad \left| \bigcup_{i \in N} \Gamma_i \right| = n, \quad (3.6)$$

где $\Gamma_i = \{j : a_{ij} > 0, 1 \leq j \leq n\}$, $1 \leq i \leq n$.

Для произвольной неотрицательной матрицы A рассмотрим величину $\beta = \beta(A) = \max(p+q)$, где максимум берется по всем p и q , определяющим размеры нулевых подматриц $p \times q$ матрицы A , $1 \leq p, q \leq n-1$. Для удобства положим

$$\beta(A) = \begin{cases} 2n, & A = (0), \\ 0, & A > 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

где (0) — нулевая матрица.

Из свойства 1 сразу вытекает следующее свойство.

Свойство 3. *Неотрицательная матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда*

$$\beta(A) < n. \quad (3.8)$$

Строки и столбцы некоторой матрицы будем называть в совокупности линиями. Будем говорить, что заданное множество линий неотрицательной матрицы A покрывает некоторые фиксированные положительные элементы матрицы, если эти элементы принадлежат указанному множеству линий. Совокупность линий образует покрытие неотрицательной матрицы A , если она покрывает все ее положительные элементы. Покрытие, содержащее минимальное число линий, называется минимальным. Покрытие, в которое входят как строки, так и столбцы, называется смешанным.

Если в неотрицательной матрице A максимальная нулевая подматрица, определяющая значение $\beta(A)$, имеет размер $p \times q$, $1 \leq p, q \leq n-1$, то $n-p$ строк и $n-q$ столбцов, не пересекающихся нулевую подматрицу, образуют смешанное минимальное покрытие.

Итак, если r и s — соответственно числа строк и столбцов в смешанном минимальном покрытии и $\gamma = \gamma(A) = r+s$, то

$$\beta(A) + \gamma(A) = 2n. \quad (3.9)$$

Величину

$$\alpha = \alpha(A) = \gamma(A) - n \quad (3.10)$$

назовем индексом смешанного минимального покрытия. Так как

$$\alpha(A) = n - \beta(A), \quad (3.11)$$

то в соответствии с (3.7) положим

$$\alpha(A) = \begin{cases} -n, & A = (0), \\ n, & A > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Свойство 4. *Неотрицательная матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда*

$$\alpha(A) \geq 1. \quad (3.13)$$

Справедливость свойства следует из (3.11) и свойства 3.

Свойство 5. *Если I — единичная матрица и A — неотрицательная матрица, то матрица $A+I$ вполне неразложима тогда и только тогда, когда матрица A неразложима.*

Пусть $n \times n$ -матрица A неразложима. При $n=1$ $A+I > 0$ и, следовательно, $\alpha(A+I) = 1$, т. е. матрица $A+I$ вполне неразложима. Допустим теперь, что при $n > 1$ матрица $A+I$ частично разложима, т. е. $\alpha(A+I) \leq 0$. Любое минимальное смешанное покрытие $A+I$ является смешанным минимальным покрытием для I ; следовательно, из условий $\gamma(A+I) \geq \gamma(I)$, $\gamma(I) = n$ и ра-

венностя (3.10) вытекает, что $\alpha(A + I) = 0$, $\beta(A + I) = n$. Будем рассматривать минимальное смешанное покрытие $A + I$, являющееся одновременно и минимальным смешанным покрытием для I . Пусть в этом покрытии номера строк и столбцов представляют собой множества $X = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, $Y = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$, $r + s = n$. Тогда $p \times q$ -подматрица матрицы A , $p = n - r$, $q = n - s$, стоящая на пересечении строк и столбцов с номерами из $N \setminus X$ и $N \setminus Y$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, является нулевой. В силу минимальности покрытия имеем $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = N$. Рассмотрим подстановку

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & r+1 & r+2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r & j_1 & j_2 & \dots & j_s \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Ясно, что матрица $\Pi(A + I)\Pi^{-1}$ имеет вид $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где B и D — квадратные неотрицательные матрицы, а 0 — нулевая $p \times q$ -матрица. Отсюда следует, что $\Pi A \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} B' & C \\ 0 & D' \end{pmatrix}$, где B' и D' — квадратные, а 0 — нулевая $p \times q$ -матрица, т. е. матрица A разложима. Получили противоречие.

Пусть теперь $A + I$ вполне неразложима, т. е. $\alpha(A + I) \geq 1$. Допустим, что A — разложимая матрица. Тогда существует подстановочная матрица Π такая, что $\Pi A \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где B и D — квадратные матрицы, а 0 — нулевая матрица. Отсюда

$$\Pi^{-1}(A + I)\Pi = \begin{pmatrix} B' & C \\ 0 & D' \end{pmatrix},$$

где B' и D' — квадратные матрицы, а 0 — нулевая матрица. Таким образом, $\beta(A + I) = n$, т. е. $\alpha(A + I) = 0$. Получили противоречие.

Свойство 6. Если неотрицательная матрица A вполне неразложима, то матрица $A + B$ также вполне неразложима для любой неотрицательной матрицы B .

Справедливость свойства сразу следует из очевидных неравенств

$$\alpha(A + B) \geq \alpha(A) \geq 1. \quad (3.15)$$

Свойство 7. Если неотрицательные $n \times n$ -матрицы A и B вполне неразложимы, то матрицы AB и BA также вполне неразложимы.

Обозначим через A_1, \dots, A_n строки матрицы A , а через $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ — столбцы матрицы B . Допустим, что матрица AB частично разложима. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что для скалярных произведений $(A_i, B^{(j)})$ векторов A_i и $B^{(j)}$ справедливы равенства

$$(A_i, B^{(j)}) = 0, \quad s+1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (3.16)$$

Если столбцы $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ имеют $n - k$ координат, равных одновременно нулю, то в строках A_{k+1}, \dots, A_n должно быть k координат, одновременно равных нулю. Так как матрицы A и B вполне неразложимы, то должны быть одновременно выполнены неравенства $s + n - k < n$, $n - s + k < n$. Эти неравенства противоречивы. Следовательно, матрица AB вполне неразложима. Вполне неразложимость BA доказывается точно так же.

Свойство 8. Если неотрицательная матрица A вполне неразложима, то она примитивна.

Действительно, если матрица A вполне неразложима, то она неразложима, и, следовательно, существует матрица Π такая, что $\Pi A \Pi^{-1}$ имеет вид (3.2). Если $h > 1$, то циклической перестановкой столбцов матрицу (3.2) можно привести к виду $\text{diag}(A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1})$, что противоречит вполне неразложимости A . Следовательно, $h = 1$, и матрица A примитивна. Заметим, что из свойства примитивности матрицы, вообще говоря, не следует ее вполне неразложимость. Так, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & q \\ q & 0 & p \end{pmatrix}, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad p + q = 1,$$

примитивна, но не является вполне неразложимой.

Свойство 9. Неотрицательная $n \times n$ -матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда для всех i и j , $1 \leq i, j \leq n$,

$$\text{per } A(i|j) > 0. \quad (3.17)$$

Действительно, условие $\text{per } A(i|j) = 0$ может быть выполнено только при наличии нулевой $k \times (n - k)$ -подматрицы, $1 \leq k \leq n - 1$, что эквивалентно частичной разложимости матрицы A .

Пусть элементы $a_{ij_1}, \dots, a_{ij_n}$ матрицы $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, образуют диагональ этой матрицы. Для матрицы $A \geq 0$ диагональ называется положительной, если $a_{ii} > 0$, $1 \leq i \leq n$. Свойство 9 состоит в том, что любой положительный элемент вполне неразложимой неотрицательной матрицы принадлежит положительной диагонали.

Свойство 10. Если неотрицательная матрица A вполне неразложима, то

$$A^{n-1} \geq 0. \quad (3.18)$$

Так как $\text{per } A > 0$, то существует такая подстановка s , что $A = \alpha \Pi (B + I)$, где $B \geq 0$ неразложима, $\Pi = (\delta_{s(i), j})$, $0 < \alpha < \min a_{i_s(i)}$. Для вектор-столбца $x \geq 0$ из равенств $J_0(Ax) = -J_0[\Pi(B + I)x] = J_0[(B + I)x]$ и доказательства теоремы 2 следует, что $J_0(Ax) < J_0(x)$, т. е. $J_0(A^{n-1}x) = 0$.

Свойство 11. Если A_i — неотрицательная вполне неразложимая матрица $n_i \times n_i$ и B_i — неотрицательная ненулевая

матрица ($i = 1, 2, \dots, r$), то матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & \\ & A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & & \ddots & B_{r-1} \\ B_r & & & A_r \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

является вполне неразложимой.

Допустим, что матрица A частично разложима и $A[i_1, \dots, i_s | j_1, \dots, j_{n-s}] = 0$ есть нулевая $s \times (n-s)$ подматрица, $1 \leq s \leq n-1$. Пусть s_i строк с номерами из $\{i_1, \dots, i_s\}$ и t_j столбцов с номерами из $\{j_1, \dots, j_{n-s}\}$ пересекают подматрицу A_j , $1 \leq j \leq r$. Тогда $s_1 + \dots + s_r = s \geq 1$, $t_1 + \dots + t_r = t \geq 1$, $t = n-s$, и, следовательно, существуют по крайней мере одно $s_i \geq 1$ и одно $t_j \geq 1$. Рассмотрим первый случай, когда $s_i \geq 1$ и $t_j \geq 1$, т. е. вполне неразложимая матрица A , содержит нулевую подматрицу $s_i \times t_j$. В этом случае $s_i + t_j < n$ и, следовательно,

$$n = s + t = \sum_{k=1}^r (s_k + t_k) < \sum_{k=1}^r n_k = n.$$

Это противоречие исключает возможность использования данного случая. Таким образом, для всех $1 \leq j \leq r$ либо $s_j = 0$, $t_j = n$, либо $s_j = n$, $t_j = 0$. Следовательно, матрица A_j , $1 \leq j \leq r$, не содержит нулевую подматрицу, являющуюся частью $A[i_1, \dots, i_s | j_1, \dots, j_{n-s}]$. Так как не все s_i и не все t_j , $1 \leq j \leq r$, равны нулю, то существует такое k , что $s_k = n$, $t_{k+1} = n_{k+1}$, где сложение в индексах ведется по модулю r . Таким образом, матрица B_k , лежащая на пересечении s_k строк из $\{i_1, \dots, i_s\}$ и t_{k+1} столбцов из $\{j_1, \dots, j_{n-s}\}$, является пулевой. Получено противоречие.

Свойство 12. Если $n \times n$ -матрица $A \geq 0$ частично разложима, то существуют такие подстановочные матрицы Π и Π_1 , что

$$\text{ПАП}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ & A_2 & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & A_r \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

где матрицы A_1, A_2, \dots, A_r вполне неразложимы.

Доказательство следует из возможности разложения диагональных блоков частично разложимой матрицы до тех пор, пока разложение не будет доведено до вполне неразложимых блоков.

3. Стохастические матрицы. Неотрицательная матрица $P = (p_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, называется *стохастической*, если $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Неотрицательная матрица является стохастической тогда и только тогда, когда она имеет максимальное собственное значение $\lambda_0 = 1$ и ему соответствует собственный вектор

$x = (1, 1, \dots, 1)$. Стохастическая матрица $P = (p_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, называется *дважды стохастической*, если $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$. Если дважды стохастическая матрица *примитивна*, т. е. имеет единственное максимальное собственное значение $\lambda_1 = 1$, отвечающее собственному вектору $x = (1, 1, \dots, 1)$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = J_n, \quad (3.21)$$

где J_n есть $n \times n$ -матрица, у которой все элементы равны $1/n$. Множество всех дважды стохастических $n \times n$ -матриц обозначим через Ω_n . Рассмотрим некоторые свойства дважды стохастических матриц.

Будем говорить, что матрица A представима в виде *прямой суммы* матриц A_1, A_2, \dots, A_r , и записывать

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_r = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_r), \quad (3.22)$$

если

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

где вне матриц A_1, A_2, \dots, A_r стоят нулевые элементы.

Свойство 1. Если A есть частично разложимая дважды стохастическая $n \times n$ -матрица, то существуют также подстановочные матрицы Π и Π_1 , что

$$\Pi \Lambda \Pi_1 = A_1 \oplus A_2, \quad (3.24)$$

где матрицы A_1 и A_2 — дважды стохастические, порядков $k \times k$ и $(n - k) \times (n - k)$ соответственно, $1 \leq k \leq n - 1$.

Из частичной разложимости A следует существование таких подстановочных матриц Π и Π_1 , что

$$\Pi A \Pi_1 = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

где A_1 и A_2 — квадратные матрицы $k \times k$ и $(n - k) \times (n - k)$ соответственно, а 0 — нулевая матрица. Из условия дважды стохастичности A вытекает, что если $\sigma(A)$ — сумма всех элементов матрицы A , то $\sigma(A) = \sigma(\Pi A \Pi_1) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2) + \sigma(C) = n$. Так как $\sigma(A_1) = k$, $\sigma(A_2) = n - k$, то $\sigma(C) = 0$. Следовательно, C — нулевая матрица.

Свойство 2. Если A есть дважды стохастическая $n \times n$ -матрица, то существуют такие подстановочные матрицы Π и Π_1 , что

$$\Pi \Lambda \Pi_1 = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_r, \quad (3.26)$$

где A_i есть вполне неразложимая $n_i \times n_i$ -матрица и $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, $r \geq 1$.

Свойство 2 является следствием свойства 12 частично разложимых матриц и свойства 1 дважды стохастических матриц.

Разложение (3.26) для матрицы A будем называть *каноническим*, а подматрицы A_1, A_2, \dots, A_r в этом разложении — компонентами канонического разложения. Если для двух $n \times n$ -матриц A и B существуют подстановочные матрицы Π и Π_1 , такие, что $B = \Pi A \Pi_1$, то будем использовать следующее обозначение:

$$A \doteq B.$$

Теперь каноническое разложение (3.26) матрицы A можно записать следующим образом:

$$A \doteq A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_r, \quad (3.27)$$

Каноническое разложение матрицы A оказывается единственным с точностью до перестановки строк и столбцов этой матрицы.

Свойство 3. Если для дважды стохастической матрицы $A = -\langle a_{ij} \rangle$ имеются два канонических разложения

$$\begin{aligned} A &\doteq A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_t, \\ A &\doteq B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_r, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где A_i и B_j являются вполне неразложимыми матрицами соответственно $m_i \times m_i$ и $n_j \times n_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq t$, то $t = r$ и существует такая подстановка τ степени r , что $n_i = m_{\tau(i)}$ и $B_i \doteq A_{\tau(i)}$, $1 \leq i \leq r$.

Обозначим через L_i и M_j множества номеров строк соответственно подматриц A_i и B_j в матрице A , $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq t$. Для доказательства свойства 3 достаточно показать, что разбиения $N = L_1 \cup \dots \cup L_r$ и $N = M_1 \cup \dots \cup M_t$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, совпадают. Для этого достаточно установить, что если $L_i \cap M_j \neq \emptyset$, то $L_i = M_j$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq t$.

Предположим, что $L_i \cap M_j \neq \emptyset$ и рассмотрим подматрицы матрицы A вида

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= (a_{\mu\nu}), \quad \mu \in L_i, \nu \in M_j \setminus (L_i \cap M_j), \\ A^{(2)} &= (a_{\mu\nu}), \quad \mu \in M_j \setminus (L_i \cap M_j), \nu \in L_i, \\ A^{(3)} &= (a_{\mu\nu}), \quad \mu \in L_i \setminus (L_i \cap M_j), \nu \in M_j, \\ A^{(4)} &= (a_{\mu\nu}), \quad \mu \in M_j, \nu \in L_i \setminus (L_i \cap M_j). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Так как матрицы A_i и B_j — дважды стохастические, то $\sigma(A^{(1)}) = \sigma(A^{(2)}) = 0$ и $\sigma(A^{(3)}) = \sigma(A^{(4)}) = 0$. Отсюда следует, что $A_i \doteq$

$A = A^{(1)} \oplus A^{(2)}, B_i = A^{(1)} \oplus A^{(2)},$ где

$$A^{(1)} = (a_{\mu\nu}), \quad \mu, \nu \in L_i \setminus (L_i \cap M_j),$$

$$A^{(2)} = (a_{\mu\nu}), \quad \mu, \nu \in L_i \cap M_j,$$

$$A^{(3)} = (a_{\mu\nu}), \quad \mu, \nu \in M_j \setminus (L_i \cap M_j).$$

Это противоречит вилюе неразложимости компонент A_1 и B_2 .

Свойство 4. *Перманент дважды стохастической матрицы положителен.*

Пусть A — дважды стохастическая матрица. Допустим, что $\operatorname{reg} A = 0$. Тогда существует нулевая $k \times (n - k + 1)$ -подматрица, $1 \leq k \leq n - 1$, и, следовательно, матрица A частично разложима. Таким образом, существуют такие подстановочные матрицы Π и Π_1 , что $\Pi A \Pi_1$ имеет вид (3.24), где A_1 и A_2 — соответственно $k \times k$ и $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$ -матрицы. Из условия $A = \Omega_n$ следует, что $n + 1 = \sigma(A_1) + \sigma(A_2) = \sigma(A)$, что противоречит очевидному равенству $\sigma(A) = n$. Свойство 4 означает, что любая дважды стохастическая матрица имеет положительную диагональ.

Будем говорить, что неотрицательная матрица A имеет *дважды стохастическую решетку*, если решетка $\bar{\Lambda}$ матрицы A является одновременно решеткой и некоторой дважды стохастической матрицей. Например, первая из решеток

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является дважды стохастической, а вторая не является.

Свойство 5. *Неотрицательная вполне неразложимая матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, имеет дважды стохастическую решетку.*

Действительно, в силу условия $\operatorname{reg} A(i|j) > 0$ матрица $P = (p_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, n$, где

$$p_{ij} = \frac{a_{ij} \operatorname{per} A(i|j)}{\operatorname{per} A}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.30)$$

имеет ту же решетку, что и матрица A , и является дважды стохастической.

4. Декомпозиция. Докажем теперь теорему декомпозиции дважды стохастических матриц, принадлежащую Биркгофу.

Теорема 3. *Если $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, есть дважды стохастическая матрица, то существуют такие подстановочные матрицы $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_s$, что*

$$A = \sum_{j=1}^s \theta_j \Pi_j, \quad (3.31)$$

где $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ — неотрицательные числа, такие, что

$$\sum_{j=1}^s \theta_j = 1.$$

Равенство (3.31) определяет декомпозицию дважды стохастической матрицы.

Теорему докажем индукцией по числу $\rho(A)$, равному количеству положительных элементов матрицы A . Если $\rho(A) = n$, то A является подстановочной матрицей и, следовательно, теорема верна. Будем считать, что $\rho(A) > n$, и предположим, что теорема верна для всех матриц из Ω_n , имеющих число положительных элементов $\rho' < \rho(A)$.

Согласно свойству 4 $\text{reg } A > 0$ и, значит, существует диагональ $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n})$ такая, что $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} > 0$. Обозначим через s такую подстановку, что $s(i) = j_i$, $i = 1, \dots, n$, и положим $a = \min_{1 \leq i \leq n} a_{ij_i}$. Будем считать, что минимум достигается при $i = \mu$. Ясно, что $0 < a < 1$, так как условие $a = 1$ означало бы, что $a_{1j_1} = \dots = a_{nj_n} = 1$, и, следовательно, A — подстановочная матрица, т. е. $\rho(A) = n$, что противоречит предположению.

Рассмотрим $n \times n$ -матрицу $B = (b_{ij}) = \frac{1}{1-a}(A - a\Pi_1)$, где $\Pi_1 = (\pi_{ij}^{(1)})$ — подстановочная матрица, соответствующая подстановке s . Покажем, что матрица B — дважды стохастическая. Имеем

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = \frac{1}{1-a} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} - a \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^{(1)} \right] = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Аналогично показывается, что $\sum_{i=1}^n b_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$. Так как $b_{\mu, j_\mu} = 0$, то матрица B имеет больше нулевых элементов, чем матрица A , т. е. $\rho(B) < \rho(A)$. Значит, к матрице B применимо предположение индукции и $B = \sum_{j=2}^s \gamma_j \Pi_j$, где $\gamma_j \geq 0$, $\sum_{j=2}^s \gamma_j = 1$.

Таким образом,

$$A = (1-a)B + a\Pi_1 = \sum_{j=2}^s (1-a)\gamma_j \Pi_j + a\Pi_1.$$

Если положить $\theta_j = (1-a)\gamma_j$, $j = 2, \dots, s$, $\theta_1 = a$, то из этого равенства следует справедливость теоремы.

Обозначим через Λ_n^k множество $0,1$ -матриц $n \times n$, имеющих по k единиц в каждой строке и в каждом столбце.

Теорема 4. Если $A \in \Lambda_n^k$, то существуют такие подстановочные матрицы Π_1, \dots, Π_k , что

$$A = \sum_{j=1}^k \Pi_j. \quad (3.32)$$

При $k = 1$ матрица A — подстановочная, и теорема верна. Так как $\frac{1}{k}A \in \Omega_n$, то $\operatorname{reg} A > 0$ и существует положительная диагональ, соответствующая подстановочной матрице Π_k . Следовательно, $B = A - \Pi_k \in \Lambda_n^{k-1}$, и, по предположению индукции,

$$B = \sum_{j=1}^{k-1} \Pi_j.$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

5. Оценка сложности декомпозиции. Отметим, что в процессе доказательства теоремы Биркгофа фактически был указан алгоритм, последовательное применение которого приводит к декомпозиции дважды стохастической матрицы вида (3.31). Пусть A — дважды стохастическая матрица порядка n . Обозначим через $A^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, v(A)$) матрицу, которая получается после i -кратного применения алгоритма декомпозиции A , где $v(A)$ — число шагов в этом алгоритме, т. е. $A^{(v(A))} = (0)$, где (0) — нулевая матрица, и $A^{(0)} = A$. Через $\rho(A^{(i)})$ обозначим число положительных элементов в матрице $A^{(i)}$, а через $d^{(i)}$ — число вполне неразложимых компонент $A^{(i)}$ при ее каноническом разложении вида (3.27), $i = 0, 1, \dots, v(A)$, причем положим $d = d^{(0)}$.

Теорема 5. Если $\rho(A)$ — число положительных элементов в дважды стохастической $n \times n$ -матрице A , d — число вполне неразложимых компонент в ее каноническом разложении вида (3.27), $s = s(A)$ — наименьшее число подстановочных матриц в декомпозиции A вида (3.31), то

$$s(A) \leq \rho(A) - 2n + d + 1. \quad (3.33)$$

Пусть $B_1^{(i-1)}, B_2^{(i-1)}, \dots, B_l^{(i-1)}$, $l \geq 1$, — вполне неразложимые компоненты в каноническом разложении вида (3.27) дважды стохастической матрицы $A^{(i-1)}$, $1 \leq i \leq v(A) - 1$, полученной из матрицы A на $(i-1)$ -м шаге алгоритма декомпозиции. Рассмотрим сначала случай, когда после i -го шага алгоритма декомпозиции матрица $B_\mu^{(i-1)}$, $1 \leq \mu \leq l$, переходит в прямую сумму некоторых вполне неразложимых компонент $B_{\mu 1}^{(i)}, B_{\mu 2}^{(i)}, \dots, B_{\mu k_\mu}^{(i)}$, $k_\mu \geq 2$, канонического разложения матрицы $A^{(i)}$. Тогда можно записать

$$B_\mu^{(i-1)} = \begin{pmatrix} B_{\mu 1}^{(i)} & * & & \\ & B_{\mu 2}^{(i)} & * & \\ & & \ddots & \\ * & & & B_{\mu k_\mu}^{(i)} \end{pmatrix},$$

где * обозначены элементы, часть из которых заменяется нулями на i -м шаге алгоритма декомпозиции. Так как матрица $B_\mu^{(i-1)}$ вполне неразложима, то среди элементов * имеются по крайней мере k_μ положительных. Следовательно, по крайней мере k_μ положительных элементов матрицы $B_\mu^{(i-1)}$ заменяются нулями на i -м шаге алгоритма декомпозиции. Отсюда вытекает неравенство

$$\rho(A^{(i-1)}) \geq \rho(A^{(i)}) + \sum_{\mu=1}^l k_\mu. \quad (3.34)$$

Так как в рассматриваемом случае число вполне неразложимых компонент $A^{(i)}$ больше числа вполне неразложимых компонент $A^{(i-1)}$ на величину $\sum_{\mu=1}^l (k_\mu - 1)$, то

$$d^{(i)} = d^{(i-1)} + \sum_{\mu=1}^l k_\mu - l. \quad (3.35)$$

Из неравенства (3.34) и равенства (3.35) находим, что

$$\rho(A^{(i-1)}) - \rho(A^{(i)}) \geq d^{(i)} - d^{(i-1)} + l. \quad (3.36)$$

Рассмотрим теперь случай $k_\mu = 1$, т. е. когда каждая вполне неразложимая компонента $A^{(i-1)}$ на i -м шаге алгоритма декомпозиции переходит в единственную вполне неразложимую компоненту $A^{(i)}$. В этом случае $d^{(i)} = d^{(i-1)}$, и так как после i -го шага алгоритма декомпозиции по крайней мере один положительный элемент $A^{(i-1)}$ заменяется нулем, то

$$\rho(A^{(i-1)}) - \rho(A^{(i)}) \geq 1 = d^{(i)} - d^{(i-1)} + 1. \quad (3.37)$$

В общем случае, если для некоторых t значений μ имеем $k_\mu = 1$, а для остальных $l-t$ значений μ выполнены неравенства $k_\mu \geq 2$, $0 \leq t \leq l-1$, то

$$\rho(A^{(i-1)}) - \rho(A^{(i)}) \geq d^{(i)} - d^{(i-1)} + l - t. \quad (3.38)$$

Из неравенств (3.36)–(3.38) следует, что во всех рассматриваемых случаях имеют место неравенства

$$\rho(A^{(i-1)}) - \rho(A^{(i)}) \geq d^{(i)} - d^{(i-1)} + 1, \quad i = 1, 2, \dots, v(A) - 1, \quad (3.39)$$

где $v(A)$ – число шагов в алгоритме декомпозиции.

Из неравенств (3.39) получаем, что

$$\rho(A) - \rho(A^{(v(A)-1)}) \geq d^{(v(A)-1)} - d + v(A) - 1. \quad (3.40)$$

Так как на $(v(A)-1)$ -м шаге алгоритма декомпозиции $A^{(v(A)-1)} = \theta\Pi$, где Π – подстановочная матрица, $0 < \theta < 1$, то

$$\rho(A^{(v(A)-1)}) = d^{(v(A)-1)} = n. \quad (3.41)$$

Из неравенства (3.40) и равенства (3.41) вытекает, что

$$v(A) \leq \rho(A) - 2n + d + 1. \quad (3.42)$$

Так как $s(A) \leq v(A)$, то из неравенства (3.42) следует оценка (3.33). Теорема доказана.

Для числа шагов $v(A)$ в алгоритме декомпозиции дважды стохастической матрицы A можно указать также и очевидную оценку снизу

$$v(A) \geq \max_{1 \leq i, j \leq n} \{r_i(A), c_j(A)\}, \quad (3.43)$$

где $r_i(A)$ — число положительных элементов в i -й строке, а $c_j(A)$ — число положительных элементов в j -м столбце матрицы

В заключение заметим, что если дважды стохастическая матрица A вполне неразложима и $r_i(A) = c_j(A) = 2$, $1 \leq i, j \leq n$, то из неравенств (3.42) и (3.43) следует, что $v(A) = 2$.

§ 4. Оценки перманента

1. Оценки для 0,1-матрицы. Получим некоторые оценки снизу для перманента 0,1-матрицы, зависящие только от нормы каждой из ее строк, т. е. от числа единиц в каждой строке.

Теорема 1. Пусть A есть 0,1-матрица $n \times n$ со строками

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \|A_i\| = \sum_{j=1}^n a_{ij} = r_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{и } \{z\} = \max(0, z).$$

Тогда

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^n \{r_i - n + i\}. \quad (4.1)$$

Если $\|A_n\| = 0$, то неравенство (4.1) тривиально. Предположим, что $\|A_n\| > 0$, и, не ограничивая общности, будем считать что $a_{nj} > 0$, $j = 1, 2, \dots, \|A_n\|$. Разлагая перманент A по последней строке и применяя предположение индукции к $\operatorname{reg} A(n|j)$, получаем

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^{\|A_n\|} \operatorname{per} A(n|j) \geq \sum_{j=1}^{\|A_n\|} \prod_{i=1}^{n-1} \{\|A_i\| - a_{ij} - (n-1) + i\}.$$

Так как $a_{ij} \leq 1$, то $\operatorname{per} A \geq \|A_n\| \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \{\|A_i\| - n + i\}$. Отсюда следует неравенство (4.1).

Для того чтобы оценка (4.1) была содержательной, необходимо выполнение неравенства $\|A_1\| \geq n$, $\|A_2\| \geq n-1$, ..., $\|A_n\| \geq 1$. Поэтому естественно перед применением неравенства (4.1) переставить строки матрицы A так, чтобы было выполнено условие $\|A_1\| \geq \|A_2\| \geq \dots \geq \|A_n\|$.

Приведем теперь оценку сверху перманента для класса 0,1-матриц с заданными строчными суммами.

Теорема 2. Если $A = (a_{ij})$ есть 0,1-матрица $n \times n$, тогда что

$$\|A_i\| = \sum_{j=1}^n a_{ij} = r_i, \quad i = 1, \dots, n, \text{ то}$$

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{v_i}. \quad (4.2)$$

При доказательстве теоремы будут использоваться две леммы.

Лемма 1. Если v_1, v_2, \dots, v_q — неотрицательные действительные числа, то

$$\left(\frac{v_1 + \dots + v_q}{q} \right)^{v_1 + \dots + v_q} \leq v_1^{v_1} \dots v_q^{v_q}, \quad (4.3)$$

причем $0^0 = 1$.

Действительно, из выпуклости функции $x \ln x$ следует, что

$$\left(\frac{v_1 + \dots + v_q}{q} \right) \ln \left(\frac{v_1 + \dots + v_q}{q} \right) \leq \frac{v_1 \ln v_1 + \dots + v_q \ln v_q}{q}.$$

Взяв экспоненты от обеих частей этого неравенства, приходим к неравенству (4.3).

Лемма 2. Пусть $A = (a_{ij})$ есть 0,1-матрица $n \times n$ и S — множество таких подстановок s степени n , что $a_{1, s(1)} a_{2, s(2)} \dots a_{n, s(n)} = 1$ при $s \in S$. Тогда

$$\prod_{s \in S} r_i = r_i^{\operatorname{per} A}, \quad (4.4)$$

$$\prod_{s \in S} \operatorname{per} A(i | s(i)) = \prod_{j: a_{ij}=1} (\operatorname{per} A(i | j))^{\operatorname{per} A(i | j)}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что $|S| = \operatorname{per} A$, так как $|S|$ равно числу всех положительных диагоналей матрицы A . Следовательно, число сомножителей в левой части равенства (4.4) равно $\operatorname{per} A$. Отсюда следует справедливость и самого этого равенства. Далее заметим, что для фиксированных i и j при $s \in S$ $\{s: s(i) = j, a_{ij} = 1\}| = \operatorname{per} A(i | j)$, так как $\{s: s(i) = j, a_{ij} = 1\}|$ равно числу положительных диагоналей матрицы A , определяемых подстановками s , у которых $s(i) = j$. Поэтому для фиксированного i имеем

$$\begin{aligned} \prod_{s \in S} \operatorname{per} A(i | s(i)) &= \prod_{j: a_{ij}=1} \prod_{s: s(i)=j} \operatorname{per} A(i | j) = \\ &= \prod_{j: a_{ij}=1} (\operatorname{per} A(i | j))^{\operatorname{per} A(i | j)}. \end{aligned}$$

Этим доказано равенство (4.5).

Доказательство теоремы 2 проведем индукцией по n . При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Положим $v_k = a_{ik} \operatorname{per} A(i | k)$ для всех k , таких, что $a_{ik} = 1$. Применив лемму 1 при $q = r_i$ к

оценке правой части равенства

$$(\operatorname{per} A)^{\operatorname{per} A} = \left(\sum_{j: a_{ij}=1} \operatorname{per} A(i|j) \right)^{\sum_{j: a_{ij}=1} \operatorname{per} A(i|j)},$$

получаем

$$(\operatorname{per} A)^{\operatorname{per} A} \leq r_i^{\operatorname{per} A} \prod_{j: a_{ij}=1} (\operatorname{per} A(i|j))^{\operatorname{per} A(i|j)}.$$

Применяя лемму 2, получаем

$$(\operatorname{per} A)^{\operatorname{per} A} \leq \prod_{s \in S} r_i \operatorname{per} A(i|s(i)). \quad (4.6)$$

Для оценки $\operatorname{per} A(i|s(i))$ применим предположение индукции. Ясно, что если $a_{k,s(i)} = 1$, то k -я строчная сумма матрицы $A(i|s(i))$ равна $r_k - 1$; если же $a_{k,s(i)} = 0$, то k -я строчная сумма равна r_k . С учетом этого обстоятельства имеем оценку

$$\operatorname{per} A(i|s(i)) \leq \prod_{\substack{k \neq i \\ a_{k,s(i)}=1}} (r_k - 1)!^{1/(r_k-1)} \prod_{\substack{k \neq i \\ a_{k,s(i)}=0}} r_k!^{1/r_k}. \quad (4.7)$$

Возьмем произведение по i от 1 до n от обеих частей этого неравенства и поменяем порядок взятия произведений по i и по k . Получаем

$$\prod_{i=1}^n \operatorname{per} A(i|s(i)) \leq \prod_{k=1}^n \left(\prod_{\substack{i \neq k \\ a_{k,s(i)}=1}} (r_k - 1)!^{1/(r_k-1)} \prod_{\substack{i \neq k \\ a_{k,s(i)}=0}} r_k!^{1/r_k} \right).$$

При фиксированных k и $s \in S$ определим число элементов i таких, что $a_{k,s(i)} = 0$. Это число равно количеству способов выбора нулевых элементов в k -й строке матрицы $A(k|s(k))$, т. е. $n - r_k$. Число таких i , что $a_{k,s(i)} = 1$, равно количеству единичных элементов в k -й строке матрицы $A(k|s(k))$, т. е. $r_k - 1$. Таким образом,

$$\prod_{i=1}^n \operatorname{per} A(i|s(i)) \leq \prod_{k=1}^n (r_k!)^{(n-r_k)/r_k} (r_k - 1)!.$$

Взяв произведение по i от 1 до n от обеих частей неравенства (4.6) и используя оценку (4.8), получаем

$$(\operatorname{per} A)^{\operatorname{per} A} \leq \prod_{s \in S} \left(\prod_{i=1}^n r_i \right) \left(\prod_{k=1}^n (r_k!)^{(n-r_k)/r_k} (r_k - 1)! \right).$$

Отсюда следует, что

$$(\operatorname{per} A)^{\operatorname{per} A} \leq \prod_{s \in S} \left(\prod_{k=1}^n (r_k!)^{n/r_k} \right). \quad (4.9)$$

Так как $|S| = \operatorname{per} A$, то из (4.9) следует неравенство

$$(\operatorname{per} A)^{\frac{n}{\operatorname{per} A}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (r_k!)^{\frac{1}{r_k}} \right)^{\frac{n}{\operatorname{per} A}},$$

эквивалентное (4.2). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть k — делитель числа n и Λ_{kn} — класс $0,1$ -матриц $n \times n$, у которых число единиц в каждой строке и каждом столбце равно k . Тогда

$$\max_{A \in \Lambda_{kn}} \operatorname{per} A = (k!)^{\frac{n}{k}}. \quad (4.10)$$

Следствие 2. Если $A = (a_{ij})$ есть $0,1$ -матрица $n \times n$, такая, что $\sum_{j=1}^n a_{ij} = r_i$, $i = 1, \dots, n$, то

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^n \left(\frac{r_i + 1}{2} \right). \quad (4.11)$$

Для фиксированного r_i рассмотрим числа $1, 2, \dots, r_i$. Известно, что между их средним геометрическим и средним арифметическим имеет место соотношение $(1 \cdot 2 \cdots r_i)^{\frac{1}{r_i}} \leq (1 + 2 + \dots + r_i)/r_i$, эквивалентное неравенству $(r_i!)^{\frac{1}{r_i}} \leq (r_i + 1)/2$. С учетом этого неравенства оценка (4.11) следует из оценки (4.2).

2. Оценки для вполне неразложимых матриц. Начнем с оценок для вполне неразложимых $0,1$ -матриц.

Теорема 3. Если A — вполне неразложимая $0,1$ -матрица $n \times n$ со строками A_1, A_2, \dots, A_n , $\|A_i\| = r_i$, $i = 1, \dots, n$, то

$$\operatorname{per} A \geq \max_{1 \leq i \leq n} r_i. \quad (4.12)$$

Аналогичное неравенство имеется и для столбцов.

Неравенство (4.12) следует из разложения $\operatorname{per} A$ по i -й строке:

$$\operatorname{per} A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{per} A(i|j) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} = \|A_i\|,$$

в силу условия $\operatorname{per} A(i|j) \geq 1$ для вполне неразложимой $0,1$ -матрицы.

Обозначим через E_{ij} $0,1$ -матрицу $n \times n$, у которой имеется единственная единица на пересечении i -й строки и j -го столбца.

Теорема 4. Если $A = (a_{ij})$ — неотрицательная вполне неразложимая $n \times n$ -матрица, то для любых i, j

$$\operatorname{per} (A + cE_{ij}) \begin{cases} > \operatorname{per} A, & c > 0, \\ < \operatorname{per} A, & c < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Обозначим через A'_{ij} матрицу, полученную из A заменой элемента a_{ij} на нуль. Разлагая $\operatorname{per}(A + cE_{ij})$ по элементу $a_{ij} + c$, имеем $\operatorname{per}(A + cE_{ij}) = \operatorname{per} A'_{ij} + (a_{ij} + c) \operatorname{per} A(i|j) = \operatorname{per} A + c \operatorname{per} A(i|j)$. Отсюда следуют неравенства (4.13).

Следствие. Если A — неотрицательная вполне неразложимая матрица, то

$$\operatorname{per} \left(A + \sum_{v=1}^k E_{i_v j_v} \right) \geq \operatorname{per} A + k. \quad (4.14)$$

Действительно, из теоремы 4 следует, что $\operatorname{per}(A + E_{i_1 j_1}) \geq \operatorname{per} A + 1$. Кроме того, матрица $A + E_{i_1 j_1}$ вполне неразложима. Теперь для доказательства достаточно применить индукцию.

Неотрицательная вполне неразложимая $n \times n$ -матрица $A(a_{ij})$ называется *почти разложимой*, если для любого $a_{ij} > 0$ матрица $A - a_{ij}E_{ij}$ является частично разложимой. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Если A — почти разложимая $n \times n$ -матрица, то существуют подстановочные матрицы Π , Π_1 и натуральное число $r > 1$, такие, что

$$\Pi \Pi_1 = \begin{pmatrix} A_1 E_1 & & & \\ A_2 E_2 & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \\ & & A_{r-1} E_{r-1} & \\ E_r & & & A_r \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где A_1, \dots, A_r — почти разложимые матрицы и каждая из матриц E_1, \dots, E_r содержит точно по одному положительному элементу.

Каждой почти разложимой матрице A , согласно свойству 5 п. 3, § 3 можно поставить в соответствие дважды стохастическую матрицу $S = (s_{ij})$, имеющую с A одинаковую решетку. Обозначим $c = s_{hk} = \min_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij}$, для $s_{ij} > 0$. Так как S почти разложима, то матрица $S - s_{hk}E_{hk}$ является частично разложимой, т. е. существуют подстановочные матрицы Π_2 , Π_3 такие, что

$$\Pi_2 (S - s_{hk}E_{hk}) \Pi_3 = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где B , D — квадратные матрицы и 0 — нулевая $s \times t$ -матрица, $s + t = n$. Отсюда следует, что

$$\Pi_2 S \Pi_3 = \begin{pmatrix} B & C \\ F & D \end{pmatrix},$$

где F есть $s \times t$ -матрица с единственным ненулевым элементом, равным c .

Обозначим через $\sigma(X)$ сумму элементов матрицы X . Так как матрица $\Pi_2S\Pi_3$ — дважды стохастическая, то

$$\begin{aligned} n = \sigma(\Pi_2S\Pi_3) &= \sigma(B) + \sigma(C) + \sigma(F) + \sigma(D) = \\ &= (t - c) + \sigma(C) + c + (s - c) = n - c + \sigma(C). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\sigma(C) = c$. В силу минимальности c из этого равенства вытекает, что матрица C содержит единственный положительный элемент, равный c .

Если матрицы B и D почти разложимы, то теорема доказана, так как $\Pi_2S\Pi_3$ и $\Pi_2A\Pi_3$ имеют одну и ту же решетку.

Допустим, что матрицы B и D — частично разложимые. Тогда существуют подстановочные матрицы Π_4 и Π_5 , такие, что

$$\Pi_4S\Pi_5 = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1p} & & & Y_2 \\ & A_2 & \cdots & B_{2p} & & & \\ 0 & \cdots & A_p & & & & \\ & & & A_{p+1} & B_{p+1,p+2} & \cdots & B_{p+1,r} \\ Y_1 & & & & A_{p+2} & \cdots & B_{p+2,r} \\ & & & & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

где A_i , $i = 1, \dots, p$, $p+1, \dots, r$ — вполне неразложимые $n_i \times n_r$ -матрицы и матрицы Y_1 и Y_2 содержат точно по одному ненулевому элементу, равному c . Так как матрица S является почти разложимой, то и матрицы A_i , $i = 1, 2, \dots, p, p+1, \dots, r$, являются почти разложимыми.

Положительный элемент матрицы Y_1 должен располагаться в левом нижнем углу на пересечении первых n_1 столбцов и последних n_r строк. Допустим, что это не так. Тогда первые n_1 столбцов всей матрицы $\Pi_4S\Pi_5$ содержат нулевую $(n - n_1) \times n_r$ -подматрицу или последние n_r строк содержат нулевую $n_r \times (n - n_r)$ -подматрицу. Это означает, что матрица S частично разложима, что противоречит условию теоремы. Аналогично доказывается, что положительный элемент матрицы Y_2 должен лежать на пересечении n_p строк, общих с матрицей A_p , и n_{p+1} столбцов, общих с матрицей A_{p+1} .

Из условия дважды стохастичности матрицы $\Pi_4S\Pi_5$, следует, что одна, скажем j -я, столбцовая сумма матрицы A_1 равна $1 - c$, а остальные равны 1. Аналогичным свойством обладают и строчковые суммы. Допустим, что это не так. Тогда существуют такие $c_1, c_2 > 0$, $c_1 + c_2 = c$, что i_1 -я и i_2 -я координаты j -го столбца имеют

вид $a_{i_1j} = c_1$ и $a_{i_2j} = c_2$, $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$. Тогда сумма элементов i_1 -й и i_2 -й строк матрицы A_1 равна $1 - c_1$ и $1 - c_2$ соответственно и $\sum_{j=1}^n a_{i_1j} = \sum_{j=1}^n a_{i_2j} = 1$. Это означает, что матрицы B_{12}, \dots, B_{1p}

содержат два ненулевых элемента c_1 и c_2 , меньшие c , что противоречит минимальности c .

Таким образом, матрицы B_{12}, \dots, B_{1p} содержат единственный ненулевой элемент, равный c . Этот элемент принадлежит матрице B_{12} . Если это не так, то матрица B_{12} является нулевой и n_2 столбцов, общих с матрицей A_2 , содержат нулевую $(n - n_2) \times n_2$ -подматрицу, что противоречит вполне неразложимости матрицы $\Pi_4 S \Pi_5$.

Аналогичным образом, используя наличие в B_{12} единственного ненулевого элемента, равного c , и минимальность c , доказывается, что в A_2 имеются единственный столбец и единственная строка, сумма элементов которых равна $1 - c$. Остальные строчные и столбцовые суммы A_2 равны 1. Отсюда вытекает, что B_{23} содержит единственный ненулевой элемент, равный c , а матрицы B_{24}, \dots, B_{2p} являются нулевыми. Продолжая этот процесс, можем установить, что верхний ящик матрицы $\Pi_4 S \Pi_5$ имеет вид, указанный в теореме. Аналогичное утверждение для нижнего ящика доказывается с использованием того факта, что матрица Y_2 содержит единственный положительный элемент, равный c .

Так как матрица $\Pi_4 S \Pi_5$ имеет указанный в формулировке теоремы вид, то такой же вид имеет и соответствующая ей матрица ПАП₁. Используя теорему 5, получим оценку снизу для перманента вполне неразложимой 0,1-матрицы.

Теорема 6. *Если $A = (a_{ij})$ — вполне неразложимая 0,1-матрица $n \times n$ и $\sigma(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$, то*

$$\operatorname{per} A \geq \sigma(A) - 2n + 2. \quad (4.17)$$

Сначала рассмотрим случай, когда матрица A почти разложима. Доказательство будем вести индукцией по n . При $n = 1$ и $n = 2$ неравенство (4.17) превращается в равенство и является очевидным. Предположим, что оно справедливо для всех почти разложимых $k \times k$ -матриц, $k < n$. Согласно теореме найдутся такие подстановочные матрицы Π и Π_1 , что матрица ПАП₁ имеет канонический вид (4.15), где $r \geq 2$ и $n_i \times n_i$ -матрицы A_i , $i = 1, \dots, r$, являются почти разложимыми. Осуществляя разложение $\operatorname{per}(\text{ПАП}_1)$ по единственному ненулевому элементу, принадлежащему матрице E_r , и используя условие, что $\operatorname{per}(\text{ПАП}_1(i|j)) > 0$

для любых i и j , имеем $\operatorname{per} A = \operatorname{per}(\text{ПАП}_1) \geq 1 + \prod_{i=1}^r \operatorname{per} A_i$.

Применяя предположение индукции к оценке $\operatorname{per} A_i$, получаем

$$\operatorname{per} A \geq 1 + \prod_{i=1}^r (\sigma(A_i) - 2n_i + 2). \quad (4.18)$$

Заметим, что

$$\sigma(A_i) \geq \begin{cases} 2n_i, & n_i > 1, \\ 1, & n_i = 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Кроме того, для положительных целых чисел a_1, \dots, a_r , $r \geq 1$, справедливо неравенство

$$\prod_{i=1}^r a_i \geq \sum_{i=1}^r a_i - (r-1), \quad (4.20)$$

так как оно вытекает из очевидного неравенства $(b_1 + 1) \times \times (b_2 + 1) \dots (b_r + 1) \geq b_1 + b_2 + \dots + b_r + 1$, где b_1, \dots, b_r — целые неотрицательные числа. Применяя неравенство (4.20) при $a_i = \sigma(A_i) - 2n_i + 2$, $i = 1, \dots, r$, из неравенства (4.18) получаем

$$\operatorname{per} A \geq \sum_{i=1}^r (\sigma(A_i) - 2n_i + 2) - r + 2. \quad (4.21)$$

Используя очевидные равенства

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^r \sigma(A_i) + r, \quad \sum_{i=1}^r n_i = n,$$

из (4.21) окончательно получаем

$$\operatorname{per} A \geq \sigma(A) - 2n + 2.$$

Рассмотрим теперь случай вполне неразложимой матрицы A , которая не является почти разложимой. Тогда существует элемент этой матрицы $a_{i_1, j_1} = 1$ такой, что матрица $A - E_{i_1, j_1}$ вполне неразложима. Если $A - E_{i_1, j_1}$ не является почти разложимой, то существует элемент такой $a_{i_2, j_2} = 1$ в матрице $A - E_{i_1, j_1}$, что матрица $A - E_{i_1, j_1} - E_{i_2, j_2}$ вполне неразложима. Продолжая таким образом, придем к равенству $A = B + \sum_{k=1}^m E_{i_k, j_k}$, где матрица B почти разложима. Согласно следствию теоремы 4 имеем

$$\operatorname{per} A \geq \operatorname{per} B + m. \quad (4.22)$$

Для почти разложимой матрицы B доказано, что

$$\operatorname{per} B \geq \sigma(B) - 2n + 2. \quad (4.23)$$

Заметим, что $\sigma(B) = \sigma(A) - m$. Поэтому из неравенств (4.22) и (4.23) следует оценка (4.17). Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

- Пусть A есть вполне неразложимая $0,1$ -матрица $n \times n$. Показать, что матрицы $A^T A$ и AA^T также вполне неразложимы.

2. Матрица $n \times n$ называется *k-неразложимой*, если $\operatorname{per} A(i_1, \dots, i_k | j_1, \dots, j_k) > 0$ для любых k -подмножеств $\{i_1, \dots, i_k\}$ и $\{j_1, \dots, j_k\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Показать, что если 0,1-матрица A вполне неразложима (1 -неразложима), то AA^T является 2 -неразложимой.

3. Пусть Ω_n — множество дважды стохастических матриц $n \times n$. Показать, что если

$$\operatorname{per} A = \min_{B \in \Omega_n} \operatorname{per} B, \quad (1)$$

то матрица A вполне неразложима.

4. Используя метод множителей Лагранжа, показать, что если матрица $A = (a_{ij})$ определена равенством (1), $a_{rs} > 0$, то

$$\operatorname{per} A(r|s) = \operatorname{per} A.$$

5. Пусть A — неотрицательная неразложимая матрица и $\lambda > 0$ есть максимальный корень ее характеристического уравнения. Показать, что

$$\operatorname{per} A \leq \lambda^n.$$

6. Используя формулу Райзера для вычисления перманентов, вывести тождество

$$n! = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n,$$

$$n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^j (n-j-1)^{n-j}.$$

7. Для любых положительных целых r_1, r_2, \dots, r_l доказать неравенство

$$\sum_{i=1}^l \frac{2}{r_i} \prod_{j=1}^l \frac{r_j}{r_j + 1} \leq 1.$$

Используя это неравенство, показать, что если A есть 0,1-матрица $n \times n$, у которой число единиц в строках равно r_1, r_2, \dots, r_n , то

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^n \frac{r_i + 1}{2}.$$

8. Пусть неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, $n \leq m$ имеет строки A_1, A_2, \dots, A_n , такие, что

$$r_i = \|A_i\| = \sum_{j=1}^m a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Поставим в соответствие m -вектору $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ два m -вектора $A'_i = (a'_{i1}, a'_{i2}, \dots, a'_{im})$ и $A_i^* = (a_{i1}^*, a_{i2}^*, \dots, a_{im}^*)$, полученные из m -вектора A_i перестановкой координат соответственно в невозрастающем и неубыва-

вающем порядке, $1 \leq i \leq n$. Индукцией по n доказать неравенства

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a'_{ij} \leq \operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a^*_{ij}. \quad (1)$$

9. Установить условия достижения равенства в оценке (4.12). Точнее, показать, что для вполне неразложимой 0,1-матрицы $n \times n$ со строками A_1, A_2, \dots, A_n , удовлетворяющими условию: $\|A_i\| = r_i$, $1 \leq i \leq n$, $r_i \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, если в неравенстве

$$\operatorname{per} A \geq \max_{1 \leq i \leq n} r_i = r_1$$

достигается равенство, то $r_2 = \dots = r_n = 2$.

СИСТЕМЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ И БЛОК-СХЕМЫ

§ 1. Системы инцидентности

1. Определения. Рассмотрим множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ и положим $Z = \{1, 2, \dots, b\}$. Будем говорить, что отображение $\varphi: Z \rightarrow 2^X$ определяет *систему инцидентности*, где 2^X — булево множество X . Очевидно, что каждой системе инцидентности можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор (X_1, X_2, \dots, X_b) , компонентами которого являются элементы булева 2^X . В дальнейшем мы не будем рассматривать отображения φ , в которых пустое множество \emptyset не используется в качестве образа. Следовательно, можем считать, что каждой системе инцидентности ставится во взаимно однозначное соответствие семейство (X_1, X_2, \dots, X_b) непустых подмножеств множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$.

2. Матрицы инцидентности. *Матрицей инцидентности системы инцидентности (X_1, X_2, \dots, X_b)* будем называть $0,1$ -матрицу $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, b$, $j = 1, 2, \dots, v$ такую, что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in X_i, \\ 0, & x_j \notin X_i. \end{cases}$$

Пусть A_1, A_2, \dots, A_b и $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(v)}$ — соответственно строки и столбцы матрицы A . Норму $\|y\|$ вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определим равенством

$$\|y\| = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (1.1)$$

Скалярное произведение (y, z) векторов $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, как обычно, будем вычислять с помощью формулы

$$(y, z) = \sum_{i=1}^n y_i z_i.$$

Нетрудно заметить, что

$$\|A_i\| = \sum_{j=1}^v a_{ij} = |X_i|, \quad i = 1, 2, \dots, b, \quad (1.2)$$

$$\|A^{(j)}\| = \sum_{i=1}^b a_{ij} = |\{X_i : x_j \in X_i, \quad i = 1, \dots, b\}|. \quad (1.3)$$

Аналогичным образом

$$(A_{i_1}, A_{i_2}) = \sum_{j=1}^v a_{i_1 j} a_{i_2 j} = |X_{i_1} \cap X_{i_2}|, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq b, \quad (1.4)$$

$$\left(A^{(j_1)}, A^{(j_2)} \right) = \sum_{i=1}^b a_{ij_1} a_{ij_2} = |\{X_i: x_{j_1}, x_{j_2} \in X_i, i = 1, \dots, b\}|, \\ 1 \leq j_1, j_2 \leq v. \quad (1.5)$$

Отметим также, что если

$$AA^T = (\alpha_{i_1, i_2}), \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, b, \quad (1.6)$$

$$A^T A = (\beta_{j_1, j_2}), \quad j_1, j_2 = 1, 2, \dots, v, \quad (1.7)$$

где A^T — транспонированная матрица A , то имеют место равенства

$$\alpha_{i_1, i_2} = \sum_{j=1}^v a_{i_1 j} a_{i_2 j} = (A_{i_1}, A_{i_2}), \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq b, \quad (1.8)$$

$$\beta_{j_1, j_2} = \sum_{i=1}^b a_{ij_1} a_{ij_2} = \left(A^{(j_1)}, A^{(j_2)} \right), \quad 1 \leq j_1, j_2 \leq v. \quad (1.9)$$

Система инцидентности с матрицей инцидентности A называется *блок-схемой*, если для нее заданы числовые значения величин $\|A_i\|$, $i = 1, \dots, b$; $\|A^{(j)}\|$, $j = 1, \dots, v$;

$$(A_{i_1}, A_{i_2}), 1 \leq i_1, i_2 \leq b; \quad \left(A^{(j_1)}, A^{(j_2)} \right), \quad 1 \leq j_1, j_2 \leq v.$$

3. Квадратичная форма. Будем рассматривать элементы множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ как независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_v , принимающие действительные значения. Для матрицы инцидентности A системы инцидентности можно записать

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_b \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

где $y_i = \sum_{j=1}^v a_{ij} x_j$ равно сумме элементов, содержащихся в X_i , $i = 1, 2, \dots, b$. Транспонируя обе части равенства (1.10) и перемножая левые и правые части равенства (1.10) и полученного равенства, находим

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_b^2 = (x_1, x_2, \dots, x_v) A^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Равенство (1.11) определяет квадратичную форму, соответствующую системе инцидентности. Осуществляя перемножение в правой части равенства (1.10), получаем

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_b^2 = \sum_{j=1}^v \beta_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq v} \beta_{j_1, j_2} x_{j_1} x_{j_2}. \quad (1.12)$$

Из равенства (1.12) с учетом равенств (1.3), (1.9) и равенства $\beta_{jj} = \|A^{(j)}\|$ следует, что в квадратичной форме (1.11) коэффициент при x_j^2 равен $\|A^{(j)}\|$, а коэффициент при $x_{j_1} x_{j_2}$ равен $2(A^{(j_1)}, A^{(j_2)})$.

§ 2. Блок-схемы

1. Определения и свойства. Семейство (X_1, X_2, \dots, X_b) непустых подмножеств множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ называется *сбалансированной неполной блок-схемой* с параметрами (b, v, r, k, λ) или (b, v, r, k, λ) -конфигурацией с блоками X_1, X_2, \dots, X_b , если оно обладает следующими свойствами:

1°. $|X_i| = k$, $i = 1, 2, \dots, b$, причем $k < v - 1$.

2°. Любой элемент x_j , $1 \leq j \leq v$, принадлежит точно r блокам.

3°. Любая пара элементов x_i, x_j , $1 \leq i, j \leq v$, $i \neq j$, принадлежит точно λ блокам, причем $\lambda > 0$.

Ясно, что (b, v, r, k, λ) -конфигурация представляет собой систему инцидентности. Если $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, b$, $j = 1, \dots, v$ — матрица инцидентности (b, v, r, k, λ) -конфигурации и A_1, A_2, \dots, A_b — строки, а $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(v)}$ — столбцы матрицы A , то из равенств (1.2), (1.3), (1.5) и определения (b, v, r, k, λ) -конфигурации следует, что

$$\sum_{j=1}^v a_{ij} = k, \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^b a_{ij} = r, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^b a_{ij_1} a_{ij_2} = \lambda, \quad j_1 \neq j_2. \quad (2.3)$$

Условие (2.3) означает сбалансированность блок-схемы. Блок-схема называется *полной*, если при выполнении равенства [2.1] она содержит все $\binom{v}{k}$ k -подмножеств множества X . В противном случае блок-схема называется *неполной*.

Из равенств (1.7) и (1.9) с учетом формул (2.2) и (2.3) следует, что для (b, v, r, k, λ) -конфигурации выполнено

$$A^T A = \begin{pmatrix} r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \dots & \lambda \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \dots & r \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Обозначим через J_v и J_{bv} соответственно $v \times v$ -матрицу и $b \times v$ -матрицу, у которых все элементы равны 1. Тогда из формул (2.1), (2.2) и (2.4) вытекают равенства

$$AJ_v = kJ_{bv}, \quad (2.5)$$

$$J_b A = rJ_{bv}, \quad (2.6)$$

$$A^T A = \lambda J_v + (r - \lambda) I_v, \quad (2.7)$$

где I_v — единичная матрица $v \times v$.

Из равенства (2.4) следует формула для определителя матрицы $A^T A$:

$$\det(A^T A) = (r + \lambda(v - 1))(r - \lambda)^{v-1}. \quad (2.8)$$

Действительно, если в матрице $A^T A$ вычтем первый столбец из всех остальных столбцов, а затем к первой строке прибавим все остальные строки, то в результате получим

$$\det(A^T A) = \det \begin{pmatrix} r + \lambda(v - 1) & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & r - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda & 0 & \dots & r - \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Отсюда следует формула (2.8).

Общее число единиц в матрице инцидентности A (b, v, r, k, λ) -конфигурации можно вычислить двумя способами: суммируя единицы сначала в каждой строке, а затем складывая полученные выражения либо осуществляя аналогичную операцию с использованием столбцов. В результате с учетом равенств (2.1) и (2.2) получаем соотношение

$$bk = vr. \quad (2.10)$$

Соотношение (2.10) можно интерпретировать как результат вычисления общего числа элементов в блоках (b, v, r, k, λ) -конфигурации с учетом их повторения. Величина блока равна k , а число блоков равно b , поэтому искомое число есть bk . С другой стороны, каждый элемент встречается в r блоках, а число элементов есть v , поэтому общее число элементов, с учетом их повторения, равно vr .

Вычислим теперь двумя способами общее число различных неупорядоченных пар, содержащих фиксированный элемент x_i и принадлежащих блокам (b, v, r, k, λ) -конфигурации. Это число

с учетом формулы (2.3) равно

$$\sum_{j_1=1}^v \sum_{\substack{i=1 \\ j_1 \neq j}}^b a_{ij_1} a_{ij} = \lambda(v-1). \quad (2.11)$$

Меняя порядок суммирования в левой части равенства (2.11), имеем

$$\sum_{i=1}^v a_{ij} \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j}}^b a_{ij_1} = r(k-1), \quad (2.12)$$

так как

$$a_{ij} \sum_{\substack{j_1=1 \\ j_1 \neq j}}^b a_{ij_1} = \begin{cases} k-1, & x_j \in X_i, \\ 0, & x_j \notin X_i. \end{cases}$$

Из равенств (2.11) и (2.12) следует соотношение между параметрами (b, v, r, k, λ) -конфигурации:

$$r(k-1) = \lambda(v-1). \quad (2.13)$$

Фиксированный элемент $x_j \in X$ встречается в r блоках и образует в каждом из этих блоков $k-1$ неупорядоченных пар. Таким образом, общее число таких пар во всех блоках равно $r(k-1)$. С другой стороны, элемент $x_j \in X$ образует с остальными элементами множества X число неупорядоченных пар, равное $v-1$. Каждая такая пара λ раз повторяется в блоках (b, v, r, k, λ) -конфигурации. Следовательно, общее число пар во всех блоках равно $\lambda(v-1)$. В этом состоит несколько иной подход к доказательству равенства (2.13).

Из определения (b, v, r, k, λ) -конфигурации следует, что $k < v-1$. Согласно равенству (2.13) это означает, что $\lambda < r$. Теперь из формулы (2.8) вытекает, что $\det(A^T A) > 0$. Таким образом, для рангов матриц $(A^T A)$ и A имеют место соотношения $v = \text{rang}(A^T A) \leq \text{rang } A \leq b$, т. е. справедливо неравенство

$$b \geq v, \quad (2.14)$$

называемое *неравенством Фишера*. Следствием этого неравенства и соотношения (2.10) является неравенство

$$k \leq r. \quad (2.15)$$

Квадратичная форма типа (1.12) для (b, v, r, k, λ) -конфигурации в силу формул (2.2) и (2.3) имеет вид

$$\sum_{i=1}^b y_i^2 = r \sum_{j=1}^v x_j^2 + 2\lambda \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq v} x_{j_1} x_{j_2}.$$

Это равенство можно записать в более компактном виде:

$$\sum_{i=1}^b y_i^2 = (r - \lambda) \sum_{j=1}^v x_j^2 + \lambda \left(\sum_{j=1}^v x_j \right)^2. \quad (2.16)$$

Полагая в обеих частях последнего равенства $x_1 = \dots = x_v = 1$, получаем тождество $bk^2 = (r - \lambda)v + \lambda v^2$, справедливость которого легко доказывается непосредственно с использованием равенств (2.10) и (2.13).

2. Системы троек. При $k = 3$ будем называть $(b, v, r, 3, \lambda)$ -конфигурацию *системой троек*. Условия существования систем троек устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 1. Для существования $(b, v, r, 3, \lambda)$ -конфигурации необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda(v - 1) \equiv 0 \pmod{2}, \quad \lambda v(v - 1) \equiv 0 \pmod{6}. \quad (2.17)$$

Ограничимся доказательством необходимости. Доказательство достаточности можно найти, например, в [45]. Из равенств (2.10) и (2.13) имеем

$$3b = vr, \quad 2r = \lambda(v - 1). \quad (2.18)$$

Отсюда следуют равенства

$$r = \frac{\lambda(v - 1)}{2}, \quad b = \frac{\lambda v(v - 1)}{6}. \quad (2.19)$$

Так как r и b — целые числа, то равенства (2.17) справедливы.

При $\lambda = 1$ система троек называется системой троек Штейнера.

Теорема 2. Для существования системы троек Штейнера, являющейся $(b, v, r, 3, 1)$ -конфигурацией, необходимо и достаточно, чтобы

$$v \equiv 1, 3 \pmod{6}. \quad (2.20)$$

Ограничимся также только доказательством необходимости. Из равенств (2.19) при $\lambda = 1$ имеем

$$b = \frac{r(2r + 1)}{3}. \quad (2.21)$$

Так как b — целое число, то из (2.21) вытекают две возможности:

а) $r = 3\mu$, где μ — целое число. В этом случае $v = 6\mu + 1$ и, следовательно, $v \equiv 1 \pmod{6}$.

б) $2r + 1 = 3(2\mu + 1)$, где μ — целое число. В данном случае $v = 6\mu + 3$ и, значит, $v \equiv 3 \pmod{6}$.

3. (v, k, λ) -конфигурации. Будем называть (b, v, r, k, λ) -конфигурацию (v, k, λ) -конфигурацией, если $b = v$. Иногда (v, k, λ) -конфигурации называют *симметричными сбалансированными неполными блок-схемами*.

Рассмотрим свойства (v, k, λ) -конфигураций, вытекающие из свойств (b, v, r, k, λ) -конфигураций.

Свойство 1. $r = k$. (2.22)

Следует из равенства (2.10).

Свойство 2. $k(k - 1) = \lambda(v - 1)$. (2.23)

Следует из равенств (2.13) и (2.22).

Свойство 3. $A^T A = A A^T$. (2.24)

Матрица A , удовлетворяющая равенству (2.24), называется *нормальной*. Из (2.7) и (2.22) следует, что

$$A^T A = \lambda J_v + (k - \lambda) I_v. \quad (2.25)$$

Из формул (2.5) и (2.6) и невырожденности A следует, что $J_v A^{-1} = \frac{1}{k} J_v$, $A J_v = k J_v$. Поэтому

$$A A^T = A A^T A A^{-1} = \lambda A J_v A^{-1} + (k - \lambda) I_v = \lambda J_v + (k - \lambda) I_v. \quad (2.26)$$

Теперь равенство (2.24) следует из равенств (2.25) и (2.26).

Теорема 3. Если v четно, то для существования (v, k, λ) -конфигурации необходимо, чтобы $k - \lambda$ представляло собой квадрат натурального числа.

При $b = v$, $r = k$ из равенства (2.8) имеем

$$(\det A)^2 = (k + \lambda(v - 1))(k - \lambda)^{v-1}. \quad (2.27)$$

Из равенства (2.23) следует, что $k + \lambda(v - 1) = k^2$. В силу нечетности $v - 1$ из этого равенства и равенства (2.27) следует, что $k - \lambda$ есть квадрат натурального числа.

Приведем еще одно свойство (v, k, λ) -конфигурации, которое иногда используется в качестве ее определения.

Свойство 4. Для того чтобы семейство k -подмножеств (X_1, X_2, \dots, X_v) множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ являлось (v, k, λ) -конфигурацией, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$|X_i \cap X_j| = \begin{cases} k, & i = j, \\ \lambda, & i \neq j, \end{cases} \quad (2.28)$$

причем параметры v , k , λ удовлетворяют неравенствам $0 < \lambda < k < v - 1$.

Действительно, если семейство k -множеств (X_1, X_2, \dots, X_v) есть (v, k, λ) -конфигурация, то, согласно равенствам (2.4), (2.22) и (2.24), для скалярных произведений строк A_1, A_2, \dots, A_v матрицы инцидентности A имеют место равенства

$$(A_i, A_j) = \begin{cases} k, & i = j, \\ \lambda, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.29)$$

Эти равенства эквивалентны равенствам (2.28).

Докажем теперь достаточность условий (2.28). Условия (2.28) эквивалентны условиям (2.29), из которых следует, что для мат-

рицы инцидентности A имеют место равенства $AJ_v = kJ_v$, $AA^T = \lambda J_v + (k - \lambda)I_v$. В силу невырожденности матрицы A из этих равенств следует, что $A^{-1}J_v = \frac{1}{k}J_v$, $AA^TJ_v = (k + \lambda(v - 1))J_v$.

Из этих равенств находим, что

$$A^TJ_v = \frac{1}{k}[k + \lambda(v - 1)]J_v. \quad (2.30)$$

Транспонируя обе части последнего равенства и умножая их на J_v , получаем $J_v AJ_v = \frac{v}{k}[k + \lambda(v - 1)]J_v = kvJ_v$. Отсюда получаем соотношение между параметрами: $k(k - 1) = \lambda(v - 1)$. Транспонируя обе части равенства (2.30) и используя последнее соотношение, находим, что $J_v A = kJ_v$. Используя это равенство, получаем

$$A^T A = A^{-1} A A^T A = \lambda A^{-1} J_v A + (k - \lambda) I_v = \lambda J_v + (k - \lambda) I_v.$$

Таким образом, для скалярных произведений столбцов $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(v)}$ матрицы инцидентности A имеют место равенства

$$(A^{(i)}, A^{(j)}) = \begin{cases} k, & i = j, \\ \lambda, & i \neq j. \end{cases}$$

Эти равенства означают, что любой элемент множества X принадлежит k блокам X_1, X_2, \dots, X_v , а любая пара элементов — λ блокам, т. е. (X_1, X_2, \dots, X_v) есть (v, k, λ) -конфигурация.

4. Циклические (v, k, λ) -конфигурации. Будем называть (v, k, λ) -конфигурацию *циклической*, если ее матрица инцидентности $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, v$, является циклической, т. е. $a_{ij} = a_{\mu\nu}$ при $i - \mu \equiv j - \nu \pmod{v}$, $1 \leq i, j, \mu, \nu \leq v$.

Множество $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, элементами которого являются наименьшие неотрицательные вычеты по модулю v , называется (v, k, λ) -разностным множеством, если для любого $d \not\equiv 0 \pmod{v}$ существуют точно λ упорядоченных пар (d_i, d_j) , $1 \leq i < j \leq v$, таких, что $d_i - d_j \equiv d \pmod{v}$; $0 < \lambda < k < v - 1$.

Теорема 4. *Множество $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, состоящее из вычетов по модулю v , есть (v, k, λ) -разностное множество тогда и только тогда, когда семейство множеств (D, D_1, \dots, D_{v-1}) , где $D_i = \{d_1 + i, \dots, d_k + i\}$, $D_0 = D$, $i = 0, 1, \dots, v - 1$, является циклической (v, k, λ) -конфигурацией.*

Пусть $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ есть (v, k, λ) -разностное множество. Тогда семейство (D, D_1, \dots, D_{v-1}) удовлетворяет условиям

$$|D_i| = k, \quad i = 0, 1, \dots, v - 1, \quad D_0 = D,$$

$$|D_i \cap D_j| = |\{(d_p, d_q) : d_p - d_q \equiv (i - j) \pmod{v}\}| = \lambda, \quad i \neq j. \quad (2.31)$$

Следовательно, $(D_0, D_1, \dots, D_{v-1})$ есть (v, k, λ) -конфигурация, имеющая циклическую матрицу инцидентности.

Обратно, пусть $(D_0, D_1, \dots, D_{v-1})$ есть циклическая (v, k, λ) -конфигурация. Тогда $D_0 = D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ в силу равенств (2.31) является (v, k, λ) -разностным множеством.

Нетрудно убедиться, что множество вычетов по модулю 7 $D = \{1, 2, 4\}$ является разностным множеством. Циклическая $(7, 3, 1)$ -конфигурация, соответствующая этому разностному множеству, имеет следующие блоки:

$$D_0 = \{1, 2, 4\}, D_1 = \{2, 3, 5\}, D_2 = \{3, 4, 6\}, D_3 = \{4, 5, 0\}, \\ D_4 = \{5, 6, 1\}, D_5 = \{6, 0, 2\}, D_6 = \{0, 1, 3\}. \quad (2.32)$$

5. Матрицы Адамара. Матрица $H = (h_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $h_{ij} = \pm 1$, называется *матрицей Адамара*, если она удовлетворяет равенству

$$HH^T = nI_n, \quad (2.33)$$

где I_n — единичная матрица $n \times n$ и H^T — транспонированная матрица H . Из равенства (2.33) следует, что

$$\sum_{j=1}^n h_{i_1 j} h_{i_2 j} = \begin{cases} n, & i_1 = i_2 \\ 0, & i_1 \neq i_2. \end{cases} \quad (2.34)$$

Следовательно, если H_1, H_2, \dots, H_n — строки матрицы H , то эти строки как векторы удовлетворяют условию ортогональности:

$$(H_{i_1}, H_{i_2}) = \begin{cases} n, & i_1 = i_2, \\ 0, & i_1 \neq i_2, \end{cases} \quad (2.35)$$

где (H_{i_1}, H_{i_2}) — скалярное произведение векторов H_{i_1} и H_{i_2} .

Из очевидных равенств $\det(HH^T) = (\det(H))^2 = \det(nI_n) = n^n$ следует формула

$$\det(H) = n^{n/2}, \quad (2.36)$$

означающая, что матрица H невырожденная. Это позволяет записать следующую серию равенств: $H^T H = H^{-1} H H^T H = H^{-1}(nI_n)H = nI_n = HH^T$, означающую, что матрица H удовлетворяет условию нормальности, т. е.

$$H^T H = HH^T. \quad (2.37)$$

Л е м м а. *Перестановка строк или столбцов матрицы Адамара H , а также умножение строк или столбцов на -1 переводят H в матрицу Адамара H_1 .*

Матрицы H и H_1 называются *эквивалентными матрицами Адамара*. Действительно, перестановка строк матрицы H в соответствии с формулой (2.35) сохраняет все скалярные произведения строк, а перестановка столбцов связана лишь с изменением по-

рядка слагаемых в формуле (2.34). Аналогичным образом не изменяются скалярные произведения строк и при умножении строк или столбцов на -1 .

Теорема 5. Для существования матрицы Адамара порядка n необходимо, чтобы либо $n = 1, 2$, либо

$$n \equiv 0 \pmod{4}. \quad (2.38)$$

При $n \geq 4$ с помощью эквивалентных преобразований приведем матрицу Адамара H к виду, в котором первая строка и первый столбец состоят из элементов 1. Такой вид матрицы Адамара H называется *нормализованным* и обозначается \tilde{H} . Ясно, что теорему достаточно доказать для матрицы \tilde{H} . Рассмотрим матрицу \tilde{H} , образованную первыми тремя строками матрицы H . Прилежащие \tilde{H} столбцы могут принадлежать одному из 4 видов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Обозначим через x, y, z, w число столбцов матрицы \tilde{H} каждого из 4 видов соответственно. Тогда из условий ортогональности 1-й и 2-й, 1-й и 3-й, 2-й и 3-й строк получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= n, \\ x - y + z - w &= 0, \\ x + y - z - w &= 0, \\ x - y - z + w &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Очевидно, что эта система имеет единственное решение $x = y = z = w = n/4$. Таким образом, при $n \geq 4$ имеем $n = 4\mu$, где μ — натуральное число, и, значит, сравнение (2.83) доказано. Случай $n = 3$ исключается, так как два вектора размерности 3 с координатами ± 1 не могут быть ортогональными. При $n = 1$ и $n = 2$ имеем следующие матрицы Адамара:

$$H_1 = (1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Этим завершается доказательство теоремы 5.

Теорема 6. Нормализованной матрице Адамара порядка $n = 4\mu$, $\mu \geq 2$, можно поставить в соответствие (v, k, λ) -конфигурацию с параметрами $v = 4\mu - 1$, $k = 2\mu - 1$, $\lambda = \mu - 1$.

Пусть H — нормализованная матрица Адамара порядка $n = 4\mu \geq 8$ со строками H_1, H_2, \dots, H_n . Заменив в матрице H все элементы -1 на 0 и отбрасывая первый столбец и первую строку, получим 0, 1-матрицу A порядка $4\mu - 1$. Покажем, что эта матрица является матрицей инцидентности (v, k, λ) -конфигурации с параметрами $v = 4\mu - 1$, $k = 2\mu - 1$, $\lambda = \mu - 1$. Для это-

го согласно равенству (2.28) достаточно показать, что скалярные произведения строк $A_1, A_2, \dots, A_{4\mu-1}$ матрицы A удовлетворяют равенствам

$$(A_i, A_j) = \begin{cases} 2\mu - 1, & i = j, \\ \mu - 1, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.42)$$

Из ортогональности строк H_1, H_2, \dots, H_n следует, что в каждой строке матрицы H имеется 2μ элементов 1. Следовательно, в каждой строке $A_1, A_2, \dots, A_{4\mu-1}$ имеется по $2\mu - 1$ единиц, т. е. $\|A_i\| = 2\mu - 1$, $i = 1, 2, \dots, 4\mu - 1$. В подматрице $2 \times n$, соответствующей каждой паре строк H_i и H_j , $2 \leq i < j \leq n$, каждый из столбцов вида $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ встречается точно μ раз, что следует из доказательства теоремы 5. Соответственно для $2 \times (n-1)$ -подматрицы, соответствующей паре строк A_i, A_j , $1 \leq i < j \leq n-1$, столбец вида $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ встречается $\mu - 1$ раз, а столбцы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ встречаются μ раз. Отсюда следует, что $(A_i, A_j) = \mu - 1$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Таким образом, равенства (2.42) доказаны. Наконец, условие (2.29) вытекает из требования $\mu \geq 2$.

Остановимся теперь на способе построения матриц Адамара, исходя из матриц Адамара меньшего порядка. *Кронекеровым произведением* $A \otimes B$ матрицы $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, на матрицу $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, называется $(mn \times mn)$ -матрица вида

$$A \otimes B = (a_{ij}B), \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.43)$$

Имеют место следующие свойства кронекерова произведения матриц, проверка которых осуществляется непосредственно, исходя из определения:

- 1) $\alpha(A \otimes B) = (\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$, α — скаляр;
- 2) $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$;
- 3) $A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$;
- 4) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$;
- 5) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Здесь A, A_1, A_2, C и B, B_1, B_2, D — матрицы порядков m и n соответственно.

Теорема 7. *Кронекерово произведение матриц Адамара порядков m и n есть матрица Адамара порядка mn .*

Действительно, если H_m и H_n — матрицы Адамара порядков m и n соответственно, то для их кронекерова произведения $H_m \otimes H_n$ имеем

$$\begin{aligned} H_{mn} &= (H_m \otimes H_n)(H_m \otimes H_n)^T = (H_m \otimes H_n)(H_m^T \otimes H_n^T) = \\ &= H_m H_m^T \otimes H_n H_n^T = mI_m \otimes nI_n = mnI_{mn}, \end{aligned}$$

где I_k — единичная матрица порядка k . Из равенства (2.33) следует, что H_{mn} есть матрица Адамара порядка mn .

Следствие. Для любого $n = 2^d$, $d \geq 1$, матрица Адамара существует.

В самом деле, при $n = 2^d$, $d \geq 1$, матрица

$$H_n = H_2 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_2 \quad (d \text{ раз}),$$

где H_2 — матрица вида (2.41), согласно теореме 7, есть матрица Адамара.

6. t -схемы. В заключение отметим, что рассмотренные выше (b, v, r, k, λ) -конфигурации являются частным случаем систем инцидентности, называемых t -схемами. Семейство блоков, являющихся k -подмножествами v -множества X , называется t -схемой с параметрами (v, k, λ_t) , если любое t -подмножество множества X содержится ровно в λ_t блоках, причем $k \leq v - 1$, $\lambda_t > 0$.

Обозначим через λ_i , $0 \leq i \leq t$, число блоков t -схемы, содержащих фиксированное i -подмножество элементов X . При $i = 0$ полагаем, что фиксированное i -подмножество — пустое и $\lambda_0 = b$, где b — число блоков в t -схеме. Соответственно при $i = 1, 2$ полагаем $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \lambda$, где r и λ — соответственно число блоков, содержащих фиксированный элемент и пару фиксированных элементов.

Вычислим двумя различными способами общее число t -подмножеств, принадлежащих блокам и содержащих фиксированное i -подмножество. В любом блоке, содержащем фиксированное i -подмножество, это i -подмножество можно $\binom{k-i}{t-i}$ способами дополнить до t -подмножества. Так как фиксированное i -подмножество принадлежит λ_i блокам, то искомое число t -подмножеств равно $\lambda_i \binom{k-i}{t-i}$.

С другой стороны, из определения t -схемы следует, что каждое t -подмножество встречается в λ_t блоках, а число способов образования t -подмножеств, содержащих фиксированное i -подмножество, равно $\binom{v-i}{t-i}$. Таким образом, число t -подмножеств, содержащих фиксированное i -подмножество, в блоках t -схемы равно $\lambda_t \binom{v-i}{t-i}$.

Сравнивая результаты двух подсчетов, приходим к равенству

$$\lambda_i \binom{k-i}{t-i} = \lambda_t \binom{v-i}{t-i}, \quad i=0, 1, \dots, t, \quad (2.44)$$

из которого, в частности, следует, что λ_i не зависит от выбора i -множества.

Отметим также, что при заданных параметрах v , k и λ_t числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{t-1}$ определяются однозначно из равенства (2.44).

Запишем систему (2.44) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\lambda_0(k)_t &= \lambda_t(v)_t, \\ \lambda_1(k-1)_{t-1} &= \lambda_t(v-1)_{t-1}, \\ \dots &\dots \\ \lambda_{t-1}(k-t+1)_1 &= \lambda_t(v-t+1)_1, \\ \lambda_t(k-t+1)_0 &= \lambda_t(v-t+1)_0.\end{aligned}$$

Ясно, что если $t = 2$, то 2-схема представляет собой (b, v, r, k, λ) -конфигурацию при $\lambda_0 = b$, $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = \lambda$, $k < v - 1$ и система (2.45) сводится к известным соотношениям для параметров:

$$bk = vr, \quad r(k-1) = \lambda(v-1).$$

§ 3. Ортогональные латинские квадраты и конечные проективные плоскости

1. Ортогональные латинские квадраты. Пусть заданы два латинских квадрата $L_n = [s_1, s_2, \dots, s_n]$, $L'_n = [s'_1, s'_2, \dots, s'_n]$, где s_1, \dots, s_n , s'_1, \dots, s'_n — подстановки степени n , удовлетворяющие условиям

$$s_i(j) \neq s_k(j), \quad s'_i(j) \neq s'_k(j), \quad i \neq k, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Латинские квадраты L_n и L'_n называются ортогональными, если для любых упорядоченных различных пар $(i, j) \neq (k, l)$ выполнено условие

$$(s_i(j), s'_i(j)) \neq (s_k(l), s'_k(l)), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n. \quad (3.2)$$

Если L_n и L'_n ортогональны, то этот факт записывается следующим образом: $L_n \perp L'_n$. Таблицу $(s_i(j))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, латинского квадрата L_n будем обозначать той же самой буквой L_n . Обозначим через (L_n, L'_n) таблицу, полученнную наложением таблицы L'_n на таблицу L_n , т. е. размещением в положении с координатами (i, j) пар $(s_i(j), s'_i(j))$. Тогда условие (3.2) означает, что все пары, входящие в (L_n, L'_n) , различны.

Определим операцию умножения латинского квадрата $L_n = [s_1, s_2, \dots, s_n]$ слева на подстановку s с помощью равенства $sL_n = [ss_1, ss_2, \dots, ss_n]$. Если $L_n = [s_1, s_2, \dots, s_n]$, $L'_n = [s'_1, s'_2, \dots, s'_n]$ и $L_n \perp L'_n$, то для любых подстановок s и \tilde{s} имеем $sL_n \perp \tilde{s}L'_n$. В самом деле, для любых пар $(i, j) \neq (k, l)$ выполнено условие

$$(ss_i(j), \tilde{ss}'_i(j)) \neq (ss_k(l), \tilde{ss}'_k(l)).$$

В противном случае из равенств $ss_i(j) = ss_k(l)$, $\tilde{ss}'_i(j) = \tilde{ss}'_k(l)$, следовало бы $s_i(j) = s_k(l)$, $\tilde{s}_i(j) = \tilde{s}_k(l)$, что противоречит условию (3.2). Полагая $s = s_1^{-1}$, $\tilde{s} = (s'_1)^{-1}$, из пары ортогональных латинских квадратов L_n и L'_n получаем пару ортогональных латинских квадратов $\tilde{L}_n = s_1^{-1}L_n$ и $\tilde{L}'_n = (s'_1)^{-1}L'_n$, таблицы которых имеют одинаковые первые строки вида 1, 2, ..., n . Такие латинские квадраты называются *полунормализованными*.

Пусть $\{L_n^{(1)}, L_n^{(2)}, \dots, L_n^{(r)}\}$ — множество латинских квадратов, таких, что

$$L_n^{(i)} \perp L_n^{(j)}, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq r. \quad (3.3)$$

Покажем, что

$$r \leq n - 1. \quad (3.4)$$

Обозначим через $\tilde{L}_n^{(i)}$ полунормализованный латинский квадрат, соответствующий $L_n^{(i)}$, $1 \leq i \leq r$. Тогда $\tilde{L}_n^{(i)} \perp \tilde{L}_n^{(j)}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$. Наложим таблицы r полунормализованных латинских квадратов. Ячейка со входами $(1, j)$ содержит r элементов j . В ячейке со входами $(2, j)$ все элементы различны. Действительно, пусть в ячейке $(2, j)$ два элемента равны l , $1 \leq l \leq n$. Тогда в ячейке $(1, l)$ уже имеется пара элементов, равных l , принадлежащих паре латинских квадратов; получаем противоречие с условием их ортогональности. Ни один из различных элементов в ячейке $(2, 1)$ не может совпадать с элементами ячейки $(1, 1)$. Отсюда следует неравенство (3.4).

Если $r = n - 1$, то множество попарно ортогональных латинских квадратов $L_n^{(1)}, L_n^{(2)}, \dots, L_n^{(n-1)}$ называется *полным*.

2. Метод построения. Укажем способ построения полных множеств попарно ортогональных латинских квадратов порядка $n = p^\alpha$, где p — простое, α — натуральное число, $n \geq 3$. Рассмотрим конечное поле Галуа $GF(p^\alpha) = \{a_0 = 0, a_1 = 1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, где 0 и 1 — соответственно нуль и единица этого поля. Покажем, что множество таблиц

$$L_n^{(l)} = (a_{ij}^{(l)}), \quad l = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (3.5)$$

$$a_{ij}^{(l)} = a_i a_l + a_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (3.6)$$

определяет полное множество попарно ортогональных латинских квадратов. Равенства $a_{ij}^{(l)} = a_{ij'}^{(l)}$, $j \neq j'$ и $a_{ij}^{(l)} = a_{i'j}^{(l)}$, $i \neq i'$, в силу соотношения (3.6) означают выполнение условий $a_j = a_{j'}$, $j \neq j'$, и соответственно $a_i = a_{i'}$, $i \neq i'$, что противоречиво. Отсюда следует, что $L_n^{(l)}$, $1 \leq l \leq n-1$, есть таблица латинского квадрата.

Покажем теперь, что $L_n^{(k)} \perp L_n^{(l)}$, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq n-1$. Допустим, что для $(i, j) \neq (i', j')$ выполнено равенство $(a_{ij}^{(k)}, a_{ij'}^{(l)}) = (a_{i'j}^{(k)}, a_{i'j'}^{(l)})$. Это в силу условия (3.6) означает, что

$$a_i a_k + a_j = a_{i'} a_k + a_{j'}, \quad a_i a_l + a_j = a_{i'} a_l + a_{j'}. \quad (3.7)$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $a_i(a_k - a_l) = a_{i'}(a_k - a_l)$, $k \neq l$. Отсюда следует, что $a_i = a_{i'}$, т. е. $i = i'$. Теперь из первого равенства системы (3.7) находим, что $a_j = a_{j'}$, т. е. $j = j'$. В результате получили противоречие с предположением $(i, j) \neq (i', j')$.

Положим $p = 3$, $\alpha = 1$. Тогда $GF(3) = \{0, 1, 2\}$ и для $l = 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} a_{00}^{(l)} &= 0l + 0, & a_{01}^{(l)} &= 0l + 1, & a_{02}^{(l)} &= 0l + 2, \\ a_{10}^{(l)} &= 1l + 0, & a_{11}^{(l)} &= 1l + 1, & a_{12}^{(l)} &= 1l + 2, \\ a_{20}^{(l)} &= 2l + 0, & a_{21}^{(l)} &= 2l + 1, & a_{22}^{(l)} &= 2l + 2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем полное множество из двух попарно ортогональных латинских квадратов

$$L_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

3. Матрица C . Рассмотрим матрицу

$$C = (c_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, n^2, \quad j = 1, 2, \dots, r+2, \quad (3.9)$$

с элементами c_{ij} , которые могут принимать значения $1, 2, \dots, n$. Будем говорить, что матрица C обладает *латинским свойством*, если

$$(c_{ik}, c_{il}) \neq (c_{jk}, c_{jl}), \quad i \neq j, \quad k \neq l. \quad (3.10)$$

Выполнение латинского свойства (3.10) для матрицы C означает, что строки каждой ее $n^2 \times 2$ -подматрицы представляют n^2 различных упорядоченных пар, составленных из чисел $1, 2, \dots, n$. Так как латинское свойство (3.10) определяется для пар элементов, принадлежащих одной и той же строке, то оно сохраняется при перестановке строк матрицы C . В результате перестановки строк матрицу C можно привести к стандартному виду, в котором пары элементов в двух ее первых столбцах располагаются в лекси-

кографическом порядке при возрастании номеров строк: $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, n)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, ..., $(2, n)$, ..., $(n, 1)$, ..., (n, n) .

Теорема 1. При $n \geq 3$, $r \geq 2$ каждому множеству из r попарно ортогональных латинских квадратов можно поставить в соответствие матрицу C , обладающую латинским свойством, и обратно.

Пусть дано множество из r попарно ортогональных латинских квадратов $L_n^{(1)}, L_n^{(2)}, \dots, L_n^{(r)}$, таблицы которых состоят из элементов $1, 2, \dots, n$. Этому множеству поставим в соответствие стандартную матрицу $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, n^2$, $j = 1, 2, \dots, r + 2$, в которой два первых столбца стандартные, а j -й столбец при $j = 3, 4, \dots, r + 2$ представляет собой выписанные последовательно сверху вниз по мере возрастания номеров n строк латинского квадрата $L_n^{(j-2)}$, $3 \leq j \leq r + 2$. Например, для $n = 3$, $r = 2$ и пары ортогональных латинских квадратов

$$L_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Полученная в общем случае стандартная матрица $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, n^2$, $j = 1, 2, \dots, r + 2$, удовлетворяет латинскому свойству (3.10). Действительно, равенство

$$(c_{ii}, c_{i2}) = (c_{ji}, c_{j2}), \quad i \neq j,$$

противоречило бы свойству различия всех пар, принадлежащих двум первым стандартным столбцам.

Далее, равенства

$$\begin{aligned} (c_{ii}, c_{ik}) &= (c_{ji}, c_{jk}), \quad (c_{i2}, c_{ik}) = (c_{j2}, c_{jk}), \\ i \neq j, k &= 3, 4, \dots, r + 2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

противоречили бы условиям различия элементов в строках и соответственно в столбцах латинского квадрата $L_n^{(k-2)}$, $3 \leq k \leq r + 2$. Наконец, наличие равенства

$$(c_{ik}, c_{il}) = (c_{jk}, c_{jl}), \quad i \neq j, k \neq l, 3 \leq k, l \leq r + 2, \quad (3.14)$$

противоречило бы условию $L_n^{(k-2)} \perp L_n^{(l-2)}$.

Обратно, пусть задана матрица C вида (3.9), обладающая латинским свойством (3.10). Не ограничивая общности, предполагаем, что матрица C имеет стандартный вид. В противном случае перестановкой строк ее всегда можно привести к стандартному виду с сохранением латинского свойства. Поставим в соответствие $(k+2)$ -му столбцу матрицы C таблицу $n \times n$, в которой строки являются последовательными сверху вниз отрезками длины n рассматриваемого $(k+2)$ -го столбца матрицы C , $1 \leq k \leq r$. Таким образом,

$$L_n^{(k)} = \begin{pmatrix} c_{1,k+2} & c_{2,k+2} & \cdots & c_{n,k+2} \\ c_{n+1,k+2} & c_{n+2,k+2} & \cdots & c_{2n,k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n^2-n+1,k+2} & c_{n^2-n+2,k+2} & \cdots & c_{n^2,k+2} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq r. \quad (3.15)$$

При $n=3$, $r=2$ указанным способом из матрицы (3.12) получаются таблицы $L_3^{(1)}$ и $L_3^{(2)}$. Из условия невыполнения равенств (3.13) для любых $i \neq j$ следует, что таблица $L_n^{(k)}$ является латинским квадратом. Из условия невыполнения равенств (3.14) при любых $i \neq j$, $k \neq l$ следует, что $L_n^{(k)} \perp L_n^{(l)}$. Теорема доказана.

4. Конечные проективные плоскости. Назовем (v, k, λ) -конфигурацию при $n \geq 2$ и $v = n^2 + n + 1$, $k = n + 1$, $\lambda = 1$ конечной проективной плоскостью порядка n . Геометрическая терминология в данном случае мотивируется следующим образом. Элементы множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n^2+n-1}\}$ назовем точками, а соответствующие блоки $X_1, X_2, \dots, X_{n^2+n-1}$ $(n^2+n-1, n+1, 1)$ -конфигурации будем называть прямыми. Тогда из общих свойств (v, k, λ) -конфигураций вытекают следующие свойства конечной проективной плоскости:

1. Каждая прямая содержит $n+1$ точек, т. е.

$$|X_i| = n+1, \quad i = 1, 2, \dots, n^2+n-1. \quad (3.16)$$

2. Две прямые пересекаются только в одной точке, т. е.

$$|X_i \cap X_j| = 1, \quad i \neq j. \quad (3.17)$$

3. В каждой точке x_j пересекаются ровно $n+1$ прямых, т. е.

$$|\{X_i : x_j \in X_i, \quad 1 \leq i \leq n^2+n-1\}| = n+1. \quad (3.18)$$

4. Через две различные точки проходит ровно одна прямая, т. е.

$$|\{X_i : x_{i_1}, x_{i_2} \in X_i, i_1 \neq i_2, 1 \leq i \leq n^2+n-1\}| = 1. \quad (3.19)$$

Отметим, что в силу равенств (2.28) блоки $X_1, X_2, \dots, X_{n^2+n-1}$ определяют конечную проективную плоскость порядка n , если выполнены равенства (3.16) и (3.17).

Теорема 2. При $n \geq 3$ конечная проективная плоскость порядка n существует тогда и только тогда, когда существует полное множество из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n .

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_{n^2+n+1}$ — прямые конечной проективной плоскости порядка n , причем $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ и точки плоскости обозначены через $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{n^2}\}$. Для прямых плоскости выполнено условие

$$|X_i \cap X_j| = \begin{cases} n + 1, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.20)$$

Каждой прямой $[y_i, x_k]$, проходящей через точки y_i и x_k , $1 \leq i \leq n^2$, $1 \leq k \leq n + 1$, припишем некоторое число c_{ik} , представляющее собой одно из чисел $1, 2, \dots, n$. В результате получим матрицу $C = (c_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, n^2$, $k = 1, 2, \dots, n + 1$, причем выбор чисел c_{ik} должен быть таким, чтобы матрица C обладала латинским свойством вида (3.10). Допустим противное, т. е. при $i \neq j$, $k \neq l$ имеем равенства

$$c_{ik} = c_{jk}, \quad c_{il} = c_{jl}. \quad (3.21)$$

Первое из равенств (3.21) означает, что прямым $[y_i, x_k]$ и $[y_j, x_k]$ приписано одно и то же число, т. е. точки y_i , y_j и x_k лежат на одной прямой. Второе равенство (3.21) аналогичным образом приводит к выводу, что точки y_i , y_j и x_l также лежат на одной прямой. Так как точки x_k и x_l лежат на одной прямой, то на этой же прямой X_1 лежат и точки y_i и y_j , что противоречиво.

Таким образом, матрица C обладает латинским свойством, и, следовательно, ей можно, согласно теореме 1, поставить в соответствие полное множество из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов.

Пусть теперь дано полное множество из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n , определяющих стандартную матрицу $C = (c_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, n^2$, $j = 1, 2, \dots, n + 1$, $c_{ij} = 1, 2, \dots, n$, обладающую латинским свойством (3.10). Построим проективную плоскость порядка n , отвечающую этой матрице C .

Рассмотрим прямую $X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ и через y_1, y_2, \dots, y_{n^2} обозначим точки, не лежащие на этой прямой. Прямой (y_i, x_k) приписывается число c_{ik} . Так как в k -м столбце матрицы C имеются n одинаковых элементов, то прямая, проходящая через x_k и отличная от X_1 , содержит $n + 1$ точек. Далее, покажем, что любые две прямые пересекаются в одной точке. Если две прямые пересекаются в точке x_k , то элементы, определяющие приписываемые этим прямым числа, берутся из одного столбца матрицы C . Ясно, что в этом случае прямые могут пересекаться в единственной точке x_k .

Возьмем теперь прямые, отличные от X_1 и проходящие через точки x_i и x_k , $i \neq k$. Так как у i -го и k -го столбцов в матрице C при фиксированном l только один раз встречается пара (l, l) , то соответствующие прямые имеют единственную точку пересечения.

При $n = 3$ конечная проективная плоскость строится следующим образом по таблице, соответствующей матрице C :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
x_1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
x_2	1	2	3	1	2	3	1	2	3
x_3	1	2	3	2	3	1	3	1	2
x_4	1	2	3	3	1	2	2	3	1

По этой таблице находятся прямые, проходящие через точку x_i , $1 \leq i \leq 4$. Для этого выбираются те значения y_i , которые расположены против одинаковых элементов в i -й строке таблицы, $1 \leq i \leq 4$. В результате конечную проективную плоскость третьего порядка можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, & X_6 &= \{x_2, y_2, y_5, y_8\}, & X_{10} &= \{x_3, y_3, y_5, y_7\}, \\ X_2 &= \{x_1, y_1, y_2, y_3\}, & X_7 &= \{x_2, y_3, y_6, y_9\}, & X_{11} &= \{x_4, y_1, y_5, y_9\}, \\ X_3 &= \{x_1, y_4, y_5, y_6\}, & X_8 &= \{x_3, y_1, y_6, y_8\}, & X_{12} &= \{x_4, y_2, y_6, y_7\}, \\ X_4 &= \{x_1, y_7, y_8, y_9\}, & X_9 &= \{x_3, y_2, y_4, y_9\}, & X_{13} &= \{x_4, y_3, y_4, y_8\}, \\ X_5 &= \{x_2, y_1, y_4, y_7\}, \end{aligned}$$

Конечная проективная плоскость 2-го порядка имеет вид: $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 1\}$, $\{6, 7, 2\}$, $\{7, 1, 3\}$.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если при определении (b, v, r, k, λ) -конфигурации положить $k = v - 1$, $v > 2$, то отсюда следует, что $b = v$, $r = v - 1$, $\lambda = v - 2$ и матрица инцидентности A имеет вид $A = J_v - \Pi$, где Π — подстановочная матрица порядка v .

2. Показать, что если (v, k, λ) -конфигурацию определить при $\lambda = k$, то $\lambda = k = v$ и матрица инцидентности есть $A = J_v$.

3. Показать, что два латинских квадрата $L_n = [s_1, s_2, \dots, s_n]$ и $L'_n = [s'_1, s'_2, \dots, s'_n]$ ортогональны тогда и только тогда, когда подстановки $s_1^{-1}s'_1, s_2^{-1}s'_2, \dots, s_n^{-1}s'_n$ образуют латинский квадрат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети.— М.: Наука, 1974.
2. Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е. Теория графов.— М.: Высшая школа, 1976.
3. Береж К. Теория графов и ее применение.— М.: ИЛ, 1962.
4. Боровков А. А. Курс теории вероятностей.— М.: Наука, 1972.
5. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе.— М.: ИЛ, 1961.
6. Виленкин Н. Я. Комбинаторика.— М.: Наука, 1969.
7. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика.— М.: Наука, 1975.
8. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи.— М.: Наука, 1969.
9. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике.— М.: Наука, 1977.
10. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей.— М.: Наука, 1967.
11. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1944, 8, № 1.
12. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики/Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова.— М.: Наука, 1974.
13. Егорьев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм.— Новосибирск: Наука, 1977.
14. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики.— М.: Наука, 1977.
15. Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly».— М.: Мир, 1977.
16. Калужин Л. А. Введение в общую алгебру.— М.: Наука, 1973.
17. Коваленко И. Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Высшая школа, 1973.
18. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения.— М.: Наука, 1976.
19. Кострикин А. И. Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.
20. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.— М.: Наука, 1975.
21. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.— М.: Наука, 1972.
22. Минк Х. Перманенты.— М.: Мир, 1982.
23. Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1968.
24. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики/Под ред. К. А. Пупкова.— М.: Высшая школа, 1974.
25. Перечислительные задачи комбинаторного анализа.— М.: Мир, 1979.
26. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения.— М.: Наука, 1979.
27. Посников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Наука, 1971.
28. Прикладная комбинаторная математика/Под ред. Э. Беккенбаха.— М.: Мир, 1968.
29. Проблемы комбинаторного анализа.— М.: Мир, 1980.
30. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1973.
31. Райзэр Г. Дж. Комбинаторная математика.— М.: Мир, 1966.
32. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ.— М.: ИЛ, 1963.
33. Риордан Дж. Комбинаторные тождества.— М.: Наука, 1982.

34. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ.— М.: Изд-во МГУ, 1972.
35. Савельев Л. Я. Комбинаторика и вероятность.— Новосибирск: Наука, 1975.
36. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе.— М.: Наука, 1978.
37. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.
38. Свешников А. Г., Тихонов А. И. Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1967.
39. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей.— М.: Наука, 1980.
40. Уилсон Р. Введение в теорию графов.— М.: Мир, 1977.
41. Феллер Р. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1967. Т. I.
42. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука. Т. 1—3, 1969.
43. Харари Ф. Теория графов.— М.: ИЛ, 1963.
44. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М.: Мир, 1977.
45. Холл М. Комбинаторика.— М.: Мир, 1970.
46. Холл М. Комбинаторный анализ.— М.: ИЛ, 1963.
47. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей.— М.: Наука, 1978.
48. Эрдёш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике.— М.: Мир, 1976.
49. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979.
50. Barton D. E., David F. N. Combinatorial chance.— Griffin, 1962.
51. Coldman J. R., Rota G. C. On the foundations of combinatorial theory. IV: Finite vector spaces and eulerian generating functions.— Studies in Appl. Math., 1970, XLIX (3), p. 239—258.
52. Curtiss I. H. A note on the theory of moment generating functions.— Ann. Math. Statist., 1942, 13, № 3, p. 430—433.
53. Lovasz L. Combinatorial problems and exercises.— N. Y., 1979.
54. Moon G. W., Sobel M. Enumerating a class of nested group testing procedures.— J. Comb. Theory, 1977, B23, p. 184—188.
55. Nishi A. An elementary proof of Johnson— Dulmage— Mendelsohns refinement of Birkhoff's theorem on doubly stochastic matrices.— Canad. Math. Bull., 1979, 22 (1), p. 81—86.
56. Niven I. Formal power series.— Amer. Math. Monthly, 1969, 76, p. 871—889.
57. Prüfer A. Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen.— Archiv der Mathem. und Physik, 1918, 27, p. 742—744.
58. Rényi A. On a problem of information theory.— Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., 1961, 6, p. 505—516.
59. Rényi A. On random generating elements of finite boolean algebra.— Acta Sci. Math. (Szeged), 1961, 22, p. 75—81.
60. Rényi A. On the theory of random search.— Bull. of the Amer. Math. Soc., 1965, 71, № 6, p. 809—828.
61. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения/Под ред. К. А. Рыбникова.— М.: Наука, 1982.
62. Эндрюс Г. Теория разбиений.— М.: Наука, 1982.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм Прюфера 163
Аппелево множество 104
Асимптотический ряд степенной 133
- Базисная последовательность 99
Блок 193
— покрытия 9, 269
— связного графа 193
Блок-схема 363
— — полная (неполная) 364
— — сбалансированная 364
Булеан 21
- Вес конфигураций 241
— фигур 241
Весовая спецификация 241
Возрастание (убывание) перестановки 114, 286
- Гиперграф 12
Граф 12, 111
— двудольный 15
— корневой 194
— однородный 150
— плоский 150
— Пойа 170
— полный 150
— преобразования 182
— с помеченными вершинами 153
— связный 151
— Ферре 229
— частичный 151
— четный 156
Группа знакопеременная 52
— подстановок 47
— симметрическая 47
— степенная 202
Групповые проверочные процедуры 140
- Лекомпозиция матрицы 349
Декремент 52, 181
Денумерант 231
Дерево 111, 161
— корневое 111, 163
— остворное 162
— свободное 113
— с помеченными вершинами 111
Дзета-функция 72
Лихотомия 25
Дуга 15, 152
- Задача Андре 96
— об ожерельях 246
— о циклических последовательностях 75
— поиска 315
Законы де Моргана 9
- Инверсия 284
Инволюция 106, 178
Индекс покрытия 342
Индикатор 21
Инцидентные вершины 150
- Класс графов 1-го (2-го) рода 153, 154
— транзитивности 48
Комбинаторная схема 207
Коммутативный несимметричный n -базис 209
— симметричный n -базис 209
Компонента преобразования 182
— связности 151, 182
Конгруэнтные циклы 180
Конечная проективная плоскость 378
Контур 152, 183
Конфигурация 240
Коэффициент биномиальный 35
— полиномиальный 35
Коэффициенты Гаусса 120
Кронекерово произведение 372
- Латинский квадрат 82, 338, 374
— прямоугольник 82, 338
Латинское свойство матрицы 376
Лемма Бернсайда 201
Лес 162
Линия 342
— матрицы 263
- Матрица Адамара 370
— вполне неразложимая 341
— дважды стохастическая 346
— импримитивная 340
— инцидентности 23, 337, 362
— неортрицательная 335
— неразложимая 339
— h -неразложимая 360
— нормальная 368
— положительная 335
— почти разложимая 356
— примитивная 340
— разложимая 339
— смежности графа 150
— стохастическая 345
— теплицева 326
— частично разложимая 341
Место 240
Метод включения — исключения 62
Многочлен Аппеля 107
— Бернуlli 104
— Лежандра 109
— Мортана 136
Моноид 27
Мультиграф 153
Мультимножество 18
- Некоммутативный несимметричный n -базис 209
— симметричный n -базис 209
Неравенства Бонферрони 69
Неравенство Фишера 366
Нумератор 175, 211, 220, 226, 237
- Область транзитивности 201
Ожерелье 246
Орбита 48
— группы 201
— подстановки 171
Орграф 152

- Период вектора 75
 Перманент 317
 Петля 183
 Подграф 151
 Подстановка 47
 — противоречивая 81
 — четная (нечетная) 181
 Покрытие матрицы 342
 — минимальное 271
 — множества 9, 268
 Правило произведений 17
 — суммы 10
 Производящая функция 99, 100
 — Эйлера 123
 Путь 132, 182
- Разбиение множества 9, 128, 269
 — случайное 297
 — совершенное 233
 — сопряженное 230
 — упорядоченное 10
 — числа 24, 103
 Разделяющая система множеств 307
 — функций 312, 315
 Разложение Лапласа 321
 — перманента 321
 Размещение 226
 Расстояние Хэмминга 66
 Рекуррентное уравнение 89, 327
 Решетка матрицы 335
- Серия** 215
Сигнатура 25
 Системы инцидентности 362
 — образующих 170, 307, 309
 — представителей 209
 — троек 367
 — — Штейнера 367
 Слой дерева 161
 Спецификация первичная (вторичная), 18, 163
 Стабилизатор 201, 205
 Схема без возвращения 311
- Теорема Куртисса 280
 — Пойа 242
 — Фробениуса 340
 — Шпернера 11
 Точка сочленения 193
 Трансверсаль 337
 Транспозиция 48, 169
- Урновая схема 207
 Уровневое множество 312
 Усиленная независимость 155
- Фигура** 240
 Формальные тригонометрические функции 95
 Формальный степенной ряд 85
 Формула Бине — Коши 324
 — биномиальная 34
 — Гаусса 81
 — Добинского 45, 131, 238
- Формула обращения 38
 — полиномиальная 35
 — Райзера 328
 — Сильвестра 78
 — Стирлинга 133
 Функция Мёбиуса 72
 — Шура 318
 — Эйлера 80
- Характеристика 241
- Цепь 111, 151
 — простая 151
 Цикл 111, 151, 171
 — подстановки 48
 — простой 151
 Циклическая вершина 183
 — (v, k, λ) -конфигурация 369
 Циклический индекс 51
 — элемент 183
 Цикловый индикатор 172
 — класс 49
 Цикломатическое число 162
- Числа Белла 129, 238
 — Бернулли 97, 104
 — Галуа 121
 — Каталана 139
 — Лаха 147
 — Моргана 42
 — Стирлинга 43, 240
 — Фибоначчи 22, 326
 — Эйлера 98
- Эйлеров граф 157
 Энтропия 314
- A*-подстановка 177
A-преобразование 184
AB-преобразование 189
E-подстановка 95
G-эквивалентность 202
GH-эквивалентность 202
H-эквивалентность 203
O-перестановка 95
m-выборка 209, 225, 235
m-ка 16
m-мультимножество 18
m-последовательность 16
m-размещение 17
 — — с повторением 17
m-сочетание 11, 210
 — — с повторением 18
n-базис 209
n-множество 8
n-перестановка 18
 (n, m) -граф 153
q-биномиальная формула 127
q-ичное разложение 34
l-схема 373
 (v, k, λ) -конфигурация 367
 (v, k, λ) -разностное множество 369
L-граф 154
L-подстановка 176
 $0,1$ -матрица 266