**Лабораторная работа № 3**
**Реализация метода Зейделя для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона**

Выполнил(а): Мишин Роман

Группа: 382003_3 Вариант № 9 (кроме 2 и 5)

Постановка тестовой задачи

$\Delta u(x, y) = 6x + 2$

при $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$;

$u(0, y) = y^2 + 3$ $\qquad$ $u(1, y) = y^2 + 4$,

$u(x, 0) = x^3 + 3$ $\qquad$ $u(x, 1) = x^3 + 4$.

$u(x, y) = x^3 + y^2 + 3$

1. Начальное приближение: $[u_{x\bar{x}}]_{ij} + [u_{y\bar{y}}]_{ij} = -f_{ij}$
2. Постройте разностную схему для численного решения дифференциального уравнения, запишите ее в матричной форме.
3. Запишите метод в матричной и покомпонентной формах, а также все выкладки расчета первой итерации метода.
4. Результаты тестирования на сетке небольшого размера $n = 3$, $m = 3$ запишите в приложении 1.
5. В приложении 2 приведите тест, показывающий наличие второго порядка сходимости в задаче.
6. В приложении 3 приведите код вашей программы.

Приложение 1.

Основные результаты тестирования должны быть показаны в таблицах 1-4.

В таблице №1 запишите точное решение тестовой задачи.

В таблице №2 запишите результат первой итерации метода, посчитанной вручную.

В таблице №3 приведите результат первой итерации метода, посчитанной вашей программой.

В таблице №4 запишите результат работы метода после многих итераций (напр., при $\varepsilon_1 = 10^{-12}$).

Таблица №1

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | 4 | | | 5 | 5 |
| $y_3$ | 4 | 4,037037 | 4,296296 | 5 | |
| $y_2$ | 3,4444 | 3,48148 | 3,74074 | 4,4444 | |
| $y_1$ | 3,1111 | 3,1481148 | 3,407407 | 4,1111 | |
| $y_0$ | 3 | 3,03704 | 3,296296 | 4 | 4 |

Таблица №2

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | | | | | |
| $y_3$ | 4 | 4,037037 | 4,296296 | 5 | |
| $y_2$ | 3,444 | 2,11574 | 3,0578704 | 4,4444 | |
| $y_1$ | 3,1111 | 1,4259 | 2,04166 | 4,1111 | |
| $y_0$ | 3 | 3,03704 | 3,296296 | 4 | |

Таблица №3

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | | | | | |
| $y_3$ | 4 | 4,037034 | 4,296296 | 5 | |
| $y_2$ | 3,444 | 2,11574 | 3,0578704 | 4,4444 | |
| $y_1$ | 3,1111 | 1,4259 | 2,04166 | 4,1111 | |
| $y_0$ | 3 | 3,03704 | 3,296296 | 4 | |

Таблица №4

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | | | | | |
| $y_3$ | 4 | 4,037037 | 4,296296 | 5 | |
| $y_2$ | 3,4444 | 3,481481 | 3,74074 | 4,4444 | |
| $y_1$ | 3,11111 | 3,148148 | 3,407407 | 4,11111 | |
| $y_0$ | 3 | 3,037037 | 3,296296 | 4 | |

Приложение 2.

Анализ порядка сходимости для тестовой задачи

| $n \times m$ | $max\lvert U-V\rvert$ |
| --- | --- |
| 32 × 32 | 5.15E-07 при $\lvert\psi\rvert$ = 1.02E-05 |
| 64×64 | $5.38 \cdot 10^{-7}$ при $\lvert\psi\rvert = 1.06 \cdot 10^{-5}$ |
| 128×128 | $5.[illegible]2 \cdot 10^{-7}$ при $\lvert\psi\rvert = 1.02 \cdot 10^{-5}$ |
| *Порядок сходимости* | разностная схема точно аппроксимирует задачу. |

| .. | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|

$u(x,y) = x^3 + y^2 + 3$

$\Delta u(x,y) = 6x + 2$

$u(0,y) = 2$ ; $u(1,y) = 8$

$u(x,0) = 6x+2$ , $u(x,1) = 6x+2$.

~~u(~~ Построим сетку для решения задачи:

$x_i = ih \quad i = \overline{0,3} \quad h = \frac{1}{3}$

$y_j = jk \quad j = \overline{0,3} \quad k = \frac{1}{3} \qquad u_{ij} = u(x_i; y_j)$

$\forall\, i,j = \overline{0,3}$

Построим разностную схему:

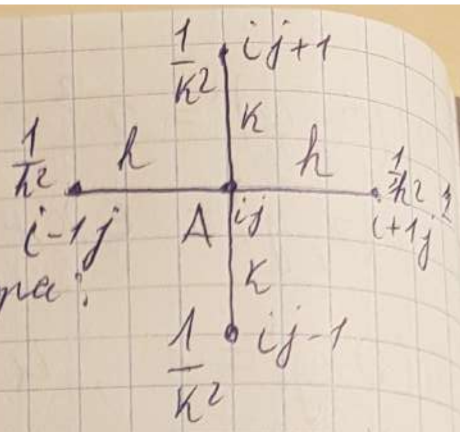
$$\begin{cases} [u_{x\bar{x}}]_{ij} + [u_{y\bar{y}}]_{ij} = -f_{ij} & \cancel{\forall\, i,j \in \{1,2\}} \ \forall\, i,j \in G \\ v_{ij} = \mu_{ij} & \forall\, i,j \in \bar{G} \end{cases}$$

где $G = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2)\}$

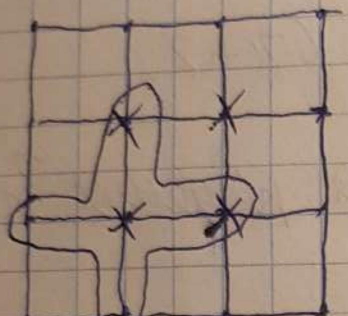
$\bar{G} = \{0,1,2,3\}^2 - G$

$$f_{ij} = 6x_i + 2; \quad \mu_{ij} = \begin{cases} 6x_i + 2, & j = 0 \text{ или } j = 3 \\ 2, & i = 0 \\ 8, & i = 3 \end{cases}$$

$$A = -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)$$




Шаблон оператора „крест"



x - 6 - внутренние точки, где применяется шаблон, и которые нужно найти в процессе ~~счета~~ решения схемы, в остальных точках значение известно. Распишем подробнее уравнения в ~~сл~~ СЛАУ

$$\begin{cases} A\vartheta_{11} + \dfrac{\vartheta_{21}}{h^2} + \dfrac{\vartheta_{12}}{k^2} = -f_{11} - \dfrac{\mu_{01}}{h^2} - \dfrac{\mu_{10}}{k^2} \\ \dfrac{\vartheta_{11}}{h^2} + A\vartheta_{21} + \dfrac{\vartheta_{22}}{k^2} = -f_{21} - \dfrac{\mu_{20}}{k^2} - \dfrac{\mu_{31}}{h^2} \\ \dfrac{\vartheta_{11}}{k^2} + \cancel{\dfrac{\vartheta_{12}}{h^2}} A\vartheta_{12} + \dfrac{\vartheta_{22}}{h^2} = -f_{12} - \dfrac{\mu_{02}}{h^2} - \dfrac{\mu_{13}}{k^2} \\ \dfrac{\vartheta_{12}}{h^2} + A\vartheta_{22} + \dfrac{\vartheta_{21}}{k^2} = -f_{22} - \dfrac{\mu_{23}}{k^2} - \dfrac{\mu_{32}}{h^2} \end{cases}$$

~~$\exists V = (v_{11}\ V_1$~~

$\exists V = (v_{11}, v_{21}, v_{12}, v_{22})$

Запишем вектор F поставляя известные значения

$F_1 = 4 - \overset{3,(1)}{\cancel{2}} \cdot 9 - \overset{3(037)}{\cancel{4}} \cdot 9 = \cancel{-58}\ -55,(3)+4 = -51,(3)$

$F_2 = 6 - \overset{3,(296)}{\cancel{8}} \cdot 9 - \overset{4,(1)}{\cancel{8}} \cdot 9 = \cancel{-132}\ -60,(6)$

$F_3 = 4 - \overset{3,(4)}{\cancel{2}} \cdot 9 - \overset{4,(037)}{\cancel{4}} \cdot 9 = \cancel{-58}\ -63,(3)$

$F_4 = 6 - \overset{4,(296)}{\cancel{8}} \cdot 9 - \overset{4,(4)}{\cancel{8}} \cdot 9 = \cancel{-132}\ -72,(6)$

$F = (\overset{-51,(3)}{\cancel{-58}}, \overset{-60,(6)}{\cancel{-132}}, \overset{-63,(3)}{\cancel{-58}}, \overset{-72,(6)}{\cancel{-132}})$

Запишем СЛАУ в матричном виде:

$AV = F$

$$\begin{pmatrix} A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 \\ \frac{1}{h^2} & A & 0 & \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} -58 \\ -132 \\ -58 \\ -132 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -51,(3) \\ -60,(6) \\ -63,(3) \\ -72,(6) \end{pmatrix}$$

Для нахождения решения системы применим Метод Зейделя:

Описание Метода Зейделя:

] Дана СЛАУ: $Ax = b$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$,

$\det A \neq 0$

Метод Зейделя для заданой СЛАУ строит последовательность векторов $x^{(S)}$ которая сходится к точному решению $x^*$. ($\lim\limits_{S\to\infty} \| x^{(S)} - x^* \| = 0$)

Запишем СЛАУ ввиде уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n-11}x_1 + a_{n-12}x_2 + \dots + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Метод Зейделя для данной СЛАУ:

$$x_i^{(s+1)} = -\frac{\left(a_{i1}x_1^{(s+1)} + a_{i2}x_2^{(s+1)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(s+1)} + a_{ii+1}x_{i+1}^{(s)} + \dots + a_{in}x_n^{(s)} - b_i\right)}{a_{ii}}$$

$\forall i = \overline{1,n}$

В матричной форме:

$\exists\ A = L + D + R$, где $L$ - нижнедиаг.

$D$ - диагональная

$R$ - верхнедиагональная

Тогда:

$$(L+D)X^{(s+1)} = -RX^{(s)} - b$$

Проведём первую итерацию метода вручную для нашей системы:

$\exists\ V^{(0)} = (0;\ 0;\ 0;\ 0)$, $A = -36$

$$v_{11}^{(1)} = \frac{-58}{-36} = \frac{29}{18} = 1{,}6(1)$$

$$v_{21}^{(1)} = -\frac{\left(\frac{29}{18}\cdot 9 + 132\right)}{-36} = \frac{\frac{29}{2} + 132}{36} \approx 4{,}069(4)$$

$$\vartheta_{11}^{(1)} = \frac{-F_1}{-A} = \frac{51,(3)}{36} = 1,4259(259)$$

$$\vartheta_{21}^{(1)} = \frac{\frac{\vartheta_{11}^{(1)}}{h^2} - F_2}{-A} = \frac{1,4(259)\cdot 9 + 62,(6)}{36} = 2,041(6)$$

$$\vartheta_{12}^{(1)} = \frac{\frac{\vartheta_{11}^{(1)}}{h^2} - F_3}{-A} = \frac{1,4(259)\cdot 9 + 63,(3)}{36} = 2,1157407$$

$$\vartheta_{22}^{(1)} = \frac{\frac{\vartheta_{12}}{h^2} + \frac{\vartheta_{21}^{(1)}}{h^2} - F_4}{-A} = \frac{2,1157407\cdot 9 + 2,041(6)\cdot 9 + 72,(6)}{36} =$$

$$= 3,05787$$