

Дискретная математика

Глава 1. Множества и отображения

А. В. Пастор

05.09.2023

Дополнительные материалы по теории множеств

1. В. Серпинский, *О теории множеств*. М.: Просвещение, 1966.
2. Н. Я. Виленкин, *Рассказы о множествах*. М.: МЦНМО, 2005.
3. Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*. М.: Мир, 1973.
(Для тех, кто интересуется аксиоматикой теории множеств.
Я бы не рекомендовал читать эту книгу на первом курсе,
но если кому-то интересно, можете попробовать...)

Слайды по дискретной математике будут публиковаться по адресу
<https://logic.pdmi.ras.ru/~pastor/ITMO/2023-24/>

- Неформально, **множество** — это произвольная совокупность объектов.
 - ▶ Объекты, из которых состоит множество, называются **элементами**.
 - ▶ Элементами множества могут быть любые рассматриваемые в математике объекты: числа, точки, фигуры, а также другие множества.
 - ▶ Принадлежность элемента x множеству Y обозначается $x \in Y$.
 - ▶ Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается \emptyset .
- Можно дать математически строгое определение понятия множества, задав его аксиоматически. Но это сложно и находится за рамками данного курса.
 - ▶ Формально, элементами множества тоже являются множества.
 - ▶ Другие объекты нужно кодировать при помощи тех или иных множеств.

Задание множеств

- **Перечисление элементов:** элементы множества перечисляются через запятую в фигурных скобках.
 - ▶ Этот способ подходит для конечных множеств.

Пример

$$Y = \{1, 3, 7, 19, 2021\}.$$

- **Задание подмножества при помощи условия:**

$Y = \{x \in X \mid \text{условие на } x\}$ — множество, состоящие из всех элементов X , удовлетворяющих данному условию.

Пример

$$Y = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \div 2\} \text{ — множество всех четных чисел.}$$

- ▶ Если все элементы множества Y принадлежат множеству X , то Y называется **подмножеством** множества X . Обозначение: $Y \subset X$.
 - $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X .
- ▶ Можно также писать $Y = \{x \mid \text{условие на } x\}$, но это **не обязательно множество!**
 - Такие совокупности множеств называют **классами**.

Проблемы и парадоксы теории множеств

- Попытки задать понятие множества неформально приводят к ряду вопросов, на которые трудно дать ответ.

1. Может ли множество являться своим элементом?

То есть, может ли хоть для какого-нибудь множества x быть верно утверждение $x \in x$?

2. Парадокс Б. Рассела (1901). Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$ (т. е. Y состоит из всех множеств, которые не являются собственными элементами).

- Вопрос: верно ли, что $Y \in Y$?
- При любом ответе на этот вопрос возникает противоречие!

- В формальной теории множеств соотношение $x \in x$ запрещено (аксиома регулярности).
- Класс Y , определенный в парадоксе Рассела, множеством не является.
- Также не является множеством класс всех множеств.

Операции над множествами

- Основные операции. Пусть A, B — множества.

- ▶ $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$ — *пересечение*;

- ▶ $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (x \in A \vee x \in B)\}$ — *объединение*;
– *это всегда множество!*

- ▶ $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$ — *разность*;

- ▶ $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ — *симметрическая разность*.

- Дополнение множества. Пусть U — *универсум* (или *объемлющее множество*), т. е. множество, которое содержит все рассматриваемые множества. Тогда

- ▶ $\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U \mid x \notin A\}$
– *результат этой операции зависит от выбора U !*

- Упорядоченные пары.

- ▶ $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$ — *упорядоченная пара*
элементов (множеств) x и y .

- Очевидно, что $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Декартово произведение множеств

- ▶ $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid (x \in A \ \& \ y \in B)\}$ — *декартово произведение* (или *прямое произведение*) множеств A и B .
- Аналогично понятию упорядоченной пары можно ввести понятия *упорядоченной тройки*, *упорядоченной четверки*, ..., *упорядоченной n -ки*.
 - ▶ Это можно сделать по индукции: $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$.
- Понятие декартова произведения также можно обобщить на случай n множеств.
 - ▶ $A_1 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1 \in A_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_n \in A_n)\}$.
 - ▶ Если A — множество и $n \in \mathbb{N}$, то
$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times \dots \times A}_n$$
 - Здесь мы формально считаем, что $A^1 = A$.

Определение

- **Бинарным отношением** между множествами X и Y называется произвольное подмножество их декартового произведения $R \subset X \times Y$.
- Если $X = Y$, то R — бинарное отношение на X .
- Пара (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$, **удовлетворяет** отношению R , если $(x, y) \in R$. Обозначение: xRy .

Замечание

- Фактически, бинарное отношение — это свойство, которое для каждой пары (x, y) может либо выполняться, либо не выполняться (**R — это множество тех пар, для которых данное свойство выполнено**).
- Бинарное отношение R на множестве X можно рассматривать как орграф: элементы множества будут его вершинами, а стрелка из x в y проводится тогда и только тогда, когда выполнено xRy .

Бинарные и n -арные отношения

Аналогично можно ввести понятие отношения между n множествами, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение

- **n -местным** (или **n -арным**) отношением между множествами X_1, \dots, X_n называется произвольное подмножество $R \subset X_1 \times \dots \times X_n$.
- Если $X_1 = \dots = X_n = X$, то R — **n -местное отношение** на множестве X .

Примеры

1. **Равенство** ($a = b$) — бинарное отношение на \mathbb{R} ;
2. **делимость** ($a \vdots b$) — бинарное отношение на \mathbb{Z} ;
3. пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда
 - **смежность** — бинарное отношение на V ,
 - **инцидентность** — бинарное отношение между V и E ;
4. **точки A, B, C лежат на одной прямой** — трехместное отношение на плоскости.

Свойства отношений

Определение

Бинарное отношение $R \subset X^2$ называется

- *рефлексивным*, если xRx выполнено для всех $x \in X$;
- *иррефлексивным* (*антирефлексивным*), если xRx не выполнено ни для каких $x \in X$;
- *симметричным*, если из xRy следует yRx ;
- *антисимметричным*, если из xRy и yRx следует, $x = y$;
- *транзитивным*, если из xRy и yRz следует xRz .

Определение

Бинарное отношение \sim на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Замечание

Отношение эквивалентности разбивает множество на *классы эквивалентности* так, что любые два элемента из одного класса эквивалентны, а любые два элемента из разных классов — нет.

Определение

- Бинарное отношение \prec на множестве X называется *отношением частичного порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.
- Если при этом отношение \prec иррефлексивно, то оно называется *отношением строгого частичного порядка*.
- А если оно рефлексивно — то *отношением нестрогого частичного порядка*.
 - ▶ Как правило, для отношения строгого частичного порядка используется знак \prec или \succ , а для нестрогого — знак \preceq или \succeq .
- Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется *частично упорядоченным*.
 - ▶ Формально, частично упорядоченное множество — это упорядоченная пара (X, \prec) , где X — множество и \prec — отношение частичного порядка на X .
 - ▶ В частично упорядоченном множестве некоторые пары элементов могут быть *несравнимы*. То есть могут существовать такие $a, b \in X$, что ни одно из утверждений $a = b$, $a \prec b$, $b \prec a$ не выполнено.

Определение

- Бинарное отношение \prec на множестве X называется *отношением (строгого) линейного порядка*, если оно является отношением частичного порядка и для любых $a, b \in X$ выполнено ровно одно из следующих трех утверждений: $a = b$, $a \prec b$ или $b \prec a$.
- В этом случае, пара (X, \prec) называется *линейно упорядоченным множеством*.

Примеры

1. $a < b$ — отношение линейного порядка на \mathbb{R} ;
2. $a \leq b$ — отношение частичного порядка на \mathbb{N} .
3. Пусть X — множество.
Тогда $A \subset B$ — отношение частичного порядка на $\mathcal{P}(X)$.

Отображения и функции

- Неформально, *отображение* (*функция*) из множества X в множество Y — это такое правило f , которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие ровно один элемент $y \in Y$. Этот элемент обозначается $f(x)$.
- Формально понятие отображения можно определить в терминах отношений.

Определение

- Бинарное отношение $f \subset X \times Y$ называется *отображением* из множества X в множество Y , если любой элемент $x \in X$ входит в качестве первого элемента ровно в одну пару $(x, y) \in f$.
- Обозначение: $f: X \rightarrow Y$.
- Вторым элементом пары (x, y) обозначают $f(x)$ и называют *образом* элемента x при отображении f .
- Если $y = f(x)$, то x называют *прообразом* элемента y .
- В отличие от образа, прообраз элемента существует не всегда; также прообраз может быть не единственным.

Определение

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется

- **инъекцией**, если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$;
- **сюръекцией**, если у каждого элемента множества Y есть хотя бы один прообраз в множестве X ;
- **биекцией**, если f одновременно является инъекцией и сюръекцией.

Замечание

- Биекция — это **взаимно однозначное соответствие** между множествами X и Y : каждому элементу множества X поставлен в соответствие единственный элемент множества Y , а каждому элементу множества Y — единственный элемент множества X .
- В частности, если X и Y — конечные множества и существует биекция $f: X \rightarrow Y$, то в множествах X и Y одинаковое число элементов.

Определение

Композицией отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ называется отображение $g \circ f: X \rightarrow Z$, задаваемое формулой $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Определение

- Отображение $g: Y \rightarrow X$ называется *обратным* к отображению $f: X \rightarrow Y$, если обе композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ являются тождественными отображениями.
- Т. е. $g(f(x)) = x$, при всех $x \in X$, и $f(g(y)) = y$, при всех $y \in Y$.
- Отображение f называется *обратимым*, если к нему есть обратное.
- Отображение, обратное к f , обычно обозначается f^{-1} .

Теорема

Отображение $f: X \rightarrow Y$ обратимо $\iff f$ — биекция.

Доказательство.

“ \Leftarrow ”: Для каждого $y \in Y$ обозначим через $f^{-1}(y)$ единственный прообраз элемента y .

- Тогда $f^{-1}: Y \rightarrow X$ — отображение, обратное к f .

“ \Rightarrow ”: Пусть f^{-1} — отображение, обратное к f .

- f — **инъекция**, поскольку если $f(x) = f(y)$, то $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y$.

- f — **сюръекция**, поскольку для любого $y \in Y$ имеем $y = f(f^{-1}(y))$. □

Конечные множества: немного комбинаторики

- Пусть X — конечное множество. Количество его элементов будем обозначать через $|X|$.
- Мы уже знаем, что $|X| = |Y|$ тогда и только тогда, когда между X и Y можно установить биекцию.

Лемма (принцип произведения)

Если $|X| = m$ и $|Y| = n$, то $|X \times Y| = mn$.

Доказательство. Каждый из m элементов множества X входит ровно в n пар с элементами множества Y . □

Следствие

Если $|X_i| = m_i$, где $i \in [1..k]$, то $|X_1 \times \dots \times X_k| = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$.

Доказательство. Индукция по k .

База ($k = 2$): см. предыдущую лемму.

Переход ($k \rightarrow k + 1$): $|X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}| = |(X_1 \times \dots \times X_k) \times X_{k+1}| =$
 $= |X_1 \times \dots \times X_k| \cdot |X_{k+1}| = (m_1 \cdot \dots \cdot m_k) \cdot m_{k+1} = m_1 \cdot \dots \cdot m_k \cdot m_{k+1}.$ □

Конечные множества: количество подмножеств

Теорема

Если $|X| = m$, то $|\mathcal{P}(X)| = 2^m$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$.

- Для каждого из $i \in [1..m]$ есть два варианта: x_i можно либо включить в подмножество, либо не включать.
- Итого, есть 2^m способов выбрать подмножество. □

Замечание

- Фактически, мы построили следующую биекцию между множествами $\mathcal{P}(X)$ и $\{0, 1\}^m$.

- ▶ Подмножеству $A \subset X$ ставится в соответствие последовательность $(a_1, \dots, a_m) \in \{0, 1\}^m$, где

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in A \\ 0, & \text{если } x_i \notin A. \end{cases}$$

Теорема

Пусть $|X| = k$ и $|Y| = n$. Тогда

1. число отображений из X в Y равно n^k ;
2. число инъекций из X в Y равно $n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_k\}$.

1. Для каждого элемента $x_i \in X$ можно n способами выбрать его образ.
2. Образ x_1 можно выбрать n способами. После этого останется $n-1$ способ выбрать образ x_2 , \dots , $n-k+1$ способ выбрать образ x_k . □

Замечание

При $n \geq k$ имеем $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$,
где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (и $0! = 1$).

Вопрос. А чему равно число сюръекций из X в Y ?

Об этом мы поговорим позже...

Конечные множества: перестановки и размещения

Определение

Перестановкой на множестве X называется произвольная биекция $\sigma: X \rightarrow X$.

Следствие

Если $|X| = n$, то число перестановок на множестве X равно $n!$.

Определение

1. Число инъекций $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ называется *числом размещений из n элементов по k* и обозначается A_n^k .
2. Число отображений $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ называется *числом размещений с повторениями из n элементов по k* и обозначается \tilde{A}_n^k .

Итого, мы доказали следующие формулы.

1. $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$, при $n \geq k$;
2. $\tilde{A}_n^k = n^k$.

Определение

Множество X называется **счётным**, если существует биекция $f: X \rightarrow \mathbb{N}$.

Замечание

- Это означает, что элементы множества X можно **занумеровать натуральными числами**: для элемента $a \in X$ число $f(a)$ будет его номером.
- Элементы счётного множества можно записать в виде последовательности: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, где $x_k = f^{-1}(k)$.

Примеры

- $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — множество всех чётных чисел.

Доказательство. $f(x) = x/2$ — биекция из $2\mathbb{N}$ в \mathbb{N} . □

- \mathbb{Z} — множество всех целых чисел.

Доказательство.

$f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 1 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ — биекция из \mathbb{Z} в \mathbb{N} . □

Счётность произведения

Теорема

Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ — счётно.

Доказательство.

Функция $f(x, y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + y$ — биекция из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в \mathbb{N} . □

Замечание

- Эта функция перечисляет клетки бесконечной таблицы “по диагоналям”.
- Другой пример биекции из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в \mathbb{N} : $g(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$.

Следствие

Пусть X_1, \dots, X_n — счётные множества.

Тогда множество $X_1 \times \dots \times X_n$ — также счётно.

Доказательство. Рассмотрим биекции $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{N}$ (где $i \in [1..n]$) и $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

База ($n = 2$): отображение $h_2: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{N}$, задаваемое формулой

$$h_2(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} g(f_1(x_1), f_2(x_2)),$$

является биекцией.

Счётные множества: примеры и свойства

Переход $(n - 1 \rightarrow n)$:

- Множество $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ счётно по индукционному предположению.
- Множество X_n счётно по условию.
- Тогда множество $X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ является декартовым произведением двух счётных множеств.
- По доказанному в базе, оно счётно. □

Теорема

Бесконечное подмножество счётного множества — счётно.

Доказательство.

Пусть X — счётное множество и $A \subset X$ — его бесконечное подмножество.

- Рассмотрим биекцию $f: X \rightarrow \mathbb{N}$.
- Тогда $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\{a \in A \mid f(a) \leq f(x)\}|$ — биекция из A в \mathbb{N} . □

Не более чем счётные множества

Определение

- Множество X — *не более чем счётно*, если X либо конечно, либо счётно.
- Множество X — *несчётно*, если X не является ни конечным, ни счётным.

Теорема

Пусть $X \neq \emptyset$. Тогда следующие условия равносильны:

1. множество X не более чем счётно;
2. существует инъекция $f: X \rightarrow \mathbb{N}$;
3. существует сюръекция $g: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Доказательство.

“1. \Rightarrow 3.”: Пусть множество X не более чем счётно.

- Если X бесконечно, то оно счётно.
 - ▶ Тогда существует биекция $f: X \rightarrow \mathbb{N}$.
 - ▶ Следовательно, $f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow X$ — сюръекция.

Не более чем счётные множества

- Если X конечно, то обозначим $|X| = n$.
 - ▶ Тогда существует биекция $f: X \rightarrow [1..n]$.
 - ▶ Пусть $g(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f^{-1}(y), & y \leq n \\ f^{-1}(n), & y > n. \end{cases}$
 - ▶ Легко видеть, что $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ — сюръекция.

“3. \Rightarrow 2.”: Пусть $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ — сюръекция.

- Тогда у каждого элемента $x \in X$ есть хотя бы один прообраз.
- Выберем из всех прообразов x наименьший.
- То есть положим $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(y) = x\}$.
- Легко видеть, что $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ — инъекция.

“2. \Rightarrow 1.”: Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ — инъекция.

- Рассмотрим множество $f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in X\}$.
- Тогда $f: X \rightarrow f(X)$ — биекция.
- Поскольку $f(X) \subset \mathbb{N}$, множество $f(X)$ не более чем счётно.
- Если $f(X)$ — конечно, то и X — конечно.
- Если $f(X)$ — счётно, то и X — счётно.



Не более, чем счётные множества

Следствие 1

Если $f: X \rightarrow Y$ — инъекция и множество Y — счётно, то множество X — не более чем счётно.

Доказательство.

- Пусть $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$ — биекция.
- Тогда $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{N}$ — инъекция.



Следствие 2

Если $g: Y \rightarrow X$ — сюръекция и множество Y — счётно, то множество X — не более чем счётно.

Доказательство.

- Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$ — биекция.
- Тогда $g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow X$ — сюръекция.



Счётность множества рациональных чисел

Теорема

Множество \mathbb{Q} всех рациональных чисел — счётно.

Доказательство. Рассмотрим отображение $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, задаваемое формулой $g(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{b}$.

- Очевидно, что g — сюръекция.
- Следовательно, \mathbb{Q} — не более, чем счётно.
- Но при этом множество \mathbb{Q} — бесконечно.
- Таким образом, \mathbb{Q} — счётно. □

Теорема

Объединение не более, чем счётного множества не более, чем счётных множеств — не более чем счётно.

Замечание

То есть, если нам дана конечная или бесконечная последовательность множеств A_1, A_2, \dots , каждое из которых не более чем счётно, то множество $B = \bigcup_i A_i$ также не более чем счётно.

Объединение не более чем счётных множеств

Доказательство. Пусть $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{N}$ — инъекции.

- Для каждого $x \in B$ пусть $s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\}$.
- Рассмотрим отображение $h: B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, задаваемое формулой $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} (s(x), f_{s(x)}(x))$.
- Очевидно, что h — инъекция.
- Следовательно, B — не более, чем счётно. □

Замечание

В частности, объединение любого конечного или счётного набора счётных множеств всегда счётно.

Определение

- вещественное число α называется **алгебраическим**, если α — корень ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами.
- В противном случае, число α называется **трансцендентным**.

Теорема

Множество всех алгебраических чисел счётно. (Задача.)

Пример несчётного множества

Теорема

Множество $[0, 1)$ несчётно.

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1)$ — биекция.

- Тогда $[0, 1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, где $\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} f(i)$.
- Запишем все α_i в виде бесконечных десятичных дробей: $\alpha_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{ij}}{10^j}$,

где $a_{ij} \in [0..9]$.

- Рассмотрим число $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{10^i}$, где $b_i = \begin{cases} 4, & a_{ii} = 7 \\ 7, & a_{ii} \neq 7 \end{cases}$.
- Тогда $\beta \in [0, 1)$, но при этом β не совпадает ни с одним из α_i (десятичные записи чисел β и α_i отличаются в i -м разряде). Противоречие. \square

Следствие

Существуют **трансцендентные** числа (т. е. вещественные числа, не являющиеся алгебраическими).

Определение

Множества X и Y называются **равномощными** (или **эквивалентными**), если существует биекция $f: X \rightarrow Y$. Обозначение: $X \sim Y$.

Замечание

- Легко видеть, что равномощность обладает всеми свойствами эквивалентности:

1. $X \sim X$ (рефлексивность);
2. если $X \sim Y$, то $Y \sim X$ (симметричность);
3. если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).

- Тем самым, все множества можно разбить на классы равномощных.
- Каждому классу ставится в соответствие некоторая специальная характеристика, называемая **мощностью** множеств этого класса.

- Конечные множества равномощны если и только если они содержат поровну элементов.
 - ▶ **Мощностью** конечного множества называется число его элементов.
- Все счётные множества равномощны.
 - ▶ **Мощность** счётного множества обозначается через \aleph .
- Множество X имеет **мощность континуума**, если $X \sim [0, 1]$.
 - ▶ Мощность континуума обозначается через \mathfrak{c} .
- Есть разные варианты обозначений для мощности множества X :
 - ▶ $|X|$; $\#X$; $\overline{\overline{X}}$; $\text{card}(X)$.
 - ▶ $\overline{\overline{X}}$ — “двойное отвлечение” (от свойств элементов и от их порядка).
- Мы будем использовать обозначение $|X|$.

Счётное подмножество бесконечного множества

Теорема

В любом бесконечном множестве есть счётное подмножество.

Доказательство. Пусть $X = X_0$ — бесконечное множество.

- Будем последовательно выбирать из X_0 элементы счётного подмножества A .
- Пусть $a_1 \in X_0$ и $X_1 \stackrel{\text{def}}{=} X_0 \setminus \{a_1\}$.
 - ▶ Множество X_1 бесконечно, т. к. иначе $X = X_1 \cup \{a_1\}$ было бы конечно.
- На k -м шаге из бесконечного множества $X_{k-1} \subset X$ выбираем элемент a_k и полагаем $X_k \stackrel{\text{def}}{=} X_{k-1} \setminus \{a_k\}$.
 - ▶ Аналогично предыдущему, множество X_k бесконечно.
- Продолжая этот процесс, получим последовательность (a_i) элементов множества X .
- Тогда, множество $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, составленное из членов построенной последовательности, будет счётным подмножеством X . □

- В предыдущей теореме мы строили бесконечную последовательность непустых множеств и из каждого из них выбирали по элементу.
- На самом деле, нам нужно *одновременно* сделать такой выбор для всех рассматриваемых множеств.
- То, что можно одновременно выбрать по элементу из бесконечного набора непустых множеств *не является очевидным*.
- Формально, это свойство называется **аксиомой выбора**.
- **Аксиома выбора**. Пусть S — множество непустых множеств, $\cup S$ — объединение всех входящих в S множеств. Тогда существует функция $f: S \rightarrow \cup S$, такая, что $f(x) \in x$ для каждого $x \in S$.
- Фактически, мы уже использовали аксиому выбора в теореме о счётном объединении счётных множеств.
- Эти две теоремы (равно как и многие другие) невозможно доказать без аксиомы выбора.

Следствия теоремы о счётном подмножестве

Следствие 1

Если X бесконечно и Y не более чем счётно, то $X \cup Y \sim X$.

Доказательство. Пусть $B \subset X$ — счётное множество;

- $A = X \setminus B$ и $C = Y \setminus X$.
- Тогда $X = A \cup B$ и $X \cup Y = A \cup B \cup C$;
- при этом $A \cap B = A \cap C = \emptyset$,
- множество C не более чем счётно и $B \cup C$ счётно.
- Рассмотрим биекцию $f: B \rightarrow B \cup C$.
- Тогда отображение $g: X \rightarrow X \cup Y$, задаваемое формулой

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in B \\ x, & x \in A \end{cases} \quad \text{— биекция.}$$

□

Следствие 2

Если X несчётно и Y не более чем счётно, то $X \setminus Y \sim X$.

Доказательство. Заметим, что $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$;

- множество $X \setminus Y$ бесконечно и $X \cap Y$ — не более чем счётно.

□

О мощности континуума

Утверждение

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Тогда множества $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ и (a, b) имеют мощность континуума.

Доказательство.

- Функция $f(x) = (b - a)x + a$ задает биекцию $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$.
- Множества $[a, b)$, $(a, b]$ и (a, b) равномощны $[a, b]$, поскольку получаются удалением конечного числа элементов. □

Утверждение

Множество \mathbb{R} имеет мощность континуума.

Доказательство.

Функция $\operatorname{tg} x$ задает биекцию из $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на \mathbb{R} . □

Определение

Мощность множества X *больше* мощности множества Y , если эти множества неравномощны и в X есть подмножество, равномощное Y .
Обозначение: $|X| > |Y|$.

Теорема (Г. Кантор, Ф. Бернштейн)

Если существуют подмножества $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$, такие, что $X_0 \sim Y$ и $Y_0 \sim X$, то $X \sim Y$. (б/д)

- Тем самым, утверждения $|X| > |Y|$ и $|Y| > |X|$ не могут быть выполнены одновременно. То есть сравнение мощностей корректно.
- При помощи аксиомы выбора можно доказать, что любые две мощности сравнимы. То есть для любых X и Y выполнено ровно одно из следующих трех утверждений: либо $|X| > |Y|$, либо $|Y| > |X|$, либо $X \sim Y$.

- Мощность конечного множества тем больше, чем больше в нем элементов.
- Мощность счётного множества больше мощности любого конечного множества.
- Обратно, если $|X| < \aleph$, то X конечно.
- Мощность континуума больше мощности счетного множества.
- **Континуум-гипотеза.** *Не существует такого множества X , что $\aleph < |X| < \mathfrak{c}$.*
- К. Гёдель и П. Коэн доказали, что континуум-гипотезу невозможно ни доказать ни опровергнуть в рамках формальной теории множеств.

Мощность множества всех подмножеств

Теорема (Г. Кантор)

Для любого множества X выполнено $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.

Доказательство. Пусть $Y = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

- Очевидно, что $Y \sim X$ и $Y \subset \mathcal{P}(X)$.
- Пусть $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ — биекция.
- Рассмотрим множество $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.
- Пусть $z \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(Z)$. Верно ли, что $z \in Z$?
 - ▶ Если $z \in Z$, то $z \in f(z)$, откуда $z \notin Z$;
 - ▶ если $z \notin Z$, то $z \notin f(z)$, откуда $z \in Z$.
- В любом случае получаем противоречие. □

Замечание

- Из этой теоремы следует, что не существует множества наибольшей мощности. Следовательно, нет и множества всех множеств.
- Для конечных множеств это означает, что 2^n всегда больше n .