

Вопросы по курсу дискретной математики. 2024-25 г, 1 семестр

I. Множества и отображения

1. Основные понятия теории множеств: множество, элемент, подмножество. Основные операции над множествами.
2. Бинарные и n -арные отношения. Определения и примеры. Основные свойства отношений. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.
3. Понятие отображения. Образ и прообраз элемента. Инъекция, сюръекция и биекция. Композиция отображений. Обратное отображение. Критерий обратимости.
4. Число элементов декартова произведения двух и нескольких множеств. Количество подмножеств данного множества.
5. Число отображений из одного множества в другое. Число инъекций. Число перестановок данного множества. Размещения и размещения с повторениями.
6. Счётные множества. Определение и примеры. Счётность декартова произведения счётных множеств.
7. Теорема о бесконечном подмножестве счётного множества. Понятие не более чем счётного множества и их основные свойства.
8. Счётность множества рациональных чисел.
9. Теорема об объединении не более чем счётных множеств.
10. Пример несчётного множества. Существование трансцендентных чисел.
11. Понятие мощности множества. Теорема о счётном подмножестве бесконечного множества.
12. Формулировка аксиомы выбора. Примеры теорем, которые невозможно доказать без использования этой аксиомы.
13. Следствия об объединении и разности бесконечного множества и счётного множества. Примеры множеств мощности континуума.
14. Сравнение мощностей. Определение, теорема Кантора-Бернштейна (формулировка), континуум-гипотеза. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.

II. Основы математической логики

15. Булевы функции. Определение, задание таблицей истинности, количество булевых функций от n переменных. Примеры булевых функций от 1 и 2 переменных.
16. Формулы исчисления высказываний. Связь с булевыми функциями. Эквивалентность формул, примеры. Тавтологии, выполнимые формулы и противоречия.
17. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. СКНФ и СДНФ. Существование и единственность представления булевой функции в виде СКНФ и СДНФ. Полные системы булевых функций.
18. Алгоритм приведения булевой функции к СКНФ и СДНФ эквивалентными заменами.
19. Аксиомы и правила вывода в исчислении высказываний. Пример логического вывода.
20. Язык исчисления предикатов. Термы и формулы исчисления предикатов. Свободные и связанные вхождения переменных.
21. Интерпретация формул исчисления предикатов. Общезначимые и выполнимые формулы.

III. Элементарная комбинаторика

22. Число сочетаний из n элементов по k . Формула для числа сочетаний.
23. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k . Формула для числа сочетаний с повторениями.
24. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.
25. Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).
26. Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.
27. Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.
28. Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.
29. Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$.

30. Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включения-исключений).

31. Формула для числа сюръекций.

IV. Разбиения чисел

32. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Формула для числа упорядоченных разбиений.

33. Упорядоченные разбиения на нечетные слагаемые.

34. Неупорядоченные разбиения. Связь с диаграммами Юнга. Запись в виде решений специального уравнения.

35. Рекуррентная формула для числа разбиений на фиксированное число слагаемых.

36. Явные формулы для числа разбиений на 2 и 3 слагаемых.

37. Формула для количества разбиений числа n на m различных слагаемых.

38. Пентагональная формула Эйлера.

V. Рекуррентные соотношения в комбинаторике

39. Числа Фибоначчи. Определение и формулы суммы чисел Фибоначчи.

40. Числа Каталана. Определение и простейшие интерпретации (скобочные последовательности, последовательности единиц и минус единиц, пути на клетчатой сетке).

41. Принцип отражений. Явная формула для чисел Каталана.

42. Числа Каталана и триангуляции многоугольника.

43. Доказательство явной формулы для чисел Каталана при помощи триангуляций.

44. Числа Белла. Определение и рекуррентная формула.