Вопросы по курсу дискретной математики. 2024-25 г, 1 семестр

I. Множества и отображения

1. Основные понятия теории множеств: множество, элемент, подмножество. Основные операции над множествами.

2. Бинарные и n-арные отношения. Определения и примеры. Основные свойства отношений. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.

3. Понятие отображения. Образ и прообраз элемента. Инъекция, сюръекция и биекция. Композиция отображений. Обратное отображение. Критерий обратимости.

4. Число элементов декартова произведения двух и нескольких множеств. Количество подмножеств данного множества.

5. Число отображений из одного множества в другое. Число инъекций. Число перестановок данного множества. Размещения и размещения с повторениями.

6. Счётные множества. Определение и примеры. Счётность декартова произведения счётных множеств.

7. Теорема о бесконечном подмножестве счётного множества. Понятие не более чем счётного множества и их основные свойства.

8. Счётность множества рациональных чисел.

9. Теорема об объединении не более чем счётных множеств.

10. Пример несчётного множества. Существование трансцендентных чисел.

11. Понятие мощности множества. Теорема о счётном подмножестве бесконечного множества.

12. Формулировка аксиомы выбора. Примеры теорем, которые невозможно доказать без использования этой аксиомы.

13. Следствия об объединении и разности бесконечного множества и счётного множества. Примеры множеств мощности континуума.

14. Сравнение мощностей. Определение, теорема Кантора-Бернштейна (формулировка), континуум-гипотеза. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.

II. Основы математической логики

15. Булевы функции. Определение, задание таблицей истинности, количество булевых функций от n переменных. Примеры булевых функций от 1 и 2 переменных.

Булевы функции

• Пусть нам даны высказывания A1, A2, . . . , An. Мы хотим составить из них новое высказывание. При этом истинность или ложность нового высказывания должна зависеть только от истинности или ложности A1, A2, . . . , An, но не от того, что именно это за высказывания.

• То есть должна быть функциональная зависимость истинности/ложности нового высказывания от истинности/ложности исходных.

Определение

Булевой функцией от n переменных называется отображение f : $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. • Всего есть $2^{2\wedge n}$ булевых функций от n переменных. • Считается, что ложному высказыванию соответствует значение 0, а истинному — значение 1. Тем самым, любое высказывание, которое можно составить из данных n высказываний, можно выразить булевой функцией от n переменных.

Таблицы истинности

• Булевы функции можно задавать при помощи таблиц истинности.

• Таблица истинности — это таблица с 2n строками (где n — число переменных), первые n столбцов которой соответствуют значениям переменных, а (n + 1)-й столбец содержит значения функции.

• Каждая строка соответствует одной из 2n возможных комбинаций значений аргументов: соответствующая строка из нулей и единиц записывается в первые n клеток данной строки, а в (n + 1)-й клетке записывается значение функции при данных значениях аргументов (оно также может быть равно либо нулю, либо единице).

Булевы функции двух аргументов

- Какие еще бывают булевы функции от двух переменных? Всего их 16.

x	y	0	$x \& y$	$x \& \neg y$	x	$\neg x \& y$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x	y	$x \downarrow y$	$x \equiv y$	$\neg y$	$y \supset x$	$\neg x$	$x \supset y$	$x \mid y$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- $x \equiv y$ — эквивалентность;
- $x \oplus y$ — сложение по модулю 2;
- $x \downarrow y$ — стрелка Пирса;
- $x \mid y$ — штрих Шеффера.

16. Формулы исчисления высказываний. Связь с булевыми функциями. Эквивалентность фор- мул, примеры. Тавтологии, выполнимые формулы и противоречия.

Язык исчисления высказываний

• Алфавит исчисления высказываний состоит из следующих символов:
1. пропозициональные переменные: как правило, обозначаются латинскими буквами, возможно, с индексами;
2. пропозициональные связки: ¬, &, ∨, ⊃;
3. скобки: (,).

• Пропозициональной формулой называется последовательность символов в указанном выше алфавите, которая строится по следующим принципам: 1. любая переменная — формула;
2. если A — формула, то ¬A — формула;
3. если A, B — формулы, то (A & B), (A ∨ B), (A ⊃ B) — формулы.

Пример ((¬x ∨ ¬¬y) ⊃ z)

Замечание Иногда в качестве связок используют и другие знаки логических операций. Например, ≡, ⊕, ↓

Эквивалентность формул

• Каждой пропозициональной формуле соответствует булева функция.

• Однако, это соответствие — не биекция. Например, формулам (¬x ∨ y) и (x ⊃ y) соответствует одна и та же булева функция.

Определение

• Формулы A и B называются **эквивалентными** (или равнозначными), если им соответствует одна и та же булева функция. То есть, если формулы A и B принимают одинаковые значения при любых значениях входящих в них переменных.

• Обозначение: A ~ B.

Примеры
1. ¬¬x ~ x;
2. ¬(x & y) ~ (¬x ∨ ¬y);
3. ¬(x ∨ y) ~ (¬x & ¬y);
4. (x ⊃ y) ~ (¬x ∨ y);
5. ¬(x ⊃ y) ~ (x & ¬y);
6. (x & (y ∨ z)) ~ ((x & y) ∨ (x & z));
7. (x ∨ (y & z)) ~ ((x ∨ y) & (x ∨ z)).

Тавтологии

Определение

• Формула A называется **тавтологией** (или тождественной истиной), если при любых значениях переменных принимает значение 1 (т. е. если A ∼ 1).
• Формула A называется **выполнимой**, если существуют такие значения переменных, при которых A принимает значение 1.
• Формула A называется **противоречием** (или невыполнимой), если при любых значениях переменных принимает значение 0 (т. е. если A ∼ 0).
Примеры
1. (x ∨ ¬x) — тавтология (закон исключенного третьего);
2. (x & ¬x) — противоречие;
3. ¬(x ⊃ y) — выполнимая формула (истинна при x = 1, y = 0).
Замечание Формулы A и B эквивалентны тогда и только тогда, когда формула (A ≡ B) — тавтология.

17. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. СКНФ и СДНФ. Существование и единственность представления булевой функции в виде СКНФ и СДНФ. Полные системы булевых функций.

Нормальные формы
• Даны n пропозициональных переменных x1, . . . , xn.
• **Литералом** называется выражение вида xi , либо ¬xi (т. е. переменная, либо ее отрицание).
• Выражение вида (L1 ∨ . . . ∨ Lm), где L1, . . . , Lm — литералы, называется **простым дизъюнктом**, а выражение (L1 & . . . & Lm) — **простым конъюнктом**.
Определение
• Конъюнктивная нормальная форма (**КНФ**) — это пропозициональная формула вида (C1 & C2 & . . . & Ck), где Ci — простые дизъюнкты.
• Дизъюнктивная нормальная форма (**ДНФ**) — это пропозициональная формула вида (C1 ∨ C2 ∨ . . . ∨ Ck), где Ci — простые конъюнкты.
• Подформулы Ci , как в случае КНФ, так и в случае ДНФ, называют также **клозами**.
Примеры
• Формула (x ∨ y ∨ ¬z) & (¬y ∨ z) & (¬x ∨ ¬z) — КНФ;
• формула (x & y & ¬z) ∨ (¬y & z) ∨ (¬x & ¬z) — ДНФ.
Совершенные формы
Определение
Конъюнктивная или дизъюнктивная нормальная форма называется **совершенной** (**СКНФ** или **СДНФ**, соответственно), если выполняются следующие условия:
1. каждая переменная присутствует в каждом клозе ровно один раз;
2. все клозы различны (т. е. нет повторяющихся скобок);
3. в каждом клозе литералы упорядочены по возрастанию индексов (или по алфавиту, если переменные — различные латинские буквы);
4. клозы упорядочены лексикографически (мы считаем, что для любой переменной xi литерал ¬xi младше литерала xi ; любые два клоза упорядочиваются по первому несовпадающему литералу).
Примеры
• Формула (¬x ∨ y ∨ ¬z) & (¬x ∨ y ∨ z) & (x ∨ ¬y ∨ ¬z) — СКНФ;
• формула (¬x & y & ¬z) ∨ (¬x & y & z) ∨ (x & ¬y & ¬z) — СДНФ.
Представление булевой функции в виде СКНФ и СДНФ
Теорема
Каждая булева функция единственным образом представляется как в виде СКНФ, так и в виде СДНФ.
Доказательство.
“∃”: Пусть f (x1, . . . , xn) — булева функция.
• Рассмотрим таблицу истинности функции f .
• Выберем из этой таблицы те строки, в которых получается значение 1.
• Каждой строке (a1, . . . , an) ∈ $\{0, 1\}^n$ можно поставить в соответствие простой конъюнкт (L1 & . . . & Ln), где Li = {xi когда ai = 1 и ¬xi когда ai = 0.} Этот конъюнкт принимает значение 1 тогда и только тогда, когда x1 = a1, . . . , xn = an.
• Дизъюнкция всех конъюнктов, соответствующих выбранным строкам, будет СДНФ, соответствующей функции f .
• Аналогично, к СДНФ можно привести функцию ¬f . Тогда, взяв отрицание полученной формулы, найдем СКНФ, соответствующую f .
“!”: СДНФ, соответствующая функции f , единственна, поскольку входящие в нее простые конъюнкты однозначно определяются ее таблицей истинности.
• СКНФ, соответствующая функции f , единственна, поскольку ее отрицание — это СДНФ, соответствующая ¬f , а она единственна.

Полные системы булевых функций

Определение

Множество F булевых функций называется **полной системой**, если любую булеву функцию можно выразить через функции из F при помощи операции композиции.

• Другими словами, любая булева функция должна задаваться пропозициональной формулой, в которой связки соответствуют функциям из F.

Следствие Система {&, ∨, ¬} — полная.

18. Алгоритм приведения булевой функции к СКНФ и СДНФ эквивалентными заменами.

Приведение к СКНФ и СДНФ

• Пусть булева функция f задана некоторой пропозициональной формулой.

• Как видно из доказательства теоремы, ее можно привести к СКНФ и СДНФ, при помощи ее таблицы истинности.

• Однако, часто бывает удобнее привести ее к СКНФ и СДНФ эквивалентными преобразованиями.

• Алгоритм приведения пропозициональной формулы F к СКНФ и СДНФ включает в себя следующие шаги.

1. Элиминация связок. Если в формуле F используются связки, отличные от &, ∨, ¬, их нужно заменить на эквивалентные им формулы, использующие только &, ∨, ¬.
2. Протаскивание отрицаний. Многократно применяем эквивалентности ¬¬A ~ A, ¬(A & B) ~ (¬A ∨ ¬B), ¬(A ∨ B) ~ (¬A & ¬B) (где A, B — произвольные подформулы) до тех пор, пока в формуле есть отрицания, применяемые к подформулам, отличным от одной переменной. В результате отрицания в формуле будут присутствовать только непосредственно перед переменными.
3. Раскрытие скобок. Для приведения к СКНФ и к СДНФ скобки нужно раскрывать по-разному. – Для получения СКНФ нужно использовать эквивалентность (A ∨ (B & C)) ~ ((B & C) ∨ A) ~ ((A ∨ B) & (A ∨ C)) (где A, B, C — произвольные подформулы). Такие замены производятся до тех пор, пока в формуле есть дизъюнкции, применяемые к подформулам, включающим операцию конъюнкции. – Для получения СДНФ нужно действовать аналогично, но используя эквивалентность (A & (B ∨ C)) ~ ((B ∨ C) & A) ~ ((A & B) ∨ (A & C)). По итогам этого шага получится КНФ или ДНФ соответственно, но она может не быть совершенной.
4. Удаление повторяющихся переменных. – Если в каком-либо клозе есть несколько одинаковых литералов, оставляем только один из них. – Если же в клозе есть разноименные литералы от одной переменной (например, x и ¬x), то нужно удалить весь клоз.
5. Расщепление переменных. Если клоз C не содержит переменной z, заменяем его на – (C ∨ z) & (C ∨ ¬z) (в случае СКНФ); – (C & z) ∨ (C & ¬z) (в случае СДНФ).
6. Удаление повторяющихся клозов. Если клоз C встречается несколько раз, оставляем лишь один его экземпляр.
7. Сортировка. В каждом клозе упорядочиваем литералы по алфавиту (или по номерам индексов); клозы упорядочиваем лексикографически.

19. Аксиомы и правила вывода в исчислении высказываний. Пример логического вывода.

Аксиомы и правила вывода

• Как доказать, что пропозициональная формула является тавтологией?

• Можно написать ее таблицу истинности. Или привести ее к СДНФ.

• Но есть и другой способ: можно вывести данную формулу из аксиом. То есть доказать ее в рамках некоторой формальной аксиоматической теории.

• Каждая формальная теория должна включать в себя множество формул, называемых аксиомами и конечное множество правил вывода (отношений между формулами, позволяющих из некоторых формул выводить другие).

Примеры правил вывода

1. Modus ponens (MP) $\dfrac{A, (A \supset B)}{B}$ это означает, что из формул A и $(A \supset B)$ мы можем вывести формулу B.
2. Правило резолюции $\dfrac{(x \vee A), (\neg x \vee B)}{(A \vee B)}$, где x — переменная и A, B — формулы (возможно, пустые). Формула $(A \vee B)$ называется *резольвентой*.

Пример формальной аксиоматической теории

Формальная аксиоматическая теория $\mathcal{L}$ включает в себя три схемы аксиом
одно правило вывода.

Схемы аксиом:

A_1: $(A \supset (B \supset A))$;
A_2: $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$;
A_3: $((\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B))$.
Аксиомой считается любая формула, получаемая из формул A_1–A_3 подстановкой вместо A, B и C любых формул. Подстановка, заменяющая все вхождения переменной A на формулу F, обозначается так: $[F/A]$.

Правило вывода: Modus ponens (MP)

Определение

• Формула B *выводима* в теории $\mathcal{L}$ из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если существует последовательность формул $A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, \ldots, F_k, B$, в которой каждая формула, начиная с F_1, либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул при помощи правила MP.
• Обозначение: $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{L}} B$.

Вывод в формальной аксиоматической теории $\mathcal{L}$

Определение

- Последовательность $A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, \dots, F_k, B$ называется *выводом* формулы B из формул $A_1, A_2, \dots, A_n$.
- Запись $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_{\mathcal{L}} B$ называется *секвенцией*.
- Если список формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ пуст, то говорят, что формула B *выводима* в теории $\mathcal{L}$ (обозначение: $\vdash_{\mathcal{L}} B$).

Пример

Выведем в теории $\mathcal{L}$ формулу $(A \supset A)$.

1. $((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)))$ A_2; $[(A \supset A)/B, A/C$
2. $(A \supset ((A \supset A) \supset A))$ A_1; $[(A \supset A)/B]$
3. $((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$ MP 2, 1
4. $(A \supset (A \supset A))$ A_1; $[A/B]$
5. $(A \supset A)$ MP 4, 3

20. Язык исчисления предикатов. Термы и формулы исчисления предикатов. Свободные и связанные вхождения переменных.

Язык исчисления предикатов

- Алфавит
  1. предметные константы: $a_1, a_2, a_3, \dots$;
  2. предметные переменные: $x_1, x_2, x_3, \dots$;
  3. функциональные символы: $f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, f_3^{m_3}, \dots$;
     - в качестве верхнего индекса указывается натуральное число, называемое *местностью* или *арностью* функционального символа;
     - т. е. f_i^m — *m-местный функциональный символ*, ему будет соответствовать функция от m аргументов;
     - предметную константу можно рассматривать как 0-местный функциональный символ;
  4. предикатные символы: $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, P_3^{n_3}, \dots$;
     - в качестве верхнего индекса указывается натуральное число, называемое *местностью* или *арностью* предикатного символа;
     - т. е. P_i^n — *n-местный предикатный символ*, ему будет соответствовать n-местное отношение;
  5. связки: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$;
  6. кванторы: $\forall$, $\exists$;
  7. скобки: (,).

Язык исчисления предикатов: термы

Замечание

• В принципе, обозначения для предметных констант, переменных, функциональных и предикатных символов могут быть и другими. Но они должны быть заранее определены.
• Список всех используемых предметных констант, функциональных и предикатных символов (с указанием их местности) называется **сигнатурой**.

Термы

• **Термом** называется последовательность символов в указанном выше алфавите, которая строится по следующим принципам:
1. любая предметная константа и любая предметная переменная — терм;
2. если f_i^m — m-местный функциональный символ и t1, . . . ,tm — термы, то f_i^m(t1, . . . ,tm) — терм;
3. выражение является термом только в том случае, если это следует из правил 1 и 2.

Язык исчисления предикатов: формулы

• **Элементарной формулой** называется выражение вида P_j^n(t1, . . . ,tn), где P_j^n — n-местный предикатный символ и t1, . . . ,tn — термы. элементарные формулы также называют **атомарными формулами** или просто атомами.
• **Формулой исчисления предикатов** называется последовательность символов в указанном выше алфавите, которая строится по следующим принципам:
1. любая элементарная формула — формула;
2. если A — формула, то ¬A — формула;
3. если A, B — формулы, то (A & B), (A ∨ B), (A ⊃ B) — формулы;
4. если A — формула и x — предметная переменная, то ∀x A и ∃x A — формулы;
5. выражение является формулой только в том случае, если это следует из правил 1-4.
• В формулах вида ∀x A и ∃x A выражение A называется областью действия квантора ∀x или ∃x, соответственно.

Свободные и связанные вхождения переменных

• Вхождение переменной x в формулу F называется **связанным**, если x является переменной входящего в эту формулу квантора ∀x или ∃x, либо находится в области действия входящего в эту формулу квантора ∀x или ∃x.
• В противном случае, вхождение переменной x в данную формулу называется **свободным**.
• Одна и та же переменная может иметь свободные и связанные вхождения в одну и ту же формулу.
Пример
В формуле (f (x) = 0 ⊃ ∃x (g(x, y) = 0)) первое вхождение переменной x свободно, второе и третье — связанны. Единственное вхождение переменной y свободно.
• Переменная x называется **свободной переменной** формулы F, если в F есть свободное вхождение переменной x. Аналогично, x называется **связанной перемен**ной формулы F, если в F есть связанное вхождение переменной x.
• Переменная может быть одновременно свободной и связанной в одной и той же формуле.

Свободные и связанные переменные

• Если в формуле нет свободных переменных, она называется **замкнутой**.
• Если свободные вхождения переменных в формуле есть, то можно подставить вместо них какие-либо термы и получить новую формулу. I Пусть F — формула, x1, . . . , xn — переменные и t1, . . . ,tn — термы. Тогда через F(t1, . . . ,tn) обозначается результат подстановки термов t1, . . . ,tn в F вместо всех свободных вхождений переменных x1, . . . , xn. I Также результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений переменной x в формулу F обозначают $[F]^x_t$.
• Терм t называется **свободным** для переменной x в формуле F, если никакое свободное вхождение x в F не находится в области действия никакого квантора ∀y или ∃y, где y — переменная, входящая в t.
Пример Терм x + y свободен для переменной x, но не свободен для переменной y в формуле (f (x) = 0 ⊃ ∃x (g(x, y) = 0)).

21. Интерпретация формул исчисления предикатов. Общезначимые и выполнимые формулы.

Интерпретации

• Выбираем множество D — область интерпретации.
• Каждой предметной константе ai ставим в соответствие элемент αi ∈ D.
• Каждому n-местному функциональному символу f n i ставим в соответствие n-местную операцию на D (т. е. отображение fi : D n → D).
• Каждому n-местному предикатному символу P n i ставим в соответствие n-местное отношение на D (т. е. подмножество Pi ⊂ D n). • После этого, каждой замкнутой формуле будет соответствовать некоторое высказывание (оно истинно или ложно).
• Каждой незамкнутой формуле будет соответствовать отношение на множестве D (k-местное отношение, где k — число свободных переменных).
Примеры
1. Формула ∃c (a = b · c) при D = N задает отношение делимости. – Но при D = Q+ получаем универсальное отношение (все пары чисел).
2. Формула ∀a ∃b (a = b · b) при D = R задает ложное высказывание. А при D = C — истинное.

• Формула F называется **истинной в данной интерпретации**, если соответствующее ей отношение выполняется для всех наборов значений переменных. Это эквивалентно тому, что замыкание формулы F (т. е. формула ∀x1 ∀x2 . . . ∀xk F, где x1, x2, . . . , xk — свободные переменные формулы F) в данной интерпретации задает истинное высказывание.
• Формула F называется (логически) **общезначимой**, если она истинна в любой интерпретации.
• Формула F называется **выполнимой в данной интерпретации**, если соответствующее ей отношение выполняется хотя бы для одного набора значений переменных. То есть формула ∃x1 ∃x2 . . . ∃xk F, где x1, x2, . . . , xk — свободные переменные формулы F, в данной интерпретации задает истинное высказывание.
• Формула F называется **выполнимой**, если она выполнима в какой-либо интерпретации.

III. Элементарная комбинаторика

22. Число сочетаний из n элементов по k. Формула для числа сочетаний.

Основные комбинаторные числа: число сочетаний

- *Число сочетаний* из n элементов по k — это количество k-элементных подмножеств в n-элементном множестве (где $0 \le k \le n$).
- Возможные обозначения: C_n^k или $\binom{n}{k}$.
- Это число можно интерпретировать как
  - число строго монотонно возрастающих функций $f : [1..k] \to [1..n]$;
  - число способов разложить k одинаковых шаров по n пронумерованным ящикам (в каждый ящик помещается не более одного шара).

Теорема

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. Пусть $|X| = n$.

- Есть $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ способов выбрать последовательность из k различных элементов X.
- Каждая такая последовательность задает k-элементное подмножество X.
- Каждое подмножество посчитано $k!$ раз, ибо его элементы можно упорядочить $k!$ способами. Итого, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ различных подмножеств. □

23. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k. Формула для числа сочетаний с повторениями.

Основные комбинаторные числа: число сочетаний с повторениями

• **Число сочетаний с повторениями** из n элементов по k — это количество неупорядоченных наборов из k элементов n-элементного множества (в отличии от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз).
• Возможные обозначения: $\tilde{C}_n^k$
• Это число можно интерпретировать как
▸ число нестрого монотонно возрастающих функций f : [1..k] → [1..n];
▸ число способов разложить k неразличимых шаров по n ящикам (в ящик можно класть любое число шаров);
▸ число способов выбрать k предметов, если есть предметы n типов (на складе есть хотя бы по k предметов каждого типа; предметы одного типа абсолютно неразличимы

Формула для числа сочетаний с повторениями

Теорема

$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$.

Доказательство теоремы.
• Расположим в ряд k шариков и n − 1 перегородку.

• Всего есть C^k_{n+k-1} таких расположений.
• Обозначим через t1 число шариков до первой перегородки; t2 — между первой и второй перегородками; . . . ; tn — после (n − 1)-й перегородки.
• Получаем биекцию между решениями уравнения (1) и такими расположениями шаров и перегородок.

Лемма
Число решений уравнения $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = k$ (1) в N_0 равно $\tilde{C}^k_n$.
Доказательство.
Пусть X = {x1, x2, . . . , xn}.
• Строим биекцию между решениями уравнения (1) и неупорядоченными наборами из k элементов множества X.
• Каждому решению (t1,t2, . . . ,tn) ставим в соответствие набор, состоящий из t1 экземпляров элемента x1, t2 экземпляров x2, . . . , tn экземпляров xn.
• Обратно, каждому набору T ставим в соответствие решение (t1,t2, . . . ,tn), где ti — число экземпляров xi в T.

24. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.

Свойства чисел сочетаний

- $C_n^k = C_n^{n-k}$ (очевидно).
- $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Доказательство. $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$
$$= \frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad \square$$

Другой способ доказательства. Пусть $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

- $(k+1)$-элементные подмножества X бывают двух видов: содержащие x_0 и не содержащие x_0.
- Если $x_0 \notin S \subset X$, то $S \subset X' = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Таких подмножеств C_n^{k+1}.
- Если $x_0 \in S \subset X$, то удалим x_0 из S. Получим подмножество $S' \subset X'$, где $|S'| = k$. Таких подмножеств C_n^k. $\square$

Большинство соотношений на C_n^k имеют как алгебраическое, так и комбинаторное доказательство.

Свойства чисел сочетаний

- Треугольник Паскаля

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство.

Алгебраически:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Комбинаторно: Как в левой, так и в правой части формулы записано число k-элементных подмножеств n-элементного множества, в которых один элемент отмечен. □

25. Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).

Свойства чисел сочетаний

- (Бином Ньютона) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Доказательство.

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ скобок}}$;
- слагаемое $a^{n-k}b^k$ получается, если из k скобок выбрать b, а из остальных — a.
- Это можно сделать C_n^k способами.

- Другое название чисел C_n^k — *биномиальные коэффициенты*.
- $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.
    - Комбинаторное доказательство: в левой и в правой части записано число подмножеств n-элементного множества.
- $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$.
- $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}$.

Свойства чисел сочетаний

Докажем формулу $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ комбинаторно.

Доказательство. Докажем, что $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$.

- Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Построим биекцию между всеми четными и всеми нечетными подмножествами X.
- Пусть $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S \\ S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S. \end{cases}$
- Получаем отображение $f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, обладающее следующим свойством: $\forall S\,(f(f(S)) = S)$.
  - Отображение, обладающее таким свойством называется *инволюцией*.
  - В частности, это означает, что f обратно самому себе, следовательно, f — биекция.
- При этом, $|S|$ и $|f(S)|$ всегда имеют разную четность.
- Таким образом, f также задает биекцию между всем четными и всеми нечетными подмножествами X.

26. Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.

Мультиномиальные коэффициенты

Определение

Пусть $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $n, k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$. Тогда число способов разбить n-элементное множество X на m непересекающихся подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_m$, где $|X_i| = k_i$, обозначается $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ и называется *мультиномиальным коэффициентом*.
(Другое название: *полиномиальный коэффициент*.)

Теорема

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}.$$

Доказательство. Есть $n!$ способов упорядочить элементы множества X.

- Для каждого способа, помещаем первые k_1 элементов в X_1; следующие k_2 элементов в X_2 и т. д.
- Получаем разбиение X на подмножества нужного размера.
- Каждое разбиение посчитано $k_1! k_2! \ldots k_m!$ раз. □

Теорема

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству Бинома Ньютона.

- При раскрытии скобок слагаемое $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ получается, если выбрать из k_1 скобок слагаемое a_1, из k_2 скобок слагаемое a_2, ..., из k_m скобок слагаемое a_m.
- Такой выбор можно сделать в точности $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$ способами.

27. Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.

Формула включений-исключений

Примеры

1. Пусть A, B — конечные множества. Тогда |A ∪ B| = |A| + |B| − |A ∩ B|.
2. Пусть A, B, C — конечные множества. Тогда |A ∪ B ∪ C| = |A| + |B| + |C| − |A ∩ B| − |B ∩ C| − |C ∩ A|+ |A ∩ B ∩ C|.

Теорема (Формула включений-исключений)

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — конечные множества. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq I \subset [1..n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Доказательство.

- Пусть $x \in A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ и x не принадлежит остальным A_j.
- Тогда x учитывается в формуле (1) с коэффициентом

$$\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} C_k^{\ell} = 1.$$

Следствие (другая формулировка формулы включений-исключений)

Пусть X — конечное множество, $|X| = N$;

- *$P_1, \dots, P_n$ — свойства элементов множества X (т. е. одноместные предикаты на X);*
- *$N_{i_1,\dots,i_k}$ — число элементов, удовлетворяющих $P_{i_1}, \dots, P_{i_k}$;*
- *$N(0)$ — число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству.*

Тогда

$$N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1<i_2} N_{i_1,i_2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^k \sum_{i_1<\dots<i_k} N_{i_1,\dots,i_k} + \dots$$
$$\dots + (-1)^n N_{1,\dots,n}.$$

28. Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.

Субфакториалы (задача о беспорядках)

Определение

- Перестановкой на множестве M называется произвольная биекция σ : M → M.
- Неподвижной точкой перестановки σ называется такой элемент x ∈ M, что σ(x) = x.
- S_n — множество всех перестановок на [1..n].

Замечание

Мы знаем, что $|S_n| = n!$.

Определение

D(n) — число перестановок из S_n, не имеющих неподвижных точек.

Субфакториалы: рекуррентная формула

Теорема

$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1))$.

Доказательство.

- Пусть $\sigma \in S_{n+1}$; $k = \sigma(n+1)$; $\ell = \sigma^{-1}(n+1)$.
- Возможны два случая: $k \neq \ell$ или $k = \ell$.

  1° Пусть $k \neq \ell$.

  - Тогда $\sigma'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma(x), & x \neq \ell \\ k, & x = \ell \end{cases}$ — перестановка из S_n без неподвижных точек.
  - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n)$ таких перестановок.

  2° Пусть $k = \ell$.

  - Тогда $\sigma|_{[1..n]\setminus\{k\}}$ — перестановка на $[1..n] \setminus \{k\}$ без неподвижных точек.
  - Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n-1)$ таких перестановок.
- Итого, получаем $nD(n) + nD(n-1)$ перестановок без неподвижных точек. □

29. Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$.

Субфакториалы: явная формула

Замечание

Для обычных факториалов выполняется такое же соотношение: (n + 1)! = n(n! + (n − 1)!). Поэтому числа D(n) называют **субфакториалами**.

Теорема

$D(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Доказательство. Пусть $X = S_n$.

- P_i — свойство "$\sigma(i) = i$" для перестановки $\sigma \in S_n$.
- Тогда $N = n!$ и $N_{i_1,\dots,i_k} = (n-k)!$.
- По формуле (2) имеем: $D(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! C_n^k = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Следствие

$D(n) = \mathrm{round}(\frac{n!}{e})$; *более того,* $|D(n) - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{n+1}$.

Доказательство. Напомним, что $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Тогда

- $\frac{n!}{e} = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} =$
$$= D(n) + (-1)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!};$$
- $|D(n) - \frac{n!}{e}| = |\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}| = |\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots|$;
- $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \left(\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!}\right) + \left(\frac{n!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+4)!}\right) + \dots > 0$;
- $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!}\right) - \left(\frac{n!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n+5)!}\right) - \dots < \frac{1}{n+1}$.

30. Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включе- ний-исключений).

Функция Эйлера

Определение

• Натуральные числа a и b называются взаимно простыми, если у них нет общего натурального делителя, отличного от единицы.

• φ(n) — количество натуральных чисел, меньше либо равных n и взаимно простых с n (функция Эйлера).

Теорема

Пусть $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ *(где* $p_1, \dots p_s$ *— различные простые и* $a_1, \dots, a_s$ *— натуральные числа). Тогда* $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$.

Доказательство. Пусть $X = [1..n]$.

- P_i — свойство "$x \vdots p_i$" для числа $x \in X$.
- Тогда $N_{i_1,\dots,i_k} = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$.
- По формуле (2) имеем:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s}).$$

31. Формула для числа сюръекций.

Число сюръективных отображений

Теорема

Число сюръективных отображений $f\colon [1..k] \to [1..n]$ *равно* $\sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s s^k$.

Доказательство.

- Пусть X — множество всех отображений $f\colon [1..k] \to [1..n]$.
- P_i — свойство "$f^{-1}(i) = \varnothing$" для отображения $f \in X$.
  - Тогда $N = |X| = n^k$;
  - $N_{i_1,\dots,i_\ell} = (n - \ell)^k$ — количество функций, удовлетворяющих данным ℓ свойствам.
  - $f \in X$ — сюръекция $\Leftrightarrow$ f не удовлетворяет ни одному из свойств. Следовательно, число сюръекций равно $N(0)$.
- По формуле включений-исключений имеем:

$$N(0) = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_n^\ell (n - \ell)^k = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s s^k.$$

(Последнее равенство получено заменой переменной $s = n - \ell$).

IV. Разбиения чисел

1. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Формула для числа упорядоченных разбиений.
2. Упорядоченные разбиения на нечетные слагаемые.
3. Неупорядоченные разбиения. Связь с диаграммами Юнга. Запись в виде решений специального уравнения.
4. Рекуррентная формула для числа разбиений на фиксированное число слагаемых.
5. Явные формулы для числа разбиений на 2 и 3 слагаемых.
6. Формула для количества разбиений числа n на m различных слагаемых.
7. Пентагональная формула Эйлера.

V. Рекуррентные соотношения в комбинаторике

8. Числа Фибоначчи. Определение и формулы суммы чисел Фибоначчи.
9. Числа Каталана. Определение и простейшие интерпретации (скобочные последовательности,

последовательности единиц и минус единиц, пути на клетчатой сетке).

10. Принцип отражений. Явная формула для чисел Каталана.

11. Числа Каталана и триангуляции многоугольника.

12. Доказательство явной формулы для чисел Каталана при помощи триангуляций.

13. Числа Белла. Определение и рекуррентная формула.