1. Простейшие понятия

1. Граф, подграф. Вершина, окрестность, степень. Сумма степеней вершин графа.

Определение

Пусть G — граф. G = (V(G), E(G)), где V(G) — множество вершин графа G, а E(G) — множество ребер графа G.

Определение

Для любой вершины v ∈ V(G) через N_G (v) мы будем обозначать окрестность вершины v — множество всех вершин графа G, смежных с v.

Определение

1) Для вершины x ∈ V(G) через d_G (x) обозначим степень вершины x в графе G, то есть, количество рёбер графа G, инцидентных(имеющих конец в этой вершине) x.

2) Минимальную степень вершины графа G обозначим через δ(G), а максимальную степень вершины графа G — через Δ(G).

Лемма 1

1) Сумма степеней всех вершин графа G равна 2e(G).
2) Количество вершин нечетной степени в любом графе четно.

Доказательство.

Первое утверждение очевидно следует из того, что любое ребро имеет ровно два конца, а второе — из первого.

Определение

1) Граф H является **подграфом** графа G, если V(H) ⊂ V(G) и E(H) ⊂ E(G).

2) Подграф H графа G — **остовный**, если V(H) = V(G).

3) Пусть U ⊂ V(G). Через G(U) мы обозначим **индуцированный** подграф на множестве **вершин** U. Это означает, что V(G(U)) = U, а E(G(U)) состоит из всех рёбер множества E(G), оба конца которых лежат в U.

4) Пусть F ⊂ E(G). Через G(F) мы обозначим **индуцированный** подграф на множестве **рёбер** F. Это значит, что E(G(F)) = F, а V(G(F)) состоит из всех вершин множества V(G), инцидентных хотя бы одному ребру из F.

5) **Собственный** подграф графа G — это подграф, отличный от G.

2. Пути, циклы и маршруты. Лемма о выделении простого пути и цикла.

Определение

1) Последовательность вершин $a_1a_2 \dots a_n$ и рёбер $e_1, \dots, e_{n-1}$ графа G, где $e_i = a_ia_{i+1}$ для всех i ∈ [1..n − 1], называется **маршрутом**.
2) Мы будем говорить, что определенный выше маршрут проходит по рёбрам e1, . . . , en−1 и по вершинам a1, a2, . . . , an.
3) Маршрут называется замкнутым, если a1 = an.
• Отметим, что вершины и рёбра маршрута не обязательно различны.

Определение

1) **Путь** — это маршрут a1a2 . . . an, не проходящий ни по какому ребру дважды.
2) Вершину a1 назовём началом, а вершину an — концом пути.
3) Путь называется **простым**, если все вершины a1, . . . , an *различны*.
4) Длина пути — это количество его рёбер.
5) Если граф P — простой путь, то его внутренность Int(P) — это множество всех его вершин, отличных от начала и конца этого пути. Вершины из Int(P) называются внутренними вершинами пути P.
• Путь у нас — это одновременно последовательность вершин, в которой все пары соседних вершин соединены ребрами, а также подграф из этих вершин и рёбер. Эта двусмысленность в дальнейшем нисколько не помешает.

Определение

1) Пусть x, y ∈ V(G). Назовем xy-путем любой простой путь от x до y.
2) Пусть X, Y ⊂ V(G). Назовем XY -путем любой простой путь с началом в множестве X и концом в множестве Y , внутренние вершины которого не принадлежат множествам X и Y .
3) **Расстоянием** между вершинами x и y графа G называется длина наименьшего xy-пути. Обозначение: distG (x, y).

Определение

1) Цикл — это последовательность вершин a1a2 . . . an и различных рёбер e1, . . . , en графа G, где ei = aiai+1

для всех $i \in [1..n]$ (мы считаем, что $a_{n+i} = a_i$). Т.е. путь где $a_1=a_n$.
2) Мы будем говорить, что определенный выше цикл проходит по рёбрам $e_1, \dots, e_n$ и по вершинам $a_1, a_2, \dots, a_n$.
3) Кроме того, мы будем говорить, что цикл — это подграф графа G, состоящий из вершин и рёбер, по которым этот цикл проходит.
4) Цикл называется простым, если все вершины $a_1, \dots, a_n$ различны.
5) Длина цикла — это количество его рёбер.

Лемма 2

1) Для любого цикла Z существует такой простой цикл Z', что $V(Z') \subset V(Z)$ и $E(Z') \subset E(Z)$.
2) Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.
3) Из xy-пути можно выделить простой xy-путь.

Доказательство.

1) Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Участок между двумя посещениями b — искомый ПЦ.
2) Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Изменим порядок обхода нашего большого цикла Z в вершине b: разомкнем его на простой цикл Z' (как в пункте 1) и цикл Z_1 из оставшихся рёбер цикла Z. Эти циклы имеют общую вершину v и $e(Z) = e(Z_1) + e(Z')$, а значит, либо $e(Z')$ нечетно (тогда цикл Z' — искомый), либо $e(Z_1)$ нечетно, тогда продолжим рассуждения с меньшим нечетным циклом Z_1.
3) Аналогично.

3.Лемма о длинном пути и цикле.

Лемма 3

1) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$.
2) Если $\delta(G) \geq 2$, то в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

Доказательство.

1)
- Рассмотрим путь максимальной длины $P = a_1a_2 \dots a_n$ в нашем графе G.
- Из его последней вершины a_n выходит хотя бы $\delta(G) - 1$ ребер в вершины, отличные от a_{n-1}.
- Так как путь P нельзя продлить, вершина a_n смежна только с вершинами пути P.
- Следовательно, $n - 2 \geq \delta(G) - 1$. Так как длина пути равна $n - 1$, получаем то, что нужно.

2)
- Пусть a_m — вершина наименьшего номера, смежная с a_n.
- Тогда в множестве $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$ лежат не менее $d_G(a_n) \geq \delta(G) \geq 2$ концов выходящих из a_n ребер.
- Следовательно $a_m \neq a_{n-1}$ и мы получаем цикл $a_m \dots a_{n-1}a_n$, в котором не менее $\delta(G) + 1$ вершин.

4.Компоненты связности.

Определение

1) Вершины a и b графа G называются **связанными**, если в графе существует путь между ними.
2) Граф называется **связным**, если любые две его вершины связаны.
3) Множество $U \subset V(G)$ называется **связным**, если граф $G(U)$ связен.
4) **Компоненты связности** графа G — максимальные (по включению) связные множества вершин. Через $c(G)$ обозначим их количество.
5) Будем называть компонентами графа G подграфы, индуцированные на его компонентах связности.
- Две различные компоненты связности графа не могут пересекаться, так как иначе все вершины их объединения попарно связаны, а значит, содержатся в одной компоненте связности.
- Множество вершин графа разбито на компоненты связности.

5.Дерево. Количество ребер дерева, выделение остовного дерева.

Определение

1) **Дерево** — это связный граф без циклов.
2) **Лес** — это граф без циклов.
3) Вершина x графа G, имеющая степень 1, называется **висячей вершиной** или **листом**.
- Все компоненты леса — это деревья. Таким образом, лес, как и положено, состоит из нескольких деревьев.
- Название “лист” для вершины степени 1 применяют, как правило, только в случае, когда граф — дерево.

Лемма 4

1) В дереве с n вершинами ровно $n - 1$ ребро.
2) У любого связного графа существует остовное дерево (то есть, остовный подграф, являющийся деревом).

Доказательство Леммы 4

1)
- Индукция по количеству вершин в дереве. База для дерева с одной вершиной очевидна.
- Рассмотрим дерево T с $n \geq 2$ вершинами. По лемме 3 в графе, степени всех вершин которого не менее 2, есть цикл. Очевидно, у связного графа T на $n \geq 2$ вершинах не может быть вершин степени 0. Значит, у дерева T есть висячая вершина a.
- Понятно, что граф $T - a$ также связен и не имеет циклов, то есть, это дерево на $n - 1$ вершинах. По

индукционному предположению мы имеем e(T − a) = n − 2, откуда очевидно следует, что e(T) = n − 1.
2)
• Если в графе есть цикл, то можно удалить из этого цикла ребро. Граф, очевидно, останется связным.
• Продолжим такие действия до тех пор, пока циклы не исчезнут. В результате мы получим связный граф без циклов, являющийся остовным подграфом исходного графа, то есть, остовное дерево этого графа.

Следствие

1) Дерево с более чем одной вершиной имеет не менее двух висячих вершин.
2) Для любого графа G выполнено e(G) ≥ v(G) − c(G).

Доказательство.

1) Если в дереве T не более одной висячей вершины, то остальные имеют степень хотя бы 2 и сумма степеней вершин не менее, чем 2v(T) − 1. Однако, она же равна 2e(T) = 2v(T) − 2 по пункту 1 леммы 4, противоречие.
2) По лемме 4 каждая компонента графа G имеет остовное дерево, у которого рёбер ровно на одно меньше чем вершин.

6. Единственность пути между вершинами дерева.

Лемма 5

Граф G является деревом, если и только если для любых двух вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.

Доказательство.

⇐. Предположим, что в графе G существует единственный простой путь между любыми двумя вершинами. Тогда граф связен. Если в графе есть цикл, то между любыми двумя вершинами цикла существуют как минимум два простых пути. Значит, G — дерево.
⇒.
• Пусть G — дерево. Между любыми двумя его вершинами есть путь.
• Пусть существует два разных простых ab-пути P1 и P2. Отрежем общие начала этих путей: предположим, что они начинаются в вершине c и их первые рёбра не совпадают.
• Пойдем по пути P1 до первого пересечения с P2 в вершине d (понятно, что такая вершина есть, так как у путей общий конец b). Мы получили два простых cd-пути без общих внутренних вершин, которые образуют цикл, противоречие.

7. Нормальное остовное дерево.

Определение

Пусть G — связный граф, a ∈ V(G). Остовное дерево T называется нормальным деревом с корнем a, если для любого ребра xy ∈ E(G) либо x лежит на ay-пути дерева T, либо y лежит на ax-пути дерева T.

Теорема 1

Пусть G — связный граф, a ∈ V(G). Тогда у графа G существует нормальное остовное дерево с корнем a.

Доказательство.

• Индукция по v(G).
База для графов с 1 или 2 вершинами очевидна.
Переход.
• Предположим, что для меньших чем G графов теорема уже доказана.
• Пусть U1, . . . ,Um — все компонеты связности графа G − a, Gi = G(Ui). • Для каждого i ∈ [1..m] отметим вершину ai ∈ Ui ∩ NG (a) и построим нормальное остовное дерево Ti графа Gi с корнем ai .
• После этого соединим a с a1, . . . , am и получим остовное дерево T исходного графа.
• Пусть xy ∈ E(G). Если обе вершины x и y отличны от a, то они лежат в одной из компонент связности Ui (так как рёбер между разными компонентами нет), а значит, свойство для ребра xy выполнено по индукционному предположению для Ti (если, скажем, x лежит на ai y-пути по Ti , то x лежит и на ay-пути по T).
• Если же x = a, то доказываемое свойство для ребра xy очевидно.

8. Радиус, диаметр и центр графа. Дерево поиска в ширину.

Определение

1) **Диаметром** d(G) графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами.
2) **Эксцентриситетом** вершины v называется величина $e(v) = \max_{u\in V(G)} dist(u, v)$.
3) **Радиусом** r(G) графа G называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.
4) **Центром** графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

Лемма 6

r(G) ≤ d(G) ≤ 2r(G).

Доказательство.

• Неравенство r(G) ≤ d(G) очевидно.
• Пусть ab-путь D — это диаметр графа, а c — центр. Тогда существуют ac-путь Q_a и bc-путь Q_b с e(Qa) = dist(a, c) ≤ r и e(Qb) = dist(c, b) ≤ r.
• Так как D — кратчайший ab-путь, а aQ_acQ_bb — какой-то ab-путь, имеем d = e(D) ≤ e(Qa) + e(Qb) = 2r.

Подвешивание графа за вершину, или дерево поиска в ширину

• Далее неоднократно будет использоваться термин “подвесить (связный) граф за вершину”. Вот что будет под этим подразумеваться.
• Одна из вершин a связного графа G объявляется корнем и составляет множество вершин уровня 0 (назовем его L0). Остальные вершины разбиваются на уровни так: в уровень Lk попадают все вершины, находящиеся на расстоянии k от корня a. Каждая вершина уровня k присоединяется к одной из смежных с ней вершин уровня k − 1.
• В результате получается дерево, часто бывает удобно ориентировать его рёбра от меньшего уровня к большему. Таким образом, разбиение на уровни единственно, а само дерево — нет.
• Количество уровней в построенном выше дереве равно e(a) — эксцентриситету вершины a.
• Наименьшее количество уровней достигается в случае, когда a — центр графа G, и равно r(G)

Лемма 7

Рёбра графа G могут соединять либо вершины соседних уровней, либо одного и того же уровня.

Доказательство.

Пусть ребро xy ∈ E(G) соединяет вершину $x \in L_k$ с $y \in L_m$ и $m > k$. Тогда $m = distG\ (a, y) \le distG\ (a, x) + 1 = k + 1$.

9. Двудольный граф. Критерий двудольности.

Определение

Граф называется **двудольным**, если его вершины можно разбить на два множества, внутри которых нет рёбер (эти множества называются долями).
• Часто бывает удобно, говоря от двудольном графе, разбивать его вершины на две доли — множества попарно несмежных вершин, имеющих в правильной двуцветной раскраске один и тот же цвет. Таким образом, двудольный граф G представим в виде (V1(G), V2(G), E(G)), где рёбра соединяют вершины из разных долей. Такое представление двудольного графа может быть не единственным.

Теорема 2

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечетной длины.

Доказательство теоремы 2

⇒. Очевидно, так как цикл нечетной длины невозможно правильным образом покрасить в два цвета.
⇐. Можно считать, что наш граф G связен, иначе докажем утверждение отдельно для каждой компоненты.
• Подвесим граф за любую вершину a, назовем полученное дерево T. Первую долю образуют вершины на нечетном расстоянии от a, а вторую — сама a и вершины на четном расстоянии от a.
• Предположим, что две смежные вершины x и y попали в одну долю. Рассмотрим простые пути Px и Py в дереве T от a до x и y. В дереве такие пути единственны и имеют одинаковую четность, то есть, в сумме дают четное число.
• Отрежем от Px и Py их общее начало (если такое есть) и получим xy-путь четной длины, который, очевидно, не содержит ребра xy. При добавлении этого ребра образуется нечетный цикл, противоречие. Таким образом, граф без нечетных циклов является двудольным.

2. Пути и циклы

1. Эйлеров путь и цикл в графе.

Определение

1) **Эйлеров путь** в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

2) **Эйлеров цикл** в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

3) Граф G — эйлеров, если в нём есть эйлеров цикл.

• Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

Теорема 1

Связный граф G — эйлеров, если и только если степени всех вершин G четны.

Доказательство теоремы 1

⇒. Каждый раз, проходя через вершину v, эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому dG (v) четна.

⇐. Начнем путь в произвольной вершине a и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно.

• Так как все степени четны, наш путь обязательно закончится в вершине a. В результате получится цикл Z.

• Пусть G1, . . . , Gk — компоненты графа G − E(Z). Степени всех вершин каждой из компонент четны. Поэтому, в каждом графе Gi есть эйлеров цикл Zi .

• Поскольку граф G связен, то для каждого i ∈ [1..k] существует вершина ui ∈ V(Gi), лежащая на цикле Z. Тогда по вершине ui несложно состыковать циклы Z и Zi в один.

• Проделав такую операцию последовательно для циклов Z1, . . . , Zk , мы получим искомый эйлеров цикл в графе G.

Следствие

Связный граф G имеет эйлеров путь, если и только если в графе G нет вершин нечетной степени или таких вершин ровно две.

Доказательство.

⇒. Пусть ЭП имеет концы a и b. Если a = b, то наш путь — ЭЦ, а значит, степени всех вершин четны. Если же a ≠ b, то в графе ровно две вершины нечетной степени — концы пути a и b.

⇐. Количество вершин нечетной степени в графе четно. Если их нет, то в графе есть даже ЭЦ.

• Пусть в графе G ровно две вершины нечетной степени a и b. Добавим в граф ребро ab (если такое ребро есть, то добавим еще одно). Мы получили связный граф, в котором все вершины имеют четную степень и по теореме 2 есть ЭЦ C. Удалим из цикла C добавленное ребро ab и получим ЭП с концами a и b.

2. Лемма о преобразовании пути в цикл.

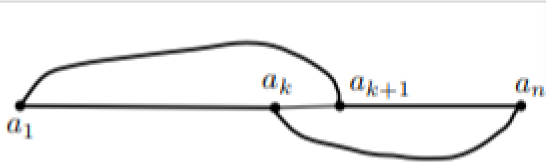
Определение

1) **Гамильтонов путь** в графе G — это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.
2) **Гамильтонов цикл** в графе G — это простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.
3) Граф называется гамильтоновым, если в нем есть гамильтонов цикл.

Лемма 1

Пусть n > 2, a1 . . . an — максимальный путь в графе G, причём d_G (a1) + d_G (an) ≥ n. Тогда в графе есть цикл длины n.

Доказательство



• Если вершины a1 и an смежны, то a1a2 . . . an — искомый цикл.
• Пусть a1 и an несмежны. Понятно, что N_G (a1), N_G (an) ⊂ {a2, . . . , an−1}.
• Пусть вершина an смежна с ak , а вершина a1 смежна с ak+1. Тогда в графе есть цикл из n вершин: a1a2 . . . ak anan−1 . . . ak+1 (см. рисунок).
• Пусть N_G (an) = {ai_1 , . . . , ai_ℓ }, тогда либо в графе есть цикл длины n, либо ai_1+1, . . . ai_ℓ+1 ∉ NG (a1), следовательно, dG (a1) ≤ n − 1 − dG (an).
• Противоречие завершает *доказательство леммы.*

3. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.

Теорема 2 (O. Ore, 1960.)

1) Если для любых двух несмежных вершин u, v ∈ V(G) выполняется d_G (u) + d_G (v) ≥ v(G) − 1, то в графе G есть гамильтонов путь.
2) Если v(G) > 2 и для любых двух несмежных вершин u, v ∈ V(G) выполняется d_G (u) + d_G (v) ≥ v(G), то в графе G есть гамильтонов цикл.

Доказательство.

1)
• Случай, когда в графе G ровно две вершины, очевиден. Далее пусть v(G) > 2.
• Граф G связен. (Пусть a и b — две несмежные вершины графа, тогда dG (a) + dG (b) ≥ v(G) − 1, откуда следует, что NG (a) ∩ NG (b) ≠ ∅, то есть, вершины a и b связаны.)
• Пусть a1 . . . an — наибольший простой путь графа G. Поскольку граф G связен и v(G) > 2, то n ≥ 3. Предположим, что n ≤ v(G) − 1.
• В графе есть цикл на n вершинах: при a_1a_n ∈ E(G) это очевидно, а при a_1a_n ∈/ E(G) мы имеем dG (a1) + dG (an) ≥ v(G) − 1 ≥ n и цикл существует по лемме 1 в графе G есть цикл Z из n вершин.
• Так как граф связен, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная хотя бы с одной из вершин цикла. Тогда и путь на n + 1 вершине, противоречие. Таким образом, в графе есть ГП.

2)
• Гамильтонов путь в графе уже есть по пункту 1. Пусть n = v(G) и это путь a1 . . . an.
• Если вершины a1 и an смежны, то a1 . . . an — ГЦ. Если a_1a_n ∈/ E(G), то dG (a1) + dG (an) ≥ v(G) = n и ГЦ есть по Лемме 1.

Следствие (G. A. Dirac, 1952.)

1) Если δ(G) ≥ (v(G)−1)/2 , то в графе G есть гамильтонов путь.
2) Если δ(G) ≥ v(G)/2 , то в графе G есть гамильтонов цикл.

4. Существование Гамильтонова пути и цикла: замыкание по Хваталу.

Лемма 2

Пусть ab ∉ E(G), dG (a) + dG (b) ≥ v(G). Тогда граф G — гамильтонов, если и только если граф G + ab —

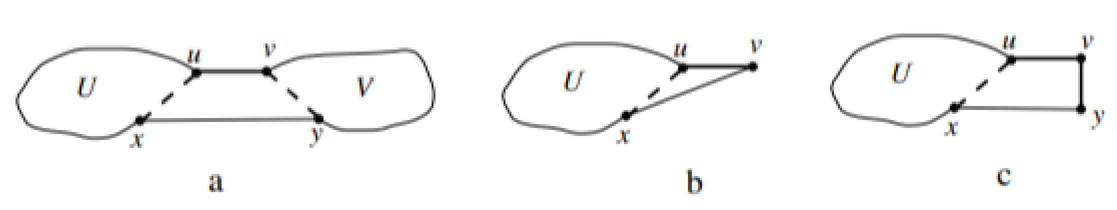
гамильтонов.
Доказательство.
⇒. Очевидно.
⇐. • Пусть граф G + ab — гамильтонов. Если ГЦ в графе G + ab не проходит по ребру ab, то этот цикл есть и в графе G.
• Пусть ГЦ в графе G + ab проходит по ребру ab. Тогда в графе G есть гамильтонов ab-путь. По лемме 1 в графе G существует ГЦ.
Определение
Рассмотрим произвольный граф G. Если существуют две несмежные вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, то добавим в граф ребро ab. Далее продолжим процесс с полученным графом, и так далее, до тех пор, пока это возможно. Полученный в результате граф назовем **замыканием** графа G и обозначим через C(G).
• Непосредственно из леммы 2 следует достаточно интересный результат:
Следствие (V. Chvatal, 1974.)
Граф G гамильтонов, если и только если его замыкание C(G) — гамильтонов граф.
• Найти гамильтонов цикл в замыкании обычно гораздо проще, чем в исходном графе.
Лемма 3
Замыкание графа G определено однозначно (не зависит от порядка добавления рёбер).
Доказательство.
• Пусть в результате двух разных цепочек добавления рёбер были получены различные графы G_1 и G_2.
• Тогда есть ребра, добавленные при построении G_1, которых не добавили при построении G_2. Рассмотрим такое ребро ab, добавленное самым первым. • Пусть G_0 — граф, к которому добавили ab. Тогда $d_{G_0}(a) + d_{G_0}(b) \geq v(G)$.
• Однако, все рёбра, которые добавили к G при построении G_0, добавлены и при построении G_2 (мы так выбрали ребро ab!). Поэтому, $d_{G_2}(a) + d_{G_2}(b) \geq v(G)$, а значит, процесс построения замыкания, давший нам G_2, не закончен: нужно добавить ребро ab. Противоречие.

5. Существование Гамильтонова цикла: критерий Хватала.

Теорема 3 (V. Chvatal, 1972)
Пусть $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ — последовательность степеней вершин графа G, а для каждого $i \in [1..n-1]$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n$. Тогда граф G — гамильтонов.
Доказательство.
• Докажем, что замыкание C(G) — гамильтонов граф.
• Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, причем $d_G(v_i) = d_i$. При $i + j \geq n$
$d_G(v_i) + d_G(v_j) = d_i + d_j \geq d_i + d_{n-i} \geq n$,
следовательно, вершины v_i и v_j смежны в C(G).
• Теперь легко построить ГЦ в C(G). При $n = 2m + 1$ он будет иметь вид $v_1 v_{2m} v_2 v_{2m-1} \dots v_m v_{m+1} v_{2m+1}$. При $n = 2m$ цикл будет иметь вид $v_1 v_{2m-1} v_2 v_{2m-2} \dots v_{m-1} v_{m+1} v_m v_{2m}$.

6. Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

Определение
Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на вершинах из V(G), в котором вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда $dist_G(x, y) \leq d$.
Теорема 4 (G. Chartrand, S. F. Kapoor, 1969.)
Для любого связного графа G с $v(G) \geq 3$ и ребра $e \in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e.
Доказательство.
• Достаточно доказать теорему для случая, когда G — дерево (иначе выделим остовное дерево, содержащее ребро e).
• Мы докажем утверждение индукцией по количеству вершин. База для дерева на трех или четырех вершинах очевидна (тогда G^3 — это полный граф).
• Пусть для меньших чем G всех деревьев теорема доказана.
• Пусть $e = uv$, тогда в графе $G - uv$ две компоненты связности $U \ni u$ и $V \ni v$. Пусть $G_u = G(U)$ и $G_v = G(V)$. НУО $|U| \geq 3$. Тогда в G^3_u есть ГЦ, содержащий инцидентное u ребро $ux \in E(G)$.
• Если $|V| \geq 3$, то аналогично мы построим ГЦ в графе G^3_v , содержащий инцидентное вершине v ребро $vy \in E(G)$ и соединим эти два цикла в один, заменив рёбра ux и vy на uv и xy, см. рисунок а (из $dist_G(x, y) = 3$ следует $xy \in E(G^3)$).



Остаются очевидные случаи, когда $|V| < 3$. При $V = \{v\}$ мы заменим в ГЦ графа G 3 u ребро ux на uv и vx (рис. b). При $V = \{v, y\}$, очевидно, $vy \in E(G)$ и мы заменим в ГЦ графа G 3 u ребро ux на uv, vy и yx (рис. c).

3. Паросочетания, независимые множества и покрытия

1. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

Определение

1) Множество вершин $U \subset V(G)$ называется **независимым**, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

2) Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется **паросочетанием**, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество рёбер в максимальном паросочетании графа G.

3) Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ **покрывает ребро** $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e. Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ **покрывает вершину** $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v.

4) **Паросочетание** M графа G называется **совершенным**, если оно покрывает все вершины графа.

5) Множество вершин $W \subset V(G)$ называется **вершинным покрытием**, если оно покрывает все рёбра графа. Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G.

6) Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется **рёберным покрытием**, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\beta'(G)$ количество рёбер в минимальном рёберном покрытии графа G.

Лемма 1

1) $U \subset V(G)$ — **независимое** множество, если и только если $V(G) \setminus U$ — вершинное покрытие.

2) $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$.

Доказательство.

2) $U \subset V(G)$ — максимальное независимое множество, если и только если $V(G) \setminus U$ — минимальное вершинное покрытие.

Теорема 1 (T. Gallai, 1959).

Пусть G — граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$.

Доказательство.

$\leq$. • Пусть M — максимальное паросочетание, U — множество не покрытых M вершин графа, тогда $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$. • Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество F из $|U|$ рёбер, покрывающее U.

• Тогда $M \cup F$ — покрытие, следовательно, $\beta'(G) \leq |M \cup F| = \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G)$, откуда $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq v(G)$.

$\geq$ • Пусть L — минимальное рёберное покрытие ($|L| = \beta'(G)$), а $H = (V(G), L)$.

• Так как в графе H нет вершин степени 0, в каждой компоненте графа H можно выбрать по ребру, в результате получится паросочетание N в графе H (а значит, и в G).

• Следовательно, $\alpha'(G) \geq |N| = c(H)$ и $\beta'(G) = |L| = e(H) \geq v(H) - c(H) = v(G) - c(H) \geq v(G) - \alpha'(G)$, откуда следует $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq v(G)$

2. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

Определение

Пусть M — паросочетание в графе G.

1) Назовём путь **M-чередующимся**, если в нём чередуются рёбра из M и рёбра, не входящие в M.

2) Назовём M-чередующийся путь **M-дополняющим**, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M.

• В M-дополняющем пути нечётное число рёбер, причем рёбер из паросочетания M на одно меньше, чем рёбер, не входящих в M.

Теорема 2 (C. Berge, 1957.)

Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда нет M-дополняющих путей.

Доказательство.

$\Rightarrow$. • Пусть в графе G существует M-дополняющий путь $S = a1a2 \dots a2k$. • Тогда заменим входящие в M рёбра $a2a3, \dots, a2k-2a2k-1$ на не входящие в M рёбра $a1a2, a3a4, \dots, a2k-1a2k$, и тем самым получим большее паросочетание. Противоречие.

$\Leftarrow$.

• Пусть M — не максимальное паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание M' , $|M'| > |M|$.

• Пусть $N = M \vartriangle M'$, $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in V(H)$ мы имеем $dH(v) \in \{1, 2\}$, следовательно, H — объединение нескольких путей и циклов. • В каждом из этих путей и циклов рёбра паросочетаний M и M′ чередуются. Так как рёбер из M′ в E(H) больше, хотя бы одна компонента P графа H — путь нечётной длины, в котором больше рёбер из M′ . Легко понять, что P — это M-дополняющий путь. Противоречие

3. Теорема Холла.

•Пусть $G = (V1, V2, E)$ — двудольный граф с долями $V1$ и $V2$.

Теорема 3 (P. Hall, 1935.)

В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли $V1$, если и только если для любого множества $U \subset V1$ выполняется $|U| \le |N_G(U)|$.

• Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы будем называть условием Холла для доли $V1$.

Доказательство.

$\Rightarrow$. Очевидно, так как концы рёбер паросочетания, покрывающих вершины из U — разные вершины из $N_G(U)$.

$\Leftarrow$. Индукция по количеству вершин в графе. База для $|V1| = 1$ очевидна. Предположим, что для меньшего чем G графа утверждение уже доказано. Разберём два случая.

Случай 1: существует такое непустое множество $A \subsetneq V1$, что $|A| = |N_G(A)|$.

• Введём обозначения $B = N_G(A)$, $A' = V1 \setminus A$, $B' = V2 \setminus B$. Пусть $G1 = G(A \cup B)$, $G2 = G(A' \cup B')$. • Очевидно, для двудольного графа $G1$ и его доли A выполняется условие Холла. По индукционному предположению в графе $G1$ существует паросочетание $M1$, покрывающее A.

• Проверим условие Холла для двудольного графа $G2$ и его доли A'. Рассмотрим $U \subset A'$. Тогда $|U| + |A| = |U \cup A| \le |N_G(U \cup A)| = |N_{G2}(U) \cup B| = |N_{G2}(U)| + |B| = |N_{G2}(U)| + |A|$, откуда следует $|U| \le |N_{G2}(U)|$.

• Значит, в графе $G2$ существует паросочетание $M2$, покрывающее все вершины из A'. Тогда $M1 \cup M2$ — паросочетание в G, покрывающее $V1$.

Случай 2: для любого непустого множества $A \subsetneq V1$ выполняется $|N_G(A)| > |A|$.

• Рассмотрим произвольную вершину $a \in V1$ и смежную с ней вершину $b \in V2$. • Пусть $G' = G - a - b$. Проверим условие Холла для двудольного графа G' и его доли $V1 \setminus \{a\}$. Для любого множества $A \subset V1 \setminus \{a\}$ выполняется $|A| \le |N_G(A)| - 1 \le |N_G(A) \setminus \{b\}| = |N_{G'}(A)|$.

• Поэтому в графе G' существует паросочетание, покрывающее $V1 \setminus \{a\}$. Вместе с ребром ab получаем искомое паросочетание.

4. Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.

Следствие 1

В двудольном графе $G = (V1, V2, E)$ все вершины из $V1$ имеют степени не меньше k, а все вершины $V2$ имеют степени не больше k. Тогда есть паросочетание, покрывающее $V1$.

Доказательство.

• Достаточно проверить условие Холла для доли $V1$. Пусть $A \subset V1(G)$, тогда из вершин A выходит не менее чем $k \cdot |A|$ рёбер к вершинам из $N_G(A)$, а в каждую вершину $b \in N_G(A)$ входит не более, чем k рёбер из вершин множества A. • Таким образом, $k|A| \le e_G(A, N_G(A)) \le k|N_G(A)|$, откуда $|A| \le |N_G(A)|$.

Следствие 2 (D. K¨onig, 1916.)

Пусть $G = (V1, V2, E)$ — регулярный двудольный граф степени k. Тогда G есть объединение k своих совершенных паросочетаний.

Доказательство.

• По Следствию 1 в G существует паросочетание M, покрывающее $V1$.

• Так как степени всех вершин равны по k, а каждое ребро соединяет $V1$ и $V2$, мы имеем $k|V1| = e(G) = k|V2|$. • Следовательно, $|V1| = |V2|$. Поэтому, паросочетание M покрывает и долю $V2$, то есть, M — совершенное. • $G - M$ — регулярный двудольный граф степени $k - 1$. Продолжая выделять совершенные паросочетания, мы разобьём граф G на k паросочетаний.

5. Теорема о гареме.

Теорема 4

В одной далекой стране проживают юноши $\{A_1, \dots, A_n\}$. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, юноша A_i хочет завести гарем из k_i знакомых ему девушек (естественно, $k_i \in \mathbb{N}$). Докажите, что они могут это одновременно сделать тогда и только тогда, когда для любого множества юношей количество знакомых хотя бы одному из них девушек не меньше, чем сумма желаемых ими размеров гаремов.

Доказательство.

• Построим двудольный граф $G = (V1, V2, E)$.

• Вершины доли $V1$ соответствуют юношам — каждому A_i соответствует k_i вершин $a_{i,1}, \dots, a_{i,k_i}$ (назовем их копиями A_i).

• Вершины доли $V2$ соответствуют девушкам. Каждая вершина $a_{i,j} \in V1$ соединена в точности с теми девушками из $V2$, с которыми знаком юноша A_i.

• Проверим, что для доли $V1$ выполнено условие Холла.

• Пусть $M \subset V1$, а $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ — все юноши, чьи копии есть в M. • Тогда $|N_G(M)| \ge k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в $N_G(M)$ входят все девушки, знакомые с $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$).

• В то же время, $|M| \le k_{i_1} + \dots + k_{i_m}$ (в M не может входить больше копий $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$, чем их существует).

• Таким образом, в G есть паросочетание, покрывающее V1.
• Для каждого Ai девушки, входящие в пары с его копиями, образуют гарем желаемого размера.

6. Теорема Кёнига и ее следствие.
7. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.
8. Теорема Татта о совершенном паросочетании.
9. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.
10. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$-регулярном графе и ее следствия о регулярных факто- рах.
11. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.
12. Дефицит графа. Формула Бержа.

4. Связность

1. Точки сочленения и блоки в связном графе. Лемма о пересечении блоков. Каждое ребро содержится в единственном блоке.
2. Дерево блоков и точек сочленения. Лемма о пути и теорема.
3. Крайние блоки.
4. Алгоритм построения блоков с помощью последовательных разрезов графа по точкам сочленения.
5. Рекурсивный алгоритм построения дерева блоков и точек сочленения.
6. Разбиение двусвязного графа на два связных графа заданных размеров.
7. Теорема Менгера в форме Гёринга (для двух множеств).
8. Следствие — две формы теоремы Менгера (для двух вершин и для вершины и множества).
9. Теорема Уитни.
10. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные k вершин.
11. Лемма о k-вершинном разделяющем множестве в k-связном графе.
12. Стягивание ребра в двусвязном графе без потери двусвязности.
13. Зависимые и независимые разделяющие множества.
14. Разбиение k-связного графа парой независимых разделяющих множеств: лемма о компонентах.
15. Стягивание ребра в трёхсвязном графе без потери трёхсвязности.

5. Раскраски

1. Хроматическое число, связь с числом независимости.

Определение

1) **Раскраской** вершин графа G в k цветов называется функция $\rho : V(G) \to M$, где $|M| = k$. Раскраска ρ называется **правильной**, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v.

2) Через $\chi(G)$ обозначим **хроматическое число** графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

Лемма 1

Для любого графа G выполняется $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq v(G)$.

Доказательство.

Все вершины одного цвета в правильной раскраске попарно несмежны, то есть образуют независимое множество.

2. Правильная раскраска связного графа с вершиной меньшей степени.

Лемма 2

Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \leq d$, причем хотя бы одна из вершин графа G имеет степень менее d. Тогда $\chi(G) \leq d$.

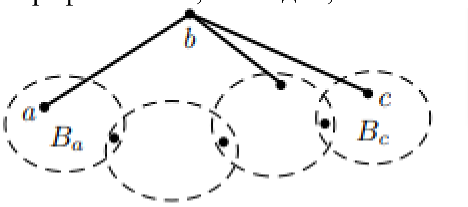
Доказательство.

• Индукция по количеству вершин. База для графа, у которого не более d вершин, очевидна.
• Будем считать, что утверждение верно для любого меньшего связного графа с меньшим чем v(G) количеством вершин.
• Пусть $u \in V(G)$ — вершина степени менее d. Рассмотрим граф $G - u$. Пусть $G1, \ldots, Gk$ — компоненты графа $G - u$.
• В каждом из графов $G1, \ldots, Gk$ ввиду связности графа G обязательно есть вершина ui , смежная в графе G с u.

• Тогда $d_{G_i}(u_i) < d$ и $\Delta(G_i) \le d$. По индукционному предположению существует правильная раскраска вершин графа G_i в d цветов.
• Таким образом, существует правильная раскраска вершин в d цветов и у графа $G - u$. Так как $d_G(u) < d$, мы можем докрасить в один из цветов вершину u, не нарушая правильности раскраски графа.

3. # Лемма о галочке.

Лемма 3
Если G — двусвязный неполный граф с $\delta(G) \ge 3$. Тогда существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связен.
Доказательство.
• Пусть G трёхсвязен. Так как G неполный, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$ и $ac \notin E(G)$. Граф $G - a - c$, очевидно, связен.



• Пусть G не трёхсвязен. Тогда существует такая вершина $b \in V(G)$, что граф $G' = G - b$ не двусвязен.
• Граф G' имеет хотя бы два крайних блока. Так как граф G двусвязен, вершина b должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной каждого крайнего блока графа G'. Пусть a и c — смежные с b внутренние вершины двух разных крайних блоков B_a и B_c графа G' соответственно.
• Тогда графы $B_a - a$ и $B_c - c$ связны, откуда легко следует связность графа $G' - a - c$. Так как $d_G(b) \ge 3$, вершина b смежна с $G' - a - c$, а значит, и граф $G - a - c$ связен.

4. # Теорема Брукса.

Теорема 1 (R. L. Brooks, 1941.)
Пусть $d \ge 3$, а G — связный граф, отличный от K_{d+1}, $\Delta(G) \le d$. Тогда $\chi(G) \le d$.
• При $\Delta(G) = 2$ вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо P_n (путь из n вершин), либо C_n (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что $\chi(P_n) = 2$, а во втором случае $\chi(C_{2k}) = 2$ и $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

5. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.

6. Хроматический многочлен графа.
7. Хроматический многочлен и компоненты связности.
8. Хроматический многочлен и блоки.
9. Кратность корня 0 хроматического многочлена.
10. Кратность корня 1 хроматического многочлена.