Вопросы по курсу теории графов. 2024-25 г

# Простейшие понятия

1. Граф, подграф. Вершина, окрестность, степень. Сумма степеней вершин графа.

Определение

Пусть G — граф. G = (V(G), E(G)), где V(G) — множество вершин графа G, а E(G) — множество ребер графа G.

Определение

Для любой вершины v ∈ V(G) через NG (v) мы будем обозначать окрестность вершины v — множество всех вершин графа G, смежных с v.

Определение

1) Для вершины x ∈ V(G) через dG (x) обозначим степень вершины x в графе G, то есть, количество рёбер графа G, инцидентных(имеющих конец в этой вершине) x.

2) Минимальную степень вершины графа G обозначим через δ(G), а максимальную степень вершины графа G — через ∆(G).

Лемма 1

1. Сумма степеней всех вершин графа G равна 2e(G).
2. Количество вершин нечетной степени в любом графе четно.

*Доказательство.*

Первое утверждение очевидно следует из того, что любое ребро имеет ровно два конца, а второе — из первого.

Определение

1) Граф H является **подграфом** графа G, если V(H) ⊂ V(G) и E(H) ⊂ E(G).

2) Подграф H графа G — **остовный**, если V(H) = V(G).

3) Пусть U ⊂ V(G). Через G(U) мы обозначим **индуцированный** подграф на множестве **вершин** U. Это означает, что V(G(U)) = U, а E(G(U)) состоит из всех рёбер множества E(G), оба конца которых лежат в U.

4) Пусть F ⊂ E(G). Через G(F) мы обозначим **индуцированный** подграф на множестве **рёбер** F. Это значит, что E(G(F)) = F, а V(G(F)) состоит из всех вершин множества V(G), инцидентных хотя бы одному ребру из F.

5) **Собственный** подграф графа G — это подграф, отличный от G.

1. Пути, циклы и маршруты. Лемма о выделении простого пути и цикла.

Определение

1) Последовательность вершин a1a2 . . . an и рёбер e1, . . . , en−1 графа G, где ei = aiai+1 для всех i ∈ [1..n − 1], называется **маршрутом**.

2) Мы будем говорить, что определенный выше маршрут проходит по рёбрам e1, . . . , en−1 и по вершинам a1, a2, . . . , an.

3) Маршрут называется замкнутым, если a1 = an.

• Отметим, что вершины и рёбра маршрута не обязательно различны.

Определение

1) **Путь** — это маршрут a1a2 . . . an, не проходящий ни по какому ребру дважды.

2) Вершину a1 назовём началом, а вершину an — концом пути.

3) Путь называется **простым**, если все вершины a1, . . . , an *различны*.

4) Длина пути — это количество его рёбер.

5) Если граф P — простой путь, то его внутренность Int(P) — это множество всех его вершин, отличных от начала и конца этого пути. Вершины из Int(P) называются внутренними вершинами пути P.

• Путь у нас — это одновременно последовательность вершин, в которой все пары соседних вершин соединены ребрами, а также подграф из этих вершин и рёбер. Эта двусмысленность в дальнейшем нисколько не помешает.

Определение

1) Пусть x, y ∈ V(G). Назовем xy-путем любой простой путь от x до y.

2) Пусть X, Y ⊂ V(G). Назовем XY -путем любой простой путь с началом в множестве X и концом в множестве Y , внутренние вершины которого не принадлежат множествам X и Y .

3) **Расстоянием** между вершинами x и y графа G называется длина наименьшего xy-пути. Обозначение: distG (x, y).

Определение

1) Цикл — это последовательность вершин a1a2 . . . an и различных рёбер e1, . . . , en графа G, где ei = aiai+1 для всех i ∈ [1..n] (мы считаем, что an+i = ai). Т.е. путь где a1=an.

2) Мы будем говорить, что определенный выше цикл проходит по рёбрам e1, . . . , en и по вершинам a1, a2, . . . , an.

3) Кроме того, мы будем говорить, что цикл — это подграф графа G, состоящий из вершин и рёбер, по которым этот цикл проходит.

4) Цикл называется простым, если все вершины a1, . . . , an различны.

5) Длина цикла — это количество его рёбер.

Лемма 2

1) Для любого цикла Z существует такой простой цикл Z ′ , что V(Z ′ ) ⊂ V(Z) и E(Z ′ ) ⊂ E(Z).

2) Если в графе есть нечетный цикл, то есть и простой нечетный цикл.

3) Из xy-пути можно выделить простой xy-путь.

*Доказательство.*

1) Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Участок между двумя посещениями b — искомый ПЦ.

2) Найдем первую повторившуюся вершину b (если она есть). Изменим порядок обхода нашего большого цикла Z в вершине b: разомкнем его на простой цикл Z ′ (как в пункте 1) и цикл Z1 из оставшихся рёбер цикла Z. Эти циклы имеют общую вершину v и e(Z) = e(Z1) + e(Z ′ ), а значит, либо e(Z ′ ) нечетно (тогда цикл Z ′ — искомый), либо e(Z1) нечетно, тогда продолжим рассуждения с меньшим нечетным циклом Z1.

3) Аналогично.

1. Лемма о длинном пути и цикле.

Лемма 3

1) в графе G есть простой путь длины хотя бы δ(G).

2) Если δ(G) ≥ 2, то в графе G есть простой цикл длины хотя бы δ(G) + 1.

*Доказательство.*

• Рассмотрим путь максимальной длины P = a1a2 . . . an в нашем графе G.

• Из его последней вершины an выходит хотя бы δ(G) − 1 ребер в вершины, отличные от an−1.

• Так как путь P нельзя продлить, вершина an смежна только с вершинами пути P.

• Следовательно, n − 2 ≥ δ(G) − 1. Так как длина пути равна n − 1, получаем то, что нужно.

2)

• Пусть am — вершина наименьшего номера, смежная с an.

• Тогда в множестве {am, . . . , an−1} лежат не менее dG (an) ≥ δ(G) ≥ 2 концов выходящих из an ребер.

• Cледовательно am ̸= an−1 и мы получаем цикл am . . . an−1an, в котором не менее δ(G) + 1 вершин.

1. Компоненты связности.

Определение

1) Вершины a и b графа G называются **связанными**, если в графе существует путь между ними.

2) Граф называется **связным**, если любые две его вершины связаны.

3) Множество U ⊂ V(G) называется **связным**, если граф G(U) связен.

4) **Компоненты связности** графа G — максимальные (по включению) связные множества вершин. Через c(G) обозначим их количество.

5) Будем называть компонентами графа G подграфы, индуцированные на его компонентах связности.

• Две различные компоненты связности графа не могут пересекаться, так как иначе все вершины их объединения попарно связаны, а значит, содержатся в одной компоненте связности.

• Множество вершин графа разбито на компоненты связности.

1. Дерево. Количество ребер дерева, выделение остовного дерева.

Определение

1) **Дерево** — это связный граф без циклов.

2) **Лес** — это граф без циклов.

3) Вершина x графа G, имеющая степень 1, называется **висячей вершиной** или **листом**.

• Все компоненты леса — это деревья. Таким образом, лес, как и положено, состоит из нескольких деревьев.

• Название “лист” для вершины степени 1 применяют, как правило, только в случае, когда граф — дерево.

Лемма 4

1) В дереве с n вершинами ровно n − 1 ребро.

2) У любого связного графа существует остовное дерево (то есть, остовный подграф, являющийся деревом).

Доказательство Леммы 4

1)

• Индукция по количеству вершин в дереве. База для дерева с одной вершиной очевидна.

• Рассмотрим дерево T с n ≥ 2 вершинами. По лемме 3 в графе, степени всех вершин которого не менее 2, есть цикл. Очевидно, у связного графа T на n ≥ 2 вершинах не может быть вершин степени 0. Значит, у дерева T есть висячая вершина a.

• Понятно, что граф T − a также связен и не имеет циклов, то есть, это дерево на n − 1 вершинах. По индукционному предположению мы имеем e(T − a) = n − 2, откуда очевидно следует, что e(T) = n − 1.

2)

• Если в графе есть цикл, то можно удалить из этого цикла ребро. Граф, очевидно, останется связным.

• Продолжим такие действия до тех пор, пока циклы не исчезнут. В результате мы получим связный граф без циклов, являющийся остовным подграфом исходного графа, то есть, остовное дерево этого графа.

Следствие

1) Дерево c более чем одной вершиной имеет не менее двух висячих вершин.

2) Для любого графа G выполнено e(G) ≥ v(G) − c(G).

*Доказательство.*

1) Если в дереве T не более одной висячей вершины, то остальные имеют степень хотя бы 2 и сумма степеней вершин не менее, чем 2v(T) − 1. Однако, она же равна 2e(T) = 2v(T) − 2 по пункту 1 леммы 4, противоречие.

2) По лемме 4 каждая компонента графа G имеет остовное дерево, у которого рёбер ровно на одно меньше чем вершин.

1. Единственность пути между вершинами дерева.

Лемма 5

Граф G является деревом, если и только если для любых двух вершин существует единственный простой путь, соединяющий их.

*Доказательство.*

⇐. Предположим, что в графе G существует единственный простой путь между любыми двумя вершинами. Тогда граф связен. Если в графе есть цикл, то между любыми двумя вершинами цикла существуют как минимум два простых пути. Значит, G — дерево.

⇒.

• Пусть G — дерево. Между любыми двумя его вершинами есть путь.

• Пусть существует два разных простых ab-пути P1 и P2. Отрежем общие начала этих путей: предположим, что они начинаются в вершине c и их первые рёбра не совпадают.

• Пойдем по пути P1 до первого пересечения c P2 в вершине d (понятно, что такая вершина есть, так как у путей общий конец b). Мы получили два простых cd-пути без общих внутренних вершин, которые образуют цикл, противоречие.

1. Нормальное остовное дерево.

Определение

Пусть G — связный граф, a ∈ V(G). Остовное дерево T называется нормальным деревом с корнем a, если для любого ребра xy ∈ E(G) либо x лежит на ay-пути дерева T, либо y лежит на ax-пути дерева T.

Теорема 1

Пусть G — связный граф, a ∈ V(G). Тогда у графа G существует нормальное остовное дерево с корнем a. *Доказательство.*

• Индукция по v(G).

База для графов с 1 или 2 вершинами очевидна.

Переход.

• Предположим, что для меньших чем G графов теорема уже доказана.

• Пусть U1, . . . ,Um — все компонеты связности графа G − a, Gi = G(Ui). • Для каждого i ∈ [1..m] отметим вершину ai ∈ Ui ∩ NG (a) и построим нормальное остовное дерево Ti графа Gi с корнем ai .

• После этого соединим a c a1, . . . , am и получим остовное дерево T исходного графа.

• Пусть xy ∈ E(G). Если обе вершины x и y отличны от a, то они лежат в одной из компонент связности Ui (так как рёбер между разными компонентами нет), а значит, свойство для ребра xy выполнено по индукционному предположению для Ti (если, скажем, x лежит на ai y-пути по Ti , то x лежит и на ay-пути по T).

• Если же x = a, то доказываемое свойство для ребра xy очевидно.

1. Радиус, диаметр и центр графа. Дерево поиска в ширину.

Определение

1) **Диаметром** d(G) графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами.

2) **Эксцентриситетом** вершины v называется величина e(v) = maxu∈V (G) dist(u, v).

3) **Радиусом** r(G) графа G называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.

4) **Центром** графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

Лемма 6

r(G) ≤ d(G) ≤ 2r(G).

Доказательство.

• Неравенство r(G) ≤ d(G) очевидно.

• Пусть ab-путь D — это диаметр графа, а c — центр. Тогда существуют ac-путь Qa и bc-путь Qb с e(Qa) = dist(a, c) ≤ r и e(Qb) = dist(c, b) ≤ r.

• Так как D — кратчайший ab-путь, а aQacQbb — какой-то ab-путь, имеем d = e(D) ≤ e(Qa) + e(Qb) = 2r.

Подвешивание графа за вершину, или дерево поиска в ширину

• Далее неоднократно будет использоваться термин “подвесить (связный) граф за вершину”. Вот что будет под этим подразумеваться.

• Одна из вершин a связного графа G объявляется корнем и составляет множество вершин уровня 0 (назовем его L0). Остальные вершины разбиваются на уровни так: в уровень Lk попадают все вершины, находящиеся на расстоянии k от корня a. Каждая вершина уровня k присоединяется к одной из смежных с ней вершин уровня k − 1.

• В результате получается дерево, часто бывает удобно ориентировать его рёбра от меньшего уровня к большему. Таким образом, разбиение на уровни единственно, а само дерево — нет.

• Количество уровней в построенном выше дереве равно e(a) — эксцентриситету вершины a.

• Наименьшее количество уровней достигается в случае, когда a — центр графа G, и равно r(G)

Лемма 7

Рёбра графа G могут соединять либо вершины соседних уровней, либо одного и того же уровня. *Доказательство.*

Пусть ребро xy ∈ E(G) соединяет вершину x ∈ Lk с y ∈ Lm и m > k. Тогда m = distG (a, y) ≤ distG (a, x) + 1 = k + 1.

1. Двудольный граф. Критерий двудольности.

Определение

Граф называется **двудольным**, если его вершины можно разбить на два множества, внутри которых нет рёбер (эти множества называются долями).

• Часто бывает удобно, говоря от двудольном графе, разбивать его вершины на две доли — множества попарно несмежных вершин, имеющих в правильной двуцветной раскраске один и тот же цвет. Таким образом, двудольный граф G представим в виде (V1(G), V2(G), E(G)), где рёбра соединяют вершины из разных долей. Такое представление двудольного графа может быть не единственным.

Теорема 2

Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не имеет циклов нечетной длины.

*Доказательство теоремы 2*

⇒. Очевидно, так как цикл нечетной длины невозможно правильным образом покрасить в два цвета.

⇐. Можно считать, что наш граф G связен, иначе докажем утверждение отдельно для каждой компоненты.

• Подвесим граф за любую вершину a, назовем полученное дерево T. Первую долю образуют вершины на нечетном расстоянии от a, а вторую — сама a и вершины на четном расстоянии от a.

• Предположим, что две смежные вершины x и y попали в одну долю. Рассмотрим простые пути Px и Py в дереве T от a до x и y. В дереве такие пути единственны и имеют одинаковую четность, то есть, в сумме дают четное число.

• Отрежем от Px и Py их общее начало (если такое есть) и получим xy-путь четной длины, который, очевидно, не содержит ребра xy. При добавлении этого ребра образуется нечетный цикл, противоречие. Таким образом, граф без нечетных циклов является двудольным.

# Пути и циклы

1. Эйлеров путь и цикл в графе.

Определение

1) **Эйлеров путь** в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

2) **Эйлеров цикл** в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

3) Граф G — эйлеров, если в нём есть эйлеров цикл.

• Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

Теорема 1

Связный граф G — эйлеров, если и только если степени всех вершин G четны.

*Доказательство теоремы 1*

⇒. Каждый раз, проходя через вершину v, эйлеров цикл проходит по двум ребрам, поэтому dG (v) четна.

⇐. Начнем путь в произвольной вершине a и будем идти, удаляя из графа пройденные ребра, пока это возможно.

• Так как все степени четны, наш путь обязательно закончится в вершине a. В результате получится цикл Z.

• Пусть G1, . . . , Gk — компоненты графа G − E(Z). Степени всех вершин каждой из компонент четны. Поэтому, в каждом графе Gi есть эйлеров цикл Zi .

• Поскольку граф G связен, то для каждого i ∈ [1..k] существует вершина ui ∈ V(Gi), лежащая на цикле Z. Тогда по вершине ui несложно состыковать циклы Z и Zi в один.

• Проделав такую операцию последовательно для циклов Z1, . . . , Zk , мы получим искомый эйлеров цикл в графе G.

Следствие

Связный граф G имеет эйлеров путь, если и только если в графе G нет вершин нечетной степени или таких вершин ровно две.

*Доказательство*.

⇒. Пусть ЭП имеет концы a и b. Если a = b, то наш путь — ЭЦ, а значит, степени всех вершин четны. Если же a ̸= b, то в графе ровно две вершины нечетной степени — концы пути a и b.

⇐. Количество вершин нечетной степени в графе четно. Если их нет, то в графе есть даже ЭЦ.

• Пусть в графе G ровно две вершины нечетной степени a и b. Добавим в граф ребро ab (если такое ребро есть, то добавим еще одно). Мы получили связный граф, в котором все вершины имеют четную степень и по теореме 2 есть ЭЦ C. Удалим из цикла C добавленное ребро ab и получим ЭП с концами a и b.

1. Лемма о преобразовании пути в цикл.

Определение

1) Г**амильтонов путь** в графе G — это простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

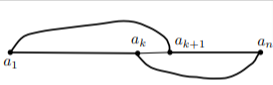
2) **Гамильтонов цикл** в графе G — это простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.

3) Граф называется гамильтоновым, если в нем есть гамильтонов цикл.

Лемма 1

Пусть n > 2, a1 . . . an — максимальный путь в графе G, причём dG (a1) + dG (an) ≥ n. Тогда в графе есть цикл длины n.

*Доказательство*

**

• Если вершины a1 и an смежны, то a1a2 . . . an — искомый цикл.

• Пусть a1 и an несмежны. Понятно, что NG (a1), NG (an) ⊂ {a2, . . . , an−1}.

• Пусть вершина an смежна с ak , а вершина a1 смежна с ak+1. Тогда в графе есть цикл из n вершин: a1a2 . . . ak anan−1 . . . ak+1 (см. рисунок).

• Пусть NG (an) = {ai1 , . . . , aiℓ }, тогда либо в графе есть цикл длины n, либо ai1+1, . . . aiℓ+1 ̸∈ NG (a1), следовательно, dG (a1) ≤ n − 1 − dG (an).

• Противоречие завершает *доказательство леммы.*

1. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.

Теорема 2 (O. Ore, 1960.)

1) Если для любых двух несмежных вершин u, v ∈ V(G) выполняется dG (u) + dG (v) ≥ v(G) − 1, то в графе G есть гамильтонов путь.

2) Если v(G) > 2 и для любых двух несмежных вершин u, v ∈ V(G) выполняется dG (u) + dG (v) ≥ v(G), то в графе G есть гамильтонов цикл.

*Доказательство*.

1)

• Случай, когда в графе G ровно две вершины, очевиден. Далее пусть v(G) > 2.

• Граф G связен. (Пусть a и b — две несмежные вершины графа, тогда dG (a) + dG (b) ≥ v(G) − 1, откуда следует, что NG (a) ∩ NG (b) ̸= ∅, то есть, вершины a и b связаны.)

• Пусть a1 . . . an — наибольший простой путь графа G. Поскольку граф G связен и v(G) > 2, то n ≥ 3.

Предположим, что n ≤ v(G) − 1.

• В графе есть цикл на n вершинах: при a1an ∈ E(G) это очевидно, а при a1an ∈/ E(G) мы имеем dG (a1) + dG (an) ≥ v(G) − 1 ≥ n и цикл существует по лемме 1 в графе G есть цикл Z из n вершин.

• Так как граф связен, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная хотя бы с одной из вершин цикла. Тогда и путь на n + 1 вершине, противоречие. Таким образом, в графе есть ГП.

2)

• Гамильтонов путь в графе уже есть по пункту 1. Пусть n = v(G) и это путь a1 . . . an.

• Если вершины a1 и an смежны, то a1 . . . an — ГЦ. Если a1an ∈/ E(G), то dG (a1) + dG (an) ≥ v(G) = n и ГЦ есть по Лемме 1.

Следствие (G. A. Dirac, 1952.)

1) Если δ(G) ≥ (v(G)−1)/2 , то в графе G есть гамильтонов путь.

2) Если δ(G) ≥ v(G)/2 , то в графе G есть гамильтонов цикл.

1. Существование Гамильтонова пути и цикла: замыкание по Хваталу.

Лемма 2

Пусть ab ̸∈ E(G), dG (a) + dG (b) ≥ v(G). Тогда граф G — гамильтонов, если и только если граф G + ab — гамильтонов.

*Доказательство*.

⇒. Очевидно.

⇐. • Пусть граф G + ab — гамильтонов. Если ГЦ в графе G + ab не проходит по ребру ab, то этот цикл есть и в графе G.

• Пусть ГЦ в графе G + ab проходит по ребру ab. Тогда в графе G есть гамильтонов ab-путь. По лемме 1 в графе G существует ГЦ.

Определение

Рассмотрим произвольный граф G. Если существуют две несмежные вершины a, b ∈ V(G), для которых dG (a) + dG (b) ≥ v(G), то добавим в граф ребро ab. Далее продолжим процесс с полученным графом, и так далее, до тех пор, пока это возможно. Полученный в результате граф назовем **замыканием** графа G и обозначим через C(G).

• Непосредственно из леммы 2 следует достаточно интересный результат:

Следствие (V. Chvatal, 1974.)

Граф G гамильтонов, если и только если его замыкание C(G) — гамильтонов граф.

• Найти гамильтонов цикл в замыкании обычно гораздо проще, чем в исходном графе.

Лемма 3

Замыкание графа G определено однозначно (не зависит от порядка добавления рёбер).

*Доказательство*.

• Пусть в результате двух разных цепочек добавления рёбер были получены различные графы G1 и G2.

• Тогда есть ребра, добавленные при построении G1, которых не добавили при построении G2. Рассмотрим такое ребро ab, добавленное самым первым. • Пусть G0 — граф, к которому добавили ab. Тогда dG0 (a) + dG0 (b) ≥ v(G).

• Однако, все рёбра, которые добавили к G при построении G0, добавлены и при построении G2 (мы так выбрали ребро ab!). Поэтому, dG2 (a) + dG2 (b) ≥ v(G), а значит, процесс построения замыкания, давший нам G2, не закончен: нужно добавить ребро ab. Противоречие.

1. Существование Гамильтонова цикла: критерий Хватала.

Теорема 3 (V. Chvatal, 1972)

Пусть d1 ≤ d2 ≤ · · · ≤ dn — последовательность степеней вершин графа G, а для каждого i ∈ [1..n − 1] выполняется неравенство di + dn−i ≥ n. Тогда граф G — гамильтонов.

*Доказательство*.

• Докажем, что замыкание C(G) — гамильтонов граф.

• Пусть V(G) = {v1, . . . , vn}, причем dG (vi) = di . При i + j ≥ n

dG (vi) + dG (vj) = di + dj ≥ di + dn−i ≥ n,

следовательно, вершины vi и vj смежны в C(G).

• Теперь легко построить ГЦ в C(G). При n = 2m + 1 он будет иметь вид v1v2mv2v2m−1 . . . vmvm+1v2m+1. При n = 2m цикл будет иметь вид v1v2m−1v2v2m−2 . . . vm−1vm+1vmv2m.

1. Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

Определение

Для графа G и натурального числа d обозначим через Gd граф на вершинах из V(G), в котором вершины x и y смежны тогда и только тогда, когда distG (x, y) ≤ d.

Теорема 4 (G. Chartrand, S. F. Kapoor, 1969.)

Для любого связного графа G с v(G) ≥ 3 и ребра e ∈ E(G) в графе G3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e.

*Доказательство*.

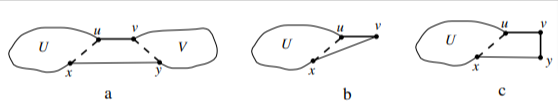
• Достаточно доказать теорему для случая, когда G — дерево (иначе выделим остовное дерево, содержащее ребро e).

• Мы докажем утверждение индукцией по количеству вершин. База для дерева на трех или четырех вершинах очевидна (тогда G3 — это полный граф).

• Пусть для меньших чем G всех деревьев теорема доказана.

• Пусть e = uv, тогда в графе G − uv две компоненты связности U ∋ u и V ∋ v. Пусть Gu = G(U) и Gv = G(V). НУО |U| ≥ 3. Тогда в G3u есть ГЦ, содержащий инцидентное u ребро ux ∈ E(G).

• Если |V| ≥ 3, то аналогично мы построим ГЦ в графе G3v , содержащий инцидентное вершине v ребро vy ∈ E(G) и соединим эти два цикла в один, заменив рёбра ux и vy на uv и xy, см. рисунок a (из distG (x, y) = 3 следует xy ∈ E(G 3 )).



Остаются очевидные случаи, когда |V| < 3. При V = {v} мы заменим в ГЦ графа G 3 u ребро ux на uv и vx (рис. b). При V = {v, y}, очевидно, vy ∈ E(G) и мы заменим в ГЦ графа G 3 u ребро ux на uv, vy и yx (рис. c).

# Паросочетания, независимые множества и покрытия

1. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

Определение

1) Множество вершин U ⊂ V(G) называется **независимым**, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через α(G) количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

2) Множество рёбер M ⊂ E(G) называется **паросочетанием**, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через α ′ (G) количество рёбер в максимальном паросочетании графа G.

3) Будем говорить, что множество вершин W ⊂ V(G) **покрывает** **ребро** e ∈ E(G), если существует вершина w ∈ W , инцидентная e. Будем говорить, что множество рёбер F ⊂ E(G) **покрывает вершину** v ∈ V(G), если существует ребро f ∈ F, инцидентное v.

4) **Паросочетание** M графа G называется **совершенным**, если оно покрывает все вершины графа.

5) Множество вершин W ⊂ V(G) называется **вершинным покрытием**, если оно покрывает все рёбра графа. Обозначим через β(G) количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G.

6) Множество рёбер F ⊂ E(G) называется **рёберным покрытием**, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через β ′ (G) количество рёбер в минимальном рёберном покрытии графа G.

Лемма 1

1) U ⊂ V(G) — **независимое** множество, если и только если V(G) \ U — вершинное покрытие.

2) α(G) + β(G) = v(G).

*Доказательство*.

*2)* U ⊂ V(G) — максимальное независимое множество, если и только если V(G) \ U — минимальное вершинное покрытие.

Теорема 1 (T. Gallai, 1959).

Пусть G — граф с δ(G) > 0. Тогда α ′ (G) + β ′ (G) = v(G).

*Доказательство*.

≤. • Пусть M — максимальное паросочетание, U — множество не покрытых M вершин графа, тогда |U| = v(G) − 2α ′ (G). • Так как δ(G) > 0, можно выбрать множество F из |U| рёбер, покрывающее U.

• Тогда M ∪ F — покрытие, следовательно, β ′ (G) ≤ |M ∪ F| = α ′ (G) + v(G) − 2α ′ (G), откуда α ′ (G) + β ′ (G) ≤ v(G).

≥ • Пусть L — минимальное рёберное покрытие (|L| = β ′ (G)), а H = (V(G), L).

• Так как в графе H нет вершин степени 0, в каждой компоненте графа H можно выбрать по ребру, в результате получится паросочетание N в графе H (а значит, и в G).

• Следовательно, α ′ (G) ≥ |N| = c(H) и β ′ (G) = |L| = e(H) ≥ v(H) − c(H) = v(G) − c(H) ≥ v(G) − α ′ (G), откуда следует α ′ (G) + β ′ (G) ≥ v(G)

1. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

Определение

Пусть M — паросочетание в графе G.

1) Назовём путь **M-чередующимся**, если в нём чередуются рёбра из M и рёбра, не входящие в M.

2) Назовём M-чередующийся путь **M-дополняющим**, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M. • В M-дополняющем пути нечётное число рёбер, причем рёбер из паросочетания M на одно меньше, чем рёбер, не входящих в M.

Теорема 2 (C. Berge, 1957.)

Паросочетание M в графе G является максимальным тогда и только тогда, когда нет M-дополняющих путей.

*Доказательство.*

⇒. • Пусть в графе G существует M-дополняющий путь S = a1a2 . . . a2k . • Тогда заменим входящие в M рёбра a2a3,. . . , a2k−2a2k−1 на не входящие в M рёбра a1a2, a3a4,. . . , a2k−1a2k , и тем самым получим большее паросочетание. Противоречие.

⇐.

• Пусть M — не максимальное паросочетание, тогда рассмотрим максимальное паросочетание M′ , |M′ | > |M|.

• Пусть N = M △ M′ , H = G(N). Для любой вершины v ∈ V(H) мы имеем dH(v) ∈ {1, 2}, следовательно, H — объединение нескольких путей и циклов. • В каждом из этих путей и циклов рёбра паросочетаний M и M′ чередуются. Так как рёбер из M′ в E(H) больше, хотя бы одна компонента P графа H — путь нечётной длины, в котором больше рёбер из M′ . Легко понять, что P — это M-дополняющий путь. Противоречие

1. Теорема Холла.

•Пусть G = (V1, V2, E) — двудольный граф с долями V1 и V2.

Теорема 3 (P. Hall, 1935.)

В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли V1, если и только если для любого множества U ⊂ V1 выполняется |U| ≤ |NG (U)|.

• Условие о размере окрестности из теоремы Холла мы будем называть условием Холла для доли V1. *Доказательство*.

⇒. Очевидно, так как концы рёбер паросочетания, покрывающих вершины из U — разные вершины из NG (U). ⇐. Индукция по количеству вершин в графе. База для |V1| = 1 очевидна. Предположим, что для меньшего чем G графа утверждение уже доказано. Разберём два случая.

*Случай 1: существует такое непустое множество A ⊊ V1, что |A| = |NG (A)|.*

• Введём обозначения B = NG (A), A ′ = V1 \ A, B ′ = V2 \ B. Пусть G1 = G(A ∪ B), G2 = G(A ′ ∪ B ′ ). • Очевидно, для двудольного графа G1 и его доли A выполняется условие Холла. По индукционному предположению в графе G1 существует паросочетание M1, покрывающее A.

• Проверим условие Холла для двудольного графа G2 и его доли A ′ . Рассмотрим U ⊂ A ′ . Тогда |U| + |A| = |U ∪ A| ≤ |NG (U ∪ A)| = |NG2 (U) ∪ B| = |NG2 (U)| + |B| = |NG2 (U)| + |A|, откуда следует |U| ≤ |NG2 (U)|.

• Значит, в графе G2 существует паросочетание M2, покрывающее все вершины из A ′ . Тогда M1 ∪ M2 — паросочетание в G, покрывающее V1.

*Случай 2: для любого непустого множества A ⊊ V1 выполняется |NG (A)| > |A|.*

• Рассмотрим произвольную вершину a ∈ V1 и смежную с ней вершину b ∈ V2. • Пусть G ′ = G − a − b. Проверим условие Холла для двудольного графа G ′ и его доли V1 \ {a}. Для любого множества A ⊂ V1 \ {a} выполняется |A| ≤ |NG (A)| − 1 ≤ |NG (A) \ {b}| = |NG′(A)|.

• Поэтому в графе G ′ существует паросочетание, покрывающее V1 \ {a}. Вместе с ребром ab получаем искомое паросочетание.

1. Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.

Следствие 1

В двудольном графе G = (V1, V2, E) все вершины из V1 имеют степени не меньше k, а все вершины V2 имеют степени не больше k. Тогда есть паросочетание, покрывающее V1.

*Доказательство.*

• Достаточно проверить условие Холла для доли V1. Пусть A ⊂ V1(G), тогда из вершин A выходит не менее чем k · |A| рёбер к вершинам из NG (A), а в каждую вершину b ∈ NG (A) входит не более, чем k рёбер из вершин множества A. • Таким образом, k|A| ≤ eG (A, NG (A)) ≤ k|NG (A)|, откуда |A| ≤ |NG (A)|.

Следствие 2 (D. K¨onig, 1916.)

Пусть G = (V1, V2, E) — регулярный двудольный граф степени k. Тогда G есть объединение k своих совершенных паросочетаний.

*Доказательство*.

• По Следствию 1 в G существует паросочетание M, покрывающее V1.

• Так как степени всех вершин равны по k, а каждое ребро соединяет V1 и V2, мы имеем k|V1| = e(G) = k|V2|. • Следовательно, |V1| = |V2|. Поэтому, паросочетание M покрывает и долю V2, то есть, M — совершенное. • G − M — регулярный двудольный граф степени k − 1. Продолжая выделять совершенные паросочетания, мы разобьём граф G на k паросочетаний.

1. Теорема о гареме.

Теорема 4

В одной далекой стране проживают юноши {A1, . . . , An}. Для каждого i ∈ {1, . . . , n}, юноша Ai хочет завести гарем из ki знакомых ему девушек (естественно, ki ∈ N). Докажите, что они могут это одновременно сделать тогда и только тогда, когда для любого множества юношей количество знакомых хотя бы одному из них девушек не меньше, чем сумма желаемых ими размеров гаремов.

*Доказательство*.

• Построим двудольный граф G = (V1, V2, E).

• Вершины доли V1 соответствуют юношам — каждому Ai соответствует ki вершин ai,1, . . . , ai,ki (назовем их копиями Ai).

• Вершины доли V2 соответствуют девушкам. Каждая вершина ai,j ∈ V1 соединена в точности с теми девушками из V2, с которыми знаком юноша Ai .

• Проверим, что для доли V1 выполнено условие Холла.

• Пусть M ⊂ V1, а Ai1 , . . . , Aim — все юноши, чьи копии есть в M. • Тогда |NG (M)| ≥ ki1 + · · · + kim (в NG (M) входят все девушки, знакомые с Ai1 , . . . , Aim ).

• В то же время, |M| ≤ ki1 + · · · + kim (в M не может входить больше копий Ai1 , . . . , Aim , чем их существует). • Таким образом, в G есть паросочетание, покрывающее V1.

• Для каждого Ai девушки, входящие в пары с его копиями, образуют гарем желаемого размера.

1. Теорема Кёнига и ее следствие.
2. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.
3. Теорема Татта о совершенном паросочетании.
4. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.
5. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в 2*k*-регулярном графе и ее следствия о регулярных факто- рах.
6. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.
7. Дефицит графа. Формула Бержа.

# Связность

1. Точки сочленения и блоки в связном графе. Лемма о пересечении блоков. Каждое ребро содержится в единственном блоке.
2. Дерево блоков и точек сочленения. Лемма о пути и теорема.
3. Крайние блоки.
4. Алгоритм построения блоков с помощью последовательных разрезов графа по точкам сочленения.
5. Рекурсивный алгоритм построения дерева блоков и точек сочленения.
6. Разбиение двусвязного графа на два связных графа заданных размеров.
7. Теорема Менгера в форме Гёринга (для двух множеств).
8. Следствие — две формы теоремы Менгера (для двух вершин и для вершины и множества).
9. Теорема Уитни.
10. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные *k* вершин.
11. Лемма о *k*-вершинном разделяющем множестве в *k*-связном графе.
12. Стягивание ребра в двусвязном графе без потери двусвязности.
13. Зависимые и независимые разделяющие множества.
14. Разбиение *k*-связного графа парой независимых разделяющих множеств: лемма о компонентах.
15. Стягивание ребра в трёхсвязном графе без потери трёхсвязности.

# Раскраски

1. Хроматическое число, связь с числом независимости.

Определение

1) **Раскраской** вершин графа G в k цветов называется функция ρ : V(G) → M, где |M| = k. Раскраска ρ называется **правильной**, если ρ(v) ̸= ρ(u) для любой пары смежных вершин u и v.

2) Через χ(G) обозначим **хроматическое число** графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

Лемма 1

Для любого графа G выполняется χ(G) · α(G) ≥ v(G).

*Доказательство*.

Все вершины одного цвета в правильной раскраске попарно несмежны, то есть образуют независимое множество.

1. Правильная раскраска связного графа с вершиной меньшей степени.

Лемма 2

Пусть G — связный граф, ∆(G) ≤ d, причем хотя бы одна из вершин графа G имеет степень менее d. Тогда χ(G) ≤ d.

*Доказательство*.

• Индукция по количеству вершин. База для графа, у которого не более d вершин, очевидна.

• Будем считать, что утверждение верно для любого меньшего связного графа с меньшим чем v(G) количеством вершин.

• Пусть u ∈ V(G) — вершина степени менее d. Рассмотрим граф G − u. Пусть G1, . . . , Gk — компоненты графа G − u.

• В каждом из графов G1, . . . , Gk ввиду связности графа G обязательно есть вершина ui , смежная в графе G с u.

• Тогда dGi (ui) < d и ∆(Gi) ≤ d. По индукционному предположению существует правильная раскраска вершин графа Gi в d цветов.

• Таким образом, существует правильная раскраска вершин в d цветов и у графа G − u. Так как dG (u) < d, мы можем докрасить в один из цветов вершину u, не нарушая правильности раскраски графа.

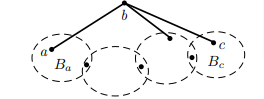
1. Лемма о галочке.

Лемма 3

Если G — двусвязный неполный граф с δ(G) ≥ 3. Тогда существуют такие вершины a, b, c ∈ V(G), что ab, bc ∈ E(G), ac ∈/ E(G) и граф G − a − c связен.

*Доказательство*.

• Пусть G трёхсвязен. Так как G неполный, существуют такие вершины a, b, c ∈ V(G), что ab, bc ∈ E(G) и ac ∈/ E(G). Граф G − a − c, очевидно, связен.



• Пусть G не трёхсвязен. Тогда существует такая вершина b ∈ V(G), что граф G ′ = G − b не двусвязен.

• Граф G ′ имеет хотя бы два крайних блока. Так как граф G двусвязен, вершина b должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной каждого крайнего блока графа G ′ . Пусть a и c — смежные с b внутренние вершины двух разных крайних блоков Ba и Bc графа G ′ соответственно.

• Тогда графы Ba − a и Bc − c связны, откуда легко следует связность графа G ′ − a − c. Так как dG (b) ≥ 3, вершина b смежна с G ′ − a − c, а значит, и граф G − a − c связен.

1. Теорема Брукса.

Теорема 1 (R. L. Brooks, 1941.)

Пусть d ≥ 3, а G — связный граф, отличный от Kd+1, ∆(G) ≤ d. Тогда χ(G) ≤ d.

• При ∆(G) = 2 вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо Pn (путь из n вершин), либо Cn (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что χ(Pn) = 2, а во втором случае χ(C2k ) = 2 и χ(C2k+1) = 3.

1. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.
2. Xроматический многочлен графа.
3. Хроматический многочлен и компоненты связности.
4. Хроматический многочлен и блоки.
5. Кратность корня 0 хроматического многочлена.
6. Кратность корня 1 хроматического многочлена.

# Планарные графы

1. Изображение графа на плоскости, грань.

Определение

Граф называется **планарным**, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

Определение

**Плоским** графом (или плоским изображением) мы будем называть конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.

• Таким образом, планарному графу могут соответствовать разные плоские графы.

• Изображение плоского графа делит плоскости на части — **грани**. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.

• На плоскости изображен плоский граф G. Пусть M — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение G.

• Пусть запись A ∼ B означает, что точки A,B ∈ M можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа G. Укажем три важных свойства ∼.

Утверждение

∼ —отношение эквивалентности.

*Доказательство*.

• Рефлексивность. A ∼ A

• Симметричность. Если A ∼ B, то B ∼ A.

• Транзитивность. Если A ∼ B и B ∼ C, то A ∼ C

Определение

**Грани** плоского графа G — классы эквивалентности по отшению ∼.

• Таким образом, все точки плоскости, не лежащие на изображении графа G, разбиты на грани.

• Две точки из одной грани графа G могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение G.

• Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение G.

1. Теорема Жордана для замкнутой ломаной.

Теорема 1 (C.Jordan, 1887.)

Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P, на две такие части, что выполнены следующие условия:

(1) любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P;

(2) любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P.

*Доказательство.*

• Пусть P1 ...Pm — вершины P в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через M множество всех точек плоскости, не лежащих на P.

• Зафиксируем на плоскости вектор ℓ, не параллельный ни одной из сторон P. Из каждой точки A ∈ M выпустим луч ℓ(A) в направлении ℓ. • В случае, если ℓ(A) содержит вершину Pi многоугольника P, но стороны Pi−1Pi и PiPi+1 лежат в одной полуплоскости относительно содержащей ℓ(A) прямой, мы будем говорить, что многоугольник P в вершине Pi касается ℓ(A).

• Посчитаем число p(A) точек пересечения ℓ(A) с P, не являющихся касаниями. Очевидно, что p(A) конечно.

• Часть M0 будет состоять из всех точек A ∈ M, для которых p(A) четно, а часть M1 будет состоять из всех точек B ∈ M, для которых p(B) нечетно.

Утверждение

M0 и M1 непусты.

*Доказательство.*

• Рассмотрим прямую ℓ0, параллельную вектору ℓ, и проходящую через внутреннюю точку ломаной P (то есть через, не являющуюся ее вершиной).

• При движении по ℓ0 в направлении вектора ℓ отметим последнее пересечение с ℓ во внутренней точке — пусть это точка X. • Рассмотрим содержащий X малый отрезок [Y,Z] на этом ℓ0, не пересекающий P в отличных от X точках, пусть Y лежит перед X при движении в направлении ℓ. • Тогда p(Y) = 1 (единственное пересечение в точке X), а p(Z) = 0. Теория графов. Глава 6. Планарные графы. Д.В.КарповУтверждение Пусть A,B ∈ M и отрезок [A,B] не пересекает P. Тогда p(A) и p(B) имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).

3. Изображение графа на плоскости и сфере, их соответствие. Внешняя грань.

4. Граница грани. Свойства.

5. Циклический обход границы грани.

6. Несвязная граница грани у несвязного графа.

7. Внутренние рёбра граней — мосты. Границы граней графа без мостов — циклы.

8. Если есть две грани с одинаковой границей, то граф — простой цикл.

9. Границы граней двусвязного графа.

10. Границы граней трёхсвязного графа.

11. Изоморфизм графов и плоских изображений. Единственность изображения трёхсвязного планарного графа на плоскости.

12. Формула Эйлера.

13. Оценки на число ребер плоского графа и существование вершины степени не более 5.

14. Непланарность K5 и K3,3 и их подразбиений.