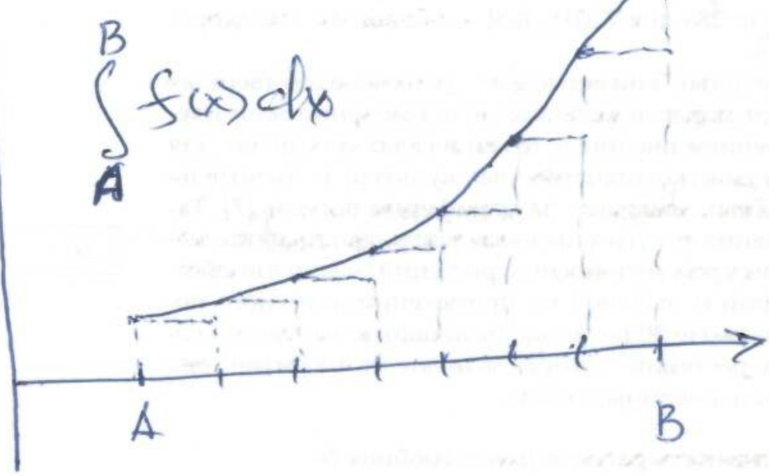
① Лекция 4

Численное интегрирование

① Метод прямоугольников



Разобьем $[A,B]$ на n частей

Заменим точное значение интеграла суммой площадей прямоуг-ков

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot f(A+i\Delta x), \text{ где } \Delta x = \frac{B-A}{n}$$

Это метод левых пр-ков.

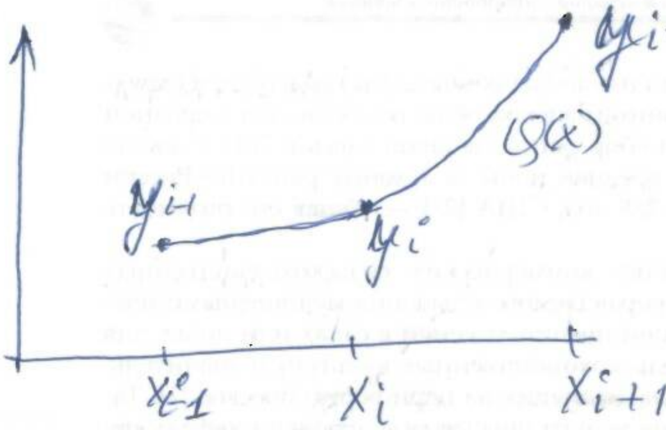
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(A+i\Delta x)$$ – метод правых прямоугольников,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f\left(A+\frac{i\Delta x}{2}\right)$$ – метод центральных прямоугольников.

Метод трапеций

$$\Delta x\left(\frac{f(A)+f(A+\Delta x)}{2} + \frac{f(A+\Delta x)+f(A+2\Delta x)}{2} + \ldots\right) = \Delta x\left(\frac{f(A)+f(B)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(A+i\Delta x)\right)$$

② Метод Формула Симпсона



пусть $\varphi(x)$ это парабола через 3 точ

$$\varphi_i(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{\underbrace{(x_{i-1}-x_i)}_{-h}\underbrace{(x_{i-1}-x_{i+1})}_{-2h}} y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{h}\underbrace{(x_i-x_{i+1})}_{-h}} y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{\underbrace{(x_{i+1}-x_{i-1})}_{2h}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{h}} y_{i+1}$$

Вычислим площадь $S_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx$

учитывая, что $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$ получим

$$S_i = \frac{1}{2h^2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[(x-x_i)(x-x_{i+1})y_{i-1} - 2(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})y_i + (x-x_{i-1})(x-x_i)y_{i+1}\right]dx = \frac{h}{3}(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1})$$

Сложив последовательно все S_i, получим.

$$S = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1+y_3+\dots+y_{n-1}) + 2(y_2+y_4+\dots y_{n-2}) + y_n\right]$$

③ Погрешность.

Лекция 4

Метод прямоугольников $R \leq \frac{1}{24} h^2 M_2 (b-a)$

где

$O(h^2)$

Метод трапеций $R \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{M_2 h^2}{12} (b-a)$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$

$O(h^2)$

Метод Симпсона

$R \leq \frac{M_4 h^4}{180} (b-a)$

$O(h^4)$