① Интерполяция. Лекция 5

Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Пусть известны значения f_i для x_i $i=0,\dots,n$

Ставится задача приблизить многочленом n-ной степени на интервале $[x_0, x_n]$ значения $f_0, f_1, \dots, f_n$

Полученный многочлен называется интерполяционным. $L_n(x_i)$

Доказано, что интерполяционный многочлен существует и он единственный

Найдем общий вид такого многочлена

Пусть $n=1$ (2 точки $i=0$ и $i=1$)

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f_1$$

Для 3х точек $i=0,1,2$.

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

Обобщая: для текущей точки i соответствующий сомножитель убирается из числ. и знамен.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{ni}(x) f_i \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

$$p_{ni}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Погрешность интерполяции

$\cancel{R_n = f^{(n+1)}}$ $|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left|(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)\right|$

где $M_{n+1} = \max_{[x_0\ x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Конечные разности. Пусть имеем равномерную сетку $x_i = x_0 + ih$; $f_k = f(x_k)$

$\Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k$

конечная разность 1-го порядка.

$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - f_{k+1} - f_{k+1} + f_k =$

$= f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}$.

конечная разность 2-го порядка

и т.п. $\rightarrow (*)$

Разделенные разности

$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} =$ р.р. первого порядка

или $= \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$

р.р. n-ного порядка

$f(x_0; x_1; \ldots x_n) = \frac{f(x_1; x_2; \ldots x_n) - f(x_0; x_1; \ldots; x_{n-1})}{x_n - x_0}$

③ Разделенная разность n-ного порядка м.б. записана Лекция 5

$$f(x_0;x_1;\dots;x_n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

(*) конечная разность k-того порядка можно вычислить

$$\Delta^k y_0=y_k-k\,y_{k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}y_{k-2}+\dots+(-1)^k y_0$$

Для любой точке i

$$\boxed{\Delta^k y_i=y_{k+i}-k\,y_{k+i-1}+\frac{k(k-1)}{2!}y_{k+i-2}+\dots+(-1)^k y_i}$$

Будем искать интерполяц. мн-н Ньютона в виде

$$N(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

При этом $N(x_i)=y_i$ $(i=0,1,\dots n)$ т.е.

$$N(x_0)=a_0=y_0$$
$$N(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)=a_0+a_1h=y_1$$
$$N(x_2)=a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=$$
$$=a_0+2a_1h+2a_2h^2=y_2$$

и т.д.

④ $\Rightarrow$ $a_0 = y_0$ Лекция 5

$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

аналогично получим общую ф-лу

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

т.о. получаем ~~…~~ интерполяционный многочлен Ньютона

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

если положить $t = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow$

$$x = x_0 + th$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \underbrace{\frac{x - x_0 - h}{h}}_{t} = t - 1;$$

$$\frac{x - x_2}{h} = t - 2; \quad \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1$$

Тогда

$$N(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

или для i-той точки

$$\boxed{N(x_i+th)=y_i+t\Delta y_i+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i+ \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i}$$

Это формула 1-го интерполяционная ин-на Ньютона для интерполирования вперед (для левой половины отрезка)

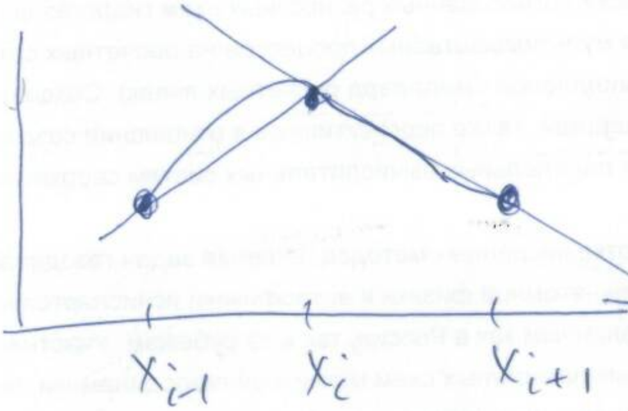
Для правой половины $t=\frac{x-x_n}{h}$ $(t<0)$ и 2й интер. ф-ла Ньютона

$$N(x_n+th)=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

6

Лекция 5

Численное дифференцирование



$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad \text{слева}$$

погрешность $\frac{h}{2} \max|f''(x)|$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad \text{справа}$$

их полусумма

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1} + f_{i+1} - f_i}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$\frac{h^2}{6} \max|f'''(x)|$

центральная

погрешность

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} \quad \text{вторая}$$

$\frac{h^2}{12} \max|f^{IV}(x)|$

производная