Лекция 1

Теория погрешностей.

Классификация.

Этапы решения задач
1) Математическое описание
2) Решение полученной математической задачи.

На первом этапе
+ а) погрешность в описании процессов
б) неточность входных данных

НЕУСТРАНИМАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

На втором этапе
а) погрешность метода решения (погрешность аппроксимации) при замене исходной задачи её численным аналогом.
б). вычислительная погрешность возникает при округлении и выполнении арифметических операций.

Правила округления для X5000

Нечетная X увеличивается
Четная X без изменения

Позиционная запись числа

$\alpha_1 10^m + \alpha_2 10^{m-1} + \alpha_3 10^{m-2}$ ...

(10^β) - это цена разряда

Лекция 1

Абсолютная и относительная погрешность

Пусть A - точное число, a - его приближенное значение

Абс. погрешность $\Delta_a \geqslant |A-a|$

т.о. $a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a$

На практике выбирают минимальное Δ_a так, что

$$A = a \pm \Delta_a$$

Относительная погрешность

$$\delta_a \geqslant \left| \frac{A-a}{a} \right|, \quad a \neq 0 \Rightarrow \delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

и $A = a(1 \pm \delta_a)$

δ_a часто выражают в %

Верные значащие цифры

Зн. цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой отличной от нуля цифры. Нули справа - ЗНАЧАЩИЕ!

Запись числа в нормализованном виде $400 = \cancel{0.4 \cdot 10^3}$ - порядок

$4 \cdot 10^2$

В частности используется, когда надо показать, что нули справа незначащие.

Абсолютная погрешность не превышает половину следующего разряда.

Погрешность при представлении чисел в ЭВМ

Вещественное число с одинарной точностью – 32 бита (4 Байта), один бит под знак, 23 под мантиссу, 8 бит показатель

s	f	e
1	23	8

старший ненулевой разряд НЕ хранится

число восстанавливается как

$$(-1)^s\left(1+f\cdot 2^{-23}\right)2^{(e-127)}$$

max значение $\left(2-2^{-23}\right)\cdot 2^{127}\approx 10^{38}$

min значен. $1\cdot 2^{-126}\approx 10^{-38}$

машинный ноль $\varepsilon_{маш}=0.5\cdot 2^{-23}\approx \underline{6\cdot 10^{-8}}$!

Аналогично для двойной точности

s – 1 бит f – 52 бита e – 11 бит

max и min $\approx 10^{\pm 308}$ $\varepsilon_{маш}\approx 10^{-16}$

Лекция 1

Погрешности арифметических вычислений

Сумма и разность

Пусть $A=\sum_{i=1}^{n} A_i$ сумма точных значений

$a=\sum_{i=1}^{n} a_i$ сумма приближенных значений

$$A-a=(A_1-a_1)+(A_2-a_2)+\dots(A_n-a_n)$$

переходя к модулям

$$|A-a|\le|A_1-a_1|+|A_2-a_2|+\dots+|A_n-a_n|$$

то есть. $\Delta_a=\Delta_{a_1}+\Delta_{a_2}+\Delta_{a_3}+\dots+\Delta_{a_n}$

Обычно не сохраняют лишние значащие цифры. (Берут число с наименьшей точностью, в остальных оставляют на знак больше).

Пример $0,1735+\underline{4,2}+175,221$

$\Delta=0,05$

$$\begin{array}{r} 0,17 \\ 4,2 \\ 175,22 \\ \hline 179,59 \end{array}$$

$179,59$, округляем на один знак $179,6$

Найдем погрешность

1) погрешность округления результата

$|179{,}6 - 179{,}59| = 0{,}01$

2). сумма погрешностей вычислен-

$\cancel{0{,}5}\ 0{,}05 + 0{,}005 \cdot 2 =$

$= 0{,}05 + 0{,}01 = 0{,}06$

3) результат — сумма погрешностей

$0{,}01 + 0{,}06 = 0{,}07$

Т.о. $179{,}6 \pm 0{,}07$

Допустимо погрешность округлить до верных значащих цифр результата

$$\boxed{179{,}6 \pm 0{,}1}$$

При разности абсолютные погрешности суммируются.

Вычитание близких чисел. Потеря точности

Пусть $x>0$, $y>0$, $a=x-y$

тогда $\delta_a = \dfrac{\Delta a}{|a|} = \dfrac{\Delta x + \Delta y}{|x-y|}$!

Для близких чисел очень БОЛЬШАЯ.

Пример Найти разность

$a = \sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26}$

Пусть $\sqrt{6{,}27} = 2{,}504$ $\quad \Delta a_1 = 0{,}0005$

$\sqrt{6{,}26} = 2{,}502$ $\quad \Delta a_2 = 0{,}005$

$a = 2{,}504 - 2{,}502 = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$ $\quad \Delta a = 0{,}0005 + 0{,}0005 = 0{,}001$

$$\delta_a = \frac{0{,}1 \cdot 10^{-2}}{0{,}2 \cdot 10^{-2}} = 0{,}5 = 50\% \;!$$

Применим другую вычислительную схему

$$a = \sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26} = \frac{(\sqrt{6{,}27} - \sqrt{6{,}26})(\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26})}{\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26}} = \frac{6{,}27 - 6{,}2\ldots}{\sqrt{\ } + \sqrt{\ }}$$

$$= \frac{0{,}01}{2{,}504 + 2{,}502} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-2}$$

$$\delta_a = \delta(\sqrt{6{,}27} + \sqrt{6{,}26}) = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{a_1 + a_2} \approx \frac{0{,}001}{5} = 0{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}02\%$$

Лекция 1

Погрешность произведения

$A = A_1 \cdot A_2 \qquad a = a_1 \cdot a_2$

пусть известны δ_{a_1} и δ_{a_2}

Представим $A_1 = a_1 + \Delta_1 \quad A_2 = a_2 + \Delta_2$

где $|\Delta_1| \le |a_1| \delta_{a_1} \quad |\Delta_2| \le |a_2| \delta_{a_2}$

Перемножим

$$A_1 \cdot A_2 = a_1 a_2 + \Delta_1 a_2 + \Delta_2 a_1 + \Delta_1 \Delta_2$$

$$|A_1 A_2 - a_1 a_2| \le |\Delta_2 a_1| + |\Delta_1 a_2| + |\Delta_1 \Delta_2|$$

и разделим на $a_1 a_2$ мало

$$\frac{|A_1 A_2 - a_1 a_2|}{|a_1 a_2|} \le \frac{|\Delta_2|}{|a_2|} + \frac{|\Delta_1|}{a_1}$$

$$\boxed{\delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}}$$ погрешность частного аналогична

Число верных знаков произведения если сомножители одинаковой точности и их не более 10 то число верных зн цифр на 1 или на 2 меньше исходного

Если имеют разную точность число верных знаков ~~= наименьшей точности~~ отсчитывается от н (наименьшей точности)