Приближенное решение уравнений с одним неизвестным

Пусть на интервале [a, b] имеется один и только один корень уравнения

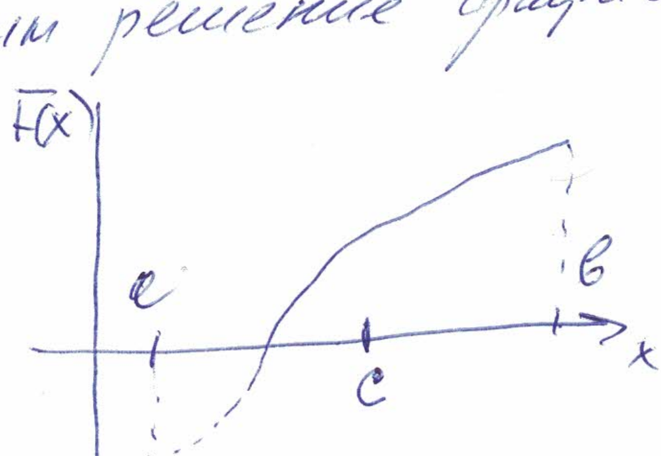
$$F(x) = 0$$

Предварительно F(x) исследуют на наличие корня аналитически или графически.

Метод деления отрезка пополам

(бисекции, дихотомии)

Рассмотрим решение графически



Находим $c = \frac{a+b}{2}$. Определяем, где корень.

Если $F(a)\cdot F(c)<0$ то корень на отрезке $[a,c]$

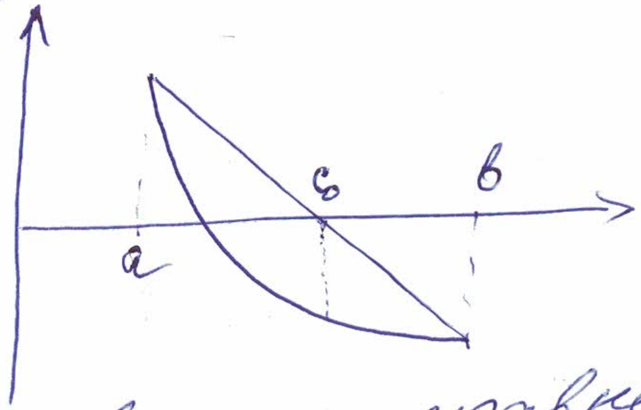
Если $F(b)\cdot F(c)<0$ то корень на отрезке $[c,b]$

Если (случайно и маловероятно $F(c)=0 \to c$ – корень)

Переопределяем новый отрезок как $[a,b]$ и продолжаем процедуру, пока $\left|\frac{b-a}{2}\right|$ не станет меньше заданной точности ε.

Если верно отделены корни метод <u>ВСЕГДА</u> сходится.

③ <u>Метод хорд</u> <u>Лекция 2</u>



Запишем уравнение хорды

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}, \text{ для точки } c$$

$$x = c \; ; \; F(c) = 0 = y$$

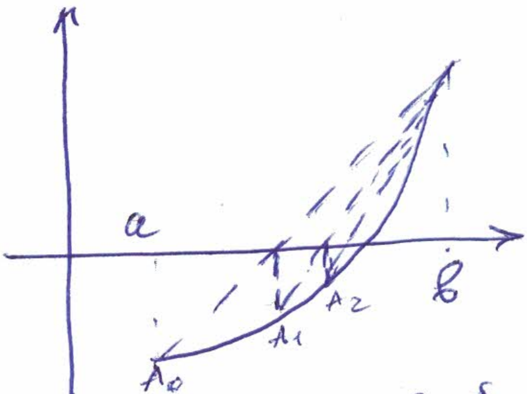
$$\Rightarrow \; c_0 = a - \frac{b - a}{F(b) - F(a)} F(a)$$

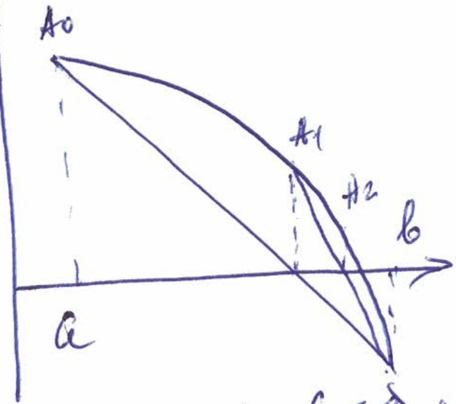
Затем выбираем новый $[a, b]$ аналогично методу бисекции. Здесь решение находят из соотношения $|c_i - c_{i-1}| < \varepsilon$

где c_i - текущее приближенное значение корня, а c_{i-1} - его предыдущее значение.

④ Найдем итерационную формулу в общем виде Лекция 2

а). Первая и вторая производная на отрезке имеют одинаковые знаки





$f(a)<0$ $f(b)>0$

$f'(x)>0$ $f''(x)>0$

$f(a)>0$ $f(b)<0$

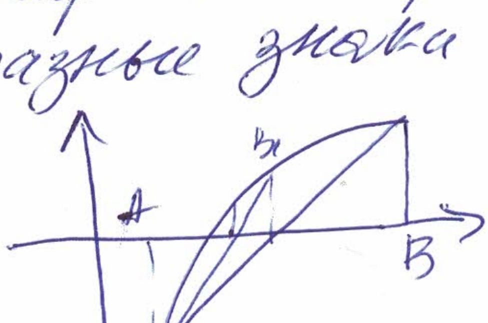
$f'(x)<0$ $f''(x)<$

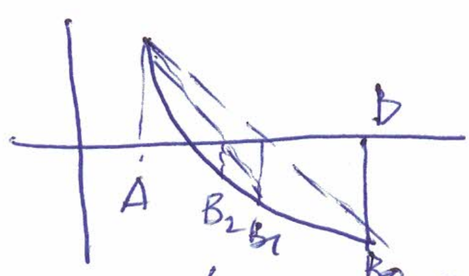
расписывая уравнение хорды

Отметим, что точка b закреплена

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

б). Первая и вторая производные имеют разные знаки





$f'(x)>0$ $f''(x)<0$

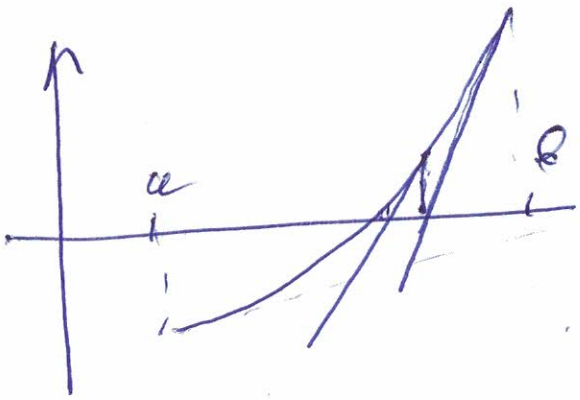
$f'(x)<0$ $f''(x)>0$

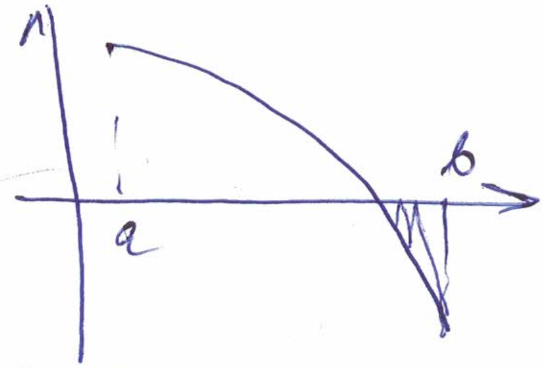
$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$$

Лекция 2

Метод Ньютона (касательных)

I а) Первая и вторая производные имеют одинаковые знаки



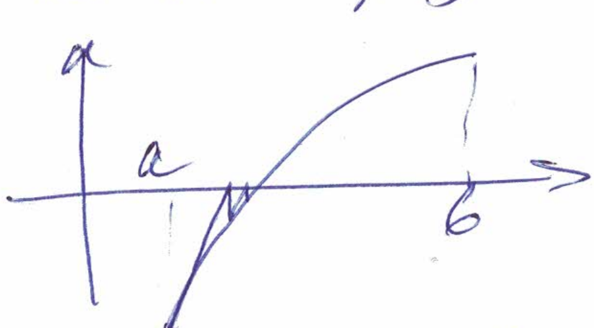


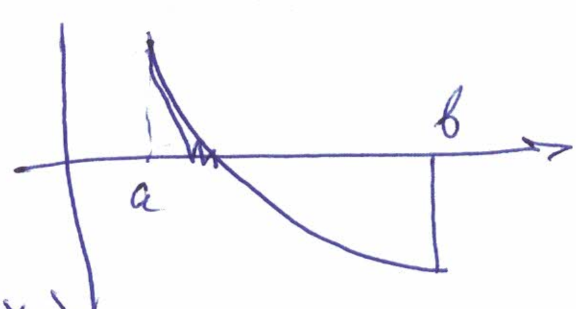
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

но в качестве начального $\underline{x_0 = b}$!

т. е $x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$!

б). Первая и вторая производные имеют разные знаки





$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Но $x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$!

Лекция 2

Общее правило: за исходную точку брать ту, где знак функции совпадает со знаком 2-й производной

Метод простой итерации

Пусть $f(x)=0$ преобразуем это выражение к виду

$$x=\varphi(x)$$

тогда итерационный процесс сходится если на избранном интервале $[a,b]$

$$|\varphi'(x)|<1$$

Пример $[0,1]$ $5x^2-20x+3=0$.

Приведем к виду $x=\varphi(x)$

1. $x=x+(5x^2-20x+3)$
2. $x=\sqrt{(20x-3)/5}$
3. $x=(5x^2+3)/20$

подходит 3

Лекция 2

Еще один способ - введение малого параметра τ (метод релаксации)

$$y_{k+1} = x_k - \tau f(x_k) \quad \text{если } f'(x) > 0$$

то $0 < \tau < \dfrac{2}{\min(f'(x))}$