1

Лекция 7

Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения

1) Метод Эйлера

$$y' = f(x,y)$$

Начальное условие $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$

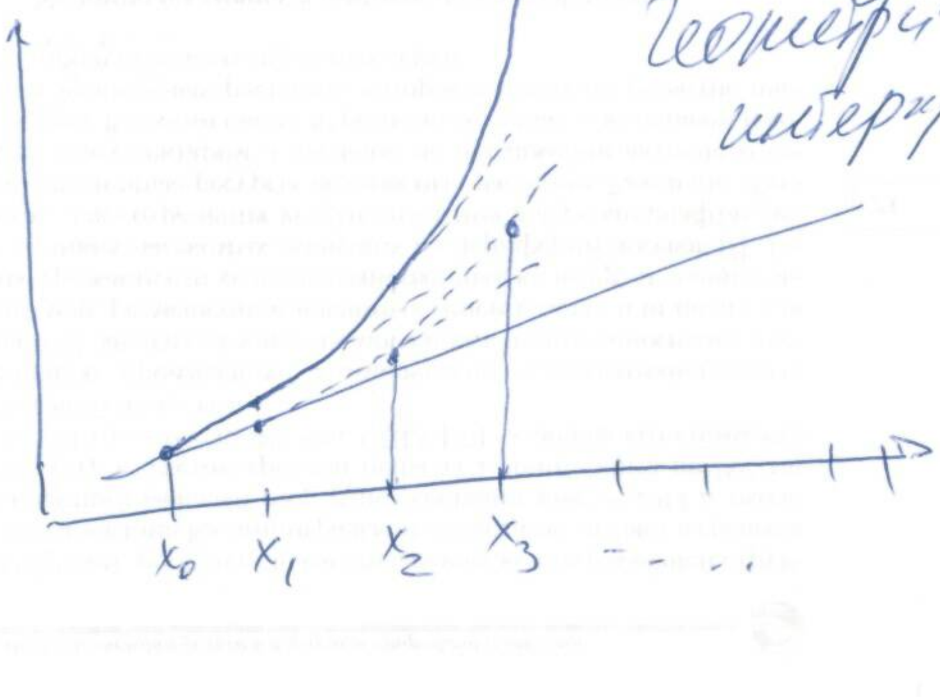
Переход к разностной аппроксимации

$$y' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i\, y_i)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_i\, y_i)}$$

Геометрическая интерпретация



(2) Метод Эйлера с уточнением

Лекция

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

находим значение y в полуцелой точке

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i\, y_i)$$

затем для найденной $y_{i+1/2}$ находят правую часть в $i+1/2$ точке

$$f(x_{i+1/2}\, y_{i+1/2}) = y'_{i+1/2}\cancel{(x_{i+1/2}\, y_{i+1/2})}$$

и $y_{i+1} = y_i + h\, y'_{i+1/2}$

Метод Эйлера-Коши

сначала $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h y'_i$

затем $\tilde{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}\, \tilde{y}_{i+1})$

наконец $y_{i+1} = y_i + h \frac{y'_i + \tilde{y}'_{i+1}}{2}$

③ Метод Рунге-Кутта — Лекция 4

Получается, если разложить $y(x)$ в ряд Тейлора, ограничиваясь h^4

тогда

(*) $\Delta y = y(x+h) - y(x) = h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{IV}$

где $y''(x)$, $y'''(x)$ находят последовательно дифферен. $f(x,y) = y'$; вместо этого

находим

$$k_1 = h f(x, y)$$

$$k_2 = h f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x + h, y + k_3)$$

если им придать веса, то

$\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$ с точность[ю]

до $y^{IV}(x)$ равно (*)

тогда $\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

4

Метод Адамса

Лекция 7

третьего порядка

$$y_{i+1} = y_i + h(23y'_i - 16y'_{i-1} - 5y'_{i-2})/12$$

Четвертого порядка

$$y_{i+1} = y_i + h(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3})/24$$

Первые значения получать мет. Р-К.

Уравнения высших порядков

$$y'' = f(x,y) \quad \text{и} \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0$$

Введем ф-цию $g(x,y) = y'(x,y)$

$$g(x_0) = y'(x_0) = y'_0$$

тогда

$$\begin{cases} g' = f(x,y) & g(x_0) = y'_0 \\ y' = g(x,y) & y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Последовательно решаем 1-е → 2-е

Пример с методом Эйлера

$$g_{i+1} = g_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hg(x_i, y_i)$$

На практике лучше использовать метод Адамса и Р-К.