Метод максимального правдоподобия

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, ..., x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi_n^2, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

План

- Что такое метод максимального правдоподобия
- Примеры для дискретных и непрерывных распределений
- Информация Фишера, почему это информация и откуда она берётся
- Тест отношения правдоподобий
- Многомерный дельта-метод

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Гипотезы:

- Фонтан работает раз в год

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Гипотезы:

- Фонтан работает раз в год
- Фонтан работает каждые выходные

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Гипотезы:

- Фонтан работает раз в год
- Фонтан работает каждые выходные
- Фонтан работает всегда

vk.com

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Гипотезы:

Вероятности:

- Фонтан работает раз в год — $\frac{1}{365}$
- Фонтан работает каждые выходные
- Фонтан работает всегда

vk.com

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Гипотезы:

Вероятности:

- Фонтан работает раз в год — $\frac{1}{365}$
- Фонтан работает каждые выходные — $\sim\frac{1}{3}$
- Фонтан работает всегда

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Гипотезы: Вероятности:

- Фонтан работает раз в год — $\frac{1}{365}$
- Фонтан работает каждые выходные — $\sim\frac{1}{3}$
- Фонтан работает всегда — 1

Задача о фонтане

- Юра приехал в южный город и увидел, что там есть фонтан и он работает
- А как часто он работает?

Гипотезы:	Вероятности:
Фонтан работает раз в год	$\frac{1}{365}$
Фонтан работает каждые выходные	$\sim\frac{1}{3}$
Фонтан работает всегда	1

Максимальная вероятность увидеть фонтан при верности гипотезы

vk.com

Задача о фонтане

- Параметр θ – работоспособность фонтана
- Наблюдение x_1 – сегодня фонтан работал

Задача: Максимизировать вероятность появления выборки по значению θ:

$$\mathbb{P}(\, x_1 = \text{работает} \mid \theta \,) \to \max_{\theta}$$

$$\mathbb{P}(\, x_1 = \text{работает} \mid \theta = \text{раз в году} \,) = \frac{1}{365}$$

$$\mathbb{P}(\, x_1 = \text{работает} \mid \theta = \text{по выходным} \,) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\, x_1 = \text{работает} \mid \theta = \text{каждый день} \,) = 1}$$

Правдоподобие

Правдоподобие (likelihood function) – вероятность получить наблюдаемую выборку при конкретном значении параметра

Оценка максимального правдоподобия – значение параметра, которое максимизирует правдоподобие

Правдоподобие

$$\mathrm{X}$$

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$

Предположение: выборка пришла из распределения с плотностью $f(x \mid \theta)$.

Параметр θ (константа) мы не знаем и хотим оценить по выборке.

pngimg.com

Правдоподобие

Правдоподобие выборки:

$$\mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$$

Правдоподобие

Правдоподобие выборки:

$$\mathrm{L}(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \ldots, x_n \mid \theta) = f(x_1, \ldots, x_n \mid \theta)$$

Правдоподобие

Правдоподобие выборки:

$$\mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = f(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$$

$$= f(x_1 \mid \theta) \cdot f(x_2 \mid \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n \mid \theta)$$

Правдоподобие

Правдоподобие выборки:

$$\mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = f(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$$

$$= f(x_1 \mid \theta) \cdot f(x_2 \mid \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

Правдоподобие

Правдоподобие выборки:

$$\mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = f(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$$
$$= f(x_1 \mid \theta) \cdot f(x_2 \mid \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

При разных значениях θ мы получаем большую или меньшую вероятность получить наблюдаемые данные

Правдоподобие

Правдоподобие выборки:

$$\mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid \theta) = f(x_1, \dots, x_n \mid \theta)$$
$$= f(x_1 \mid \theta) \cdot f(x_2 \mid \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

При разных значениях θ мы получаем большую или меньшую вероятность получить наблюдаемые данные

Если выполнено неравенство

$$\mathrm{L}(\theta_1 \mid x_1, \dots, x_n) > \mathrm{L}(\theta_2 \mid x_1, \dots, x_n)$$

значение параметра θ_1 называют “более правдоподобным”

Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия состоит в выборе в качестве оценки $\hat{\theta}$ значения, при котором правдоподобие достигает максимума:

$$\mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \to \max_{\theta}$$

Оценка максимального правдоподобия (maximum likelihood estimation):

$$\hat{\theta}^{MLE} = \operatorname*{argmax}_{\theta} \mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n)$$

Метод максимального правдоподобия

Максимизация функции $\mathrm{L}(\theta)$ равносильна максимизации функции $\ln \mathrm{L}(\theta)$.

Метод максимального правдоподобия

С логарифмической функцией работать удобнее, поэтому правдоподобие обычно логарифмируют и ищут максимум:

$$\ln \mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i \mid \theta) \to \max_{\theta}$$

Возьмём производную и приравняем её к нулю:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(x_i \mid \theta)}{\partial \theta} = 0$$

Решив это уравнение, получим оценку максимального правдоподобия

Резюме

- Метод максимального правдоподобия заключается в максимизации вероятности получить наблюдаемые данные по неизвестным параметрам
- Возможны ситуации, в которых функция правдоподобия не ограничена и MLE не существует
- Возможны ситуации, в которых функция правдоподобия достигает глобального максимума для нескольких θ
- Метод нельзя использовать, если не выполнены условия регулярности (область зависит от параметра или функция недифференцируема)

Дискретный пример

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1 - p$	p

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1 - p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \dots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1 - p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \dots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Задача: найти ML-оценку для p

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1 - p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \ldots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Задача: найти ML-оценку для p

$$L(\, p \mid x_1, \ldots, x_n \,)$$

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1 - p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \dots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Задача: найти ML-оценку для p

$$L(p \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid p)$$

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1-p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \ldots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Задача: найти ML-оценку для p

$$L(p \mid x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \ldots, x_n \mid p) =$$

$$= \mathbb{P}(x_1 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_2 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_3 \mid p) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(x_n \mid p)$$

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1 - p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \dots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Задача: найти ML-оценку для p

$$L(p \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid p) =$$

$$= \mathbb{P}(x_1 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_2 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_3 \mid p) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(x_n \mid p) =$$

$$= p \cdot (1 - p) \cdot p \cdot \dots \cdot (1 - p) =$$

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1 - p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \dots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Задача: найти ML-оценку для p

$$L(p \mid x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1, \dots, x_n \mid p) =$$

$$= \mathbb{P}(x_1 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_2 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_3 \mid p) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(x_n \mid p) =$$

$$= p \cdot (1 - p) \cdot p \cdot \dots \cdot (1 - p) =$$

$$= p^{\sum x_i} \cdot (1 - p)^{n - \sum x_i} \to \max_p$$

Пример: распределение Бернулли

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	$1-p$	p

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, \ldots, x_n = 0 \sim iid\ Bern(p)$$

Задача: найти ML-оценку для p

$$L(\, p \mid x_1, \ldots, x_n \,) = \mathbb{P}(\, x_1, \ldots, x_n \mid p \,) =$$
$$= \mathbb{P}(x_1 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_2 \mid p) \cdot \mathbb{P}(x_3 \mid p) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(x_n \mid p) =$$
$$= p \cdot (1-p) \cdot p \cdot \ldots \cdot (1-p) =$$
$$= p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n - \sum x_i} \to \max_p$$

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + (n - \sum x_i) \cdot \ln(1-p) \to \max_p$$

Пример: распределение Бернулли

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + \left(n \; - \sum x_i\right) \cdot \ln(1-p) \to \max_p$$

Возьмём производную:

Пример: распределение Бернулли

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + \left(n - \sum x_i\right) \cdot \ln(1-p) \to \max_p$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum x_i\right)}{1 - p}$$

Пример: распределение Бернулли

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + \left(n - \sum x_i\right) \cdot \ln(1-p) \to \max_p$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum x_i\right)}{1 - p}$$

$$\frac{\sum x_i}{\hat{p}} - \frac{\left(n - \sum x_i\right)}{1 - \hat{p}} = 0$$

Пример: распределение Бернулли

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + (n - \sum x_i) \cdot \ln(1 - p) \to \max_p$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{(n - \sum x_i)}{1 - p}$$

$$\frac{\sum x_i}{\hat{p}} - \frac{(n - \sum x_i)}{1 - \hat{p}} = 0$$

Колпачки появляются после приравнивания к нулю

Пример: распределение Бернулли

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + \left(n - \sum x_i\right) \cdot \ln(1 - p) \to \max_p$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum x_i\right)}{1 - p}$$

$$\frac{\sum x_i}{\hat{p}} - \frac{\left(n - \sum x_i\right)}{1 - \hat{p}} = 0$$

$$\sum x_i - \widehat{p} \cdot \sum x_i = n \cdot \hat{p} - \widehat{p} \cdot \sum x_i$$

Колпачки появляются после приравнивания к нулю

Пример: распределение Бернулли

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + \left(n - \sum x_i\right) \cdot \ln(1-p) \to \max_p$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum x_i\right)}{1-p}$$

Колпачки появляются после приравнивания к нулю

$$\frac{\sum x_i}{\hat{p}} - \frac{\left(n - \sum x_i\right)}{1-\hat{p}} = 0$$

$$\sum x_i - \cancel{\widehat{p} \cdot \sum x_i} = n \cdot \hat{p} - \cancel{\widehat{p} \cdot \sum x_i}$$

Пример: распределение Бернулли

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = \sum x_i \cdot \ln p + (n - \sum x_i) \cdot \ln(1-p) \to \max_p$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{(n - \sum x_i)}{1-p}$$

Колпачки появляются после приравнивания к нулю

$$\frac{\sum x_i}{\hat{p}} - \frac{(n - \sum x_i)}{1-\hat{p}} = 0$$

$$\sum x_i - \cancel{\widehat{p} \cdot \sum x_i} = n \cdot \hat{p} - \cancel{\widehat{p} \cdot \sum x_i}$$

$$\widehat{p}^{\,ML} = \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{x}$$

Непрерывный пример

Пример: нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Задача: найти ML-оценку для μ и σ^2

Пример: нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Задача: найти ML-оценку для μ и σ^2

$\mathrm{L}(\mu, \sigma^2 \mid x_1, \ldots, x_n)$

Пример: нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Задача: найти ML-оценку для μ и σ^2

$$\mathrm{L}(\mu, \sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma^2)$$

Пример: нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Задача: найти ML-оценку для μ и σ^2

$$\mathrm{L}(\mu, \sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma^2) =$$

$$= f(x_1 \mid \mu, \sigma^2) \cdot f(x_2 \mid \mu, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(x_n \mid \mu, \sigma^2)$$

Пример: нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Задача: найти ML-оценку для μ и σ^2

$$\mathrm{L}(\mu, \sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma^2) =$$

$$= f(x_1 \mid \mu, \sigma^2) \cdot f(x_2 \mid \mu, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(x_n \mid \mu, \sigma^2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Пример: нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Задача: найти ML-оценку для μ и σ^2

$$\mathrm{L}(\mu, \sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma^2) =$$

$$= f(x_1 \mid \mu, \sigma^2) \cdot f(x_2 \mid \mu, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(x_n \mid \mu, \sigma^2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Пример: нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Задача: найти ML-оценку для μ и σ^2

$$\mathrm{L}(\mu, \sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n \mid \mu, \sigma^2) =$$

$$= f(x_1 \mid \mu, \sigma^2) \cdot f(x_2 \mid \mu, \sigma^2) \cdot \dots \cdot f(x_n \mid \mu, \sigma^2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \to \max_{\mu,\sigma^2}$$

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu,\sigma^2}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu,\sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu,\sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\,\hat{\sigma}^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \hat{\mu}) = 0 \\ -\dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} + \dfrac{1}{2\,\hat{\sigma}^4} \sum (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \end{cases}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\,\hat{\sigma}^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \hat{\mu}) = 0 \\ -\dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} + \dfrac{1}{2\,\hat{\sigma}^4} \sum (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \end{cases}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \sum (x_i - \hat{\mu}) = 0 \\ -n + \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \end{cases}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu,\sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \sum x_i = n\,\hat{\mu} \\ -n + \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \end{cases}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \sum x_i = n\,\hat{\mu} \\ -n + \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \end{cases} \qquad \hat{\mu}_{ML} = \bar{x}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \sum x_i = n\,\hat{\mu} \\ -n + \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 = 0 \end{cases} \qquad \hat{\mu}_{ML} = \bar{x}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \sum x_i = n\,\hat{\mu} \\ \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 = n \end{cases} \qquad \hat{\mu}_{ML} = \bar{x}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \sum x_i = n\,\hat{\mu} \\ \dfrac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 = n \end{cases} \qquad \begin{aligned} \hat{\mu}_{ML} &= \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2_{ML} &= \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu, \sigma^2}$$

Возьмём производную:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\,\sigma^2} \cdot (-2) \cdot \sum (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2$$

$$\begin{cases} \sum x_i = n\,\hat{\mu} \\ \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum (x_i - \bar{x})^2 = n \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mu}_{ML} &= \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2_{ML} &= \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}}$$

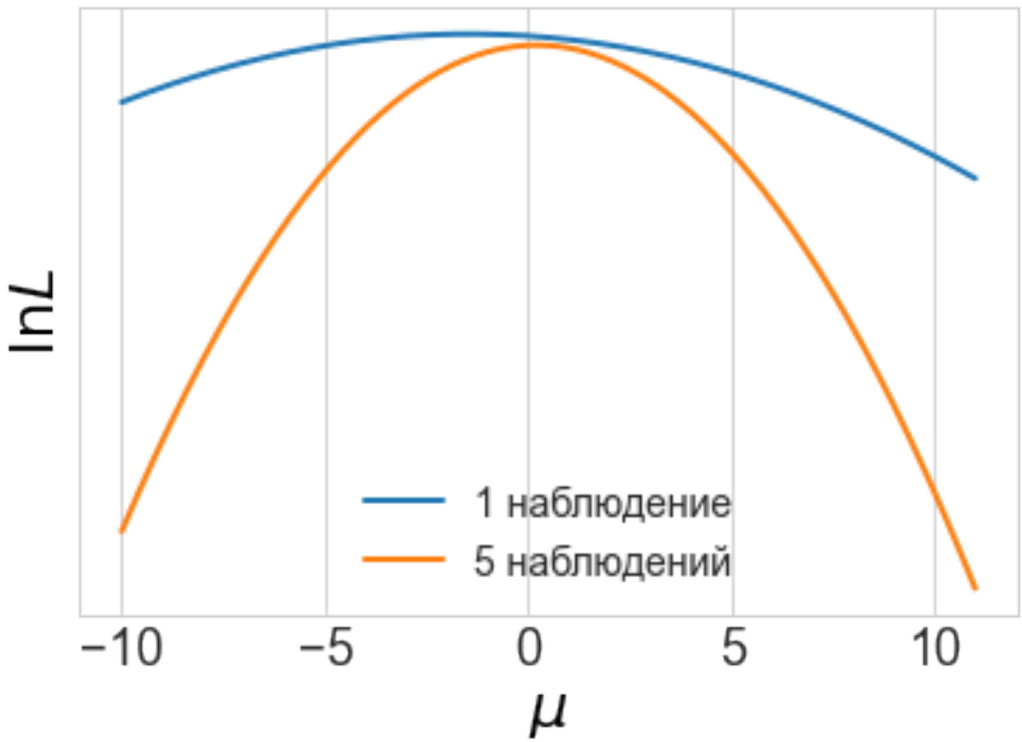
Информация Фишера

Точка максимума

- Одним из важнейших аспектов функции правдоподобия является её **поведение вблизи точки максимума**
- Если вблизи максимума функция достаточно плоская, то имеющиеся наблюдения **мало говорят о значениях параметров**
- Те же самые данные можно наблюдать с близкими вероятностями при разных значениях параметров
- Если функция имеет ярко выраженный пик, **данные имеют больше информации о параметрах**

Пример: $N(\mu, 1)$

- Для красной ситуации у нас мало информации, функция плоская
- Для синей ситуации у нас более яркий пик и более чёткая оценка



Накопление информации

Логарифм правдоподобия:

$$\ln \mathrm{L}(\theta \mid x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i \mid \theta)$$

Накопление информации

Логарифм правдоподобия:

$$\ln \mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i \mid \theta)$$

- Одно слагаемое можно проинтерпретировать, как логарифм правдоподобия, вычисленный на основе одного наблюдения

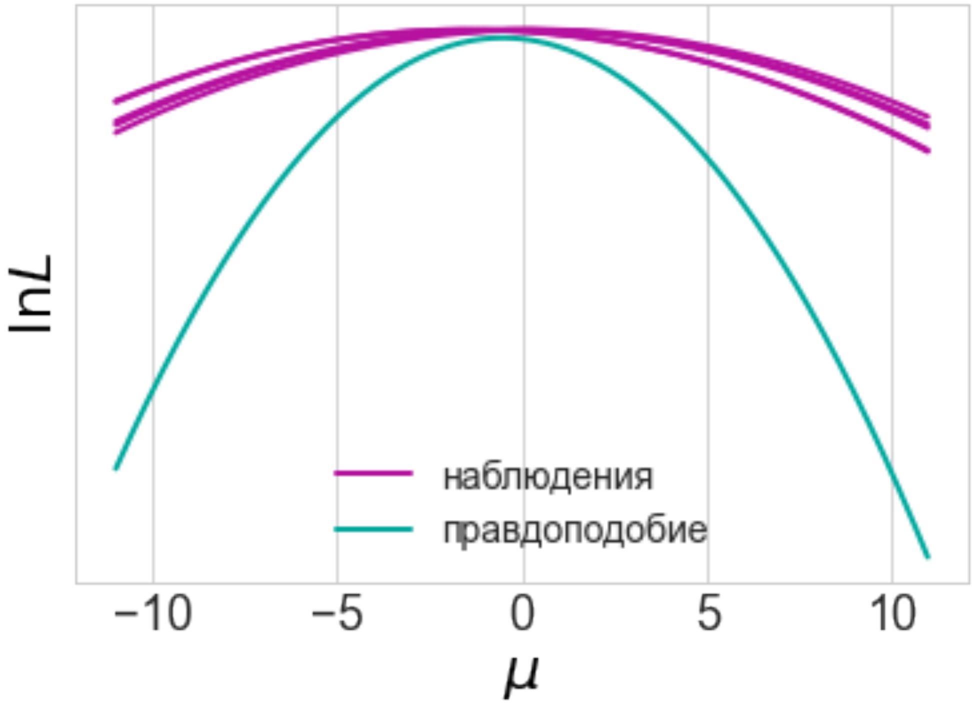
Накопление информации

Логарифм правдоподобия:

$$\ln \mathrm{L}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i \mid \theta)$$

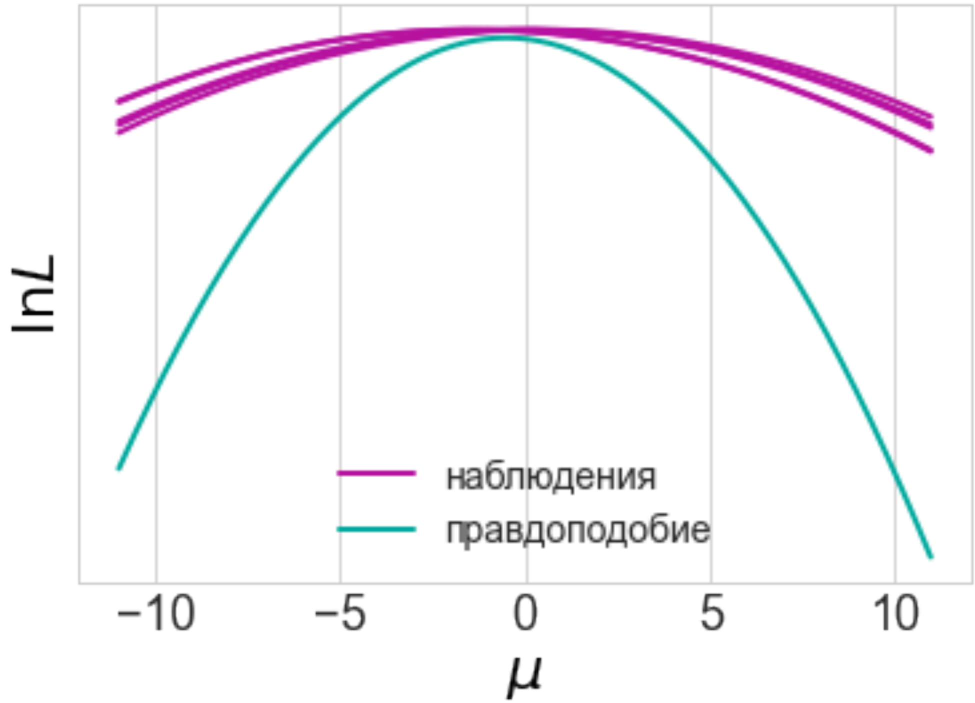
- Одно слагаемое можно проинтерпретировать, как логарифм правдоподобия, вычисленный на основе одного наблюдения
- Дополнительные слагаемые дают информацию о том, как ведёт себя правдоподобие для новых наблюдений

Пример: $N(\mu, 1)$



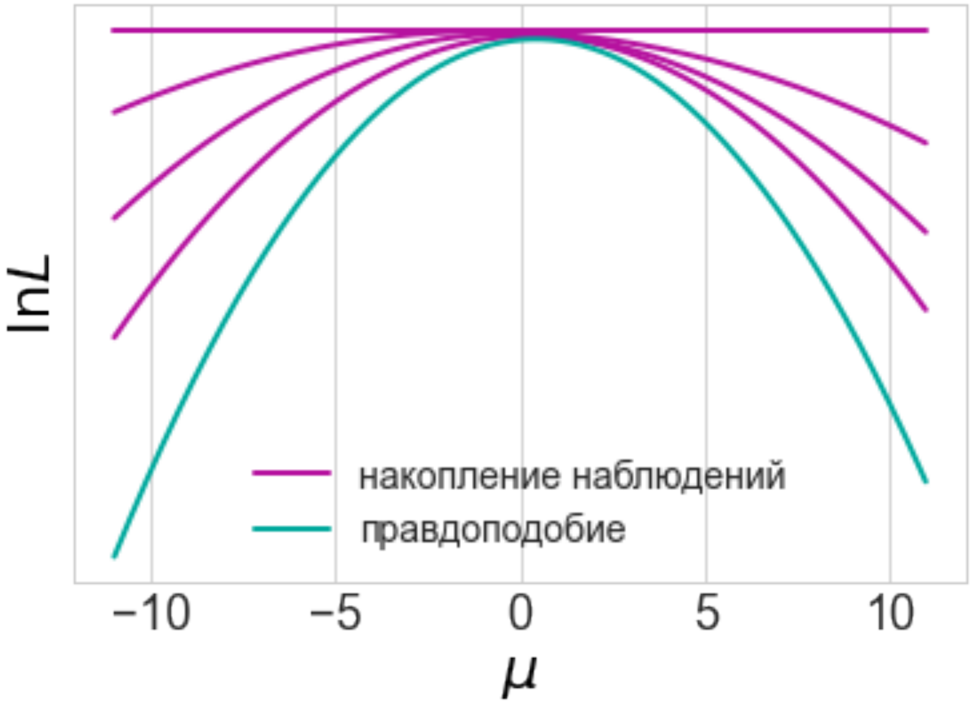
- Логарифмическая функция правдоподобия **для всей выборки** складывается как **сумма** логарифмических правдоподобий **отдельных наблюдений**

Пример: $N(\mu, 1)$



- Она имеет **более выраженный максимум,** чем больше выборка, тем ярче выражен максимум

Пример: $N(\mu, 1)$



- Каждая лиловая линия – добавление к сумме нового слагаемого
- С каждым слагаемым максимум становится более выраженным
- Каждое слагаемое добавляет нам **информацию**

Информация Фишера

- Чем выпуклее функция, тем чётче выражен максимум
- За выпуклость функции отвечает вторая производная, именно её, взятую со знаком минус, интерпретируют как **наблюденную информацию (observed information)**

$$J_o(\theta) = -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}$$

Информация Фишера

- Если параметр векторный, то наблюденная информация описывается матрицей из вторых производных (матрица Гессе)

$$J_o(\theta) = -\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i\, \partial \theta_j}\right) = -H$$

Информация Фишера

- Математическое ожидание этой матрицы (по распределению наблюдений) называется **информационной матрицей Фишера**

$$J(\theta) = \mathbb{E}[J_o(\theta)] = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right) = -\mathbb{E}(H)$$

Информация Фишера

- Математическое ожидание этой матрицы (по распределению наблюдений) называется **информационной матрицей Фишера**

$$J(\theta) = \mathbb{E}[J_o(\theta)] = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right) = -\mathbb{E}(H)$$

Ожидаемая информация или ожидаемая “крутизна” функции правдоподобия

Информация Фишера

- Математическое ожидание этой матрицы (по распределению наблюдений) называется **информационной матрицей Фишера**

$$J(\theta) = \mathbb{E}[J_o(\theta)] = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right) = -\mathbb{E}(H)$$

- Наблюдаемая информация зависит **от конкретных значений наблюдений**

Информация Фишера

- Математическое ожидание этой матрицы (по распределению наблюдений) называется **информационной матрицей Фишера**

$$J(\theta) = \mathbb{E}[J_o(\theta)] = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\, \partial\theta_j}\right) = -\mathbb{E}(H)$$

- Наблюдаемая информация зависит **от конкретных значений наблюдений**

- Ожидаемая информация зависит **только от закона распределения наблюдений** и отражает, какую информацию вносит в правдоподобие среднестатистическое наблюдение

Неравенство Рао-Крамера

Если функция плотности $f(x_i \mid \theta)$ удовлетворяет условиям регулярности, тогда для любой несмещённой оценки $\hat{\theta}$ выполняется неравенство Рао-Крамера:

$$Var\left(\hat{\theta}\right) \geq [J(\theta)]^{-1}$$

Неравенство Рао-Крамера

Если функция плотности $f(x_i \mid \theta)$ удовлетворяет условиям регулярности, тогда для любой несмещённой оценки $\hat{\theta}$ выполняется неравенство Рао-Крамера:

$$Var\left(\hat{\theta}\right) \geq [J(\theta)]^{-1}$$

А также имеет место равенство:

$$J(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i\, \partial\theta_j}\right) = -\mathbb{E}\left(\left[\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right] \cdot \left[\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right]^T\right)$$

Этим свойством мы пользовались, когда проверяли оценки на эффективность

Свойства ML-оценок

1. **Состоятельность:** $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\theta} = \theta$

2. **Асимптотическая эффективность:**

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = [\,J(\theta)\,]^{-1}$$

3. **Асимптотическая нормальность:**

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, [\,J(\theta)\,]^{-1})$$

4. **Инвариантность:** если $\hat{\theta}$ – ML-оценка для θ, тогда если $\mathrm{g}(t)$ – непрерывная функция, то $\mathrm{g}(\hat{\theta})$ – ML-оценка для $\mathrm{g}(\theta)$

Асимптотическая нормальность

- ML-оценка асимптотически нормальна:

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, [\,J(\theta)\,]^{-1})$$

- Это используют для строительства доверительных интервалов

- Нужно найти оценку для ковариационной матрицы (дисперсии) $[\,J(\theta)\,]^{-1}$

$$J\,(\theta) = -\,\mathbb{E}(\,H\,)$$

Асимптотическая нормальность

Нужно найти оценку для $J(\theta)$

$$J(\theta) = -\mathbb{E}(H)$$

Использоватьв $\mathbb{E}(H)$ вместо θ оценку $\widehat{\theta}$

$$\hat{J} = -\mathbb{E}(H)\,|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

Могут возникнуть проблемы с поиском математического ожидания

Использовать в H вместо θ оценку $\widehat{\theta}$

$$\hat{J} = -H\,|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

Могут возникнуть проблемы с поиском вторых производных

Асимптотическая нормальность

Нужно найти оценку для $\mathrm{J}(\theta)$

$$J(\theta) = -\mathbb{E}(H)$$

$$\hat{J} = -\mathbb{E}(H)\,|_{\theta=\widehat{\theta}} \qquad\qquad \hat{J} = -H\,|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

Асимптотическая нормальность

Нужно найти оценку для $\mathrm{J}(\theta)$

$$J\,(\theta) = -\,\mathbb{E}(\,H\,)$$

$$\hat{J} = -\mathbb{E}(H)\,|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

$$\hat{J} = -\,H\,|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

Использовать соотношение:

$$\hat{j}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right] \cdot \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right]^{T}\right)|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

Асимптотическая нормальность

Нужно найти оценку для $\mathrm{J}(\theta)$

$$J\,(\theta) = -\,\mathbb{E}(\,H\,)$$

$$\hat{J} = -\mathbb{E}(H)\,|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

$$\hat{J} = -\,H\,|_{\theta=\widehat{\theta}}$$

Использовать соотношение:

$$\hat{j}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right] \cdot \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right]^T\right)|_{\theta=\widehat{\theta}} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{g}_i \cdot \widehat{g}_i^{\,T}$$

Асимптотическая нормальность

Нужно найти оценку для $J(\theta)$

$$J\,(\theta) = -\,\mathbb{E}(\,H\,)$$

$$\hat{J} = -\mathbb{E}(H)\,|_{\theta=\hat{\theta}}$$

$$\hat{J} = -\,H\,|_{\theta=\hat{\theta}}$$

Использовать соотношение:

$$\hat{J}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right] \cdot \left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right]^T\right)|_{\theta=\hat{\theta}} \;=\sum_{i=1}^{n} \hat{g}_i \cdot \hat{g}_i{}^T$$

Здесь g_i – градиент функции $\ln L$, найденный для i –го наблюдения, $\hat{g}_i$ – значение градиента в точке $\hat{\theta}_{ML}$

Асимптотическая нормальность

✔ Не нужно делать никаких дополнительных вычислений

$$J\,(\theta) = -\,\mathbb{E}(\,H\,)$$

$$\hat{J} = -\mathbb{E}(H)\,|_{\theta=\hat{\theta}} \qquad \hat{J} = -\,H\,|_{\theta=\hat{\theta}}$$

Использовать соотношение:

$$\hat{\jmath}(\theta) = -\mathbb{E}\left(\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right]\cdot\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right]^T\right)|_{\theta=\hat{\theta}} \;= \sum_{i=1}^{n} \hat{g}_i \cdot \hat{g}_i{}^T$$

Здесь g_i – градиент функции $\ln L$, найденный для i –го наблюдения, $\hat{g}_i$ – значение градиента в точке $\hat{\theta}_{ML}$

Пример: Нормальное распределение

Пример: нормальное распределение

Прологарифмируем:

$$\ln \mathrm{L} = -\frac{n}{2} \cdot \ln 2\,\pi - \frac{n}{2} \cdot \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \to \max_{\mu,\sigma^2}$$

Первые производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\,\sigma^2} + \dfrac{1}{2\,\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mu}_{ML} &= \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2_{ML} &= \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu\, \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2\, \partial \mu} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\sigma^2)^2} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu\, \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2\, \partial \mu} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial (\sigma^2)^2} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$H = \begin{pmatrix} -\dfrac{n}{\sigma^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu\, \partial \sigma^2} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2\, \partial \mu} & -\dfrac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \dfrac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}\sum(x_i - \mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}\sum(x_i - \mu) & -\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4} \sum (x_i - \mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4} \sum (x_i - \mu) & -\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}(H) - ?$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}\sum (x_i - \mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}\sum (x_i - \mu) & -\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{n}{\sigma^2}\right) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}\sum (x_i - \mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}\sum (x_i - \mu) & -\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{1}{\sigma^4}\sum (x_i - \mu)\right) = \frac{1}{\sigma^4}\sum (\mathbb{E}(x_i) - \mu) = \frac{1}{\sigma^4}\sum (\mu - \mu) = 0$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{1}{\sigma^4}\sum (x_i - \mu)\right) = \frac{1}{\sigma^4}\sum (\mathbb{E}(x_i) - \mu) = \frac{1}{\sigma^4}\sum (\mu - \mu) = 0$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4}\right) = -\frac{n \cdot \sigma^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} = -\frac{n}{2\,\sigma^4}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4}\right) = -\frac{n \cdot \sigma^2}{\sigma^6} + \frac{n}{2\,\sigma^4} = -\frac{n}{2\,\sigma^4}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$J(\theta) = -\,\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$J(\theta) = -\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$[\,J(\theta)\,]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\,\sigma^4}{n} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

Первые производные:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum (x_i - \mu) \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\,\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Вторые производные:

$$J(\theta) = -\,\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\,\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\widehat{Var}\left(\hat{\theta}\right) = \left[\,\hat{j}(\theta)\,\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\,\hat{\sigma}^4_{ML}}{n} \end{pmatrix}$$

Пример: нормальное распределение

$$\boxed{\begin{gathered}\hat{\mu}_{ML} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2\end{gathered}}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{\mu}_{ML} \\ \hat{\sigma}^2_{ML}\end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix}\mu \\ \sigma^2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\,\hat{\sigma}^4_{ML}}{n}\end{pmatrix}\right]$$

Асимптотические доверительные интервалы:

$$\hat{\mu}_{ML} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_{ML}}{n}} \qquad \hat{\sigma}^2_{ML} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\,\hat{\sigma}^4_{ML}}{n}}$$

Резюме

- В анализе данных производные обычно используются для передачи информации
- Информация Фишера вычисляется как матрица из вторых производных и говорит о “крутости” максимума
- Если функция $f(x_i \mid \theta)$ удовлетворяет условиям регулярности, ML-оценка обладает оптимальными свойствами в асимптотическом плане

Резюме

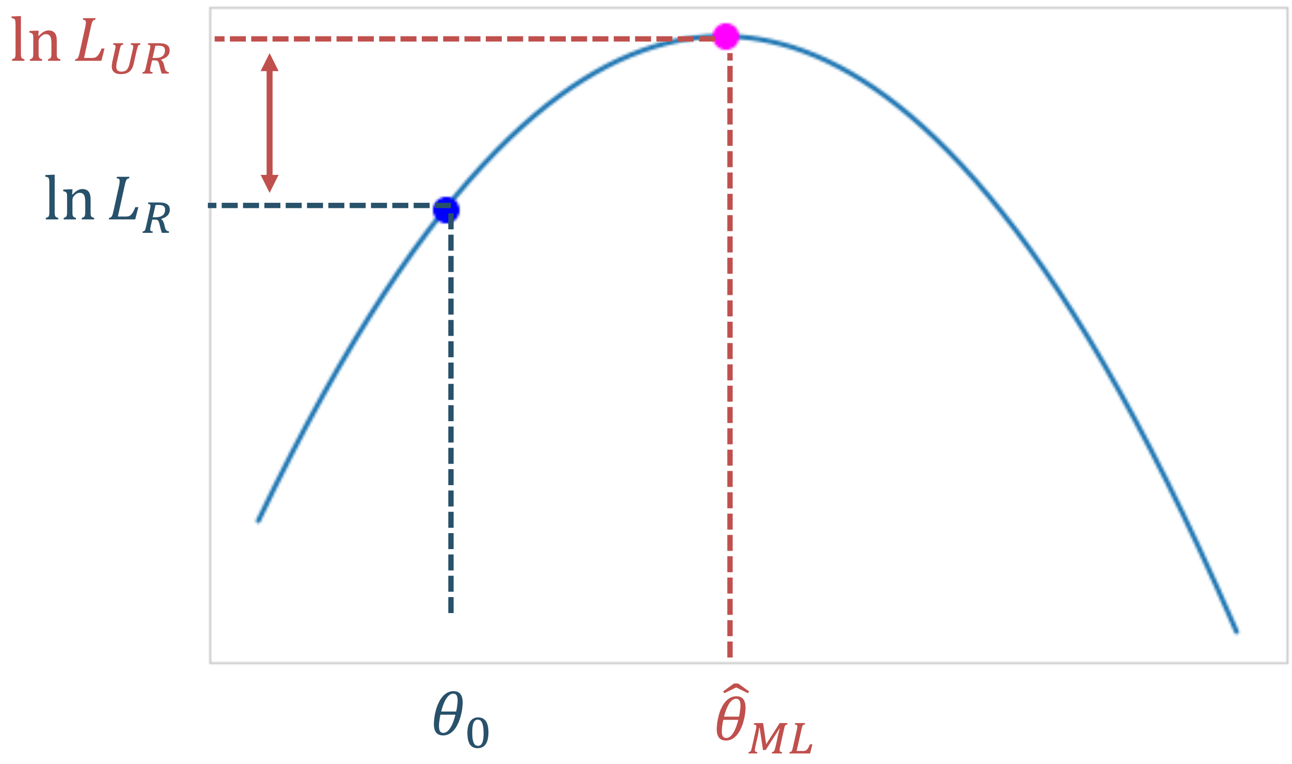
- ML-оценка имеет асимптотически нормальное распределение, для поиска её дисперсии используют информацию Фишера
- В “сложных” (нерегулярных) случаях ML-оценка может терять эти свойства

Тест отношения правдоподобий

Тест отношения правдоподобий

- Метод максимального правдоподобия очень широко распространён
- С помощью него можно проверять гипотезы

Тест отношения правдоподобий



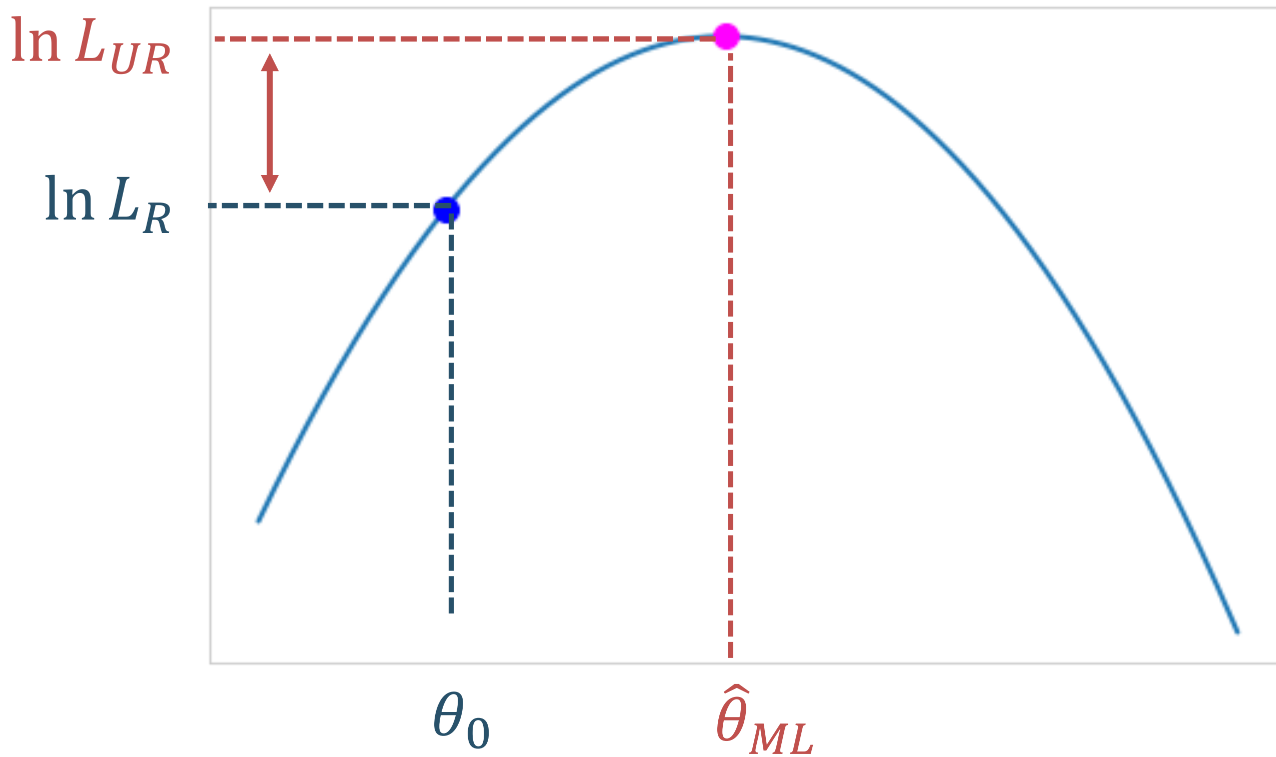
$H_0\colon \theta = \theta_0$

$H_a\colon \theta \neq \theta_0$

$\ln L_{UR}$ – максимум логарифма правдоподобия в модели без ограничений

$\ln L_R$ – максимум логарифма правдоподобия в модели с ограничениями

Тест отношения правдоподобий



$H_0: \theta = \theta_0$

$H_a: \theta \neq \theta_0$

$$2 \cdot (\ln L_{UR} - \ln L_R) \underset{H_0}{\sim} \chi^2_q$$

q – количество ограничений вида $g(\theta) = 0$, где g какая-то функция

Тест отношения правдоподобий

- H_0: система из q ограничений на неизвестные параметры
- H_a: хотя бы одно из ограничений не выполняется
- Оцениваем модель без ограничений, находим $\ln L_{UR}$
- Оцениваем модель с ограничениями, находим $\ln L_R$
- Наблюдаемое значение статистики:

$$LR_{obs} = 2 \cdot (\ln L_{UR} - \ln L_R)$$

- Критическое значение статистики:

$$LR_{cr} = \chi_q^2(1 - \alpha)$$

Тест отношения правдоподобий

- Тест отношения правдоподобий позволяет проверять гипотезы о различных ограничениях
- Внутри теста отношения правдоподобий может быть использовано сразу несколько ограничений $\Rightarrow$ не нужно корректировать уровень значимости
- Для того, чтобы использовать этот тест, требуется вычислить максимум функции правдоподобия в модели без ограничений и в модели с ограничениями

Тест отношения правдоподобий

- Тест отношения правдоподобий позволяет проверять гипотезы о различных ограничениях
- Внутри теста отношения правдоподобий может быть использовано сразу несколько ограничений $\Rightarrow$ не нужно корректировать уровень значимости
- Для того, чтобы использовать этот тест, требуется вычислить максимум функции правдоподобия в модели без ограничений и в модели с ограничениями
- Тест отношения правдоподобий асимптотически оптимальный, т.е. обладает наименьшей ошибкой второго рода (наибольшей мощностью)

Многомерный дельта-метод

Свойства ML-оценок

1. **Состоятельность:** $\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\theta} = \theta$

2. **Асимптотическая эффективность:**

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = [\,J(\theta)\,]^{-1}$$

3. **Асимптотическая нормальность:**

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, [\,J(\theta)\,]^{-1})$$

4. **Инвариантность:** если $\hat{\theta}$ – ML-оценка для θ, тогда если $\mathrm{g}(t)$ – непрерывная функция, то $\mathrm{g}(\hat{\theta})$ – ML-оценка для $\mathrm{g}(\theta)$

Дельта-метод

Если:

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, \hat{\sigma}^2)$$

$g(t)$ – дифференцируемая функция

Дельта-метод

Если:

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, \hat{\sigma}^2)$$

$g(t)$ – дифференцируемая функция

Тогда:

$$g(\hat{\theta}) \overset{asy}{\sim} N\left(g(\theta),\ \hat{\sigma}^2 \cdot g'(\hat{\theta})^2\right)$$

Дельта-метод

Если:

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, \hat{\sigma}^2)$$

$g(t)$ – дифференцируемая функция

Тогда:

$$g(\hat{\theta}) \overset{asy}{\sim} N\left(g(\theta),\ \hat{\sigma}^2 \cdot g'(\hat{\theta})^2\right)$$

✔ Удобно использовать для метода максимального правдоподобия, так как оценки распределены нормально и присутствует свойство инвариантности

Пример:

Если:

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, 9) \qquad \hat{\theta} = 2$$

Пример:

Если:

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, 9) \qquad \hat{\theta} = 2 \qquad g(t) = \frac{1}{t} \qquad g'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

Тогда:

$$\frac{1}{\hat{\theta}} \overset{asy}{\sim} N\left(\quad ? \ , \ ? \quad \right) \quad g(\hat{\theta}) \overset{asy}{\sim} N\left(g(\theta),\ \hat{\sigma}^2 \cdot g'(\hat{\theta})^2\right)$$

Пример:

Если:

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, 9) \qquad \hat{\theta} = 2 \qquad g(t) = \frac{1}{t} \qquad g'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

Тогда:

$$\frac{1}{\hat{\theta}} \overset{asy}{\sim} N\left(\frac{1}{\theta}, 9 \cdot \left(-\frac{1}{2^2}\right)^2\right) \quad g(\hat{\theta}) \overset{asy}{\sim} N\left(g(\theta),\ \hat{\sigma}^2 \cdot g'(\hat{\theta})^2\right)$$

Пример:

Если:

$$\hat{\theta} \overset{asy}{\sim} N(\theta, 9) \qquad \hat{\theta} = 2 \qquad g(t) = \frac{1}{t} \qquad g'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

Тогда:

$$\frac{1}{\hat{\theta}} \overset{asy}{\sim} N\left(\frac{1}{\theta}, 9 \cdot \left(-\frac{1}{2^2}\right)^2\right) \quad g(\hat{\theta}) \overset{asy}{\sim} N\left(g(\theta),\ \hat{\sigma}^2 \cdot g'(\hat{\theta})^2\right)$$

❗ Важно понимать, что дельта-метод приближает распределение в окрестности математического ожидания

Двумерный дельта-метод

Если:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11}^2 & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{22}^2 \end{pmatrix}\right] \qquad \hat{\theta} \overset{asy}{\sim} \mathrm{N}(\theta, \hat{\Sigma})$$

$g(t_1, t_2)$ – дифференцируемая функция

Двумерный дельта-метод

Если:

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11}^2 & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{22}^2 \end{pmatrix}\right] \qquad \hat{\theta} \overset{asy}{\sim} \mathrm{N}(\theta, \hat{\Sigma})$$

$g(t_1, t_2)$ – дифференцируемая функция

Тогда:

$$g(\hat{\theta}) \overset{asy}{\sim} N\left(g(\theta), \nabla\hat{g}^T\,\hat{\Sigma}\,\nabla\hat{g}\right)$$

Где:

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial t_2} \end{pmatrix} \qquad \nabla\hat{g} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial t_1}(\hat{\theta}) \\ \dfrac{\partial g}{\partial t_2}(\hat{\theta}) \end{pmatrix}$$

Пример

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right] \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2}$$

Пример

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right] \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t_2} \\ -\dfrac{t_1}{t_2^2} \end{pmatrix} \qquad \nabla \hat{g} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Пример

$$\begin{pmatrix}\hat\theta_1\\ \hat\theta_2\end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right] \quad \hat\theta = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \quad g(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{t_2}\\ -\dfrac{t_1}{t_2^2}\end{pmatrix} \qquad \nabla\hat g = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\nabla\hat g^T\, \hat\Sigma\, \nabla\hat g = (0.5, -0.25)\cdot\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\ -0.25\end{pmatrix} =$$

$$= (4, -1)\cdot\begin{pmatrix}0.5\\ -0.25\end{pmatrix} = 2 + 0.25 = 2.25$$

Пример

$$\begin{pmatrix}\hat{\theta}_1\\ \hat{\theta}_2\end{pmatrix} \overset{asy}{\sim} N\left[\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\right] \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \quad g(t_1, t_2) = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{t_2}\\ -\dfrac{t_1}{t_2^2}\end{pmatrix} \qquad \nabla \hat{g} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\nabla \hat{g}^T\, \hat{\Sigma}\, \nabla \hat{g} = (0.5, -0.25) \cdot \begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0.5\\ -0.25\end{pmatrix} =$$

$$= (4, -1) \cdot \begin{pmatrix}0.5\\ -0.25\end{pmatrix} = 2 + 0.25 = 2.25$$

$$\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2} \overset{asy}{\sim} N\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}, 2.25\right)$$

Дельта-метод

- ML-оценка обладает свойством инвариантности (функция от ML-оценки это ML оценка)
- Чтобы построить доверительный интервал для функции от ML-оценки, мы можем воспользоваться дельта-методом
- Дельта-метод хорошо приближает распределение в окрестности математического ожидания