ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

Метод моментов[*]

– Никогда не поздно поставить какую-то цель или обрести новую мечту, ведь наша жизнь длиться всего лишь момент и представляет из себя бескрайнее море возможностей.
– Опять не сдал?
– Опять.

Диалог двух друзей студентов

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены. Закон больших чисел говорит нам, что среднее выборочное $\bar{X}$ является хорошей оценкой для математического ожидания $\mathbb{E}(X_i)$:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_i)$$

На практике это означает, что при больших n эти величины равны:

$$\bar{X}_n \approx \mathbb{E}(X_i)$$

На этой нехитрой идее и построен метод моментов. Как конкретно используется идея, понятно из следующих двух примеров:

Упражнение 1 (киндеры)

[*]Эта pdf-ка, по факту, представляет из себя немного переделанный конспект от Бориса Демешева: https://github.com/bdemeshev/pr201/tree/master/meth_moments

Максим любит киндеры и собирает коллекцию жирОфов. Для этого он покупает шоколадки. Пусть вероятность p — вероятность того, что в киндере лежит жироф.

Максим считает сколько яиц надо купить, чтобы у него появился очередной жироф. Каждый раз Макс записывает номер попытки, с которой у него появилась правильная игрушка. Обозначим эти величины X_1, ..., X_n. Постройте оценку неизвестного параметра p с помощью метода моментов.

Решение:

Величины X_i имеют геометрическое распределение, поэтому $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{p}$. Принцип метода моментов гласит:

$$\bar{X}_n \approx \frac{1}{p}$$

Выражаем неизвестный параметр p:

$$p \approx \frac{1}{\bar{X}_n}$$

Это и есть нужная нам оценка:

$$\hat{p}_{MM} = \frac{1}{\bar{X}_n}$$

Упражнение 2 (равномерное)

Допустим, что случайные величины $X_1, ..., X_n$ независимы и равномерны на $[\theta; \theta + 1]$. Постройте оценку неизвестного параметра θ с помощью метода моментов.

Решение:

В данном случае $\mathbb{E}(X_i) = \theta + 0.5$ и, следовательно:

$$\bar{X}_n \approx \theta + 0.5$$

Выражаем θ:

$$\theta \approx \bar{X}_n - 0.5$$

Это и есть нужная нам оценка:

$$\hat{\theta}_{MM} = \bar{X}_n - 0.5$$

Если говорить более формально...

Определение. Пусть X_i одинаково распределены и независимы, а $\mathbb{E}(X_i)$ зависит от неизвестного параметра θ, скажем $\mathbb{E}(X_i) = g(\theta)$. Тогда **оценкой метода моментов** называется случайная величина:

$$\hat{\theta}_{MM} = g^{-1}(\bar{X}_n)$$

Конечно, иногда бывают ситуации, когда математическое ожидание $\mathbb{E}(X_i)$ не зависит от θ. Например, если X_i равномерны на $[-\theta;\theta]$, то математическое ожидание $\mathbb{E}(X_i) = 0$. Что делать в такой ситуации?

Неспроста же наш метод называется методом моментов...Напомним, что k-ым моментом случайной величины X_i называется математическое ожидание $\mathbb{E}(X_i^k)$ ...

Итак, если условия $\bar{X}_n \approx \mathbb{E}(X_i)$ связанного с первым моментом не хватило, то на помощь придет второй момент случайной величины. В силу того же закона больших чисел:

$$\frac{\sum X_i^2}{n} \approx \mathbb{E}(X_i^2)$$

Упражнение 3 (равномерное)

Величины X_i независимы и равномерны на $[-\theta;\theta]$. Постройте оценку неизвестного параметра θ с помощью метода моментов.

Решение:

Убеждаемся, что $\mathbb{E}(X_i) = 0$:

$$\mathbb{E}(X_i) = \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot \frac{1}{2\theta}\,dx = \frac{x^2}{4\theta}\Big|_{-\theta}^{\theta} = \left(\frac{\theta^2 - (-\theta)^2}{4\theta}\right) = \frac{\theta^2 - \theta^2}{4\theta} = 0$$

Находим $\mathbb{E}(X_i^2)$:

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \int_{-\theta}^{\theta} x^2 \cdot \frac{1}{2\theta}\,dx = \frac{x^3}{6\theta}\Big|_{-\theta}^{\theta} = \left(\frac{\theta^3 - (-\theta)^3}{6\theta}\right) = \frac{2\theta^3}{6\theta} = \frac{\theta^2}{3}$$

Согласно принципу метода моментов:

$$\frac{\sum X_i^2}{n} \approx \frac{\theta^2}{3}$$

Выражаем θ:

$$\theta \approx \sqrt{3\frac{\sum X_i^2}{n}}$$

Это и есть нужная нам оценка:

$$\hat{\theta}_{MM} = \sqrt{3\frac{\sum X_i^2}{n}} = \sqrt{3\overline{X^2}}$$

Если не хватит и второго момента, тогда воспользуемся третьим и т.д. Для произвольного k мы имеем:

$$\frac{\sum X_i^k}{n} \approx \mathbb{E}(X_i^k)$$

В большинстве случаев хватает именного первого момента. Последующие моменты нужны чаще всего при оценке нескольких параметров.