ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

Дельта-метод[*]

> «Забавная странная цитата в тему в стиле Николенко»
>
> Автор цитаты

Нормальное распределение возникает, если суммируется большое количество независимых одинаково распределенных случайных величин. Однако оно возникает и в других ситуациях! Дельта-метод основан на том факте, что даже нелинейная функция от нормально распределенной случайной величины иногда имеет распределение близкое к нормальному.

Откуда берётся дельта-метод

Если функция $g(t)$ дифференцируема, то в окрестности точки μ функция $g(t)$ похожа на прямую, то есть

$$g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu) \cdot (t - \mu).$$

Об этом нам говорит математический анализ, в частности, разложение в ряд Тэйлора.

Линейное преобразование нормально распределенной случайной величины оставляет её нормально распределенной, если угловой коэффициент отличен от нуля, т.е.

$$g'(\mu) \neq 0.$$

[*]Эта pdf-ка, по факту, представляет из себя немного дополненный конспект Бориса Демешева: https://github.com/bdemeshev/pr201/tree/master/delta_method

Если $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и дисперсия X мала, то X практически всегда попадает в небольшую окрестность μ, а в ней f похожа на линейную функцию и

$$g(X) \approx N(\mu, \sigma^2(g'(\mu))^2.$$

Получаем практическую версию дельта-метода. Если:

- $g(t)$ — дифференциируема;
- $g'(\mu) \neq 0$;
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$;
- дисперсия σ^2 мала;

тогда

$$g(X) \sim \mathcal{N}(g(\mu), \sigma^2(g'(\mu))^2).$$

ЗБЧ позволяет использовать средние в качестве оценок для различных параметров. ЦПТ подсказывает как среднее будет распределено. Однако на практике часто встречаются ситуации, когда оценка параметра — это функция от среднего. **Дельта-метод —** позволяет в такой ситуации понять как будет распределена оценка. Полученное распределение можно использовать для строительства доверительного интервала.

Дельта-метод на практике

Упражнение 1 (Равномерное)

Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_{100} \sim iid\ U[2;8]$. Как будут распределены $\bar{x}$ и $\frac{1}{\bar{x}}$?

Решение:

С $\bar{x}$ всё будет просто. Воспользуемся ЦПТ, по ней

$$\bar{x} \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(X_i), \frac{Var(X_i)}{n}\right).$$

Для равномерного распределения $\mathbb{E}(X_i) = \frac{2+8}{2} = 5$, $Var(X_i) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$.

Получается, что среднее посчитанное по сотне наблюдений будет иметь распределение

$$\bar{x}_{100} \sim \mathcal{N}\left(5, \frac{3}{100}\right).$$

Для поиска распределения $\frac{1}{\bar{x}}$ воспользуемся дельта-методом:

$$g(t) = \frac{1}{t} \qquad g'(t) = -\frac{1}{t^2} \qquad g(\mu) = \frac{1}{5} \qquad g'(\mu) = -\frac{1}{25}.$$

Остаётся только подставить найденные значения в формулу и получить, что

$$\frac{1}{\bar{x}_{100}} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{100} \cdot \left(-\frac{1}{25}\right)^2\right).$$

Упражнение 2 (Пуассона)

Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \text{iid } \text{Pois}(\lambda)$. С помощью дельта-метода найдите как распределена оценка вероятности $\mathbb{P}(X_i = 0)$.

Решение:

В качестве оценки для λ будем использовать оценку метода моментов, $\bar{x}$. Среднее по ЦПТ имеет асимптотически нормальное распределение

$$\bar{x} \sim \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right).$$

Вероятность того, что $X_i = k$ считается по формуле

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$$

в частности

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-\lambda}.$$

Для оценки последней, $e^{-\bar{x}}$ нам нужно найти распределение. Воспользуемся дельта-методом:

$$g(t) = e^{-t} \qquad g'(t) = -e^{-t}$$

Подставим значения в формулу и получим, что

$$e^{-\bar{x}} \sim \mathcal{N}\left(e^{-\lambda}, \frac{\lambda}{n} \cdot e^{-2\cdot\lambda}\right).$$

В дисперсию можем подставить вместо λ её оценку

$$e^{-\bar{x}} \sim \mathcal{N}\left(e^{-\lambda}, \frac{\bar{x}}{n} \cdot e^{-2\cdot\bar{x}}\right).$$

Такое распределение мы сможем использовать для строительства доверительных интервалов и дальнейшего анализа.

Дельта-метод в теории

Естественно, строгая формулировка идеи «дисперсия σ^2 мала» использует понятие предела и последовательностей случайных величин.

Если: $g(t)$ — дифференцируема, $g'(\mu) \neq 0$, и последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ удовлетворяет условию:

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

тогда последовательность $g(X_n)$ удовлетворяет условию:

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2(g'(\mu))^2)$$