Временные ряды

Какими бывают данные

Что мы делали до этого:

- Мы говорили, что все наблюдения, которые мы собрали независимы друг от друга
- Но они могут зависеть от каких-то других переменных (регрессия)

$$x_1, x_2, \dots, x_n \sim iid$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (y_n, x_n) \sim iid$$

Какими бывают данные

Что мы будем делать теперь:

- На этой неделе мы поговорим про модели, которые отказываются от этой предпосылки

- **Временной ряд –** это последовательность случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,$ которые могут быть как-то связаны между собой

Какими бывают данные

- **Межобъектные (cross-sectional) –** несколько объектов, один момент времени: цены на квартиры в Москве сегодня

- **Временные ряды (time series) –** один объект, различные моменты времени: курс рубля, возвращаемость пользователей, цена акции

- **Панельные данные (panel data) –** несколько объектов
в разные моменты времени: выборки по нескольким странам/фирмам за несколько лет

Задачи, связанные с временными рядами

- Прогнозирование – хотим узнать, что будет дальше
- Поиск аномалий – хотим проанализировать, что было в прошлом
- Кластеризация – хотим сегментировать пользователей по их поведению
- Поиск разладок – хотим во-время увидеть, что какая-то метрика стала вести себя по-новому
- Использование временных рядов в качестве признаков
  в обычных моделях

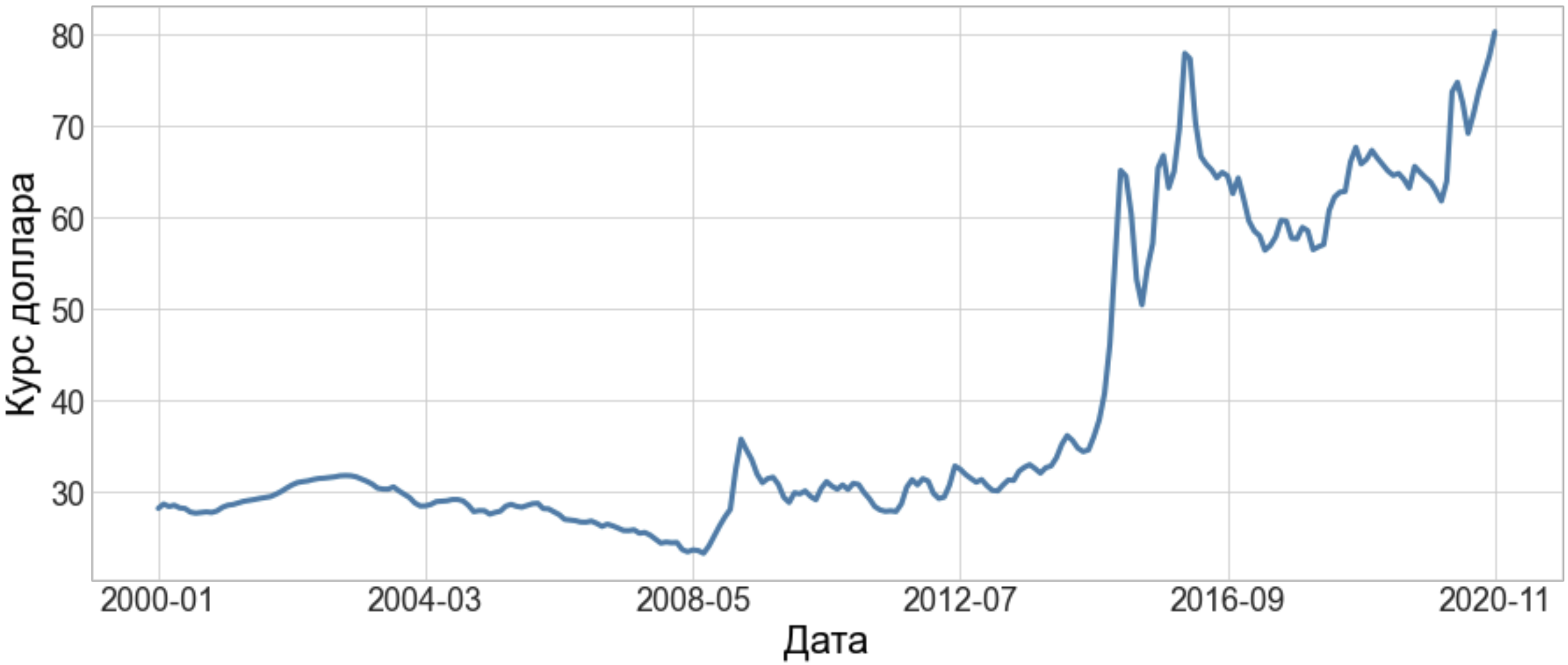
План

- Особенности временных рядов: стационарность, кросс-валидация, из чего состоит ряд
- Обсудим два класса моделей для краткосрочных прогнозов: ETS и SARIMA

Временной ряд как структура данных

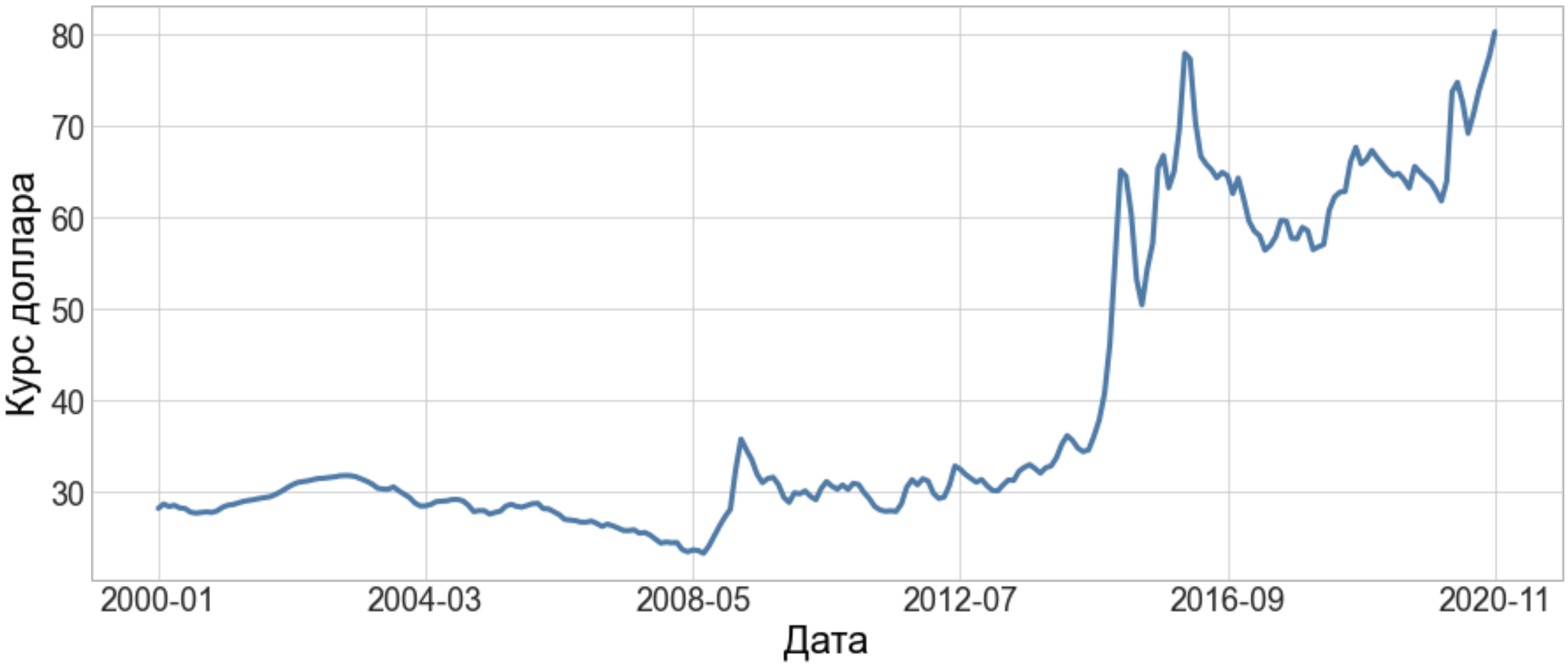
Временной ряд

- Временной ряд – это последовательность случайных величин $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, которые могут быть как-то связаны между собой



Временной ряд – одно наблюдение

- Один ряд – это одна реализация какого-то случайного процесса



Временной ряд – одно наблюдение

- Если бы мы запустили Российскую экономику с 2000 года заново, курс доллара мог вести себя по-другому, это была бы другая реализация процесса

Временной ряд – одно наблюдение

- По факту, один временной ряд – это одно наблюдение за последовательностью случайных величин

- Чтобы сделать выводы о поведении валютного курса, нам нужно много параллельных вселенных, где события развивались по-разному

- К сожалению, мы пока не умеем путешествовать в параллельные вселенные и собирать в них данные

- Из-за этого на структуру ряда приходится накладывать дополнительные ограничения: ряд стационарен или ряд можно разложить на составляющие

Строгая стационарность

Ряд **строго стационарен (стационарен в узком смысле),** если для любых s и k совместное распределение случайных величин $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots y_{t_k}$ такое же как у $y_{t_1+s}, y_{t_2+s}, \dots y_{t_k+s}$

Простым языком: свойства ряда не изменяются, если изменить начало отсчёта времени

Слабая стационарность

- Таким определением очень неудобно пользоваться на практике, надо знать все совместные законы распределения, а это невозможно

- На практике обычно используют слабую стационарность

Слабая стационарность

Ряд **слабо стационарен (стационарен в широком смысле),** если характеристики этого ряда не зависят от времени:

$$\mathbb{E}(y_t) = const$$

$$Var(y_t) = \sigma^2$$

$$Cov(y_t, y_{t+s}) = \gamma_s$$

Слабая стационарность

Ряд **слабо стационарен (стационарен в широком смысле),** если характеристики этого ряда не зависят от времени:

$$\mathbb{E}(y_t) = const$$

$$Var(y_t) = \sigma^2$$

$$Cov(y_t, y_{t+s}) = \gamma_s$$

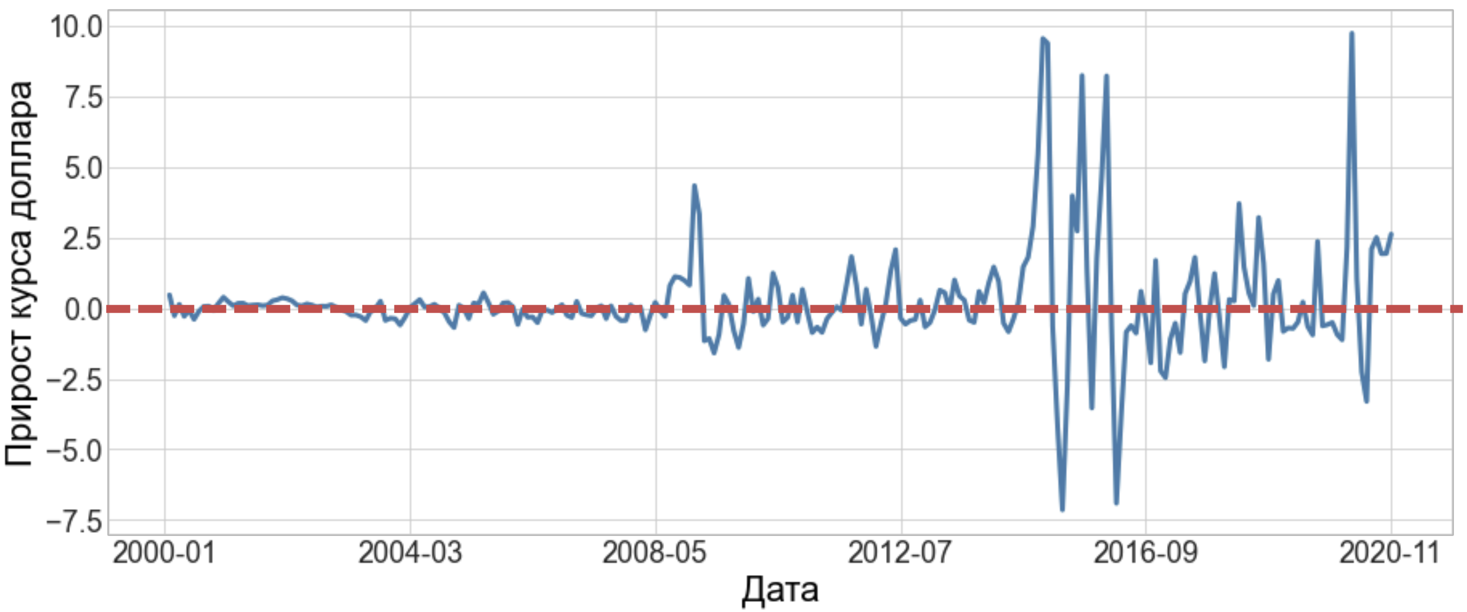
❗ Курс доллара нестационарен, так как математическое ожидание изменилось

Слабая стационарность

- Часто, чтобы сделать ряд стационарным, его берут в приростах: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

Слабая стационарность

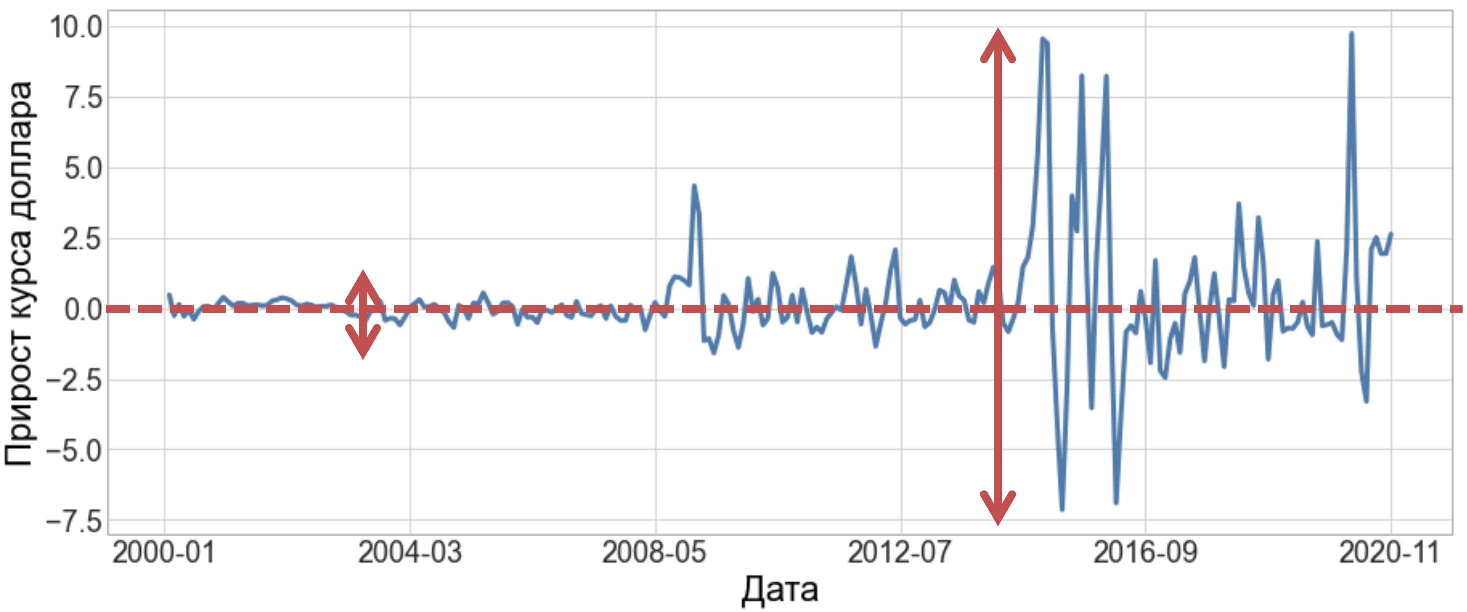
- Часто, чтобы сделать ряд стационарным, его берут в приростах: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$



Слабая стационарность

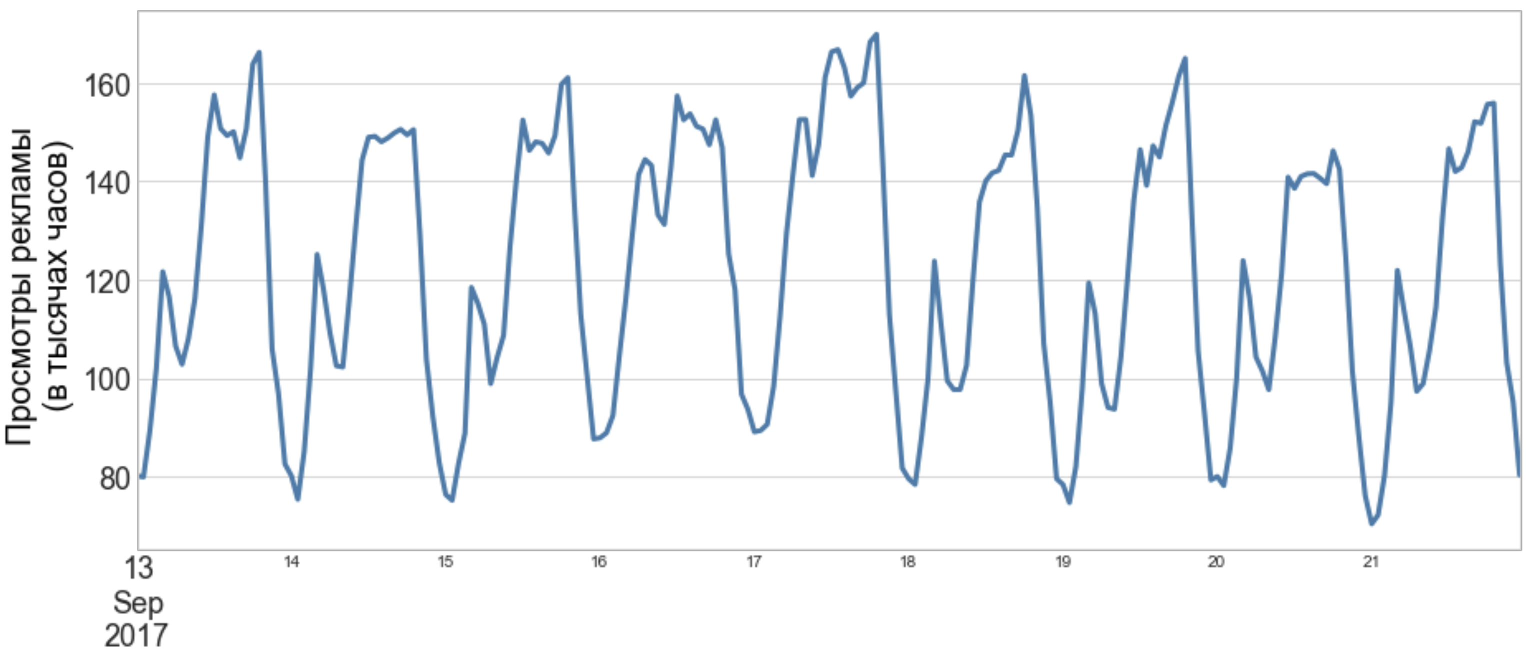
- Часто, чтобы сделать ряд стационарным, его берут в приростах: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$
- Этот приём помогает не всегда

Колебания стали сильнее, дисперсия ряда меняется во времени => нестационарен



Слабая стационарность

- Дисперсия и матожидание не меняются во времени
- Внутри наблюдаются одинаковые паттерны
- Судя по всему, ряд стационарен
- Есть формальные статистические тесты на стационарность



Кросс-валидация на временных рядах

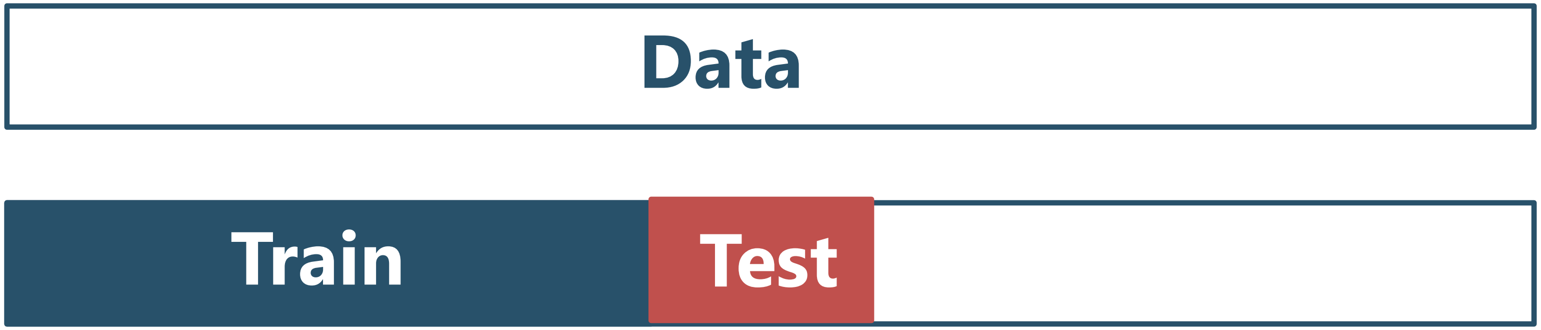
- Как сравнивать разные модели между собой?
- Во временных рядах все наблюдения взаимосвязаны
- Нельзя делать обычную кросс-валидацию, так как мы будем перемешивать между собой информацию из будущего и информацию из прошлого

❗ При моделировании временных рядов, мы должны быть аккуратными с их структурой

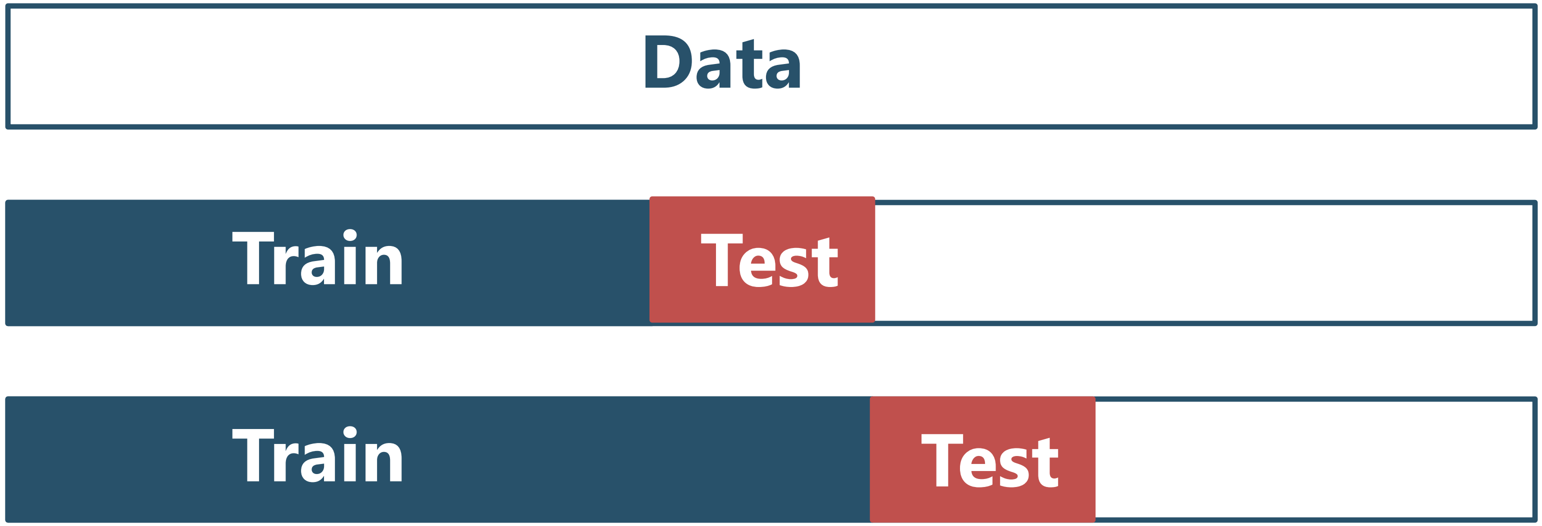
Cross validation on a rolling basis

Data

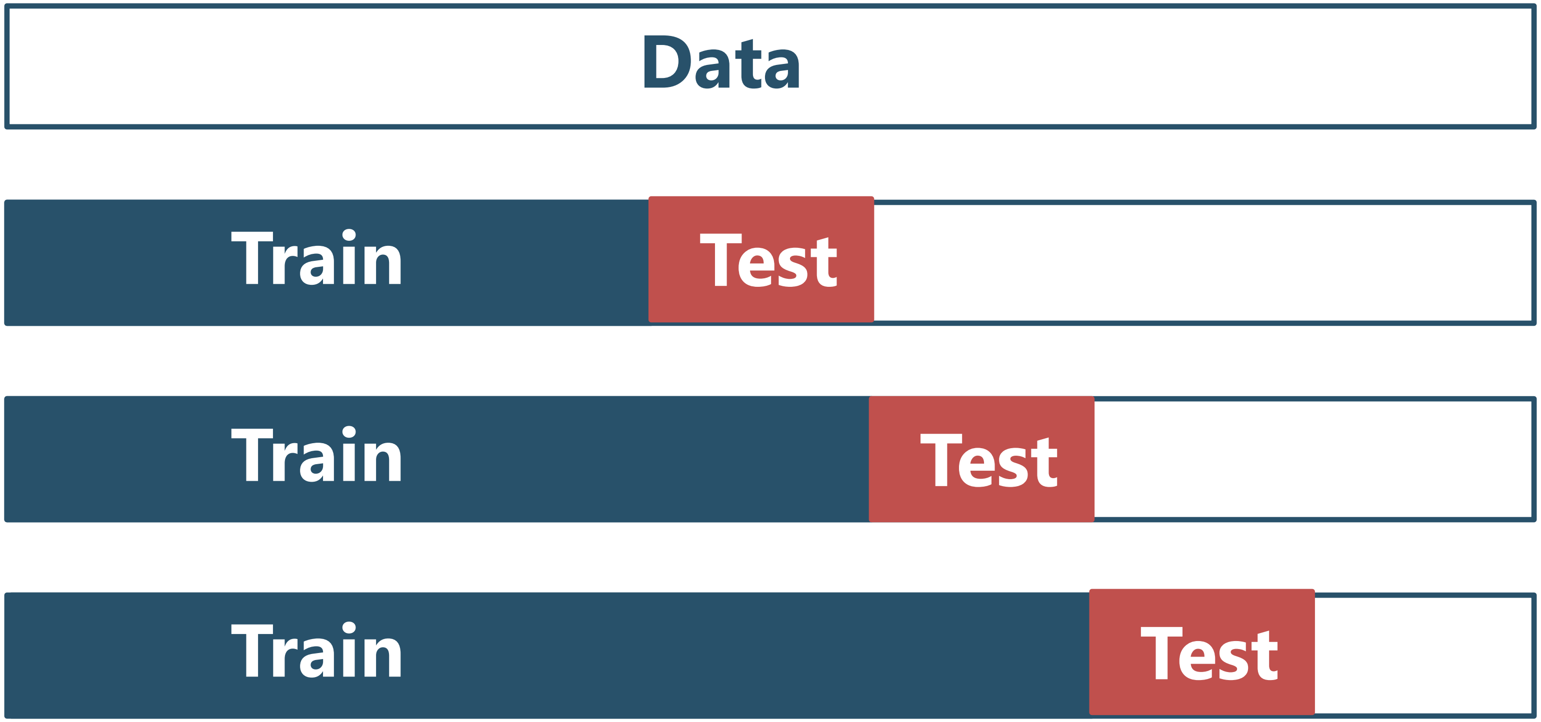
Cross validation on a rolling basis



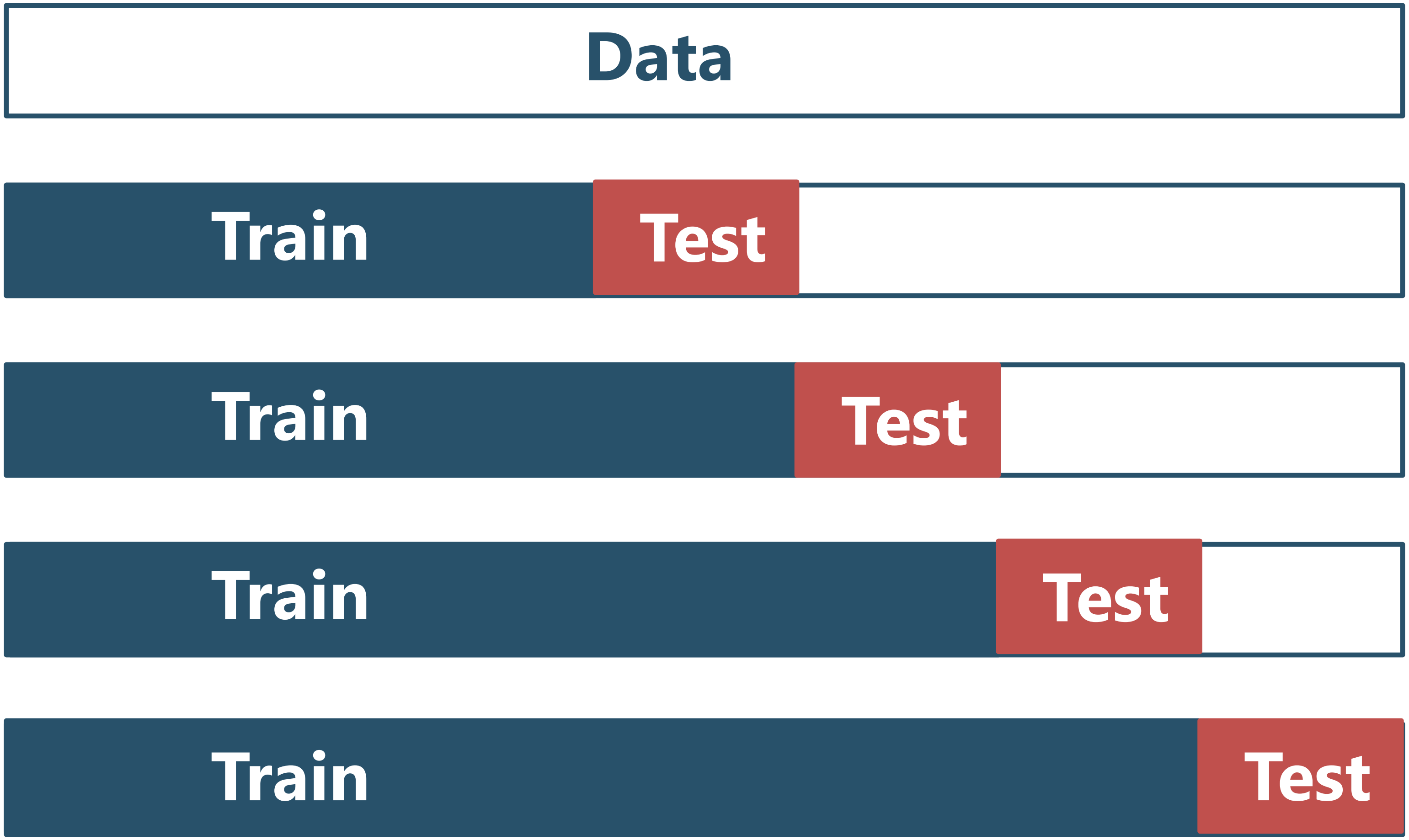
Cross validation on a rolling basis



Cross validation on a rolling basis

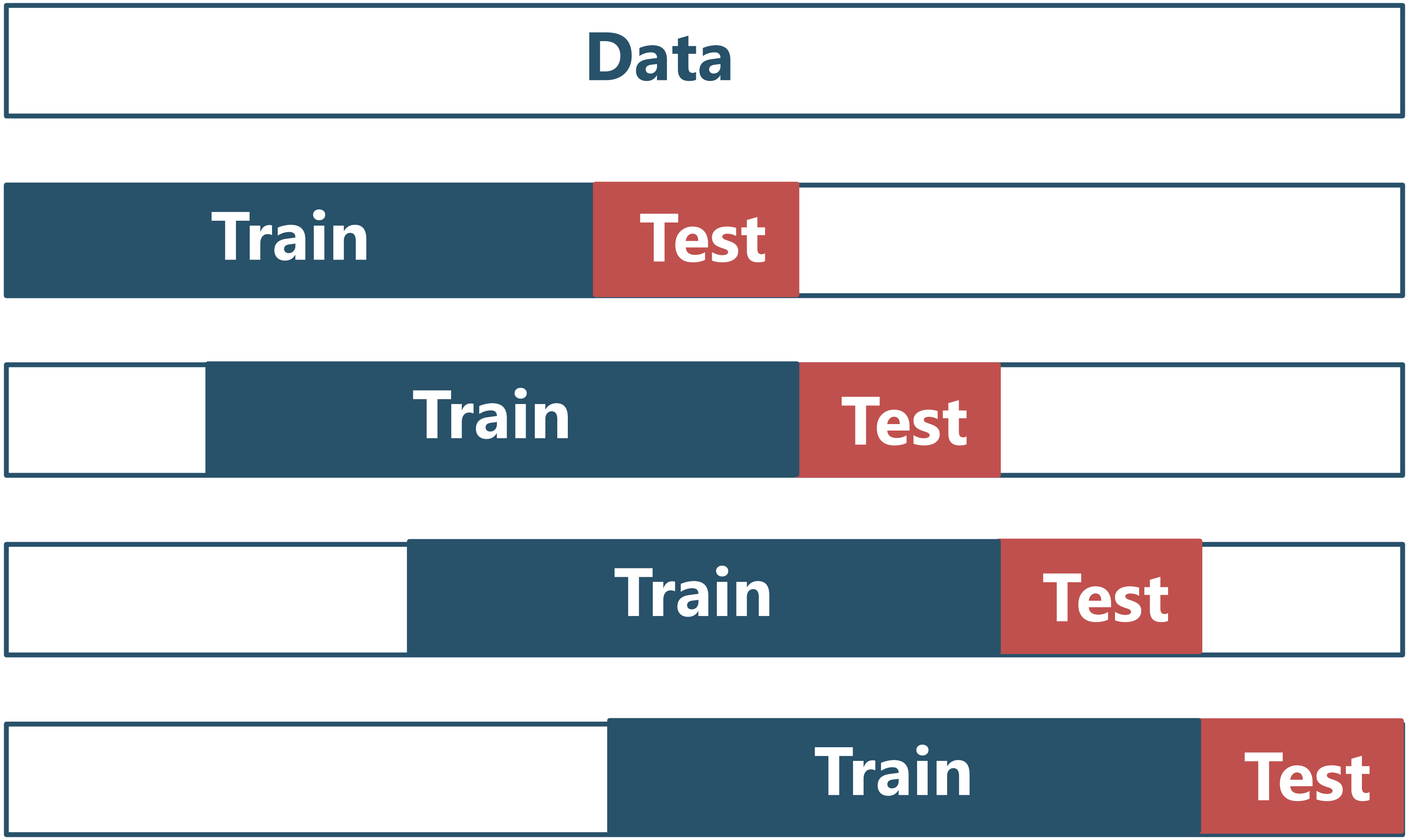


Cross validation on a rolling basis



Тренировочную выборку можно либо расширять

Cross validation on a rolling basis



Либо поддерживать ширину окна фиксированной

Кросс-валидация на временных рядах

- **Leave one out кросс-валидация** – когда в тест берём каждый раз только одно, следующее наблюдение
- Нельзя приравнивать разные горизонты прогнозирования
- Модель может хорошо прогнозировать на неделю вперёд, но при этом плохо прогнозировать на месяц вперёд, либо наоборот
- Иногда метрики вычисляют для разных горизонтов прогнозирования отдельно

Информационные критерии

- Другой способ сравнивать модели между собой – информационные критерии
- Можно сравнивать любые модели оценённые методом максимального правдоподобия
- Такие критерии штрафуют за число параметров, k и поощряют высокое правдоподобие
- Чем меньше величина критерия тем лучше

Критерий Акаике:

$$AIC = 2 \cdot k - 2 \cdot \ln L$$

Критерий Шварца:

$$BIC = k \cdot \ln n - 2 \cdot \ln L$$

Резюме

- При работе с временными рядами, нужно быть аккуратнее с их структурой
- Из-за этого на ряды обычно накладывают дополнительные предположения
- А также делают кросс-валидацию так, чтобы в прогнозы не просачивалась информация из будущего

ETS-модели

ETS-модели

- Error + Trend + Seasonality или модели экспоненциального сглаживания

ETS-модели

- Error + Trend + Seasonality или модели экспоненциального сглаживания
- Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

ETS-модели

- Error + Trend + Seasonality или модели экспоненциального сглаживания
- Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

E – случайная ошибка	A M
T –тренд	A M N
S – сезонность	A M N

ETS-модели

- Error + Trend + Seasonality или модели экспоненциального сглаживания
- Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

E – случайная ошибка	A M
T –тренд	A M N
S – сезонность	A включается аддитивно M мультипликативно N нет в модели

ETS-модели

- Error + Trend + Seasonality или модели экспоненциального сглаживания
- Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

E – случайная ошибка A M

T –тренд A M N Ad Md с угасанием

S – сезонность

A включается аддитивно

M мультипликативно

N нет в модели

ETS-модели

- Error + Trend + Seasonality или модели экспоненциального сглаживания

- Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

E – случайная ошибка: A, M

T –тренд: A, M, N, Ad, Md

S – сезонность: A, M, N

Краткая запись: $ETS(ANN)$

аддитивная ошибка
нет тренда
нет сезонности

Спецификация модели

Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

Спецификация модели

Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

- l_t – идеальное, равновесное значение ряда, если бы у него не было всего остального (тренда, сезонности и тп)
- b_t – текущая скорость роста показателя (отвечает за тренд)
- s_t – сезонная составляющая
- u_t – случайная ошибка

Спецификация модели

Это набор различных моделей, которые пытаются разложить наблюдаемое значение ряда y_t на **ненаблюдаемые составляющие:**

- l_t – идеальное, равновесное значение ряда, если бы у него не было всего остального (тренда, сезонности и тп)
- b_t – текущая скорость роста показателя (отвечает за тренд)
- s_t – сезонная составляющая
- u_t – случайная ошибка

❗ Все ненаблюдаемые составляющие "вымышленные", понять насколько хорошей получилась модель можно только по качеству прогнозов

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

Модель будет
состоять из ошибки

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + u_t$

И плавно изменяющегося равновесного уровня l_t

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Динамика
равновесного уровня l_t
описывается
отдельным уравнением

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$\alpha \in [0; 1]$$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$\alpha \in [0; 1]$$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$\alpha \in [0; 1]$$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + u_t$

$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$

$\alpha \in [0; 1]$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

- Оценки можно найти методом максимального правдоподобия
- Функцию правдоподобия будем строить, отталкиваясь от распределения ошибок

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$\alpha \in [0; 1]$$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + u_t$

$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$

$\alpha \in [0; 1]$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \cancel{f(y_1)\, f(y_2) f(y_3) \dots f(y_n)}$

❗ Наблюдения зависят друг от друга!

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$\alpha \in [0; 1]$$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$= f(y_1)\, f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1) \dots f(y_n \mid y_{n-1}, \dots, y_3, y_2, y_1)$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$\alpha \in [0; 1]$$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$= f(y_1)\, \underbrace{f(y_2 \mid y_1)}_{\mathcal{F}_1} \underbrace{f(y_3 \mid y_2, y_1)}_{\mathcal{F}_2} \dots \underbrace{f(y_n \mid y_{n-1}, \dots, y_3, y_2, y_1)}_{\mathcal{F}_{\mathrm{n-1}}}$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + u_t$

$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$

$\alpha \in [0; 1]$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$= f(y_1)\, f(y_2 \mid \mathcal{F}_1) f(y_3 \mid \mathcal{F}_2) \dots f(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + u_t$

Выборка: y_1, y_2, y_3

$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1)\, f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1)$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1)\, f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1)$$

$$y_1 \sim N(l_0, \sigma^2)$$

$$y_1 = l_0 + u_1$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1)\, f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1)$$

$$y_1 \sim N(l_0, \sigma^2)$$

$$y_1 = l_0 + u_1 \qquad y_2 = l_1 + u_2$$

$$l_1 = l_0 + \alpha \cdot u_1$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1)\, f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1)$$

$$y_1 \sim N(l_0, \sigma^2) \qquad y_2 \mid y_1 \sim N(l_1, \sigma^2)$$

$$y_1 = l_0 + u_1 \qquad y_2 = l_1 + u_2$$

$$l_1 = l_0 + \alpha \cdot u_1$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1)\, f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1)$$

$y_1 \sim N(l_0, \sigma^2)$ $\quad$ $y_2 \mid y_1 \sim N(l_1, \sigma^2)$ $\quad$ $y_3 \mid y_2, y_1 \sim N(l_2, \sigma^2)$

$y_1 = l_0 + u_1$ $\quad$ $y_2 = l_1 + u_2$

$l_1 = l_0 + \alpha \cdot u_1$

И так далее…

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1)\, f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1) \to \max_{l_0,\ \sigma^2,\ \alpha}$$

$$y_1 \sim N(l_0, \sigma^2) \qquad y_2 \mid y_1 \sim N(l_1, \sigma^2) \qquad y_3 \mid y_2, y_1 \sim N(l_2, \sigma^2)$$

$$y_1 = l_0 + u_1 \qquad y_2 = l_1 + u_2$$

$$l_1 = l_0 + \alpha \cdot u_1$$

И так далее…

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + u_t$

$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1) f(y_2 \mid y_1) f(y_3 \mid y_2, y_1) \to \max_{l_0,\ \sigma^2,\ \alpha}$$

правдоподобие

условные распределения

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(?\,,?\,)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(?\,,?\,)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Ошибки распределены нормально, значит в качестве прогнозов модель будет использовать условное математическое ожидание

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3)$$

Не знаем

:(

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \; N(?\,,?\,)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) \; = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3)$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(?\,,?\,)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(?\,,?\,)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3)$$

знаем

всегда знаем распределение

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(?, ?)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(?, ?)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, ?)$$
$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, ?)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = l_{t-1} + u_t$$
$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

! В такой модели мы всегда прогнозируем последний уровень, т.к. модель очень простая. В других моделях это изменится.

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, ?\,)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, ?\,)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) \ = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, ?)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, ?)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

Дисперсии:

$$Var(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = Var(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = \sigma^2$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, ?\,)$$
$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, ?\,)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = l_{t-1} + u_t$$
$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) \ = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

Дисперсии:

$$Var(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = Var(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = \sigma^2$$
$$Var(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = Var(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3)$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, ?)$$
$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, ?)$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = l_{t-1} + u_t$$
$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

Дисперсии:

$$Var(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = Var(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = \sigma^2$$

$$Var(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = Var(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3)$$
$$= Var(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3)$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, ?\ )$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, ?\ )$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

$$\mathbb{E}(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = \mathbb{E}(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) \ = \mathbb{E}(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) = l_3$$

Дисперсии:

$$Var(y_4 \mid \mathcal{F}_3) = Var(l_3 + u_4 \mid \mathcal{F}_3) = \sigma^2$$

$$Var(y_5 \mid \mathcal{F}_3) = Var(l_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3)$$

$$= Var(l_3 + \alpha \cdot u_4 + u_5 \mid \mathcal{F}_3) \ = \sigma^2(\alpha^2 + 1)$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, \sigma^2)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, \sigma^2)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim N(l_3, \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Предиктивные интервалы:

$$\hat{y}_4 \pm 1.96 \cdot Var(y_4) = l_3 \pm 1.96 \cdot \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{y}_5 \pm 1.96 \cdot Var(y_5) = l_3 \pm 1.96 \cdot \hat{\sigma}^2 \cdot (\hat{\alpha}^2 + 1)$$

Прогнозирование

Выборка: y_1, y_2, y_3

$$y_4 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, \sigma^2)$$

$$y_5 \mid y_3, y_2, y_1 \sim \ N(l_3, \sigma^2(\alpha^2 + 1))$$

ETS(ANN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

Предиктивные интервалы:

$$\hat{y}_4 \pm 1.96 \cdot Var(y_4) = l_3 \pm 1.96 \cdot \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{y}_5 \pm 1.96 \cdot Var(y_5) = l_3 \pm 1.96 \cdot \hat{\sigma}^2 \cdot (\hat{\alpha}^2 + 1)$$

Для более отдалённого горизонта получаем более широкие доверительные интервалы

Резюме

- ETS модель раскладывает ряд на вымышленные составляющие
- Оценить неизвестные параметры модели можно методом максимального правдоподобия
- Такие модели, как экспоненциальное сглаживание – частный случай ETS-моделей

Расширяем ETS(ANN)

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + u_t$

$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$

Ошибка напрямую влияет на краткосрочный уровень

и на долгосрочный равновесный уровень

$\alpha \in [0; 1]$

стартовое состояние

Параметры модели: α, σ^2, l_0

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

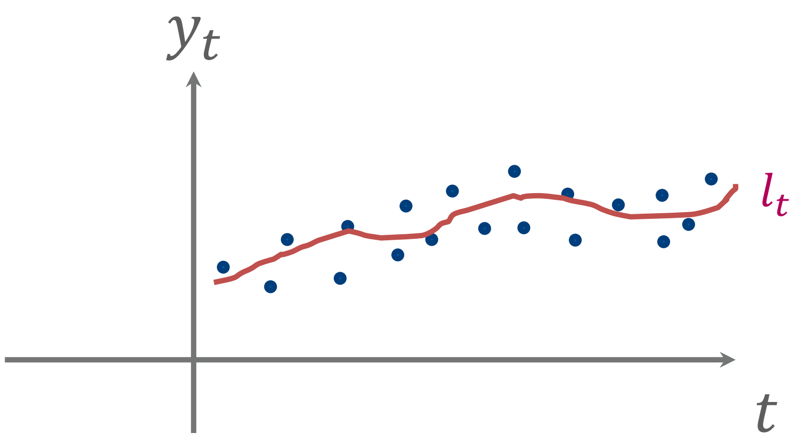
$$= f(y_1)\, f(y_2 \mid \mathcal{F}_1) f(y_3 \mid \mathcal{F}_2) \dots f(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \to \max_{l_0,\, \sigma^2,\, \alpha}$$

ETS(ANN) (экспоненциальное сглаживание)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$



$$\alpha \in [0; 1]$$

Параметры модели: α, σ^2, l_0

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$\alpha \in [0;1] \quad \beta \in [0;1]$$

$b_t -$ текущая скорость роста показателя

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1]$$

В долгосрочный и текущий уровни входит составляющая, отвечающая за скорость роста

$b_t -$ текущая скорость роста показателя

ETS(AAN)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$

$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$

$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$

$\alpha \in [0;1] \quad \beta \in [0;1]$

За динамику скорости роста отвечает отдельное уравнение

$b_t -$ текущая скорость роста показателя

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1]$$

Во все уравнения
с различным эффектом
входит одна и та же
ошибка

$b_t -$ текущая скорость роста показателя

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1]$$

$b_t -$ текущая скорость роста показателя

Параметры модели: $\alpha, \sigma^2, l_0, \beta, b_0$

ETS(AAN)

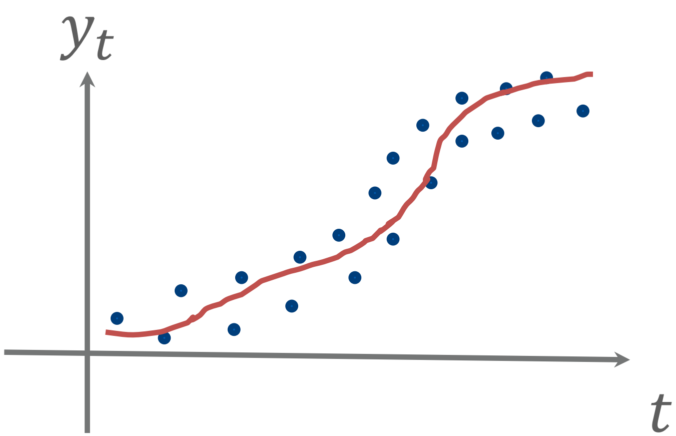
$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$\alpha \in [0;1] \quad \beta \in [0;1]$$



В разные периоды разные темпы роста

$b_t -$ текущая скорость роста показателя

Параметры модели: $\alpha, \sigma^2, l_0, \beta, b_0$

ETS(AAN)

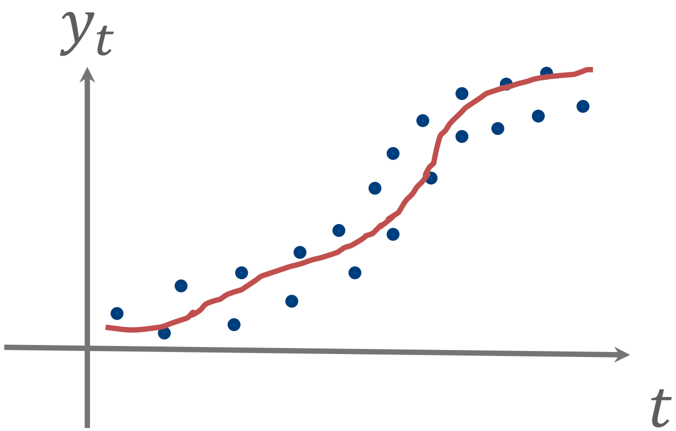
$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1]$$



$b_t -$ текущая скорость роста показателя

В разные периоды разные темпы роста

Параметры модели: $\alpha, \sigma^2, l_0, \beta, b_0$

$$L(\alpha, \sigma^2, l_0, \beta, b_0) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$= f(y_1)\, f(y_2 \mid \mathcal{F}_1) f(y_3 \mid \mathcal{F}_2) \dots f(y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \rightarrow \max_{l_0,\ \sigma^2,\ \alpha,\ b_0, \beta}$$

Прогнозирование

Прогнозы будут меняться
с учётом скорости роста

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$$

Прогнозирование

ETS(AAN)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$

$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$

$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$

❗ Прогнозы будут меняться
с учётом скорости роста

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = l_t + b_t$$

Дисперсии:

$$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$$

Прогнозирование

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$
$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$$
$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$$

Прогнозы будут
меняться
с учётом скорости роста

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = l_t + b_t$$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_{t+1} + b_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t)$$

Не знаем :(

всегда знаем
распределение

Дисперсии:

$$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$$

Прогнозирование

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$$

Прогнозы будут меняться
с учётом скорости роста

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = l_t + b_t$$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_{t+1} + b_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= \mathbb{E}(l_t + b_t + \alpha \cdot u_{t+1} + b_t + \beta u_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = l_t + 2b_t$$

Дисперсии:

$$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$$

Прогнозирование

Прогнозы будут меняться
с учётом скорости роста

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$$

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = l_t + b_t$$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_{t+1} + b_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= \mathbb{E}(l_t + b_t + \alpha \cdot u_{t+1} + b_t + \beta u_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = l_t + 2b_t$$

Дисперсии:

$$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$$

Прогнозирование

ETS(AAN)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$$

❗ Прогнозы будут меняться
с учётом скорости роста

Прогнозы:

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = l_t + b_t$$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(l_{t+1} + b_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= \mathbb{E}(l_t + b_t + \alpha \cdot u_{t+1} + b_t + \beta u_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) \ = l_t + 2b_t$$

Дисперсии:

$$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(l_t + b_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$$

$$Var(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = [(\alpha + \beta)^2 + 1]\, \sigma^2$$

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1]$$

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \dots, s_{-10}$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1] \quad \gamma \in [0; 1]$$

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \ldots, s_{-10}$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1] \quad \gamma \in [0; 1]$$

В текущий уровень теперь входит ещё и сезонная компонента

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \dots, s_{-10}$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1] \quad \gamma \in [0; 1]$$

В текущий уровень теперь входит ещё и сезонная компонента

При этом она никак не влияет на долговременный уровень

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \ldots, s_{-10}$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1] \quad \gamma \in [0; 1]$$

За формирование сезонности отвечает отдельное уравнение

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \dots, s_{-10}$$

$$\alpha \in [0;1] \quad \beta \in [0;1] \quad \gamma \in [0;1]$$

Чтобы рассчитывать месячную сезонность, нам нужно 11 стартовых значений

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \dots, s_{-10}$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1] \quad \gamma \in [0; 1]$$

Ошибка общая
у всех уравнений

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$

$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \dots, s_{-10}$$

$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1] \quad \gamma \in [0; 1]$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(l_t + b_t + s_{t-11}, \sigma^2)$$

$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(l_t + 2 \cdot b_t + s_{t-10}, [(\alpha + \beta)^2 + 1]\, \sigma^2)$$

ETS(AAA)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$$
$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t; \quad l_0$$
$$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t; \quad b_0$$
$$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t; \quad s_0, s_{-1}, \dots, s_{-10}$$
$$\alpha \in [0; 1] \quad \beta \in [0; 1] \quad \gamma \in [0; 1]$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(l_t + b_t + s_{t-11}, \sigma^2)$$
$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(l_t + 2 \cdot b_t + s_{t-10}, [(\alpha + \beta)^2 + 1]\, \sigma^2)$$

❗ В прогнозе к естественному уровню добавляется сезонная особенность

ETS(???)

Trend	Seasonal N	Seasonal A	Seasonal M
N	$y_t = \ell_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/\ell_{t-1}$
A	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + b_{t-1})$
A_d	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m} + \varepsilon_t$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\varepsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\varepsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\varepsilon_t/(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})$

MULTIPLICATIVE ERROR MODELS

Trend	Seasonal N	Seasonal A	Seasonal M
N	$y_t = \ell_{t-1}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$	$y_t = (\ell_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = \ell_{t-1}s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A_d	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = \ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $\ell_t = (\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$

➤ *https://otexts.com/fpp2/ets.html*

ETS(???)

Model	Forecast variance: σ_h^2
(A,N,N)	$\sigma_h^2 = \sigma^2\left[1 + \alpha^2(h-1)\right]$
(A,A,N)	$\sigma_h^2 = \sigma^2\left[1 + (h-1)\left\{\alpha^2 + \alpha\beta h + \frac{1}{6}\beta^2 h(2h-1)\right\}\right]$
(A,A$_d$,N)	$\sigma_h^2 = \sigma^2\Big[1 + \alpha^2(h-1) + \frac{\beta\phi h}{(1-\phi)^2}\{2\alpha(1-\phi) + \beta\phi\} - \frac{\beta\phi(1-\phi^h)}{(1-\phi)^2(1-\phi^2)}\left\{2\alpha(1-\phi^2) + \beta\phi(1+2\phi-\phi^h)\right\}\Big]$
(A,N,A)	$\sigma_h^2 = \sigma^2\left[1 + \alpha^2(h-1) + \gamma k(2\alpha+\gamma)\right]$
(A,A,A)	$\sigma_h^2 = \sigma^2\Big[1 + (h-1)\left\{\alpha^2 + \alpha\beta h + \frac{1}{6}\beta^2 h(2h-1)\right\} + \gamma k\left\{2\alpha + \gamma + \beta m(k+1)\right\}\Big]$
(A,A$_d$,A)	$\sigma_h^2 = \sigma^2\Big[1 + \alpha^2(h-1) + \gamma k(2\alpha+\gamma) + \frac{\beta\phi h}{(1-\phi)^2}\{2\alpha(1-\phi) + \beta\phi\} - \frac{\beta\phi(1-\phi^h)}{(1-\phi)^2(1-\phi^2)}\left\{2\alpha(1-\phi^2) + \beta\phi(1+2\phi-\phi^h)\right\} + \frac{2\beta\gamma\phi}{(1-\phi)(1-\phi^m)}\left\{k(1-\phi^m) - \phi^m(1-\phi^{mk})\right\}\Big]$

- https://otexts.com/fpp2/ets-forecasting.html

Экспоненциальное сглаживание

		Сезонность		
		N	A	M
Тренд	N	Простое экспоненциальное сглаживание	$ETS(ANA)$	$ETS(ANM)$
	A	Двойное экспоненциальное сглаживание	Тройное экспоненциальное сглаживание (метод Хольта-Винтерса)	Метод Хольта-Винтерса с мультипликативным трендом
	A_d	$ETS(AA_dA)$	Метод Хольта Винтерса с угасающим трендом	Метод Хольта Винтерса с угасающим мультипликативным трендом

Резюме

- ETS модель раскладывает ряд на вымышленные составляющие
- Оценить неизвестные параметры модели можно методом максимального правдоподобия
- Такие модели, как экспоненциальное сглаживание – частный случай ETS-моделей
- Мультипликативный тренд добавлять не рекомендуется, такие модели оказываются нестабильными

Разложение ряда на составляющие

Декомпозиция временного ряда

- Ряды могут включать в себя несколько разных паттернов
- Иногда бывает полезно отделить их друг от друга

Аддитивно: $y_t = l_t + s_t + r_t$

Мультипликативно: $y_t = l_t \cdot s_t \cdot r_t$

- l_t – долговременный уровень
- s_t – сезонная компонента
- r_t – то, что останется от ряда, если очистить его от тренда и сезонности

Ансамбль из моделей

$$y_t = l_t + s_t + r_t$$

Модель 1

Модель 2

Модель 3

- Пытаемся спрогнозировать каждую компоненту своей моделью
- Дальше соединяем получившиеся прогнозы в итоговый прогноз

Скользящее среднее

- Пусть m — та сезонность, которую мы хотим выделить (12 – месячные данные, 7 – недельные и тп)
- Скользящее среднее – простейший способ выделить долгосрочную компоненту (окно 24 сгладит сезонность)

Скользящее среднее

- Пусть m – та сезонность, которую мы хотим выделить (12 – месячные данные, 7 – недельные и тп)
- Скользящее среднее – простейший способ выделить долгосрочную компоненту (окно 24 сгладит сезонность)

Классическая декомпозиция ряда

1. Делаем для исходного ряда y_t сглаживание скользящим средним с окном m (наша сезонность), получившийся ряд – долговременная компонента l_t

2. Находим детрендированный ряд:

$$y_t^d = y_t - l_t$$

3. Превратим детрендированный ряд в матрицу:

янв.	фев	мар.	апр	
y_1^d	y_2^d	y_3^d	y_4^d	…
y_{13}^d	y_{14}^d	y_{15}^d	y_{16}^d	…
y_{25}	y_{26}^d	y_{27}^d	y_{28}^d	…
…	…	…	…	…

Считаем скользящее среднее по каждому столбцу, то, что получилось вытягиваем в вектор, это s_t

4. Рассчитываем $r_t = y_t^d - s_t$

Декомпозиция ряда

Декомпозиция ряда

- У классического подхода есть ряд проблем
- Из-за скользящих средних мы теряем наблюдения в начале и в конце ряда
- Трендовая составляющая довольно сильно реагирует на выбросы и пересглаживается под них
- Сезонная составляющая всегда одинаковая и не изменяется
- Для того, чтобы исправить эти недостатки, на каждый шаг добавляют усложнения: STL-декомпозиция, X11-декомпозиция
- Мы не будем обсуждать эти алгоритмы подробно, но будем использовать

Скользящее среднее

SARIMA-модель

- SARIMA – не интерпретируемая модель, которая пытается максимально точно описать корреляции между y_t и y_{t+s}

- Модель используют для краткосрочных прогнозов, для долгосрочных прогнозов она бесполезна

- Модель будет состоять из AR и MA частей, мы разберём эти части по очереди, а затем объединим

MA(q) (скользящее среднее)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \cdots + \alpha_q u_{t-q}$$

Изменение ряда объясняется последними q случайными ошибками

MA(q) (скользящее среднее)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \cdots + \alpha_q u_{t-q}$$

Модель можно записать
с помощью лагового
оператора

MA(q) (скользящее среднее)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \cdots + \alpha_q u_{t-q}$$

$$y_t - \mu = (1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_q L^q) \cdot u_t$$

Модель можно записать
с помощью лагового
оператора

MA(q) (скользящее среднее)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \cdots + \alpha_q u_{t-q}$$

$$y_t - \mu = (1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_q L^q) \cdot u_t$$

$$y_t - \mu = A(L) \cdot u_t$$

Модель можно записать с помощью лагового оператора

MA(q) (скользящее среднее)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \cdots + \alpha_q u_{t-q}$$

$$y_t - \mu = (1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_q L^q) \cdot u_t$$

$$y_t - \mu = A(L) \cdot u_t$$

- выбрав большое q и подобрав коэффициенты, можно описать сложную структуру корреляций
- сложно понять какой коэффициент за что отвечает, модель неинтерпретируема

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

Запаздывания ошибок помогают описать сложную структуру корреляций между значениями ряда

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

Запаздывания ошибок помогают описать сложную структуру корреляций между значениями ряда

Посмотрим как это происходит на примере $MA(2)$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2), & s = 0 \\ & \\ & \end{cases}$$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ & \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} y_t & \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} & \\ y_{t-1} & & \mu + u_{t-1} + \alpha_1 u_{t-2} + \alpha_2 u_{t-3} \end{array}$$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \end{cases}$$

$$y_t \qquad \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$y_{t-2} \qquad \mu + u_{t-2} + \alpha_1 u_{t-3} + \alpha_2 u_{t-4}$$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

$$y_t \qquad \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

$$y_{t-3} \qquad \mu + u_{t-3} + \alpha_1 u_{t-4} + \alpha_2 u_{t-5}$$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

Параметры модели: $\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

Параметры модели: $\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

Оценивание модели:

$$L(\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \to \max_{\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2}$$

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

Параметры модели: $\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

Оценивание модели:

$$L(\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q) = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \to \max_{\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2}$$

Правдоподобие представляет из себя многомерное нормальное распределение

MA(2)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$$

Параметры модели: $\mu,\ \sigma^2,\ \alpha_1, \alpha_2$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \sim N(\mu;\ \Sigma)$$

MA(2)

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 & 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 & 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 & 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

MA(2)

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot (1 + \alpha_1 + \alpha_2), & s = 0 \\ \sigma^2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2), & s = 1 \\ \sigma^2 \cdot \alpha_2, & s = 2 \\ 0, & s > 2 \end{cases}$$

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \dots \\ \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 & 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_2 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 & 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 & 1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Чем больше запаздываний, тем больше диагоналей есть в матрице и тем сложнее коррелируют наблюдения

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,,?\,)$$

$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,,?\,)$$

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim \ N(?\,,?\,)$$

$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim \ N(?\,,?\,)$$

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \alpha_1 u_t$$

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,, ?\,)$$

$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,, ?\,)$$

можем оценить
по данным

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \alpha_1 u_t$$

всегда знаем
распределение

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,,?\,)$$
$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,,?\,)$$

можем оценить
по данным

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \alpha_1 u_t$$

всегда знаем
распределение

$$- \begin{array}{l} y_{t+1} = \mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \\ \hat{y}_{t+1} = \mu + \alpha_1 u_t \end{array}$$

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,, ?\,)$$

$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,, ?\,)$$

можем оценить
по данным

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \alpha_1 u_t$$

всегда знаем
распределение

$$\begin{array}{r} y_{t+1} = \mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \\ - \quad \hat{y}_{t+1} = \mu + \alpha_1 u_t \\ \hline y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} = u_{t+1} \end{array}$$

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,, ?\,)$$

$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,, ?\,)$$

можем оценить
по данным

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \alpha_1 u_t$$

всегда знаем
распределение

$$
-\begin{array}{l}
y_{t+1} = \mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \\
\hat{y}_{t+1} = \mu + \alpha_1 u_t \\
\hline
y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} = u_{t+1}
\end{array}
$$

$$y_t - \hat{y}_t = u_t$$

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,,?\,)$$
$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(?\,,?\,)$$

можем оценить
по данным

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \alpha_1 u_t$$

всегда знаем
распределение

$$y_{t+1} = \mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t$$
$$-\quad \hat{y}_{t+1} = \mu + \alpha_1 u_t$$

$$y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} = u_{t+1}$$
$$y_t - \hat{y}_t = u_t$$

$$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) =\ \mu\ + \alpha_1 (y_t - \hat{y}_t)$$

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\, N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?, ?)$$

$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?, ?)$$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + u_{t+2} + \alpha_1 u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mu$$

всегда знаем распределение

Если в $\mathrm{MA}(q)$ оказывается, что мы прогнозируем на период $h > q$ оптимальным прогнозом будет математическое ожидание

Прогнозирование в MA(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$
$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$$

$$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(\mu\ + \alpha_1(y_t - \hat{y}_t), \sigma^2)$$
$$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim\ N(\mu, (1+\alpha^2)\sigma^2)$$

константа

$$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(\mu + u_{t+1} + \alpha_1 u_t \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$$
$$Var(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = Var(\mu + u_{t+2} + \alpha_1 u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = (1+\alpha^2)\sigma^2$$

Дисперсию можно
найти проще

Резюме

- Скользящее среднее объясняет текущее значение ряда через предыдущие ошибки
- С помощью такой модель можно описать сложную структуру корреляций между значениями ряда
- Модель оценивается методом максимального правдоподобия
- После q периодов прогноз сходится к математическому ожиданию процесса

Авторегрессия

AR(p) (авторегрессия)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t$$

Динамика ряда описывается через
его предыдущие значения

AR(p) (авторегрессия)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

$y_t -$ стационарный процесс

AR(p) (авторегрессия)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс $\mathbb{E}(y_t) = \mu^*$

$$y_t - \mu^* = \beta_1(y_{t-1} - \mu^*) + \beta_2(y_{t-2} - \mu^*) + \cdots$$
$$\ldots + \beta_p(y_{t-p} - \mu^*) + u_t$$

AR(p) (авторегрессия)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс $\quad \mathbb{E}(y_t) = \mu^*$

$$y_t - \mu^* = \beta_1 (y_{t-1} - \mu^*) + \beta_2 (y_{t-2} - \mu^*) + \cdots$$

$$\ldots + \beta_p (y_{t-p} - \mu^*) + u_t$$

$$\left(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \cdots - \beta_p L^p\right) \cdot (y_t - \mu^*) = u_t$$

AR(p) (авторегрессия)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс $\qquad \mathbb{E}(y_t) = \mu^*$

$$y_t - \mu^* = \beta_1(y_{t-1} - \mu^*) + \beta_2(y_{t-2} - \mu^*) + \cdots$$
$$\ldots + \beta_p(y_{t-p} - \mu^*) + u_t$$

$$\left(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \cdots - \beta_p L^p\right) \cdot (y_t - \mu^*) = u_t$$

$$B(L) \cdot (y_t - \mu^*) = u_t$$

AR(p) (авторегрессия)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс $\quad \mathbb{E}(y_t) = \mu^*$

$$y_t - \mu^* = \beta_1 (y_{t-1} - \mu^*) + \beta_2 (y_{t-2} - \mu^*) + \cdots$$
$$\ldots + \beta_p (y_{t-p} - \mu^*) + u_t$$

$$\left(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \cdots - \beta_p L^p\right) \cdot (y_t - \mu^*) = u_t$$

$$B(L) \cdot (y_t - \mu^*) = u_t$$

Стационарность авторегрессии

Теорема:

Чтобы у процесса авторегрессии

$$B(L) \cdot (y_t - \mu^*) = u_t$$

существовало единственное стационарное решение, которое “не заглядывает в будущее”, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения

$$B(\lambda) = 0$$

$$1 - \beta_1\lambda - \beta_2\lambda^2 - \cdots - \beta_p\lambda^p = 0$$

были по модулю **больше единицы**

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

Найдём характеристики y_t, при условии что он стационарен

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_{t-1})$

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_{t-1})$

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_{t-1})$

$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_t)$

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_{t-1})$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_t)$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \frac{\mu}{1 - \beta_1}$$

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_{t-1})$

$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_t)$

$$\mathbb{E}(y_t) = \frac{\mu}{1 - \beta_1}$$

$Var(y_t) = \beta_1^2 Var(y_{t-1}) + \sigma^2$

$Var(y_t) = \beta_1^2 Var(y_t) + \sigma^2$

$$Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \beta_1^2}$$

AR(1)

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

$$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_{t-1})$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \mu + \beta_1 \mathbb{E}(y_t)$$

$$\mathbb{E}(y_t) = \frac{\mu}{1 - \beta_1}$$

$$Var(y_t) = \beta_1^2 Var(y_{t-1}) + \sigma^2$$

$$Var(y_t) = \beta_1^2 Var(y_t) + \sigma^2$$

$$Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \beta_1^2}$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \frac{{\beta_1}^s}{1 - {\beta_1}^2} \cdot \sigma^2$$

AR(1)

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

Параметры модели: μ, σ^2, β_1

$$\mathbb{E}(y_t) = \frac{\mu}{1-\beta_1} \qquad Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\beta_1^2}$$

$$\gamma_s = Cov(y_t, y_{t+s}) = \frac{\beta_{\mathbf{1}}{}^s}{1-\beta_{\mathbf{1}}{}^2} \cdot \sigma^2$$

❗ Можем воспользоваться методом максимального правдоподобия

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?\,, ?\,)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?\,, ?\,)$

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?\,,?\,)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?\,,?\,)$

всегда знаем распределение

$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + \beta_1 y_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \beta_1 y_t$

Не знаем :(

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?\,,?\,)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?\,,?\,)$

$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + \beta_1 y_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \beta_1 y_t$

$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(\mu + \beta_1 y_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1 y_t, \sigma^2)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?, ?)$

$\mathbb{E}(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + \beta_1 y_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \beta_1 y_t$

$Var(y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = Var(\mu + \beta_1 y_t + u_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) = \sigma^2$

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1 y_t, \sigma^2)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?, ?)$

всегда знаем распределение

$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + \beta_1 y_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) =$

Не знаем :(

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1 y_t, \sigma^2)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?, ?)$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + \beta_1 y_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) =$$

$$= \mathbb{E}(\mu + \beta_1(\beta_1 y_t + u_{t+1}) + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) =$$

знаем

всегда знаем распределение

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1 y_t, \sigma^2)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?, ?)$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + \beta_1 y_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) =$$

$$= \mathbb{E}(\mu + \beta_1(\beta_1 y_t + u_{t+1}) + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) =$$

$$= \mu + \beta_1^2 y_t$$

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1 y_t, \sigma^2)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(?, ?)$

$$\mathbb{E}(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\mu + \beta_1 y_{t+1} + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) =$$

$$= \mathbb{E}(\mu + \beta_1(\beta_1 y_t + u_{t+1}) + u_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) =$$

$$= \mu + \beta_1^2 y_t$$

$$Var(y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t) = (1 + \beta_1^2)\sigma^2$$

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1 y_t, \sigma^2)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1^2 y_t, (1 + \beta_1^2)\sigma^2)$

Модель подходит только для краткосрочных прогнозов

Прогнозирование

$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$

$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + u_t$

u_t не зависит от $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$

y_t – стационарный процесс

$y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1 y_t, \sigma^2)$

$y_{t+2} \mid \mathcal{F}_t \sim N(\mu + \beta_1^2 y_t, (1 + \beta_1^2)\sigma^2)$

Модель подходит только для краткосрочных прогнозов

- Так как процесс стационарный, $|\beta_1| < 1$
- Чем дальше мы прогнозируем, тем сильнее прогноз похож на константу μ

Резюме

- Авторегрессия объясняет динамику ряда через его предыдущие значения
- Модель оценивается методом максимального правдоподобия
- Прогнозы модели при $h \to \infty$ сходятся к математическому ожиданию
- На следующей неделе мы соединим AR и MA части в общую модель