ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ОВЧИННИКОВ АЛЕКСЕЙ ВИТАЛЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПРЕДОСТАВЛЕННЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗФАКА МГУ
СУЩЕВА ИВАНА СЕРГЕЕВИЧА

БЛАГОДАРИМ ЗА ОЦИФРОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФИЗФАКА МГУ
ЛИФАТОВУ ДАРЬЮ АЛЕКСЕЕВНУ

Оглавление

1. Преобразование базиса по координатам

$$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} - \text{старый базис } \vec{E} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n});$$

$$\overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}} - \text{новый базис } \overrightarrow{E'} = (\overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}}).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{1'}} = c_{1'}^1 \overrightarrow{e_1} + \dots + c_{1'}^n \overrightarrow{e_n} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_{n'}} = c_{n'}^1 \overrightarrow{e_1} + \dots + c_{n'}^n \overrightarrow{e_n} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{e_{k'}} = c_{n'}^k \overrightarrow{e_k} \quad k = 1 \dots n, k' = 1' \dots n' - \text{тензорный вид.}$$

$$C = \left(c_{k'}^k\right)_{n'}^{n} = \begin{pmatrix} c_{1'}^1 & \dots & c_{n'}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1'}^n & \dots & c_{n'}^n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{E'}}_{1\times n} = \underbrace{\vec{E}}_{1\times n} \underbrace{C}_{n\times n} - \text{матричный вид.}$$

$$(\overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}}) = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}) \begin{pmatrix} c_{1'}^1 & \dots & c_{n'}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1'}^n & \dots & c_{n'}^n \end{pmatrix}$$

$$\det c \neq 0 \ \to \exists C^{-1}$$

$$\overrightarrow{E'} C^{-1} = \vec{E} \quad \overrightarrow{e_k} = c_k^{k'} \overrightarrow{e_{k'}} \ - \text{для обратного перехода}$$

$$\underline{X = CX' \quad X' = C^{-1}X}$$

$$x^k \overrightarrow{e_k} = x^{k'} \overrightarrow{e_{k'}} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{e_{k'}} = c_k^{k'} \overrightarrow{e_k} \ \to (*)$$

$$x^k \overrightarrow{e_k} = x^{k'} c_k^{k'} \overrightarrow{e_k}$$

Так как разложение по базису единственно:

$$x^k = c_k^{k'} x^{k'}$$

$$x^{k'} = c_k^{k'} x^k$$

Объекты, которые преобразованы с помощью матрицы прямого перехода, называются - ковариантными, а обратного перехода – контравариантными.

2. Линейный функционал

Определение. Пусть $\exists V$ – ВП над $\mathbb{K}$. Отображение $f\colon\ V \to \mathbb{K},\ \vec{x} \to f(\vec{x}) \in \mathbb{K}$

$$1)\ f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

$$2)\ f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$$

а) проекция вектора на ось;

б) $V = C[a,b]$ – непрерывные функции

$$f\colon\ C[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) \to \int_a^b \varphi(t)dt$$

$$g\colon C[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) \to \int_a^b g(t)\varphi(t)dt$$

$$\delta\colon C[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) \to \varphi(0)$$

$$f \text{ на } V^{\mathbb{K}}\colon V \to \mathbb{K} - \text{ЛФ}$$

$$f(\vec{x}) = f(x^k\overrightarrow{e_k}) = f(x^1\overrightarrow{e_1} + \dots + x^n\overrightarrow{e_n}) = f(x^1\overrightarrow{e_1}) + \dots + f(x^n\overrightarrow{e_n})$$
$$= x^1 f(\overrightarrow{e_1}) + \dots + x^n f(\overrightarrow{e_n}) = x^k \underbrace{f(\overrightarrow{e_k})}_{\substack{\text{число} f_k = \text{координат.ЛФ} \\ \text{в базисе } \overrightarrow{e_k}}} = x^k f_k$$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$f(\vec{x}) = x^k f_k = \underbrace{F}_{1\times n}\ \underbrace{X}_{n\times 1}$$

$$\overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}} - \text{новый базис}$$

$$f_{k'} = f(\overrightarrow{e_{k'}}) = f\left(c_k^{k'}\overrightarrow{e_k}\right) = c_k^{k'} f_k$$

$$f_{k'} = c_k^{k'} f_k \quad \underbrace{F'}_{1\times n} = \underbrace{F}_{1\times n}\ \underbrace{C}_{n\times n}$$

$$u = F(x^1, \dots, x^n)$$

$$grad\ u = (\frac{\partial F}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n})$$

Новые координаты:

$$x^{k'} = c_k^{k'} x^k, \qquad x^k = c_{k'}^k x^{k'}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{k'}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{k'} \frac{\partial F}{\partial x^k}$$

(градиент не вектор, а ковектор (ЛФ))

f, g – 2 ЛФ

Определение. Сумма ЛФ $h = f + g$ – это ЛФ.

$$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$$

Определение.

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : l = \alpha f, \qquad \forall \vec{x} \in V, l(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$$

Определение. θ – функционал $\theta(\vec{x}) = 0.$

Теорема. Множество всех ЛФ: $V \rightarrow \mathbb{K}$ является ВП (называется сопряженным или двойственным, V^*)

$$\dim V^* = \dim V$$

$$e^1 : V \rightarrow \mathbb{K} \quad e^1(\vec{x}) = x^1$$

$$e^2 : V \rightarrow \mathbb{K} \quad e^2(\vec{x}) = x^2$$

....

$$e^n : V \rightarrow \mathbb{K} \quad e^n(\vec{x}) = x^n$$

Возьмем $\forall$ЛФ $f : V \rightarrow \mathbb{K}$

$$f(x) = f_k x^k = f_k x^k(\vec{x}) = .. = (f_k x^k)(\vec{x}) \rightarrow f = f_k e^k$$

Естественный изоморфизм - без привлечения базиса $V^{**} \sim V$ – естественный изоморфизм.

$$\underbrace{\vec{x}}_{\in V} \rightarrow \underbrace{\hat{x}}_{\in V^{**}} \quad \hat{x}(f) = f(\vec{x})$$

3. Линейный оператор

Пусть V и W – 2 ВП над $\mathbb{K}$.

Определение. Отображение $\hat{A}: \ V \to W$ называется ЛО, если:

$$1)\ \hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{A}(\vec{y})$$

$$2)\ \hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}(\vec{x})$$

$$\text{ОСЛУ:}\ \underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{X}_{n\times 1} = \underbrace{0}_{m\times 1}$$

$$X = \underbrace{c^1X_1 + \dots + c^sX_s}_{\text{ФСР}}$$

$$\Phi = \|X_1X_2\dots X_s\| \quad C = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{X}_{n\times 1} = \underbrace{\Phi}_{n\times s}\underbrace{C}_{s\times 1} \ : \widehat{\Phi}: \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^n$$

Определение.

$$\underbrace{\ker}_{\text{ядро}} \hat{A} = \left\{\vec{x} \in V : \hat{A}(\vec{x}) = \vec{O}w\right\} \subset V$$

Определение.

$$\underbrace{im}_{\text{образ}}\ \hat{A} = \{\vec{y} \in W : \exists \vec{x}, \vec{y} = \hat{A}(\vec{x})\} \subset W$$

Теорема. Для $\forall A : V \to W$

$$\ker\hat{A} \Subset V, \qquad im\,\hat{A} \Subset W$$

Как найти $\ker\hat{A}$ и $im\,\hat{A}$:

$$\hat{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

$$X \to AX = Y$$

$$?\ker\hat{A} \ \leftrightarrow \text{решение ОСЛУ } AX = 0$$

$$?\,im\,\hat{A} : Y = AX = A_1x^1 + \dots + A_nx^n$$

$$im\,\hat{A} = L(A_1 \dots A_n)$$

Матрица ЛО

Пусть $\hat{A} : V \to W \;\; \dim V = n, \dim W = m$

$$\text{Базис в } V:\ \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$$

$$\text{Базис в } W: \overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_m}$$

$$\forall \vec{x} \in V:\ \vec{x} = x^k \overrightarrow{e_k}\ \ (k = 1, \dots, n)$$

$$\hat{A}(\vec{x}) = \hat{A}(x^k \overrightarrow{e_k}) = x^k \hat{A}(\overrightarrow{e_k})$$

$$\underbrace{\hat{A}(\overrightarrow{e_k})}_{\in W} = a_k^\mu \overrightarrow{f_\mu}\ \ (\mu = 1, \dots, m)$$

$$A = \underbrace{(a_k^\mu)_n^m}_{\substack{\text{матрица ЛО в} \\ \text{паре базисов} \\ e_k \text{ и } f_k}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

$$x^k \hat{A}(\overrightarrow{e_k}) = x^k a_k^\mu \overrightarrow{f_\mu} = y^\mu \overrightarrow{f_\mu}$$

$$y^\mu = a_k^\mu x^k;\ \ Y = AX$$

Преобразование матрицы ЛО при замене базиса

$$\hat{A} : V \to V$$

$$\text{Базис}: \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \quad Y = AX$$

$$\text{Базис}:\ \overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}}$$

$$Y = CY'\ \ y^k = c_{k'}^k y^{k'}$$

$$X = CX'\ \ c_{k'} = c_{k'}^k e_k$$

$$Y = AX = A(CX') = (AC)X'$$

$$CY' = C(A'X') = (CA')X'$$

$$AC = CA' | \cdot C^{-1}, \qquad A' = C^{-1}AC$$

$$\hat{A}\left(c_{i'}^{i}\overrightarrow{e_i}\right) = c_{i'}^{i} a_i^k c_k^{k'} \overrightarrow{e_{k'}}$$

$$\underbrace{a_{i'}^{k'} = \underbrace{c_k^{k'}}_{\text{обр.}} \ \underbrace{c_{i'}^{i}}_{\text{прям.}} \ a_i^k}_{\text{смешанный тензор}}$$

Теорема.

$$\underbrace{\dim\ker\hat{A}}_{\substack{\text{размерность пр}-\text{ва} \\ \text{решений } AX=0= \\ \text{число свободных перем.}}} + \underbrace{\dim im\,\hat{A}}_{\substack{=rkA= \\ \text{число баз.} \\ \text{неизвестных}}} = \underbrace{\dim V}_{\substack{\text{число всех} \\ \text{неизвестных}}}$$

$$AX = B, \qquad L(A) - \text{образ}$$

$$AX = 0 - \text{ядро}$$

<u>Доказательство.</u>

Возьмем базис в $\ker\hat{A}$: $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}, \dim\ker\hat{A} = p$. Добавим векторы $\overrightarrow{e_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, так, что $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – базис в V.

$$\hat{A}(\overrightarrow{e_1}) = \dots = \hat{A}\left(\overrightarrow{e_p}\right) = \vec{0}$$

$$\hat{A}\left(\overrightarrow{e_{p+1}}\right) = \overrightarrow{g_{p+1}} \dots \hat{A}(\overrightarrow{e_n}) = \overrightarrow{g_n}$$

Надо доказать, что $\overrightarrow{g_{p+1}} \dots \overrightarrow{g_n}$ – базис в $im\,\hat{A}$.

1) Полнота системы $\overrightarrow{g_{p+1}} \dots \overrightarrow{g_n}$.

$$\forall\vec{y} \in im\hat{A} \ \leftrightarrow \exists\ \vec{x} \ \in V : \ \vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$$
$$\vec{x} = x^k\overrightarrow{e_k} = x^1\overrightarrow{e_1} + \dots + x^p\overrightarrow{e_p} + x^{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + \dots + x^n\overrightarrow{e_n}$$
$$\vec{y} = \hat{A}(\vec{x}) = x^{p+1}\hat{A}\left(\overrightarrow{e_{p+1}}\right) + \dots = x^{p+1}\overrightarrow{g_{p+1}} + \dots$$

То есть $\forall\vec{y}$ выражается через $\overrightarrow{g_{p+1}} \dots \overrightarrow{g_n}$.

2) ЛН

$$\alpha_{p+1}\overrightarrow{g_{p+1}} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{g_n} = \vec{0}$$

Предположим, что $\alpha_n \neq 0$.

$$\alpha_{p+1}\hat{A}\left(\overrightarrow{e_{p+1}}\right) + \dots + \alpha_n\hat{A}(\overrightarrow{e_n}) = \vec{0}$$

$$\hat{A}\left(\underbrace{\alpha_{p+1}\overrightarrow{e_{p+1}} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{e_n}}_{\substack{\in \ker \hat{A}; \neq \vec{0} \to \overrightarrow{e_n} \in \ker \hat{A} - \text{нет} \\ \text{противоречие} \to \text{они ЛН}}}\right) = \vec{0}$$

Пусть $P \Subset V, Q \Subset V$

Теорема. $P \cap Q \Subset V$

Доказательство:

$$\text{Пусть } \vec{x}, \vec{y} \in P \cap Q \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{x} \in P \\ \vec{x} \in Q \end{cases}, \begin{cases} \vec{y} \in P \\ \vec{y} \in Q \end{cases}.$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in P \\ \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in Q \end{matrix}\right\} \to \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in P \cap Q$$

Определение. Сумма подпространств:

$$P + Q = \{\vec{x} + \vec{y} : \vec{x} \in P, \vec{y} \in Q\}$$

(Например, для двух прямых - плоскость)

Пример.

$$V = \mathbb{R}^3 = L(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$$

$$P = L(\vec{\imath}, \vec{\jmath}); \quad Q = L(\vec{\imath}, \vec{k})$$

$$P + Q = V$$

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} = \underbrace{(\vec{\imath} + \vec{\jmath})}_{\in P} + \underbrace{(\vec{\imath} + \vec{k})}_{\in Q} = \underbrace{(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})}_{\in P} + \underbrace{\vec{k}}_{\in Q}$$

Определение. Сумма подпространств P и Q называется прямой суммой, если $\forall \vec{z} \in P + Q$ разложение этого вектора в виде $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in P, \vec{y} \in Q$ – единственно. Обозначается $P \oplus Q$.

Теорема (формула Грассмана)

$$\dim(P + Q) = dimP + dimQ - \dim(P \cap Q)$$

Доказательство.

$$e_1 \dots e_r - \text{ базис в } P \cap Q$$

$$e_1 \dots e_r . . f_1 \dots f_{p-r} - \text{ базис в } P$$

$$e_1 \dots e_r . . g_1 \dots g_{q-r} - \text{ базис в } Q$$

Надо доказать, что $e_1 \dots e_r . . f_1 \dots f_{p-r} . . g_1 \dots g_{q-r}$ – базис в $P+Q$ (их количество $= r +$ $+(p-r)-(q-r) = p+q-r$).

1) Полнота очевидна;
2) ЛН – нет.

<u>Пустого пересечения не бывает, так как $\forall$ подпространства содержат общий $\vec{0}$!</u>

Теорема. Если $P+Q$ – прямая сумма, то $P \cap Q = \{\vec{0}\}$.

<u>Доказательство</u> (от противного)

Пусть $P \cap Q \neq \{\vec{0}\}$, то есть $\exists \vec{z} \neq \vec{0}, \vec{z} \in P \cap Q$

$$\forall \vec{a} = P + Q$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{x}}_{\in P} + \underbrace{\vec{y}}_{\in Q} = \underbrace{\vec{x}+\vec{z}}_{\in P} + \underbrace{\vec{y}-\vec{z}}_{\in Q}$$

- сумма векторов не единственна, следовательно, сумма подпространств не прямая.

$$\dim \ker \hat{A} + \dim im\, \hat{A} = \dim V$$

$$\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q \ \left(P \cap Q = \{\vec{0}\}\right) ? - \ker \hat{A} \oplus im\, \hat{A} = V$$

<u>Пример</u>.

$$V = \mathbb{R}^2; \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} im\hat{A} &= L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \ker \hat{A} &= L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$im\, \hat{A} = \ker \hat{A}$$

$$\dim im\, \hat{A} = 1, \dim \ker \hat{A} = 1$$

Когда верно?

Алгебра линейного оператора

Рассмотрим ЛО $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots : V \to V$.

Определение.

$$\hat{C} \coloneqq \hat{A} + \hat{B}, \text{ если } \forall \vec{x} \in V \quad \hat{C}(\vec{x}) = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{B}(\vec{x}).$$

Определение.

$$\widehat{D} \coloneqq \alpha\hat{A}, \text{ если } \forall \vec{x} \ \ \widehat{D}(\vec{x}) \coloneqq \alpha\hat{A}(\vec{x}).$$

Определение.

$$\widehat{0}: \ \widehat{0}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Теорема. Множество всех ЛО: $V \to V$ является ВП;

$$L(V) = \underbrace{Hom(V,V)}_{\text{гомоморфизмы}} = \underbrace{End(V)}_{\substack{\text{эндоморфизм=} \\ \text{гомоморфизм в себя}}}$$

Теорема. Если $\dim V = n$, то есть $\dim L(V) = n^2$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим базис в V $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ и рассмотрим ЛО

$$\widehat{E_{ij}}: \ \widehat{E_{ij}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\ \quad j \end{array} i \ - \text{таких } n^2 \text{ штук}$$

$$\forall \hat{A} \in L(V): \ \ A = (a_j^i)$$

$$\hat{A} = \sum a_j^i \widehat{E_{ij}}$$

Определение. Пусть $\hat{A}, \hat{B} : V \to V$.

$$\hat{C} \coloneqq \hat{A} \cdot \hat{B}, \text{если } \forall \vec{x} \in V$$

$$\hat{C}(\vec{x}) = \hat{A}(\hat{B}(\vec{x}))$$

$$\underbrace{\hat{A}}_{\substack{\text{второй} \\ \text{сомножитель}}} \cdot \underbrace{\hat{B}}_{\substack{\text{первый} \\ \text{сомножитель}}}$$

Теорема. Если ЛО $\hat{A}, \hat{B}$ имеют A и B, то $\hat{A} + \hat{B}$ имеет A+B, $\alpha\hat{A} - \alpha A$, $\hat{A}\hat{B} - AB$.

Доказательство.

$$Y = AX, \qquad Z = BX$$

$$Y + Z = AX + BX = (A + B)X$$

$$Y = BX, \; Z = AY = A(BX) = (AB)X$$

Определение. Алгебра – это ВП, в которой имеется операция $\cdot$:

$$V \times V \to V$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Аксиомы:

1) $(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2})\vec{y} = \alpha_1\overrightarrow{x_1}\vec{y} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}\vec{y} -$ лин. 1;
2) Лин. 2;
3) $(\vec{x}\vec{y})\vec{z} = \vec{x}(\vec{y}\vec{z}) -$ ассоциативность

Проектор

Пусть V – ВП.

Определение. ЛО $\hat{P} : V \to V$ называется проектором, если $\widehat{p^2} = \hat{p}$.

Теорема. Если $\hat{p}$ – проектор, то $V = im\,\hat{p} \oplus \ker \hat{p}$.

Доказательство.

1) Рассмотрим $\forall \vec{y} \in im\,\hat{p} \; \big(\exists \vec{x} : \; \vec{y} = \hat{p}(\vec{x})\big)$.

$$\hat{p}(\vec{y}) = \hat{p}\big(\hat{p}(\vec{x})\big) = \hat{p}(\vec{x}) = \vec{y}$$
$$\forall \vec{y} \in im\,\hat{p}, \qquad \hat{p}(\vec{y}) = \vec{y}$$

2) Докажем, что $z \in im\,\hat{p} \cap \ker \hat{p}$

$$\left.\begin{matrix} z \in \ker \hat{p} : \; \hat{p}(z) = 0 \\ z \in im\,\hat{p} : \; \vec{z} = p(\vec{z}) \end{matrix}\right\} \vec{z} = \vec{0}$$
$$\underbrace{im\,\hat{p} \, \cap \ker \hat{p} = 0}_{\substack{\downarrow \\ im\,\hat{p} \oplus \ker \hat{p} = V}}$$

Теорема. Если $V = P \oplus Q$, где $P \Subset V, Q \Subset V$, то $\exists\, \hat{p} : V \to V$ – проектор, для которого

$$im\,\hat{p} = p, \qquad \ker \hat{p} = Q$$

Доказательство. Пусть $\forall \vec{x} = \underbrace{\vec{a}}_{\in P} + \underbrace{\vec{b}}_{\in Q}$. По определению

$$\hat{p}(\vec{x}) = \vec{a} \;\; \rightarrow \;\; \vec{a} \in im\,\hat{p}$$

$$\vec{b} = \vec{x} - \hat{p}(\vec{x})$$

$$\hat{p}(\vec{b}) = \hat{p}(\vec{x}) - \hat{p}^2(\vec{x}) = \vec{0} \rightarrow \vec{b} \in \ker \hat{p}$$

Инвариантные подпространства

Рассмотрим $\hat{A} : V \rightarrow V$

Определение. Подпространство $P \Subset V$ называется ИП ЛО $\hat{A}$, если

$$\forall \vec{x} \in P \;\; \hat{A}(\vec{x}) \in P$$

Пусть $\hat{A} : V \rightarrow V$, P – его ИП.

Рассмотрим $\hat{A}\big|_p : P \rightarrow P,\; \forall \vec{x} \in P \;:\; \vec{x} \rightarrow \hat{A}(\vec{x})$.

Теорема. Пусть P – ИП ЛО $\hat{A}$.

$$\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p} - \text{ базис в } P$$

$$\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p} \dots \vec{e_n} - \text{ базис в } V$$

Пусть B – матрица $\hat{A}\big|_p$ в базисе $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p}$, A – матрица $\hat{A}$ в $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$. Тогда

$$A = \begin{array}{cc} \left\| \begin{matrix} B & | & * \\ - & | & - \\ \underbrace{0}_{p} & | & \underbrace{*}_{n-p} \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} p \\ \\ n-p \end{matrix} \end{array}$$

Теорема. Пусть $P \Subset V, Q \Subset V$ – ИП ЛО $\hat{A}$.

$$V = P \oplus Q$$

$$\begin{matrix} \text{B – матрица } \hat{A}\big|_p \\ \text{C – матрица } \hat{A}\big|_Q \end{matrix} \rightarrow A = \left\| \begin{matrix} B & | & 0 \\ - & | & - \\ 0 & | & C \end{matrix} \right\|.$$

Определение. Пусть $\hat{A} : V \to V$ над ЧП $\mathbb{K}$. Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором оператора $\hat{A}$, если

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} : \ \hat{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

λ – собственное значение.

Определение. Множество всех собственных значений называется спектром.

СВ – собственный вектор, СЗ – собственное значение.

Рассмотрим СВ $\vec{x}$; $L(\vec{x}) - l$ –мерное ИП.

$$\forall \vec{x} \in L(\vec{x}), \ \ \vec{y} = \alpha \vec{x}$$

$$\hat{A}(\vec{y}) = \hat{A}(\alpha \vec{x}) = \alpha \hat{A}(\vec{x}) = \alpha \lambda \vec{x} = \lambda \vec{y} \in L(\vec{x})$$

$\vec{y}$ – тоже СВ.

Собственному значению может соответствовать несколько ЛН СВ (вырождение СВ).

dim ЛО всех СВ, совпадающий с λ, называется геометрической кратностью этого СВ.

$$(\hat{A} - \lambda \hat{\mathbb{1}})\vec{x} = \vec{0} \ \ \to \ \vec{x} \in \ker(\hat{A} - \lambda \hat{\mathbb{1}})$$

Множество всех СВ соответствующих СЗ λ называется собственным подпространством $\equiv \ker(\hat{A} - \lambda \hat{\mathbb{1}})$.

Если в V есть базис $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, то

$$(\hat{A} - \lambda \hat{\mathbb{1}})X = 0 \quad \text{ОСЛУ}$$

$$\underbrace{\det(\hat{A} - \lambda \hat{\mathbb{1}}) = 0}_{\text{корни } \lambda_1, \dots, \lambda_n}$$

Те корни, которые $\in \mathbb{K}$, являются СЗ.

Алгебраическая кратность – кратность корня.

Если базис состоит из СВ, то

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Теорема. ГКСЗ $\leq$ АКСЗ

Доказательство. Рассмотрим СЗ λ_0. Пусть АКСЗ (λ_0.)= p, ГКСЗ(λ_0) = s. Рассмотрим базис $\underbrace{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_s}}_{\text{СВ,соотв.}\lambda_0}, \overrightarrow{e_{s+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$

Матрица ЛО:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & | & * \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_0 & | & * \\ - & - & - & - & | & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & D \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{e_1}$ – СВ;

$\hat{A}\overrightarrow{e_1} = \lambda_0\overrightarrow{e_1}$.

$$f_A(\lambda) = |A - \lambda\mathbb{1}| = (\lambda_0 - \lambda)^s|D - \lambda\mathbb{1}|$$

Видим, что $f_A(\lambda)$ делится на $(\lambda_0 - \lambda)^s \to \lambda_0$ – корень кратности $\geq s$.

Теорема. Характеристический многочлен ЛО $f_A(\lambda)$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть A, A' - матрицы ЛО в 2х разных базиса, C – МП.

$$A' = C^{-1}AC$$

$$|A' - \lambda\mathbb{1}| = |C^{-1}AC - C^{-1}\lambda\mathbb{1}C| = |C^{-1}(A - \lambda\mathbb{1})C| = |C^{-1}|\,|A - \lambda\mathbb{1}||C| = |C^{-1}C||A - \lambda\mathbb{1}| == |A - \lambda\mathbb{1}|$$

Теорема. Не зависит от базиса:

1) $\det A = \det \hat{A}$ – свободный член ХМ;
2) $rk\ A = \dim im\ \hat{A}$;
3) $tr\ A = tr\ \hat{A}$.
4)

Теорема. Матрица ЛО в базисе $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ диагональная $\leftrightarrow \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – СВ.

$\boxed{\rightarrow}$ если $A \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \to \hat{A}\vec{e} = \lambda\vec{e}$;

$\boxed{\leftarrow}$ если $\hat{A}\vec{e} = \lambda\vec{e}$, то 1 столбец: $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Теорема. СВ отвечает разл. СЗ ЛН.

Доказательство (индукция)

$$k = 1:\ \lambda_1: \overrightarrow{x_1} \neq \vec{0}\ \ \hat{A}\overrightarrow{x_1} = \lambda_1\overrightarrow{x_1}$$

Предположим, что верно при k.

$\lambda_1 \dots \lambda_k$ – попарно различным собственным значениям.

$\overrightarrow{x_1} \dots \overrightarrow{x_k}$ – соответствующие СВ, они ЛЗ, то есть

$$\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \dots + \alpha_k\overrightarrow{x_k} = \vec{0}, (*) \text{ только при } \alpha = 0.$$

Возьмем k+1. СЗ $\lambda_1 \dots \lambda_{k+1}$ соответствуют СВ $\overrightarrow{x_1} \dots \overrightarrow{x_{k+1}}$. Нужно доказать, что они ЛН.

$$\beta_1\overrightarrow{x_1} + \dots + \beta_k\overrightarrow{x_k} + \beta_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}} = \vec{0}\ (**)$$

$$\hat{A}(\beta_1\overrightarrow{x_1} + \dots) = \vec{0}$$

$$\beta_1\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \dots + \beta_k\lambda_k\overrightarrow{x_k} + \beta_{k+1}\lambda_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}} = \vec{0}\ (***)$$

$$(***) - \lambda_{k+1}(**)$$

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\overrightarrow{x_1} + \dots + \beta_k(\lambda - \lambda_{k+1})\overrightarrow{x_k} = \vec{0} \ \to \beta = 0$$

$$\beta_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}} = \vec{0} \to \beta_{k+1} = 0$$

<u>Замечание.</u> Если количество СЗ= dim V и все они простые =, то ∃ базис, в котором A – диагональная.

4. Жорданова нормальная форма

Жорданова клетка – это $J(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \ddots}_{p} \end{pmatrix}$ СЗ $= \lambda_0$, АК $= p$, СВ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Жорданов блок – это $\begin{pmatrix} J_1(\lambda_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \underbrace{0}_{p_1} & \underbrace{0}_{p_2} & \underbrace{0}_{\dots} & \underbrace{J_k(\lambda_0)}_{p_k} \end{pmatrix}$ СЗ $= \lambda_0$, АК $= p_1 + \dots + p_k$, СВ $=$ $\underbrace{k}_{\text{шт.}}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{A}\overrightarrow{e_1} = \lambda_0 \overrightarrow{e_1} \quad (\hat{A} - \lambda_0 \mathbb{1})\overrightarrow{e_1} = \vec{0} \\ \hat{A}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} + \lambda_0 \overrightarrow{e_2} \quad (\hat{A} - \lambda_0 \mathbb{1})\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} \\ \hat{B}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} \to \hat{B}^2 e_2 - e_1 = \vec{0} \end{matrix}$$

$$(\hat{A} - \lambda_0 \mathbb{1})\overrightarrow{e_{p+1}} = \overrightarrow{e_{p-2}} \leftrightarrow \hat{B}\overrightarrow{e_p} = e \leftrightarrow \hat{B}^{p-1}\overrightarrow{e_{p-1}} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} \hat{B}\overrightarrow{e_1} = \vec{0} & (\hat{A} - \lambda_0 \mathbb{1})\overrightarrow{e_1} = \vec{0} \\ \hat{B}^2\overrightarrow{e_2} = \vec{0} & (\hat{A} - \lambda_0 \mathbb{1})^2\overrightarrow{e_2} = \vec{0} \\ \hat{B}^p\overrightarrow{e_p} = \vec{0} & (\hat{A} - \lambda_0 \mathbb{1})^p\overrightarrow{e_p} = \vec{0} \end{matrix}$$

Теорема. Матрица любого оператора, все ХЧ которого являются его СЗ, можно привести к Жордановой форме

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{Ж блок}} & & & \\ \boxed{\lambda_1} & \boxed{\text{Ж блок}} & & \\ & \boxed{\lambda_2} & \ddots & \boxed{\text{Ж блок}} \\ & & & \boxed{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

Теорема. Пусть $\lambda + \mu i$ $(\mu \neq 0)$ – простой корень. ХМ ЛО $\hat{A} : V \to V$ $V(\mathbb{R})$. Тогда $\exists$ 2 – мерное инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$.

<u>Доказательство.</u> Так как $\det(A - (\lambda + \mu i)\mathbb{1}) = 0$,

$$[A - (\lambda + \mu i)\mathbb{1}]Z = 0$$

$$Z = \underbrace{X}_{\mathbb{R}^n} + i \underbrace{Y}_{\mathbb{R}^n}$$

$$AZ = (\lambda + \mu i)Z$$

$$A(X + iY) = (\lambda + \mu i)(X + iY)$$

$$\underbrace{AX} + iAY = \underbrace{\lambda X} + i\lambda Y + i\mu X - \mu Y$$

$$\begin{cases} AX = \lambda X - \mu Y \\ AY = \mu X + \lambda Y \end{cases} (*) - L(X, Y) - \text{ИПП}$$

1) Доказать, $Y \neq 0$. Предположим, обратное, тогда

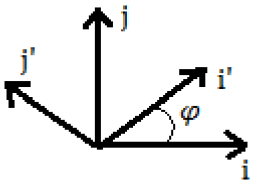
$$(*)\begin{cases} AX = \lambda X \\ 0 = \mu X \to \mu = 0 - \text{против.} \end{cases}$$

2) Предположим, что X, Y – ЛЗ, то есть $X = \alpha Y$, то

$$\begin{cases} \alpha AY = \lambda\alpha Y - \mu Y \\ AY = \alpha\mu Y + \lambda Y \end{cases}\Bigg|\cdot\alpha$$

$$0 = \lambda\alpha Y - \mu Y - \alpha^2\mu Y - \lambda\alpha Y$$

$$(\alpha^2 + 1)\mu Y = 0 \quad Y \neq 0, \mu \neq 0 \quad \to \alpha^2 + 1 = 0 - \text{нет}$$



$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & -s \\ s & c - \lambda \end{vmatrix} = (c - \lambda)^2 + s^2 = c^2 - 2c\lambda + \lambda^2 + s^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2c\lambda + 1 - \text{нет} \quad \mathbb{R} - \text{корней}$$

$$D = 4c^2 - 4 = -4s^2 < 0$$

5. Билинейные функции (формы)

Определение. Пусть $V(\mathbb{R})$. Функция $\breve{B} : V \times V \to \mathbb{K}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \to \breve{B}(\vec{x}, \vec{y})$ называется билинейной формой, если

1) $\breve{B}(\alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2}, \vec{y}) = \alpha_1 \breve{B}(\overrightarrow{x_1}, \vec{y}) + \alpha_2 \breve{B}(\overrightarrow{x_2}, \vec{y})$;
2) $\breve{B}(\vec{x}, \beta_1 \overrightarrow{y_1} + \beta_2 \overrightarrow{y_2}) = \cdots$

Пусть $\overrightarrow{e_1} \dots \overrightarrow{e_n}$ – базис в V : $\vec{x} = x^j \overrightarrow{e_j}$, $\vec{y} = y^k \overrightarrow{e_k}$.

$$\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = \breve{B}\left(x^j \overrightarrow{e_j}, y^k \overrightarrow{e_k}\right) = x^j y^k \breve{B} \underbrace{\left(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k}\right)}_{b_{jk} \to B} = b_{jk} x^j y^k = X^T B Y$$

$$\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = b_{jk} x^j y^k = X^T B Y$$

Замена базиса

Пусть $B' = (b_{j'k'})$ – в $\overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}}$.

$$b_{j'k'} = \breve{B}\left(\overrightarrow{e_{j'}}, \overrightarrow{e_{k'}}\right) = \breve{B}\left(c^j_{j'} \overrightarrow{e_j}, c^k_{k'} \overrightarrow{e_k}\right) = c^j_{j'} c^k_{k'} \breve{B}\left(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k}\right)$$

$$b_{j'k'} = c^j_{j'} c^k_{k'} b_{jk}, \quad B' = C^T B C$$

<u>Инварианты</u>

1) $rk\ \breve{B}$;
2) $sgn \det \breve{B}(\mathbb{R})$;
3) ?

Определение. БФ называются симметричными, если $\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = \breve{B}(\vec{y}, \vec{x})$; кососимметричными, если $\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = -\breve{B}(\vec{y}, \vec{x})$.

Теорема. $\forall$ БФ $\breve{B}$ можно представить единственным образом в виде

$$\breve{B} = \underbrace{\breve{B_1}}_{\text{симм.}} + \underbrace{\breve{B_2}}_{\text{кососим.}}$$

$$\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left[\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) + \breve{B}(\vec{y}, \vec{x})\right] + \frac{1}{2}\left[\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) - \breve{B}(\vec{y}, \vec{x})\right]$$

Пусть $\breve{B} = \underbrace{\breve{B_1}}_{\text{симм.}} + \underbrace{\breve{B_2}}_{\text{кососим.}} = \underbrace{\breve{B_3}}_{\text{симм.}} + \underbrace{\breve{B_4}}_{\text{кососим.}}$. Тогда

$$\underbrace{\breve{B_1} - \breve{B_3}}_{\text{симм.}} = \underbrace{\breve{B_4} - \breve{B_2}}_{\text{кососим.}}$$

$$\left.\begin{aligned} \breve{D}(x,y) = \breve{D}(y,x) \\ \breve{D}(x,y) = -\breve{D}(y,x) \end{aligned}\right\} \to \breve{D}(x,y) = 0$$

Квадратичные фермы

Пусть $\breve{B}(\vec{x},\vec{y})$ – БФ.

Определение. Квадратичная функция – это $\breve{Q}(\vec{x}) = \breve{B}(\vec{x},\vec{x})$, $\breve{Q} : V \to \mathbb{K},\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Координаты:

$$\breve{Q}(\vec{x}) = b_{jk}x^j x^k = X^T B X$$

$$B' = C^T B C, \qquad \breve{B} = \underbrace{\breve{S}}_{\text{симм.}} + \underbrace{\breve{A}}_{\text{антис.}}$$

$$X^T B X = X^T(S + A)X = X^T S X + X^T A X$$

$$\underbrace{X^T}_{1\times n} \underbrace{A}_{n\times n} \underbrace{X}_{n\times 1} = (X^T A X)^T = X^T A^T (X^T)^T = X^T(-A)X = -X^T A X \to X^T A X = 0$$

$$\text{Из } \breve{B}(\vec{x},\vec{y}) \ \to \breve{Q}(\vec{x}) = \breve{B}(\vec{x},\vec{x}) = B_{\text{симм.}}(\vec{x},\vec{x})$$

Определение. Матрица КФ симметричная.

$$\text{Из } \breve{Q}(\vec{x}) \quad \underbrace{\to}_{\text{поляризация КФ}} \quad \text{симм. БФ } \breve{B}(\vec{x},\vec{y})$$

$$X^T B X \to X^T B Y$$

$$\forall \text{ БФ } \breve{B}(\vec{x},\vec{y}) \to \breve{Q}(\vec{x}) = \breve{B}(\vec{x},\vec{x})$$

$$B = b_{ij} = \breve{B}\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)$$

$$Q \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{1}{2}(B + B^T)$$

Теорема. Для $\forall$ КФ $\exists$ канонический базис, то есть базис, в котором матрица КФ диагональная.

<u>Доказательство</u> (по индукции)

$$n = 1: \quad b_{11}(x^1)^2 \to B = (b_{11})$$

Предположим, что верно для $n = p$, то есть для КФ $Q(x^1, \dots, x^p)$

$$Q(x^1, \dots, x^{p+1}) = \sum_{i,j=1}^{p+1} b_{jk} x^j x^k =$$
$$= \left[b_{11}(x^1)^2 + 2x^1\left(b_{12}x^2 + \dots + b_{1p+1}x^{p+1}\right) + \left(b_{12}x^2 + \dots + b_{1p+1}x^{p+1}\right)^2\right]$$
$$- (\dots)^2 + Q_1(x^2, \dots, x^{p+1}) =$$
$$= \left[\sqrt{b_{11}}x^1 + b_{12}x^2 + \dots + b_{1p+1}x^{p+1}\right]^2 + Q_2(x^1, \dots, x^{p+1}) =$$
$$= \left(x^{1'}\right)^2 + Q_2(\text{от } p \text{ перем.})$$

Закон инерции

Пусть $\check{Q}(\vec{x})$ $rk\check{Q} = r$, тогда в $\forall$ каноническом базисе $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{nn} \end{pmatrix}$, причем среди $q_{11}, \dots, q_{nn}$ ровно r ненулевых, n-r нулевых.

Условимся нумеровать базисный вектор канонического базиса так, чтобы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1.. & & & & \\ & \lambda_p & & & \\ & & -\mu_1.. & & \\ & & & -\mu_q & \\ & & & & 0.. \end{pmatrix} \lambda > 0, \mu > 0, p + q = r$$

$$p \text{ и } q - \text{индексы инерции}$$

КФ, пара (p, q) – сигнатура.

Закон инерции: p, q – инварианты.

Доказательство.

Предположим, что $\exists$ 2 канонических базиса $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ и $\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}$, в которых

$$\check{Q}(\vec{x}) = \lambda_1(x^1)^2 + \dots + \lambda_p(x^p)^2 - \mu_{p+1}(x^{p+1})^2 - \mu_r(x^r)^2 - \text{в первом базисе}$$

$$\check{Q}(\vec{x}) = \alpha_1(y^1)^2 + \dots + \alpha_s(y^s)^2 - \beta_{s+1}(y^{s+1})^2 + \dots + \beta_r(y^r)^2$$

Доказать, что $p = s$

Рассмотрим:

$$P_1 = L(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}) \Subset V$$

$$P_2 = L(\overrightarrow{f_{s+1}}, \dots, \overrightarrow{f_n}) \Subset V$$

$$\left.\begin{matrix} \forall \vec{x} \neq 0 \in P_1 : \ \check{Q}(\vec{x}) > 0 \\ \forall \vec{x} \neq 0 \in P_2 : \ \check{Q}(\vec{x}) \leq 0 \end{matrix}\right\} P_1 \cap P_2 = \vec{0}$$

$$\dim(P_1 + P_2) = \dim P_1 + \dim P_2 \leq n$$

$$p + (n - s) \leq n \to p \leq s$$

Аналогично, $s \leq p$

$$s = p.$$

$$\check{Q}(\vec{x}) \equiv \check{Q}(x^1, \dots, x^n)$$

Определение. КФ $\check{Q}(\vec{x})$ называется положительно определенной, если $\forall \vec{x} \neq 0\ \check{Q}(\vec{x}) > 0, \check{Q} > 0$.

$$\check{Q} > 0 \ \leftrightarrow \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & \ddots & \\ & & & + \end{pmatrix} (n, 0)$$

$$\check{Q} < 0 \ \leftrightarrow \begin{pmatrix} - & & & \\ & - & & \\ & & \ddots & \\ & & & - \end{pmatrix} (0, n)$$

$$\check{Q} \geq 0 \ \leftrightarrow \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} (p, 0)\ p < n$$

$$\check{Q} \leq 0 \ \leftrightarrow \begin{pmatrix} - & & & \\ & - & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} (0, p)\ p < n$$

Критерий Сильвестра

$$\check{Q}(\vec{x}), \qquad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & \ddots \end{pmatrix}$$

Главные миноры S_1, S_2 (ГМ)

$$\check{Q} > 0 \leftrightarrow (\text{все } \delta_k > 0, k = 1 \dots n)$$

$$\check{Q} < 0 \leftrightarrow (\delta_{2k+1} < 0, \delta_{2k} > 0)$$

<u>Доказательство</u> (по индукции)

$$n = 1 \;\; \check{Q}(\vec{x}) = q_{11}(x^1)^2$$

1) $\boxed{\rightarrow}$ если КФ ПО, то все ГМ>0. Пусть справедливо при некотором p . Рассмотрим

$$\check{Q}(x^1, \dots, x^{p+1}) = \sum_{k,j=0}^{p+1} q_{jk} x^j x^k$$

$$\check{Q} \underbrace{(x^1, \dots, x^p, 0)}_{\substack{\text{КФ от р переменных} \rightarrow \\ \delta_1 > 0, \dots, \delta_p > 0}} > 0$$

$$\delta_{p+1} = \det Q$$

$$sgn \det Q = sgn \begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & \ddots & \\ & & & + \end{pmatrix} = 1 - \text{инвариант}$$

2) $\boxed{\leftarrow}$ если ГМ>0, то КФ - $\oplus$ - определенная. Предположим, что верно при р.

$$\delta_1 > 0, \dots, \delta_p = 0 \;\; \rightarrow \check{Q}(x^1, \dots, x^p) > 0$$

Рассмотрим $\check{Q}(x^1, \dots, x^{p+1}), \delta_1 > 0, \dots, \delta_{p+1} > 0.$

$$\check{Q}(x^1, \dots, x^p, 0) - \text{является } \oplus - \text{определенной.}$$

Положительный индекс инерции фермы $\check{Q} \geq p$. Предположим, что ОК=р,

следовательно, в каноническом виде $\begin{pmatrix} + & & & \\ & + & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_{p+1} \rightarrow \text{ПИН} = p + 1 \rightarrow \text{ПО}.$

6. Евклидово и унитарное пространство

Пусть $V(\mathbb{R})$ – ВП ($\dim V \leq \infty$).

Пусть $\breve{G}(\vec{x},\vec{y})$ – симметричная билинейная ферма, для которой $\breve{Q}(\vec{x}) = \breve{G}(\vec{x},\vec{x}) - \oplus$ определена

Определение. $\breve{G}(\vec{x},\vec{y})$ – называется скалярным произведением на V

$$(\vec{x},\vec{y}) \coloneqq \breve{G}(\vec{x},\vec{y})$$

Определение. С.П. $\breve{G}(\vec{x},\vec{y})$ на $V(\mathbb{R})$ – это функция

$$\breve{G}:\ V \times V \to \mathbb{R}:$$

1) Линейность по 1 аргументу;
2) Линейность по 2 аргументу;
3) Симметричность;
4) $\oplus$ - определено $\forall \vec{x} \neq 0\ \breve{G}(\vec{x},\vec{x}) > 0$.

Определение. Евклидово пространство – вещественное пространство с заданным скалярным произведением.

$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – базис в V

$$\breve{G}\left(\overrightarrow{e_j}, \dots, \overrightarrow{e_k}\right) = g_{jk} \ \rightarrow \underbrace{G}_{\substack{\text{матрица Грама} \\ \text{матрический тензор}}} = (g_{jk})$$

$$\breve{G}(\vec{x},\vec{y}) = g_{jk}x^j y^k = X^T G Y$$

Если $\overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}}$, C – матричная переменная, то

$$\boxed{G' = C^T G C}$$

$$g_{j'k'} = c^j_{j'} c^k_{k'} g_{jk}$$

Унитарное пространство V($\mathbb{C}$)

$$0 < \underbrace{G(i\vec{x}, i\vec{x})}_{\text{не работает}} = i^2 G(\vec{x},\vec{x}) = -G(\vec{x},\vec{x}) < 0$$

Определение. СП в УП V($\mathbb{C}$) – это

$$\breve{G}:\ V \times V \to \mathbb{C}:$$

1) Линейность по 2 аргументу;
2) Полу линейность по 1 аргументу
$$\breve{G}(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}, \vec{y}) = \overline{\alpha_1}\breve{G}(\overrightarrow{x_1}, \vec{y}) + \overline{\alpha_2}\breve{G}(\overrightarrow{x_2}, \vec{y})$$
3) Эрмитовость
$$\breve{G}(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{\breve{G}(\vec{y}, \vec{x})}$$
4) $\oplus$ - определено:
$$\forall \vec{x} \neq \vec{0}\ \ \breve{G}(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \text{ и } \in \mathbb{R}$$

$\breve{G}$ – полуторалинейная эрмитова ферма, $\oplus$ - определена.

$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$

$$\breve{G}(\vec{x}, \vec{y}) = \breve{G}\left(x^j\overrightarrow{e_j}, y^k\overrightarrow{e_k}\right) = \overline{x^j}y^k\breve{G}\underbrace{\left(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k}\right)}_{g_{jk}} \quad g_{jk}x^jy^k = \overline{X^T}GY$$

$$\overline{X^T} = X^T - \text{эрмитово сопряжение}$$

$$\boxed{G' = C^+GC}$$

$$g_{kj} = \left(\overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_j}\right) = \overline{\left(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k}\right)} = \overline{g_{jk}}$$

$$G^T = \bar{G};\ \ \overline{G^T} = G$$

$$\boxed{G^+ = G} - \text{эрмитовость}$$

$$G - \text{эрмитова матрица}$$

Определение ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Длина вектора (норма) – это число

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \geq 0$$

Определение ($\mathbb{R}$). Угол между векторами $\vec{x}, \vec{y}$

$$\varphi = \arccos\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

Теорема (неравенство Коши – Буняковского - Шварца)

$$\boxed{\mathbb{C}}: |(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

<u>Доказательство</u> ($\mathbb{R}$)

$$|(\vec{x},\vec{y})|^2 \leq (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$$

$$0 \leq (t\vec{x}+\vec{y}, t\vec{x}+\vec{y}) = t^2(\vec{x},\vec{x}) + t(\vec{y},\vec{y}) + t(\vec{y},\vec{x}) + (\vec{y},\vec{y})$$
$$= t^2(\vec{x},\vec{x}) + 2t(\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{y})$$

$$D = 4(\vec{x},\vec{y})^2 - 4(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) \leq 0$$

Следствие (свойства нормы)

1) $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$;
2) $\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$;
$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x},\vec{x}) + (\vec{x},\vec{y}) + (\vec{y},\vec{x}) + (\vec{y},\vec{y})$$
$$= (\vec{x},\vec{x}) + (\vec{y},\vec{y}) + 2Re(\vec{x},\vec{y}) \leq (\vec{x},\vec{x}) + (\vec{y},\vec{y}) + 2|(\vec{x},\vec{y})|$$
$$\leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$$

Определение. Векторы $\vec{x},\vec{y}$ ортогональны, если

$$(\vec{x},\vec{y}) = 0.$$

Определение. Вектор $\vec{x}$ называется ортогональным подпространству $P \Subset V$, если

$$\forall y \subset P : \vec{x} \perp \vec{y}$$

Теорема (свойства $\perp$)

1) $\vec{x} \perp \vec{x} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
2) если $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ (среди них нет 0) попарно $\perp$,то они ЛН;
3) если $\vec{x} \perp \overrightarrow{y_1}, \dots, \vec{x} \perp \overrightarrow{y_k}$, то $\vec{x} \perp L(\overrightarrow{y_1}, \dots)$;
4) если $\vec{x} \perp \vec{y}$, то $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Примеры.

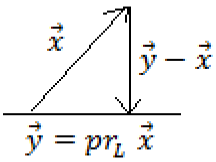
1) $\mathbb{R}^n$
$$\vec{x} = X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$
$$(\vec{x},\vec{y}) = X^T G Y$$
2) $\mathbb{C}^n$
$$(\vec{x},\vec{y}) = X^+ G Y$$
$$\overline{G^T} = G$$
3) $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$
$$(\vec{x},\vec{y}) = \int_a^b x(t)y(t)K(t)dt$$

$$(\vec{x},\vec{y}) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

4) $\mathbb{C}[t]_{\leq n}$

$$(\vec{x},\vec{y}) = \int_a^b \overline{x(t)}y(t)dt$$

Ортогонализация Грама – Шмидта



Пусть $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ - $\forall$ набор векторов.

Построить ОНБ в $L(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$

Шаг 1.

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{x_1}}{\|\overrightarrow{x_1}\|};$$

Шаг 2.

$$\overrightarrow{h_2} = \overrightarrow{x_2} - pr_{L(\overrightarrow{e_1})}\overrightarrow{x_2}\ \perp L(\overrightarrow{e_1})$$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{h_2}}{\|\overrightarrow{h_2}\|}$$

Шаг 3.

$$\overrightarrow{h_3} = \overrightarrow{x_2} - pr_{L(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})}\overrightarrow{x_2}\ \perp L(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{\overrightarrow{h_3}}{\|\overrightarrow{h_3}\|}$$

Пусть $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – ОНБ.

$$\forall \vec{x} \subset V:\ \vec{x} - x^k\overrightarrow{e_k} = x^1\overrightarrow{e_1}$$

$$\vec{x} = x^1\overrightarrow{e_1} + \dots + x^k\overrightarrow{e_k}\ \ |\cdot\overrightarrow{e_1}$$

$$(\overrightarrow{e_1},\vec{x}) = x^1\underbrace{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_1})}_{=1} + x^2\underbrace{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})}_{=0} + \cdots$$

$$x^1 = (\overrightarrow{e_1},\vec{x})$$

$$x^k = (\overrightarrow{e_k},\vec{x}) - \text{формула Гиббса}$$

Пусть $L(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k})$, $\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k}$ – ОН система.

$$pr_{L(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_k})}\vec{x} = \alpha^1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha^k\overrightarrow{e_k} = \vec{x} - (\underbrace{\vec{x}-\vec{y}}_{\perp L})$$

$$(\overrightarrow{e_1},\alpha^1\overrightarrow{e_1} + \cdots + \alpha^k\overrightarrow{e_k}) = (\overrightarrow{e_1},\vec{x}) + (\overrightarrow{e_1},\vec{x}-\vec{y})$$

$$\alpha^1 = (\overrightarrow{e_1},\vec{x})$$

$$pr_{L(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})}\vec{x} = \sum_{j=1}^{k}(\overrightarrow{e_j},\vec{x})\,\overrightarrow{e_j}.$$

$$V = \mathbb{R}^3;\ (\vec{x},\vec{y}) = X^TY$$

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Шаг 1.

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{x_1}}{\|\overrightarrow{x_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

Шаг 2.

$$\overrightarrow{h_2} = \overrightarrow{x_2} - pr_{L(\overrightarrow{e_1})}\,\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_2} - (\overrightarrow{e_1},\vec{x})\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix};$$

Шаг 3.

$$\overrightarrow{h_3} = \overrightarrow{x_2} - pr_{L(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})}\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_3} - (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{x_3})\overrightarrow{e_1} - (\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{x_3})\overrightarrow{e_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Операторы в евклидовом и унитарном пространствах

1) Изометрические операторы

Пусть V, W – 2 ЕП (УП).

$\boxed{\mathbb{R}}$ $\hat{A} : V \to W$ называется изометрическим, если

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V : \left(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}\right)_W = (\vec{x}, \vec{y})_V$$

$$\left\|\hat{A}\vec{x}\right\| = \|\vec{x}\|$$

Ортогональность:

$$\hat{A} : V \to V$$

$$\text{Пусть } \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} - \text{базис в } V, A - \text{матрица } \hat{A}$$

$$\underbrace{\left(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}\right)}_{(AX)^T G (AY)} = \underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{X^T G Y}$$

$$X^T (A^T G A) Y = X^T (G) Y$$

$$A^T G A = G - \text{в } \forall \text{ базисе}$$

$$\boxed{A^T A = \mathbb{1}} - \text{в ОНБ.}$$

Определение. Матрица A называется ортогональной, если

$$A^T A = \mathbb{1}$$

Теорема.

1) $A^T = A^{-1}$;
2) $AA^T = \mathbb{1}$;
3) $\sum_{k=1}^{n} a_k^j a_k^l = \delta^{jl}$;
4) $\sum_{k=1}^{n} a_j^k a_l^k = \delta_{jl}$;
5) $\det A = \pm 1$;
6) СЗ: $\lambda = \pm 1$ (если есть)
   Пусть $\lambda =$ СЗ, $\vec{x} =$ СВ.

$$\left.\begin{aligned}(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x})\\ (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda^2(\vec{x}, \vec{x})\end{aligned}\right\} \lambda = \pm 1.$$

Общий вид ортогональных матриц 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad AA^T = \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \left| \begin{aligned} a = \cos\varphi \\ c = \sin\varphi \\ b = \cos\psi \\ d = \sin\psi \end{aligned} \right.$$

$$\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi = 0$$
$$\cos(\varphi - \psi) = 0$$
$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ или } \frac{3\pi}{2}$$

1) $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \to$ поворот $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;
2) $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \to$ отражение $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Пусть A, B – ортогональны. ?AB – ортогональны?

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = \mathbb{1}$$

Теорема. Множество всех ортогональных матриц $n \times n$ образует группу, называемую ортогональной группой.

$$O(n, \mathbb{R}) = O(n)$$

Множество $SO(n) = \{A \in O(n): \det A = 1\}$ группа вращения.

$\boxed{\mathbb{C}}$ Пусть V – унитарное пространство.

Определение. $\hat{A} : V \to V$ называется унитарным, если

$$\left(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}\right) = (\vec{x}, \vec{y})$$

Матрица унитарного оператора:

$$(AX)^{+}G(AY) = X^{+}GY$$

$$X^{+}A^{+}GAY = X^{+}GY$$

$$A^{+}GA = G - \text{в } \forall \text{ базисе}$$

$$\boxed{\underbrace{A^{+}A = \mathbb{1}}_{\substack{\text{унитарная}\\ \text{матрица}}}} - \text{в ОНБ.}$$

Свойства унитарных матриц:

1) $A^{-1} = A^{T}$;
2) $AA^{T} = \mathbb{1}$;
3) $\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k^j a_k^l = \delta^{jl}$;
4) $\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_j^k a_l^k = \delta_{jl}$;
5) $|\det A| = 1$;
6) СЗ: $|\lambda| = 1$.

Теорема. Множество всех унитарных матриц $n \times n$ образует группу, которая называется $U(n)$ унитарная группа.

$$SU(n) = \{A \in U(n), \det A = 1\}$$

Поворот:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} = \hat{X}$$

$$\|\vec{x}\| = -\det \hat{X}$$

$$\begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}_{\text{матрицы Паули}}$$

2) Сопряженные операторы

V, W – унитарные пространства

$\hat{A} : V \to V$

Определение. ЛО $\hat{A}^* : \ W \to V$ называется сопряженным к $\hat{A}$, если

$$\forall \vec{x} \in V, \qquad \forall \vec{y} \in W$$

$$\left(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}\right)_W = (\vec{x}, \hat{A}^* \, \vec{y})_V$$

Теорема (свойства сопряженного оператора)

1) $\hat{A}^*$ - ЛО;
2) $\forall \hat{A} \; \exists \; \hat{A}^*$;
3) $\left(\hat{A}^*\right)^* = \hat{A}$;
4) $(\hat{A} + \hat{B})^* = \hat{A}^* + \hat{B}^*$;
5) $\left(\alpha \hat{A}\right)^* = \bar{\alpha} \cdot \hat{A}^*$;
6) $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^* \hat{A}^*$;
7) $\hat{0}^* = \hat{0}, \hat{\mathbb{1}}^* = \mathbb{1}$.

Доказательство.

$$\hat{A}^*(\alpha_1 \overrightarrow{y_1} + \alpha_2 \overrightarrow{y_2}) = \alpha_1 \hat{A}^* \overrightarrow{y_1} + \alpha_2 \hat{A}^* \overrightarrow{y_2}$$

$$\left(\vec{x}, \hat{A}^*(\alpha_1 \overrightarrow{y_1} + \alpha_2 \overrightarrow{y_2})\right) = \alpha_1 \left(\vec{x}, \hat{A}^* \overrightarrow{y_1}\right) + \alpha_2 \left(\vec{x}, \hat{A}^* \overrightarrow{y_2}\right)$$

Пусть $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} -$ базис в V; $G -$ матрица Грама, $\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_m} -$ базис в W; $H -$ матрица Грама.

$$\left(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}\right)_W = (\vec{x}, \hat{A}^* \, \vec{y})_V$$

$$(AX)^+ HY = X^+ G (A^* Y)$$

$$X^+ A^+ HY = X^+ G A^* Y$$

$$GA^* = A^+ H \to A^* = G^{-1} A^+ H$$

В ОНБ $G = \mathbb{1}_n, H = \mathbb{1}_m$.

$$\boxed{A^* = A^+}$$

Пример

$$\mathbb{V}_3; \;\; \hat{A} : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$$

$$\hat{A}\vec{x} = [\vec{a}, \vec{x}] - \text{векторное произведение}, \vec{a} \neq 0 - \text{фикс.}$$

Найти $\hat{A}^*$:

$$\left(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}\right) = (\vec{x}, \hat{A}^* \, \vec{y})$$

$$([\vec{a}, \vec{x}]\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{a}) = (\vec{x}, [\vec{y}, \vec{a}]) = (\vec{x}, -\,[\vec{a}, \vec{y}]) = (\vec{x}, -\hat{A}\,\vec{y})$$

$$\hat{A}^* = -\hat{A}; \;\; A^* = -A - \text{в ОНБ}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix} - \text{в ОНБ}$$

Теорема Фредгольма

Пусть $\hat{A} : V \to W$

$$\ker \hat{A} = \left(im\hat{A}^*\right)^{\perp}$$

$$\left(\ker \hat{A}\right)^{\perp} = im\hat{A}^*$$

$$\ker \hat{A}^* = \left(im\hat{A}\right)^{\perp}$$

$$\left(\ker \hat{A}^*\right)^{\perp} = im\hat{A}$$

<u>Доказательство.</u>

1) Доказать:
   А) $\dim \hat{A} = \dim\left(\ker \hat{A}^*\right)^{\perp}$;
   Б) $im\hat{A} \subset \left(\ker \hat{A}^*\right)^{\perp}$.

А)

$$\dim\left(\ker \hat{A}^*\right)^{\perp} = \dim W - \dim\left(\ker \hat{A}^*\right)^{\perp} = -\dim W - [\dim W] - \dim im\,\hat{A}^* \\ = \dim im\,\hat{A}^* = rk\hat{A}^*\; rk\hat{A} = \dim im\,\hat{A}$$

Б)

$$\forall \vec{y} \in im\hat{A} : \; \vec{y} \in \left(\ker \hat{A}^*\right)^{\perp}$$

$$\forall \vec{x} \in V \; \vec{y} = \; \hat{A}\vec{x} : \; \vec{y} \perp \ker \hat{A}^*$$

$$\forall \vec{z} \in \ker \hat{A} : \; \vec{y} \perp \vec{z}$$

$$\forall \vec{z} : \; \hat{A}^*\vec{z} = 0 : (\vec{y}, \vec{z}) = 0$$

$$(\vec{y}, \vec{z}) = (\hat{A}\vec{x}, \vec{z}) = \left(\vec{x}, \underbrace{\hat{A}^*\vec{z}}_{\vec{0}}\right) = (\vec{x}, \vec{0}) = 0.$$

Ортогональное дополнение:

Пусть V – ЕП (на УП) P⋐V - подпространство.

Определение.

$$P^{\perp} = \{\vec{x} \in V;\ \vec{x} \perp P\}$$

Теорема.

$$\forall P \Subset V :\ P^{\perp} \Subset V$$

Пусть

$$\vec{x}, \vec{y} \in \bar{P}^{\perp} \leftrightarrow \forall \vec{x} \in P \quad (\vec{x}, \vec{z}) \,\bar{\cdot}\, (\vec{y}, \vec{z}) = 0$$

$$(\bar{\alpha}\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \underbrace{\bar{\alpha}(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z})}_{\to \bar{\alpha}\vec{x} + \beta\vec{y} \in P^{\perp}} = 0$$

Теорема.

$$V = P \bigoplus P^{\perp}$$

$$\text{ОНБ в } P :\ \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}, \quad p = \dim P$$

Дополняя его до ортонормированного во всем пространстве $\overrightarrow{e_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}$:

$$P = L(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}), P^{\perp} = L(\overrightarrow{e_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{e_n}), \ \sum dim = \dim V$$

НСЛУ: $AX = B$ (1)

(1) Совместна $\leftrightarrow B \in im\ A = \left(\ker \hat{A}^*\right)^{\perp} \leftrightarrow B \perp \underbrace{\ker \hat{A}^*}_{A^*Y=0}$

(1) Совместна $\leftrightarrow B \perp$ ∀ решению системы $A^*Y = 0$ (2)
Рассмотрим ∀ НСЛУ $AX = B$ (совместна или нет)

Теорема.

$$A^*AX = A^*B \text{ совместна}$$

Доказательство.

Доказать, что

$$A^*B \ \perp \ \forall \text{ решению } (A^*A)^*Y = 0$$

$$(A^*A)^*Y = 0 \ \leftrightarrow A^*A\,Y = 0$$

Пусть Y – решение $A^*A\,Y = 0$.

$$0 = (Y, A^*B) = (AY, B) = 0$$

Доказать, что $A\,Y = 0$:

$$0 = \left(Y, \underbrace{A^*AY}_{=0}\right) = (AY, AY) \to AY = 0.$$

Теорема.

Пусть $\hat{A}: \ V \to V$ (V – ЕП или УП).

Пусть $P \Subset V$ – ИП ЛО $\hat{A}$. Тогда $P^\perp$ является ИП ЛО $\hat{A}^*$.

<u>Доказательство</u>.

Нужно доказать, что

$$\forall \vec{y} \in P^\perp : \ A^*\vec{y} \in P^\perp$$

$$\forall \vec{y} : y \perp P : \ A^*\vec{y} \perp P$$

$$\forall \vec{y} : \ \forall \vec{x} \in P \ (\vec{y}, \vec{x}) = 0 \ \ (\vec{x}, A^*\vec{y}) = 0$$

$$(\vec{x}, A^*\vec{y}) = \left(\underbrace{\hat{A}\vec{x}}_{\in P}, \vec{y}\right) = \left(\underbrace{\vec{x}}_{\in P}, \vec{y}\right) = 0$$

Самосопряженные операторы

Пусть V – ЕП (или УП)

$\hat{A}: \ V \to V$

Определение. $\hat{A}$ называется самосопряженным, если

$$\hat{A} = \hat{A}^*$$

$$\forall \vec{x}, \vec{y}: \ \left(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{A}\vec{y}\right).$$

$$A^* = G^{-1}A^+G - \text{в } \forall \text{ базисе}$$

$$A^* = A^+ - \text{в ОНБ}$$

Матрица в ∀ базисе $A = G^{-1}A^+G$.

$$GA = A^+G \underbrace{=}_{G=G^+} A^+G^+ = (GA)^+$$

$$(GA)^+ = GA, \quad GA - \text{эрмитова}$$

В ОНБ : $A^+ = A$;

В $\mathbb{R}$: $A^T = A$.

Самосопряженный оператор в $\mathbb{R}$ - симметричный, в $\mathbb{C}$ - эрмитов.

Теорема (свойства ССО)

1) Все собственные значения ССО $\in \mathbb{R}$;
2) СВ, относящиеся к разным СЗ ортогональны;
3) В V ∃ ОНБ, состоящий из СВ $\hat{A}$.

<u>Доказательство</u> $\boxed{\mathbb{C}}$

1) Пусть **λ** – СЗ, $\vec{x}$ – СВ

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq 0)$$
$$\left(\hat{A}\vec{x}, \vec{x}\right) = (\lambda\vec{x}, \vec{x}) = \bar{\lambda}(\vec{x}, \vec{x})$$

$$\left(\vec{x}, \hat{A}\vec{x}\right) = (\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda(\vec{x}, \vec{x})$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \ \rightarrow \ \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Пусть $\lambda_1, \lambda_2 -$ СЗ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} -$ СВ.

$$\hat{A}\overrightarrow{x_1} = \lambda_1\overrightarrow{x_1}, \ \ \hat{A}\overrightarrow{x_2} = \lambda_2\overrightarrow{x_2}$$

$$\left(\hat{A}\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right) = (\lambda_1\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \lambda_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$$

$$\left(\overrightarrow{x_1}, \hat{A}\,\overrightarrow{x_2}\right) = (\overrightarrow{x_1}, \lambda_2\overrightarrow{x_2}) = \lambda_2(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$$

$$\lambda_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \lambda_2(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = 0$$

$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = 0$$

$$\overrightarrow{x_1} \perp \overrightarrow{x_2}$$

3)

А) $\exists$ СЗ λ_1, СВ $-$ $\overrightarrow{x_1}$

Рассмотрим $P_1 - L(\overrightarrow{x_1}) -$ ИП $\hat{A}$, $P_1^{\perp} -$ ИП $\hat{A}^* = \hat{A}$

Б) Рассмотрим $\hat{A}: \; P_1^{\perp} \to P_1^{\perp}$ $GOTO$ (А)

Спектральное разложение ССО

$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ – ОНБ из СВ.

Ортогональный проектор на $L(\overrightarrow{e_k})$

$$\widehat{P_k}\vec{x} = (\overrightarrow{e_k}, \vec{x})\overrightarrow{e_k}$$

$$\forall \vec{x}: \vec{x} = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{e_k}, \vec{x})\overrightarrow{e_k} - \text{разложение по базису}$$

$$\hat{A}\vec{x} = \hat{A}\left(\sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{e_k}, \vec{x})\overrightarrow{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{e_k}, \vec{x})\lambda_k\overrightarrow{e_k} = \sum \lambda_k \widehat{P_k}\vec{x}$$

$$\boxed{\hat{A} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \hat{P}}$$

Псевдоевклидово пространство

Определение. ВП V($\mathbb{R}$) называется псевдоевклидовым, если в нем зафиксирована невырожденная ($\det G \neq 0$) симметричная $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x})$ неопределенная билинейная форма.

В каноническом базисе (псевдо ортонормированный, галилеев)

$$G = \begin{pmatrix} + & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & + & & & \\ & & & - & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}}\right\} p \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}}\right\} q \end{matrix}$$

$$(p, q) - \text{сигнатура}$$

Определение. Пространство Минковского — это V($\mathbb{R}$), $\dim V = 4$ сигнатура (1,3).

В каждом базисе

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \ldots \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $\dim V = 2$, $G = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$.

Определение. $\hat{A} : V \to V$ называется изометрическим, если

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in V : \left(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}\right) = (\vec{x}, \vec{y})$$

$$\left(\hat{A}\vec{x}, \hat{A}\vec{y}\right) = (\vec{x}, \vec{y})$$

$$(AX)^T G (AY) = X^T G Y$$

$$A^T G A = G$$

Во втором случае $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ b & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - dc & b^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ b^2 - d^2 = 1 \\ ab - cd = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} a = ch\,\varphi \\ c = \operatorname{sh}\varphi \\ b = \operatorname{ch}\psi \\ d = \operatorname{sh}\psi \end{matrix} \right.$$

$$\operatorname{ch}\varphi \operatorname{ch}\psi + \operatorname{sh}\varphi \operatorname{sh}\psi = 0$$

$$\mathrm{sh}(\varphi-\psi)=0\to\varphi=\psi$$

$$A=\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}\ \det A=1$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} ch\varphi & -sh\varphi \\ -sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}\quad X'=\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix}$$

$$X'=\ A^{-1}X$$

$$x^{0'}=x^0ch\,\varphi+x^1sh\,\varphi$$
$$x^{1'}=-x^0sh\,\varphi+x^1ch\,\varphi$$

$$x^0=ct,\ \ x^{0'}=ct'\ ,\qquad \frac{v}{c}=th\,\varphi$$

$$ch^2\varphi-sh^2\varphi=1$$

$$1-th^2\varphi=\frac{1}{ch^2\varphi}$$

$$ch^2\varphi=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\ ,\qquad ch\,\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\qquad sh\,\varphi=\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$ct'=\frac{ct-x\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\qquad t'=\frac{t-x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тензоры

$$\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n} \text{ и } \overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}} \quad C - \text{матрица перехода}$$

$$\overrightarrow{e_{k'}} = c_{k'}^{k} \overrightarrow{e_k}$$

$$\overrightarrow{e_k} = c_k^{k'} \overrightarrow{e_{k'}}$$

1) Вектор

$$x^{k'} = \underbrace{c_k^{k'}}_{\text{обр.}} x^k$$

2) Линейная форма (ковектор)

$$a_{k'} = \underbrace{c_{k'}^{k}}_{\text{пр.}} a^k$$

3) Линейный оператор

$$a_{k'}^{j'} = \underbrace{c_j^{j'}}_{\text{обр.}} \underbrace{c_{k'}^{k}}_{\text{прям.}} a_k^j$$

$$A' = C^{-1}AC$$

4) Билинейная форма

$$b_{j'k'} = \underbrace{c_{j'}^{j}}_{\text{прям.}} \underbrace{c_{k'}^{k}}_{\text{прям.}} b_{jk}$$

$$B = C^T BC$$

Определение. Пусть V(ℝ) – ВП; $\dim V = n$. Тензор типа (p,q) - это упорядоченный набор n^{p+q} чисел, поставленных в соответствие каждому базису и преобразующихся при изменении базиса по формуле:

$$A_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_q}$$

$$A_{j'_1 \dots j'_p}^{k'_1 \dots k'_q} = C_{k_1 \dots k_q}^{k'_1 \dots k'_q} C_{j'_1 \dots j'_p}^{j_1 \dots j_p} A_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_q}$$

<u>Операции</u>

1) Сумма

$$A_{kl}^j + B_{kl}^j = D_{kl}^j$$

$$D_{kl}^j = A_{kl}^j + B_{kl}^j$$

$$D_{k'l'}^{j'} = A_{k'l'}^{j'} + B_{k'l'}^{j'} = c_j^{j'} c_{k'}^k c_{l'}^l A_{kl}^j + c_j^{j'} c_{k'}^k c_{l'}^l B_{kl}^j = c_j^{j'} c_{k'}^k c_{l'}^l \left(\underbrace{A_{kl}^j + B_{kl}^j}_{D_{kl}^j} \right)$$

2) Умножение на число

$$(\alpha A)_{kl}^j = \alpha \cdot A_{kl}^j$$

3) Умножение тензоров

$$A_{kl}^j \cdot B_t^s = F_{klt}^{js}$$

$$V = \mathbb{R}^2;\ \ F_1^{11} = A_1^1 \cdot B^1$$

$$F_1^{12} = A_1^1 \cdot B^2;\ \ F_2^{11} = A_2^1 \cdot B^1 \ldots$$

4) Свертка

$$A_{kl}^{js} \to B_l^j = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha l}^{j\alpha}$$

<u>Свертка – тензор</u>

Доказать:

$$A_{kl}^{ij} \to B_l^i = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha l}^{i\alpha}$$

Дано:

$$A_{k'l'}^{i'j'} = A_{kl}^{ij}\, c_i^{i'} c_j^{j'} c_{k'}^k c_{l'}^l$$

<u>Доказательство</u>.

$$B_{\alpha'}^{i'} = B_l^i c_i^{i'} c_{l'}^l$$

$$B_{l'}^{i'} = A_{k'l'}^{i'j'} = A_{kl}^{ij}\, c_i^{i'} \underbrace{c_j^{\alpha'} c_{\alpha'}^k}_{=c_{\alpha'}^k c_j^{\alpha'} = \delta_j^k} c_{l'}^l = A_{kl}^{ij} \delta_j^k c_i^{i'} c_{l'}^l = A_{jl}^{ij} c_i^{i'} c_{l'}^l = B_l^i c_i^{i'} c_{l'}^l$$

$$\delta_k^j x^k = x^j$$

Евклидово пространство

Пусть A^{i}_{jk} – тензор. $G = (g_{kl})$ – матрица Грама (2 ковариантная (метрич.))

$$\det G \neq 0 \rightarrow \exists G^{-1} = (g^{kl})$$

$$g_{kl}g^{lp} = \delta^{p}_{k} \rightarrow g^{kl} - \text{тензор}$$

$$g_{p\underbrace{q}}A^{\overbrace{i}}_{jk} \rightarrow g_{p\underbrace{\alpha}}A^{\overbrace{\alpha}}_{jk} = A^{\bullet}_{pjk} - \text{опускание индекса}$$

Подъем индекса:

$$g^{p\overbrace{q}}A^{i}_{j\underbrace{k}} \rightarrow g^{p\overbrace{\alpha}}A^{i}_{j\underbrace{\alpha}} = A^{pi}_{j\bullet}$$

Линейная форма:

$$f(\vec{x}) = f_i x^i = f_i x^k \delta^i_k = \underbrace{f_i} x^k \overbrace{g^{i\alpha}} g_{k\alpha} = g_{\alpha k} f^{\alpha} x^k = (\vec{f}, \vec{x})$$

$$f_i \rightarrow f^{\alpha} = g^{\alpha i} f_i$$

$$\text{В ОНБ: } f^{\alpha} = f_{\alpha}$$

Теорема. В ЕП $\forall$ ЛФ $f(\vec{x})$ $\exists$ вектор $\vec{f}$:

$$f(\vec{x}) = (\vec{f}, \vec{x})$$

Рассмотрим БФ

$$\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = b_{ij}x^i y^j = b_{ij}x^k y^j \delta^i_k = g_{k\alpha}g^{i\alpha}b_{ij}x^k y^j = g_{k\alpha}b^{\alpha}_j x^k y^j = g_{k\alpha}x^k (b^{\alpha}_j y^j)$$
$$= (\vec{x}, \hat{B}\vec{y}),$$

где $\hat{B}$ – имеет матрицу $b^{\alpha}_j = g^{\alpha i} b_{ij}$.

Теорема. $\forall$ БФ $\breve{B}(\vec{x}, \vec{y})$ в ЕП $\exists$ ЛО $\hat{B}$:

$$\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{B}\vec{y})$$

Доказать, что $\breve{B}$ – симметричная БФ.

$$\breve{B}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \hat{B}\vec{y}) = \breve{B}(\vec{y}, \vec{x}) = (\vec{y}, \hat{B}\vec{x}) = (\hat{B}\vec{x}, \vec{y}) - \begin{matrix}\text{самосопряженный оператор,} \\ \text{если } \breve{B} - \text{симметрич.}\end{matrix}$$

Приведение КФ (симм. БФ) к каноническому виду при помощи ортогональных преобразований

Пусть $\breve{B}(\vec{x},\vec{y})$ – симметричная БФ

$$Q(\vec{x}) = \breve{B}(\vec{x},\vec{x})$$

$B = (b_{ij})$ – матрица БФ, $B^T = B$. Будем считать, что матрица B относится к ОНБ. Следовательно, можно считать, что она является матрицей самосопряженного оператора $\hat{B}$.

$$\text{ЛО} : B' = C^{-1}BC$$

$$\text{БФ} : B' = C^TBC$$

Построим ОНБ из СВ ЛО $\hat{B}$.

Матрица перехода – ортогональна → $C^{-1} = C^T$.

$$C^{-1}BC = C^TBC$$

$$Q(\vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 6x^1x^2 - 6x^1x^3 - 6x^2x^3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda\mathbb{1}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 1-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-5 & -\lambda-5 & -\lambda-5 \\ -3 & 1-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-5)(4-\lambda)^2$$

$$\lambda_1 = -5 \ (\text{АК} = 1)$$
$$\lambda_2 = 4 \ \ (\text{АК} = 2)$$

Для $\lambda_1 = -5$

$$B - \lambda_1\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \to \text{СВ } \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = 4$

$$B - \lambda_2 \mathbb{1} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to x^1 + x^2 + x^3 = 0$$

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ортогонализация $\overrightarrow{x_2}$ и $\overrightarrow{x_3}$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{g_3} = \overrightarrow{x_3} - Pr_{L(\overrightarrow{e_2})}\,, \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_1} - (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{g_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

МП от исходного базиса к $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = C^T$$

В базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

Матрица ЛО $B' = C^{-1}BC = \begin{pmatrix} -5 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$. Но матрица БФ $B'' = C^T BC = B'$.

Канонический вид $Q(\vec{x}) = -5(x^{1'})^2 + 4(x^{2'})^2 + 4(x^{3'})^2$.

$$a_k^i \to g_{\alpha i} g^{\beta k} a_k^j$$

$$\left(\hat{A}\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \hat{A}^* \vec{y}\right)$$

$$(AX)^T GY = X^T G(A^* Y)$$

$$X^T A^T GY = X^T G A^* Y$$

$$A^* = G^{-1}A^+G\ , \qquad A^* = G^{-1}A^TG$$

$$\underbrace{g^{\beta k}}_{\downarrow\, G^{-1}A^T}\ a_k^j\ \underbrace{g_{j\alpha}}_{\downarrow\, A^TG} - \text{элемент } \hat{A}^*$$

Теорема. Пусть дана КФ $Q(\vec{x})$, $G(\vec{x})$. В ВП $\exists$ базис, в котором обе формы имеют диагональные матрицы.

<u>Доказательство</u>.

$$E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$$

В нем Q, G – матрицы КФ.

1) Можно найти базис $E' = (\overrightarrow{e_{1'}}, \dots, \overrightarrow{e_{n'}})$, в котором $G(\vec{x})$ имеет канонический вид.

Тогда

$$G' = \mathbb{1}$$

Пусть C_1 – МП от E к E'. E' - ОНБ относительно СП, полярной к КФ $G(\vec{x})$.

$$G' = C_1^TGC_1 = \mathbb{1}$$

$$Q' = C_1^TGC_1$$

2) Найти базис $E'' = (\overrightarrow{e_{1''}}, \dots, \overrightarrow{e_{n''}})$ (ОНБ), в котором Q'' будет диагональная. Это делается ортогональным преобразованием.

C_2 – МП от E'к E''.

$$Q'' = C_2^TQ'\ C_2 - \text{диагональная}$$

$$G'' = \underbrace{C_2^T}_{\text{ортог.}}\ \underbrace{G'}_{\mathbb{1}}\ \underbrace{C_2}_{\text{ортог.}} = C_2^TC_2 = C_2^{-1}C_2 = \mathbb{1}$$

В E''

$$G'' = \mathbb{1}$$

$$Q'' = diag\ (\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

$$\breve{G}(\vec{x}) = (x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4(x^2)^2 \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\breve{Q}(\vec{x}) = -4x^1x^2 \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Шаг 1.

$$\breve{G}(\vec{x}) \to \text{канонический вид}$$

$$(x^1)^2 - 2x^1x^2 + 4(x^2)^2 = ((x^1)^2 - 2x^1x^2 + (x^2)^2) + 3(x^2)^2 = (x^{1\prime})^2 + (x^{2\prime})^2$$

$$x^{1\prime} = x^1 - x^2$$
$$x^{2\prime} = \sqrt{3}x^2$$

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \to C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det C_1^{-1} = \sqrt{3}$$

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q' = C_1^T Q C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Шаг 2.

Приведем $\breve{Q}(\vec{x})$ к каноническому виду:

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(Q' - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = \frac{2}{3} \end{matrix}$$

СВ для $\lambda_1 = -2$

$$Q' - \lambda\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

СВ для $\lambda_2 = \frac{2}{3}$

$$Q' - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} & -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_{1''}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{e_{2''}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Шаг 3.

$$E' = EC_1$$

$$E'' = E'C_2 = EC_1C_2$$

$$C = C_1C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$x^1 = x^{1''} - \frac{1}{\sqrt{3}} x^{2''}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} x^{1''} + \frac{1}{2\sqrt{3}} x^{2''}$$

$$\breve{Q}(\vec{x}) = -2\left(x^{1''}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x^{2''}\right)^2$$

$$\breve{G}(\vec{x}) = \left(x^{1''}\right)^2 + \left(x^{2''}\right)^2$$

$$Q = \left(q_{jk}\right) \quad \underbrace{G}_{\text{метр.тензор}} = \left(g_{jk}\right)$$

$q \ \uparrow$:

$$q_k^i = g^{ij} q_{jk} - \text{получился ССО}$$

$$\det\left(q_k^i - \lambda \delta_k^i\right) = 0 \ \rightarrow \ \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$\left(q_k^i - \lambda_\alpha \delta_k^i\right) x^k = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Находим ОНБ:

$$\left(g^{ij}q_{jk} - \lambda_\alpha g^{ij}q_{jk}\right)x^k = 0$$

$$g^{ij}(q_{jk} - \lambda_\alpha q_{jk})x^k = 0$$

$$G^{-1}(Q - \lambda_\alpha G)X = 0$$

$$(Q - \lambda_\alpha G)X = 0$$

$$\det(Q - \lambda_\alpha G) = 0$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q - \lambda G) = \left|\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & -2-\lambda \\ 2+\lambda & -4\lambda \end{pmatrix}\right| = 3\lambda^2 + 4\lambda - 4$$

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = \frac{2}{3}$$

Для $\lambda_1 = -2$

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda_2 = \frac{2}{3}$

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ортогональны относительно } G$$

$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = X_1^T G X_2 = 0$$

$$\|\overrightarrow{x_1}\|^2 = X_2^T G X_1 = 4$$

$$\|\overrightarrow{x_2}\| = 2/\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{f_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$