

ЛЕОНАРД САССКИНД
ДЖОРДЖ ГРАБОВСКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Всё, что нужно знать
о современной
ФИЗИКЕ



Leonard Susskind, George Hrabovsky

The Theoretical Minimum: What You Need to Know to Start Doing Physics

BasicBooks

ЛЕОНАРД САССКИНД
ДЖОРДЖ ГРАБОВСКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Всё, что нужно знать
о современной
Физике



Династия

Серия основана в 2007 г.



Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск

2014

ББК 22.3

УДК 53

С20

Сасскинд Л., Грабовски Дж.

C20 Теоретический минимум. Все, что нужно знать о современной физике. — СПб.: Питер, 2014. — 288 с.: ил.

ISBN 978-5-496-00501-2

«Теоретический минимум» — книга для тех, кто пропускал уроки физики в школе и институте, но уже жалеет об этом. Хотите разобраться в основах естественных наук и научиться думать и рассуждать так, как это делают современные физики? В оригинальной и нестандартной форме известные американские ученые Леонард Сасскинд и Джордж Грабовски предлагают вводный курс по математике и физике для пытливых умов. В отличие от прочих научно-популярных книг, пытающихся доступно объяснить законы физики, ловко уклоняясь от уравнений и формул, авторы учат читателя классическим основам естественных наук. Книга предлагает собственную оригинальную методику обучения, дополненную видеолекциями, публикуемыми на сайте theoreticalminimum.com.

ББК 22.3

УДК 53

Права на издание получены по соглашению с BasicBooks. Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Информация, содержащаяся в данной книге, получена из источников, рассматриваемых издательством как надежные. Тем не менее, имея в виду возможные человеческие или технические ошибки, издательство не может гарантировать абсолютную точность и полноту приводимых сведений и не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ISBN 978-0465028115 англ.

ISBN 978-5-496-00501-2

© 2013 by Leonard Susskind and George Hrabovsky

© Перевод на русский язык ООО Издательство «Питер», 2014

© Издание на русском языке, оформление ООО Издательство «Питер», 2014



Династия

Фонд некоммерческих программ
«Династия»

основан в 2001 году

Дмитрием Борисовичем Зиминым,
почетным президентом компании «Вымпелком».
Приоритетные направления деятельности Фонда –
поддержка фундаментальной науки и образования в России,
 популяризация науки и просвещение.

«Библиотека Фонда «Династия» — проект Фонда
по изданию современных научно-популярных книг,
 отобранных экспертами-учеными.

Книга, которую вы держите в руках, выпущена
 под эгидой этого проекта.

Более подробную информацию о Фонде «Династия»
 вы найдете по адресу
www.dynastyfdn.com

Содержание

	Предисловие	7
<i>Лекция 1</i>	Природа классической физики	12
<i>Интерлюдия 1</i>	Пространства, тригонометрия и векторы	31
<i>Лекция 2</i>	Движение	47
<i>Интерлюдия 2</i>	Интегральное исчисление	69
<i>Лекция 3</i>	Динамика	83
<i>Интерлюдия 3</i>	Частное дифференцирование	102
<i>Лекция 4</i>	Системы из более чем одной частицы...	114
<i>Лекция 5</i>	Энергия	127
<i>Лекция 6</i>	Принцип наименьшего действия	140
<i>Лекция 7</i>	Симметрии и законы сохранения	168
<i>Лекция 8</i>	Гамильтонова механика и симметрия относительно сдвига во времени	188
<i>Лекция 9</i>	Фазовая жидкость и теорема Гиббса— Лиувилля	208
<i>Лекция 10</i>	Скобка Пуассона, угловой момент и симметрии	223
<i>Лекция 11</i>	Электрические и магнитные силы	242
<i>Приложение</i>	Центральные силы и планетные орбиты	269

Нашим близким — супругам, разделившим
с нами жизнь, и студентам курса непрерывного
образования профессора Сасскинда.

Предисловие

Мне всегда нравилось объяснять физику. Для меня это нечто большее, чем преподавание: это способ мышления. Даже когда я за своим столом занимаюсь исследованиями, в моей голове протекает диалог. Придумывая лучший способ что-то объяснить, я почти всегда нахожу и лучший способ понять это для себя.

Около десяти лет назад кто-то поинтересовался, не хочу ли я прочитать курс публичных лекций. Оказалось, что в районе Стэнфорда довольно много людей, которые когда-то хотели изучать физику, но жизнь распорядилась иначе. Они делали ту или иную карьеру, но никогда не забывали о своей давней любви к законам Вселенной. Теперь же, завершив карьеру, а то и две, они хотели бы вновь к ним вернуться, пусть даже в упрощенном виде.

К сожалению, у этих людей не так много возможностей послушать лекции. Стэнфордский и другие университеты не позволяют, как правило, посторонним посещать занятия, да и для большинства взрослых людей возвращение к учебе в роли студента дневного

отделения — не вариант. Меня это озабочило. У людей должен быть способ развивать свои интересы, взаимодействуя с действующими учеными, но, похоже, ничего подобного не существовало.

Тогда-то я и узнал о стэнфордской программе непрерывного образования. Эта программа предлагает учебные курсы людям, не занимающимся наукой. Я подумал, что она может послужить моим целям, подбрав людей, которые хотели бы, чтобы им объясняли физику. Было бы забавно прочитать им за полсеместра курс современной физики.

Это действительно оказалось увлекательным. И привнесло колоссальное удовлетворение, которого порой не дает обучение студентов и аспирантов. Люди приходили учиться лишь по одной причине: не для набора баллов, не для получения степени и не для подготовки к экзаменам, а только для того, чтобы учиться и удовлетворять свое любопытство. А еще, будучи людьми, выдавшими виды, они совершенно не боялись задавать вопросы, так что занятия получались очень живыми, чего часто не хватает обычным лекциям. Я решил повторить этот курс. А потом еще раз.

Однако после пары таких повторов выяснилось, что учащиеся не вполне удовлетворены курсами для неспециалистов, которые я им читал. Они хотели нечто посерьезнее того, что можно прочитать в *Scientific American*¹. У многих из них была кое-какая подго-

¹ В России журнал «В мире науки». — Примеч. перев.

товка, какое-то знакомство с физикой, полузаытое, но не мертвое знание математического анализа и некоторый опыт в решении технических проблем. Они были готовы приложить силы к изучению настоящей науки — с уравнениями. В результате появилась серия курсов, нацеленных на то, чтобы подвести этих студентов к переднему краю современной физики и космологии.

К счастью, у кого-то (не у меня) родилась светлая идея записать занятия на видео. Они были выложены в Интернете¹ и, похоже, стали удивительно популярными: Стэнфорд — не единственное место, где люди жаждут изучать физику. Со всего света я стал получать тысячи электронных писем. Один из главных вопросов был: когда я переделаю эти лекции в книги? «Теоретический минимум» — ответ на этот вопрос.

Термин «теоретический минимум» изобрел не я. Он восходит к великому российскому физику Льву Ландау. В России ТМ означало все, что должен был знать студент для работы под руководством самого Ландау. Он был очень требовательным человеком, и его теоретический минимум включал почти все, что знал он сам, чего, конечно, никто больше знать не мог.

Я использую этот термин иначе. Для меня теоретический минимум означает лишь то, что вам необходимо знать, чтобы перейти на следующий уровень.

¹ Видеозаписи лекций на английском языке вы можете найти на сайте theoreticalminimum.com. — Примеч. ред.

Теоретический минимум

Это не толстые энциклопедического охвата учебники, которые объясняют все на свете, а тонкие книжечки, объясняющие все важное. Они довольно близко следуют курсам лекций, которые можно найти в Интернете.

Добро пожаловать в «теоретический минимум» по классической механике и желаю удачи!

Леонард Сасскинд

Стэнфорд, Калифорния, июль 2012

Предисловие

Я начал самостоятельно изучать математику и физику в одиннадцать лет. Это было сорок лет назад. С тех пор много воды утекло, и я оказался в числе тех, кого жизненный путь увел в сторону от большой науки. Я по-прежнему много занимался математикой и физикой. Но несмотря на то, что люди платили мне за выполнение исследований, я так никогда и не получил ученой степени.

Для меня эта книга началась с письма по электронной почте. После просмотра лекций, которые легли в основу книги, я отправил Леонарду Сасскинду вопрос, не хочет ли он превратить эти лекции в книгу. И так, одно за другим, все и получилось.

Мы не смогли уместить в книгу все, что хотели, иначе это был бы не «теоретический минимум» по классической механике, а Большая Толстая Книга По Механике. Но для того и существует Интернет, чтобы прокачивать по широкополосным каналам всякую всячину, которая никуда больше не влезает! Дополнительные материалы вы найдете на веб-сайте www.madscitech.org/tm. Они включают ответы на вопросы, которые мы не смогли уместить в книгу.

Я надеюсь, вы получите не меньшее удовольствие от чтения этой книги, чем мы получили от ее написания.

*Джордж Грабовски
Мэдиссон, Висконсин, июль 2012*

Лекция 1. Природа классической физики

Где-то посреди стейнбековского пейзажа двое усталых путников присаживаются на обочине дороги. Ленни, почесывая бороду произносит: «Расскажи мне о законах физики, Джордж». Джордж мгновение смотрит в землю, потом бросает на Ленни взгляд поверх очков. «Ну, хорошо, Ленни, но только самый минимум».

Что такое классическая физика?

Термин *классическая физика* относится к той физике, которая существовала до появления квантовой механики. Классическая физика включает ньютоновские законы движения частиц, теорию электромагнитного поля Максвелла—Фарадея и общую теорию относительности Эйнштейна. Но это нечто большее, чем просто конкретные теории конкретных явлений; это

ряд принципов и правил — базовая логика, подчиняющая себе все явления, для которых несущественна квантовая неопределенность. Этот свод общих правил называется *классической механикой*.

Задача классической механики состоит в предсказании будущего. Великий физик восемнадцатого века Пьер-Симон Лаплас выразил это в знаменитой цитате:

Состояние Вселенной в данный момент можно рассматривать как следствие ее прошлого и как причину ее будущего. Мыслящее существо, которое в определенный момент знало бы все движущие силы природы и все положения всех объектов, из которых состоит мир, могло бы — если бы его разум был достаточно обширен для того, чтобы проанализировать все эти данные,— выразить одним уравнением движение и самых больших тел во Вселенной, и мельчайших атомов; для такого интеллекта не осталось бы никакой неопределенности и будущее открылось бы перед его взором точно так же, как и прошлое.

В классической физике, если вы знаете все о состоянии системы в некоторый определенный момент времени, а также знаете уравнения, определяющие изменения, происходящие в системе, вы можете предсказать будущее. Именно это мы имеем в виду, говоря, что классические законы физики *детерминистичны*.

Если это верно даже в том случае, когда прошлое и будущее меняются местами, то те же уравнения позволяют узнать все и о прошлом. Такие системы называются *обратимыми*.

Простые динамические системы и пространство состояний

Совокупность объектов (частиц, полей, волн — чего угодно) называется *системой*. Систему, представляющую собой всю Вселенную или настолько изолированную от всего остального, что она ведет себя так, будто ничего больше не существует, называют *замкнутой*.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Поскольку это понятие крайне важно для теоретической физики, подумайте о том, что же такое замкнутая система, порассуждайте, существует ли она в действительности. Какие допущения неявно делаются в отношении замкнутой системы? Что такое открытая система?

Чтобы почувствовать, что такое детерминистичность и обратимость, мы начнем с очень простого примера замкнутых систем. Они значительно проще тех вещей, которые мы обычно изучаем в физике, но они

подчиняются правилам, которые являются предельно упрощенным вариантом классической механики. Представьте себе абстрактный объект, имеющий лишь одно состояние. Можно, например, представить монету, приkleенную к столу, которая всегда показывает свой аверс. На жаргоне физиков совокупность всех состояний, занимаемых системой, называется *пространством состояний*. Это не обычное пространство; это математическое множество, элементы которого соответствуют возможным состояниям системы. В нашем случае пространство состояний содержит лишь одну точку, а именно Аверс (или просто A), поскольку система имеет лишь одно состояние. Предсказать будущее такой системы чрезвычайно просто: с ней никогда ничего не происходит, и результатом любого наблюдения всегда будет A.

Следующая по простоте система имеет пространство состояний, содержащее две точки; в этом случае у нас имеется один абстрактный объект и два возможных состояния. Можете представлять себе монету, выпадающую либо Аверсом, либо Реверсом (A или P) — рис. 1.



Рис. 1. Пространство двух состояний

В классической механике считается, что системы изменяются плавно, без прыжков или перерывов. Такое поведение называют *непрерывным*. Очевидно, что из состояния Аверс нельзя непрерывно перейти в состояние Реверс. Движение в данном случае неизбежно происходит дискретными скачками. Так что давайте предположим, что время тоже идет дискретными шагами, которые нумеруются целыми числами. Мир с такой дискретной эволюцией можно назвать *строскопическим*.

Система, которая с ходом времени изменяется, называется *динамической*. Динамическая система — это не только пространство состояний. Она также включает *закон движения*, или *динамический закон*. Это правило, которое говорит, какое состояние станет следующим после текущего.

Один из простейших динамических законов состоит в том, что состояние в следующий момент будет таким же, как сейчас. Тогда в нашем примере возможны две истории: А А А А А... и Р Р Р Р Р...

Другой динамический закон диктует, что каким бы ни было текущее состояние, следующее за ним будет противоположным. Можно нарисовать диаграммы, иллюстрирующие эти два закона. На рис. 2 показан первый закон, когда А всегда переходит в А и стрелка от Р идет к Р. И вновь будущее очень легко предсказать: если начать с А, система останется в состоянии А; если начать с Р, система останется в Р.



Рис. 2. Динамический закон для системы с двумя состояниями

Диаграмма для второго возможного закона представлена на рис. 3, где стрелки идут от А к Р и от Р к А. Будущее по-прежнему можно предсказывать. Например, если начать с А, то история будет: А Р А Р А Р А Р А... Если же начать с Р, получится история: Р А Р А Р А Р А...



Рис. 3. Другой динамический закон для системы с двумя состояниями

Можно также записать эти динамические законы в виде формул. Переменные, описывающие систему, называются *степенями свободы*. У нашей монеты одна степень свободы, которую можно обозначить греческой буквой сигма: σ . Сигма имеет только два возможных значения: $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$ соответственно для А и Р. Нам также нужен символ для обозначения времени. Когда рассматривается непрерывное течение времени, его принято обозначать t . Но у нас эволюция дискретна, и мы будем использовать n . Состояние в момент n обозначается выражением $\sigma(n)$, то есть значение σ в момент n .

Параметр n последовательно принимает значения всех натуральных чисел, начиная с 1.

Запишем уравнения эволюции для двух рассматриваемых законов. Первый из них гласит, что никаких изменений не происходит. Его уравнение —

$$\sigma(n + 1) = \sigma(n).$$

Другими словами, каким бы ни было значение σ на n -м шаге, то же значение будет и на следующем шаге.

Второе уравнение эволюции имеет вид

$$\sigma(n + 1) = -\sigma(n),$$

что означает перемену состояния на каждом шаге.

Поскольку в обоих случаях будущее поведение полностью детерминировано начальным состоянием, такие законы называются детерминистическими. Все фундаментальные законы классической механики — детерминистические.

Давайте ради интереса обобщим систему, увеличив число состояний. Вместо монеты можно использовать шестигранную игральную кость, имеющую шесть возможных состояний (рис. 4).

Теперь число возможных законов значительно возрастает и их становится нелегко описать словами и даже формулами. Проще всего рассмотреть диаграмму вроде приведенной на рис. 5. Из нее видно, что номер состояния, заданный в момент n , увеличивается на единицу в следующий момент $n + 1$. Это работает, пока мы не дойдем до состояния 6, где диаграмма

предписывает вернуться в состояние 1 и повторить процесс. Такая бесконечно повторяющаяся схема называется *циклом*. Например, если начать с состояния 3, то история будет иметь вид: 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, ... Назовем эту схему динамическим законом 1.



Рис. 4. Система с шестью состояниями

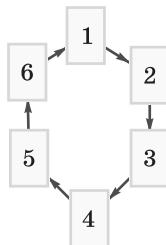


Рис. 5. Динамический закон 1

На рис. 6 показан другой закон — динамический закон 2. Он выглядит несколько более запутанным, но логически он идентичен предыдущему: в обоих случаях система бесконечно обходит в цикле все шесть возможных состояний. Если переименовать состояния, то динамический закон 2 станет точно таким же, как динамический закон 1.

Но не все законы логически эквивалентны. Рассмотрим, например, закон, показанный на рис. 7. Этот динамический закон 3 имеет два цикла. Если начать двигаться в одном из них, то невозможно попасть в другой. Тем не менее этот закон совершенно детерминистичен. С какого бы состояния вы ни начали, будущее остается предопределенным. Например, если начать с состояния 2, получится история: 2, 6, 1, 2, 6, 1, ... и состояние 5 никогда не будет достигнуто. Если же начать с состояния 5, то история будет иметь вид: 5, 3, 4, 5, 3, 4, ... и недостижимым окажется состояние 6.

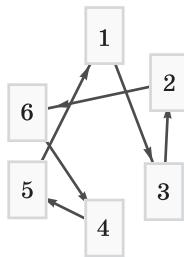


Рис. 6. Динамический закон 2

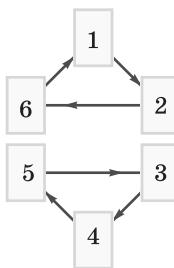


Рис. 7. Динамический закон 3

На рис. 8 показан динамический закон 4 с тремя циклами.

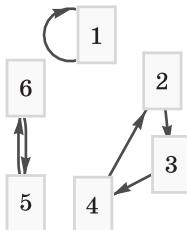


Рис. 8. Динамический закон 4

Понадобилось бы много времени, чтобы нарисовать все возможные динамические законы в системе с шестью состояниями.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Сможете ли вы найти общий способ классификации законов, которые возможны в системе с шестью состояниями?

Правила, которые не разрешены: минус первый закон

Согласно правилам классической физики не все законы допустимы. Для динамического закона недостаточно быть детерминистичным; он еще должен быть обратимым.

Смысл обратимости (в контексте физики) можно описать несколькими способами. Самый простой из них — сказать, что можно развернуть все стрелки и получившийся в результате закон останется детерминистичным. Другой способ — сказать, что *закон детерминистичен как в прошлом, так и в будущем*. Вспомним замечание Лапласа о том, что «...для такого интеллекта не осталось бы никакой неопределенности, и будущее открылось бы перед его взором точно так же, как и прошлое». Можно ли придумать закон, который будет детерминистичным в будущем, но не в прошлом? Иными словами, можно ли привести пример необратимого закона? Да, можно. Рассмотрим рис. 9.

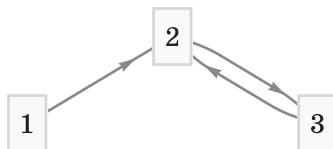


Рис. 9. Необратимая система

Закон, представленный на рис. 9, для любого состояния говорит, куда надо перейти дальше. Если вы находитесь в состоянии 1, то переходите в 2. Если в 2, то в 3. Если в 3, то в 2. Нет никакой неоднозначности относительно будущего. Иное дело — прошлое. Допустим, вы находитесь в состоянии 2. Где вы были в предыдущий момент? Вы могли прийти из состояния 3 или 1. Диаграмма об этом ничего не говорит. Хуже того, если рассмотреть обратный закон, то окажется, что нет состояния, которое вело бы к 1; состояние 1

не имеет прошлого. Закон, изображенный на рис. 9, *необратим*. Он дает пример ситуации, запрещенной принципами классической физики.

Обратите внимание, что если развернуть стрелки на рис. 9, то получится закон, представленный рис. 10, который не может однозначно сказать, как двигаться в будущем.

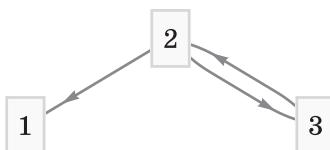


Рис. 10. Система с недетерминированным будущим

Есть очень простое правило, говорящее, когда диаграмма представляет детерминистичный и обратимый закон. Если у каждого состояния есть ровно одна стрелка, ведущая к нему, и ровно одна стрелка, выходящая из него, то это допустимый детерминистичный обратимый закон. Сформулируем это в виде слогана: *должна быть только одна стрелка, указывающая, откуда вы пришли, и только одна стрелка, указывающая, куда вам следует пойти.*

Правило, согласно которому динамические законы должны быть детерминистичными и обратимыми, настолько важно для классической физики, что в учебных курсах о нем порой попросту забывают упомянуть. У него даже нет названия. Можно назвать его первым законом, но, к сожалению, у нас уже есть два первых закона — первый закон Ньютона и первое начало тер-

модинамики. Поэтому, чтобы обозначить приоритет, мы вынуждены будем отступить и обозначить этот принцип как *минус первый закон*, и это, несомненно, самый фундаментальный из всех физических законов — *закон сохранения информации*. Сохранение информации — это по сути правило, согласно которому у любого состояния есть одна входящая стрелка и одна исходящая. Тем самым гарантируется, что вы никогда не сбьетесь с пути, откуда бы вы ни стартовали.

Динамические системы с бесконечным числом состояний

До сих пор во всех наших примерах пространство состояний имело конечное число элементов. Но нет причин, мешающих нам рассмотреть динамическую систему с бесконечным числом состояний. Представьте себе, например, линию с бесконечным числом отдельных точек вдоль нее, подобно железнодорожной линии с бесконечной последовательностью станций в обоих направлениях. Допустим теперь, что некий маркер может в соответствии с некоторым правилом прыгать от одной точки к другой. Для описания такой системы мы пометим все точки вдоль линии целыми числами подобно тому, как нумеровали состояния в рассмотренных ранее примерах. Поскольку мы уже использовали букву n для дискретных шагов во времени, давайте использовать заглавную N для отслежива-

ния маршрута. История маркера будет представлять собой функцию $N(n)$, которая возвращает место N для каждого момента времени n . Короткий участок этого пространства состояний изображен на рис. 11.



Рис. 11. Пространство состояний бесконечной системы

Очень простой динамический закон для такой системы показан на рис. 12. Он состоит в сдвиге маркера на одну позицию в положительном направлении с каждым шагом по времени.



Рис. 12. Динамический закон для бесконечной системы

Это правило допустимо, поскольку у каждого состояния только одна входящая стрелка и одна исходящая. Такое правило нетрудно записать в форме уравнения:

$$N(n + 1) = N(n) + 1. \quad (1)$$

А вот другие возможные правила, но не все из них допустимые:

$$N(n + 1) = N(n) - 1, \quad (2)$$

$$N(n + 1) = N(n) + 2, \quad (3)$$

$$N(n + 1) = (N(n))^2, \quad (4)$$

$$N(n + 1) = -1^{N(n)} N(n). \quad (5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3

Определите, какие из динамических законов, заданных формулами (2)–(5), являются допустимыми.

По формуле (1), где бы ни началось движение, вы в конце концов доберетесь до любой точки, двигаясь либо в будущее, либо в прошлое. Можно сказать, что тут имеет место один бесконечный цикл. А вот по формуле (3), начав с нечетного значения N , вы никогда не попадете на четное, и наоборот. Поэтому мы говорим, что тут наличествуют два бесконечных цикла.

Можно также добавить к системе качественно иные состояния, создав с их участием дополнительные циклы, как показано на рис. 13.

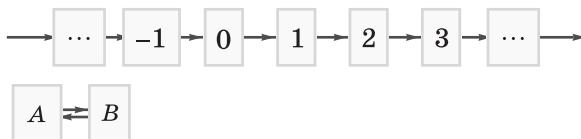


Рис. 13. Разбиение бесконечного конфигурационного пространства на конечный и бесконечный циклы

Если начать с числа, то мы по-прежнему будем двигаться по верхней линии, как и на рис. 12. Но если начать с буквы A или B , то мы закрутимся в цикле между ними. Так что возможна смешанная ситуация,

когда в одних случаях мы обходим лишь некоторые состояния, а в других — движемся в бесконечность.

Циклы и законы сохранения

Когда пространство состояний разделено на несколько циклов, система остается в том цикле, в котором начала движение. Каждый цикл имеет свой собственный динамический закон, но все они — часть одного пространства состояний, поскольку описывают одну динамическую систему. Рассмотрим систему с тремя циклами. Каждое из состояний 1 и 2 представляет собой отдельный цикл, а состояния 3 и 4 принадлежат третьему (рис. 14).

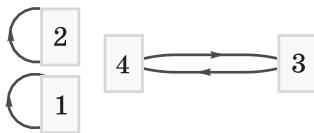


Рис. 14. Разделение пространства состояний на циклы

Всякий раз, когда динамический закон делит пространство состояний на подобные отдельные циклы, система «запоминает», с какого состояния мы стартали. Подобная память называется *законом сохранения*; он говорит нам, что нечто остается неизменным с течением времени. Чтобы придать закону сохранения количественную форму, припишем каждому циклу

численное значение, обозначаемое Q . В примере на рис. 15 три цикла обозначены как $Q = +1$, $Q = -1$ и $Q = 0$. Каким бы ни было значение Q , оно всегда остается неизменным, поскольку динамический закон не позволяет перепрыгивать с одного цикла на другой. Проще говоря, значение Q сохраняется.

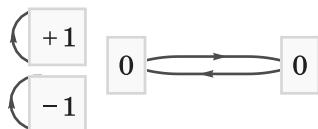


Рис. 15. Приписывание циклам конкретных значений сохраняющейся величины

В следующих главах мы столкнемся с проблемой непрерывного движения, в которой и время, и пространство состояний непрерывны. Для всех идей, которые мы обсуждали в применении к простым дискретным системам, в более реалистичных системах есть аналоги, но понадобится еще несколько лекций о том, как они устроены.

Пределы точности

Лаплас был чрезмерно оптимистичен относительно предсказуемости мира даже в рамках классической физики. Он, конечно, согласился бы с тем, что для предсказания будущего потребуется идеальное знание управляющих миром динамических законов и чудо-

вищная вычислительная мощь, которую он характеризовал как разум, который «достаточно обширен для того, чтобы проанализировать все эти данные». Но есть еще один момент, который он, возможно, недооценил: способность знать начальные условия с почти идеальной точностью. Представьте себе игральную кость с миллионом граней, которые помечены символами, похожими на обычные цифры, но слегка различающимися, так что получается миллион различных меток. Если знать динамический закон и суметь распознать начальную метку, то можно предсказать будущую историю кости. Но если титанический лапласовский интеллект страдает небольшими проблемами со зрением, из-за чего не различает очень похожие метки, то его предсказательная способность будет ограниченной.

В реальном мире все обстоит еще хуже; пространство состояний не просто необъятно по числу точек, оно непрерывно и бесконечно. Другими словами, оно размечено совокупностью вещественных чисел, вроде тех, что задают координаты частиц. Множество вещественных чисел столь плотно, что любое из них имеет бесконечное число сколь угодно близких соседей. Способность различать соседние значения этих чисел — это «разрешающая способность», характеризующая любой эксперимент, и для любого реального наблюдателя она ограничена. В большинстве случаев крошечные различия в начальных условиях (стартовом состоянии) приводят к значительным расхождени-

Теоретический минимум

ям в результатах. Это явление называют *хаосом*. Если система хаотическая (а таково большинство систем), то как бы велика ни была разрешающая способность, время, в течение которого система будет предсказуемой, ограничено. Идеальная предсказуемость недостижима просто потому, что мы ограничены в своей разрешающей способности.

Интерлюдия 1. Пространства, тригонометрия и векторы

«Где мы, Джордж?»

Джордж вытащил карту и разложил ее перед Ленни: «Мы вот здесь, Ленни, координаты: $36,60709^\circ$ с. ш., $-121,618652^\circ$ з. д.»

«Да? А что такое координаты, Джордж?»

Координаты

Чтобы численно описывать точки, нам нужна система координат. Построение системы координат начинается с выбора точки пространства, которая будет ее *началом*. Иногда начало координат выбирают так, чтобы упростить уравнения. Например, теория, описывающая Солнечную систему, усложняется, если поместить начало координат не в районе центра Солнца. Строго говоря, выбор начала координат произволен — вы можете поместить его где угодно, но после этого надо держаться сделанного выбора.

Следующий шаг состоит в выборе трех перпендикулярных осей. И вновь их расположение произвольно при условии, что они взаимно перпендикулярны. Эти оси обычно называют x , y и z , но мы также можем обозначать их x_1 , x_2 и x_3 . Такая система осей называется *декартовой системой координат* и показана на рис. 1.

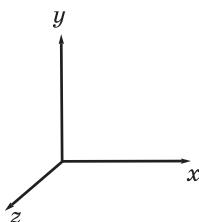


Рис. 1. Трехмерная декартова система координат

Мы хотим описать некоторую точку пространства; назовем ее P . Можно указать на нее, задав ее координаты x , y , z . Иными словами, мы задаем точку P с помощью упорядоченной тройки чисел (x, y, z) (рис. 2).

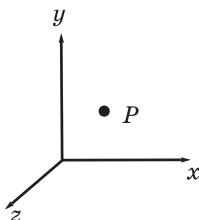


Рис. 2. Точка в декартовом пространстве

Координата x соответствует длине перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость, заданную

условием $x = 0$ (рис. 3). Аналогичное правило верно и в отношении координат y и z . Поскольку координаты представляют собой длины, то измеряются они в единицах длины, например в метрах.

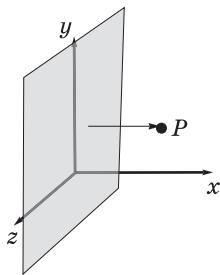


Рис. 3. Плоскость, заданная условием $x = 0$, и расстояние до точки P вдоль оси x

При изучении движения нам также нужно следить за временем. И вновь все отталкивается от начала отсчета, то есть нулевого момента времени. Можно выбрать за начало отсчета Большой взрыв, или дату рождения Христа, или просто момент начала эксперимента. Но выбрав его однажды, мы уже не должны его менять.

Далее нам необходимо зафиксировать направление времени. Обычно принято считать, что положительные моменты времени располагаются в будущем по отношению к началу отсчета, а отрицательные — в прошлом. Можно было считать и наоборот, но мы не станем.

Наконец, нам нужны единицы для измерения времени. Обычно физики используют секунды, но часы, наносекунды или годы тоже вполне подходят. Выбрав

единицы и начало отсчета, мы можем пометить любой момент времени числом t .

В ньютоновской механике есть два неявных допущения относительно времени. Первое из них состоит в том, что время течет равномерно — интервал в 1 секунду имеет один и тот же смысл в любой момент времени. Например, одно и то же число секунд требуется грузу, чтобы упасть с Пизанской башни, — что во времена Галилея, что в наши дни. Секунда тогда и секунда сейчас — это одно и то же.

Второе допущение состоит в том, что можно сравнивать отсчеты времени, выполненные в разных местах. Это означает, что часы, расположенные в разных точках, могут быть синхронизированы. При таком предположении четыре координаты — x, y, z, t — определяют *систему отсчета*. Для любого события в системе отсчета можно указать значение каждой из координат.

Взяв функцию $f(t) = t^2$, можно нарисовать точки в системе координат. Мы используем одну ось для времени t , а другую — для значений функции $f(t)$ (рис. 4).

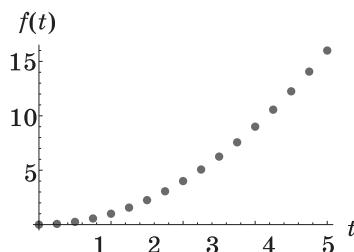


Рис. 4. Точки для функции $f(t) = t^2$

Мы также можем соединить эти точки кривой, чтобы заполнить промежутки между ними (рис. 5).

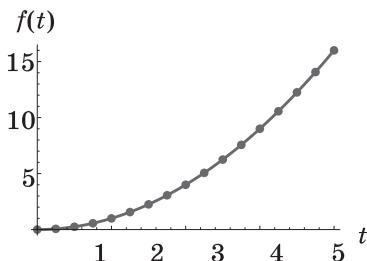


Рис. 5. Соединение нарисованных точек кривой

Этот способ визуализации функций называется графиком.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Используя графический калькулятор или программу типа *Mathematica*, нарисуйте графики перечисленных функций. Если вам незнакомы тригонометрические функции, прочитайте следующий раздел.

$$f(t) = t^4 + 3t^3 - 12t^2 + t - 6,$$

$$g(x) = \sin x - \cos x,$$

$$\theta(\alpha) = e^\alpha + \alpha \ln \alpha,$$

$$x(t) = \sin^2 t - \cos t.$$

Тригонометрия

Если вы не изучали тригонометрию или знакомились с ней давно, вам стоит прочесть этот раздел.

В физике тригонометрия применяется постоянно; она повсюду. Поэтому нужно быть знакомым с идеями, обозначениями и методами, используемыми в тригонометрии. Начнем с того, что в физике обычно не используются градусы в качестве единицы измерения углов. Вместо них применяются *радианы*; принято, что в 360° содержится 2π радиан. Чтобы перевести угол из градусов в радианы, нужно разделить его на 180° и умножить на π , тогда: $90^\circ = \pi/2$ радиан, а $30^\circ = \pi/6$ радиан. Таким образом, один радиан — это примерно 57° (рис. 6).



Рис. 6. Радиан — это угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности

Тригонометрические функции определяются на основе свойств прямоугольных треугольников. На рис. 7

изображен прямоугольный треугольник с гипотенузой c , основанием b и высотой a . Греческой буквой θ (тета) обозначен угол, противолежащий высоте, а греческой буквой ϕ (фи) — угол, противолежащий основанию.

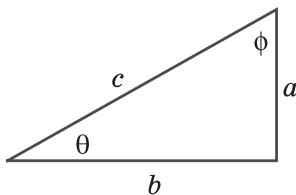


Рис. 7. Прямоугольный треугольник с обозначением сторон и углов

Определим функции синус (\sin), косинус (\cos) и тангенс (\tg) как отношения сторон прямоугольного треугольника следующим образом:

$$\sin \theta = \frac{a}{c},$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c},$$

$$\tg \theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Можно нарисовать графики этих функций, чтобы посмотреть, как они себя ведут (рис. 8–10).

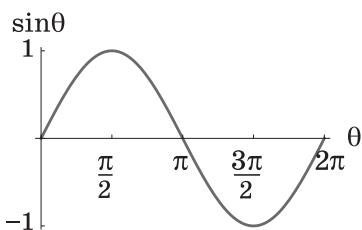


Рис. 8. График функции синус

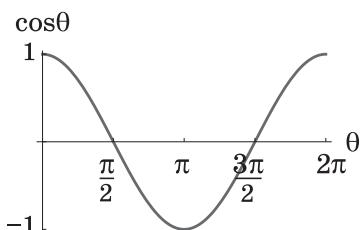


Рис. 9. График функции косинус

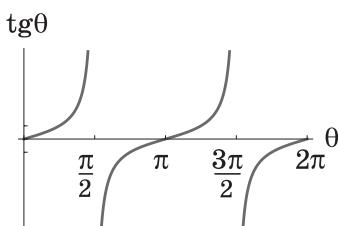


Рис. 10. График функции тангенс

Есть пара вещей, которые полезно знать о тригонометрических функциях. Во-первых, треугольник можно нарисовать внутри окружности с центром в начале декартовой системы координат, как показано на рис. 11.

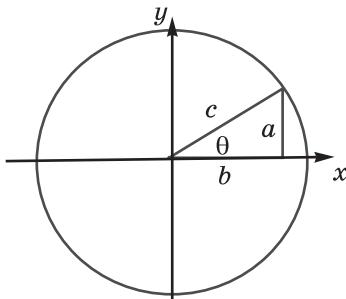


Рис. 11. Прямоугольный треугольник, нарисованный в окружности

Здесь линия, проведенная из центра к любой точке окружности, образует гипотенузу прямоугольного треугольника, а его высота и основание соответствуют координатам точки. Положение точки, таким образом, может быть задано двумя координатами x и y , где

$$x = c \cdot \cos \theta,$$

а

$$y = c \cdot \sin \theta.$$

Это очень полезная взаимосвязь между прямоугольными треугольниками и окружностями.

Во-вторых, допустим, что некоторый угол θ является суммой или разностью двух других углов, обозначаемых греческими буквами α (альфа) и β (бета), так что можно записать θ как $\alpha \pm \beta$. Тригонометрические функции от $\alpha \pm \beta$ выражаются через тригонометрические функции от α и от β следующим образом:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

И еще одно чрезвычайно полезное равенство:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1. \quad (1)$$

(Отметим попутно, что для квадрата синуса принято использовать обозначение $\sin^2\theta = \sin \theta \sin \theta$.) На самом деле это уравнение — замаскированная теорема Пифагора. Если на рис. 11 принять, что радиус окружности равен 1, то стороны a и b будут синусом и косинусом θ , а гипотенуза будет 1. Уравнение (1) — это знакомое соотношение трех сторон прямоугольного треугольника: $a^2 + b^2 = c^2$.

Векторы

Векторные обозначения — это еще один математический инструмент, который, как мы предполагаем, уже встречался вам ранее, но, просто ради выравнивания уровня подготовки, сделаем небольшой обзор векторных методов в обычном трехмерном пространстве.

Вектор можно считать объектом, имеющим как длину (или *величину*), так и направление в пространстве. Примером может служить сдвиг (параллельный перенос). Если объект перемещается из некоторого исходного положения, недостаточно сказать, насколько далеко он передвинулся, чтобы определить, куда его занесет. Надо также указать направление перемещения. Сдвиг — это простейший пример векторной величины. Графически вектор изображается стрелкой, имеющей длину и направление, как показано на рис. 12.

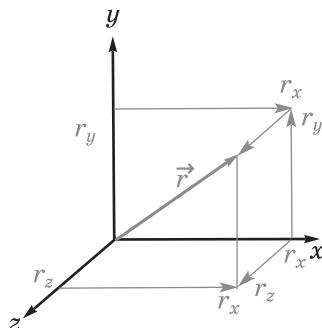


Рис. 12. Вектор \vec{r} в декартовой системе координат

При алгебраической записи векторы обозначаются стрелкой над буквой. Так, символ для смещения — \vec{r} . Для обозначения величины, или длины вектора используется символ модуля (абсолютного значения). Например, длина вектора \vec{r} обозначается $|\vec{r}|$.

Теперь рассмотрим операции, которые можно выполнять с векторами. Прежде всего их можно умножать на обычные вещественные числа. При работе с векторами такие числа часто называют специальным термином — *скаляры*. Умножение на положительное число просто умножает на соответствующее число длину вектора. Но можно также умножить вектор на отрицательное число, что изменит его направление на противоположное. Например, $-2\vec{r}$ — это вектор, который вдвое длиннее \vec{r} и направлен в противоположную сторону.

Векторы можно складывать. Чтобы сложить \vec{A} и \vec{B} , расположите их так, как показано на рис. 13, чтобы получился параллелограмм (направления векторов должны сохраняться). Сумма векторов определяется длиной и направлением диагонали.

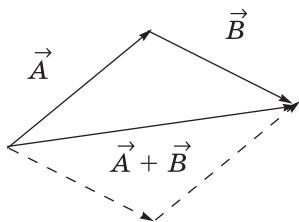


Рис. 13. Сложение векторов

Раз векторы можно складывать и раз их можно умножать на отрицательные числа, то их можно и вычитать.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Сформулируйте правило вычитания векторов.

Векторы также можно описывать их компонентами. Начнем с трех перпендикулярных осей x , y , z . Теперь определим три *единичных вектора*, которые направлены вдоль координатных осей и имеют единичную длину. Их также называют *базисными векторами*, или *ортами*, а совокупность трех единичных векторов, лежащих на координатных осях, — *базисом*. Три базисных вектора в декартовых координатах традиционно обозначаются \hat{i} , \hat{j} и \hat{k} (рис. 14). В более общем виде мы пишем \hat{e}_1 , \hat{e}_2 и \hat{e}_3 , когда работаем с координатами (x_1, x_2, x_3) . Здесь символ $\hat{}$ («шапочка», в английском: caret) говорит о том, что мы имеем дело с единичным вектором. Единичные векторы полезны тем, что любой вектор \vec{V} можно разложить на них следующим образом:

$$\hat{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}. \quad (2)$$

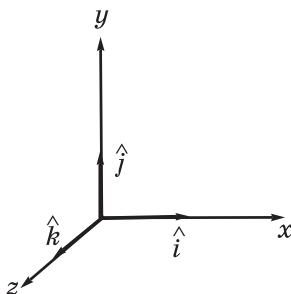


Рис. 14. Базисные векторы декартовой системы координат

Здесь величины V_x , V_y и V_z — это числовые коэффициенты, на которые нужно умножить базисные векторы, чтобы получить \vec{V} . Их также называют *компонентами* \vec{V} . Можно сказать, что формула (2) — это *линейная комбинация* базисных векторов. Или другими словами: мы складываем базисные векторы, умножая их на соответствующие коэффициенты. Компоненты вектора могут быть положительными или отрицательными. Можно также записать вектор как список его компонент — в нашем случае (V_x, V_y, V_z) . Абсолютную величину вектора можно получить из его компонент, применив трехмерную теорему Пифагора:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (3)$$

Можно умножить вектор \vec{V} на скаляр α путем умножения на α всех его компонент:

$$\alpha \vec{V} = (\alpha V_x, \alpha V_y, \alpha V_z).$$

Сумму двух векторов можно записать как сумму их соответствующих компонент:

$$(\vec{A} + \vec{B})_x = (A_x + B_x),$$

$$(\vec{A} + \vec{B})_y = (A_y + B_y),$$

$$(\vec{A} + \vec{B})_z = (A_z + B_z).$$

Можно ли перемножать векторы? Да, и не одним способом. Один из типов умножения — векторное произведение — дает новый вектор. Но мы пока не будем заниматься векторным умножением, а рассмотрим только второй вариант, называемый *скалярным произведением*. Скалярное произведение двух векторов — это обычное число, скаляр. Для векторов \vec{A} и \vec{B} оно определяется следующим образом:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A||B|\cos\theta,$$

где θ — угол между векторами. На повседневном языке скалярное произведение — это произведение длин двух векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение можно также записать в компонентной форме:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Это позволяет легко вычислять скалярное произведение по известным компонентам векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Покажите, что длина вектора удовлетворяет условию $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4

Пусть $(A_x = 2, A_y = -3, A_z = 1)$, а $(B_x = -4, B_y = -3, B_z = 2)$. Вычислите длины векторов \vec{A} и \vec{B} , их скалярное произведение и угол между ними.

Важное свойство скалярного произведения состоит в том, что оно обращается в нуль, если векторы *ортогональны* (перпендикулярны). Запомните это, поскольку нам придется использовать данное свойство для доказательства перпендикулярности векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 5

Определите, какая пара из следующих векторов ортогональна: $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 3)$, $(3, 1, 0)$, $(-3, 0, 2)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6

Можете ли вы объяснить, почему произведение двух ортогональных векторов равно 0?

Лекция 2. Движение

«Джордж, эти скачки действуют мне на нервы, — жалуется Ленни. — Неужели время такое дерганное? Не может ли все происходить чуть более гладко?»

Джордж на секунду задумался, стер с доски и произнес: «О'кей, Ленни, давай сегодня разберемся с системой, которая делает изменения плавными».

Математическая интерлюдия: дифференциальное исчисление

В этой книге мы в основном будем рассматривать изменение различных величин во времени. По большей части классическая механика имеет дело с вещами, которые меняются плавно — *непрерывно*, как говорят математики. В динамических законах, описывающих изменение состояния, будут фигурировать непрерывные изменения времени, а не дискретные, как в первой лекции. Таким образом, нас будут интересовать функции независимой переменной t .

Для работы с непрерывными величинами служит математический анализ. Этот раздел математики занимается пределами, так что давайте сразу познакомимся с этим понятием. Пусть у нас имеется последовательность чисел: l_1, l_2, l_3, \dots , которая все ближе и ближе подходит к некоему числу L . Вот пример: 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, ... Предел этой последовательности равен 1. Ни один элемент этой последовательности не равен 1, но они все ближе и ближе приближаются к этому значению. Чтобы выразить это, мы используем запись

$$\lim_{i \rightarrow \infty} l_i = L.$$

Читается: L является пределом l_i , при i , стремящемся к бесконечности.

Ту же идею можно применить к функциям. Пусть задана функция $f(t)$ и мы хотим описать, как она меняется, когда t становится все ближе и ближе к определенному значению, скажем к a . Если $f(t)$ подходит сколь угодно близко к L , когда t приближается к a , то будем говорить, что предел $f(t)$, при t , стремящемся к a , равен L . Или в виде формулы

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = L.$$

Пусть $f(t)$ — некая функция переменой t . Когда меняется t , меняется и $f(t)$. Дифференциальное исчисление занимается вопросом о скорости изменения таких функций. Все начинается с того, что мы берем $f(t)$ в какой-то определенный момент, а затем немно-

го изменяем время и смотрим, насколько изменится $f(t)$. Скорость изменения определяется как отношение изменения f к изменению t . Обозначим изменение величины заглавной греческой буквой дельта Δ . Тогда изменение t будет записываться как Δt (это не $\Delta \times t$, а изменение t). На интервале Δt значение f изменится от $f(t)$ до $f(t + \Delta t)$. Тогда изменение f , обозначаемое как Δf , будет

$$\Delta f = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Чтобы определить скорость изменения точно в момент t , надо устремить Δt к нулю. Конечно, когда мы это сделаем, Δf тоже устремится к нулю, но если разделить Δf на Δt , это отношение устремится к некоторому пределу, который называется *производной* $f(t)$ по t :

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Строгий математик может поворчать, что $\frac{df(t)}{dt}$ трактуется как отношение двух дифференциалов, но вы редко допустите ошибку, рассуждая подобным образом.

Давайте вычислим несколько производных. Начнем с функций, являющихся степенями t . А конкретно — проиллюстрируем метод вычисления производных на примере функции $f(t) = t^2$. Применим формулу (1) и начнем с определения $f(t + \Delta t)$:

$$f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2.$$

Вычислив $(t + \Delta t)^2$ прямым перемножением сомножителей или по формуле разложения квадратного двучлена, получим

$$f(t + \Delta t) = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2.$$

Вычтем теперь $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) - f(t) &= t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2 = \\ &= 2t\Delta t + \Delta t^2. \end{aligned}$$

Следующим шагом разделим эту формулу на Δt :

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t.$$

Теперь становится легко найти предел при $\Delta t \rightarrow 0$. Первый член не зависит от Δt и сохраняется, а второй член стремится к нулю и просто исчезает. Важно четко усвоить правило: члены более высокого порядка по Δt при вычислении производных можно игнорировать. Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = 2t.$$

А значит, производная t^2

$$\frac{d(t^2)}{dt} = 2t.$$

Далее рассмотрим общий случай степенной функции: $f(t) = t^n$. Для взятия этой производной надо вы-

числить $f(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^n$. Тут пригодится школьный курс алгебры: результат получается по биномиальной формуле. Для любых двух чисел a и b она позволяет разложить $(a + b)^n$:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n.$$

Насколько длинным может быть это выражение? Если n — целое, формула оборвется на $(n + 1)$ -м члене. Но биномиальная теорема носит более общий характер; на самом деле n может быть любым вещественным или комплексным числом. Правда, если n нецелое, выражение никогда не обрывается — оно представляет собой бесконечный ряд. К счастью, для наших целей важны только первые два члена.

Все, что нужно для вычисления $(t + \Delta t)^n$, — это выполнить подстановку $a = t$ и $b = \Delta t$ и получить

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= (t + \Delta t)^n = \\ &= t^n + nt^{n-1}\Delta t + \dots \end{aligned}$$

Все члены, обозначенные многоточием, в пределе стремятся к нулю, и ими можно пренебречь.

Теперь вычтем $f(t)$ (или t^n):

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(t + \Delta t) - f(t) = \\ &= t^n + nt^{n-1}\Delta t + \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2}t^{n-2}\Delta t^2 + \dots - t^n = \end{aligned}$$

$$= nt^{n-1} \Delta t + \\ + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \Delta t^2 + \dots$$

Далее разделим на Δt

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \Delta t + \dots,$$

устремляем $\Delta t \rightarrow 0$ и получаем производную

$$\frac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}.$$

Важный момент заключается в том, что данная формула верна даже для нецелого n ; n может быть любым вещественным или комплексным числом.

А вот производные для некоторых специальных случаев: если $n = 0$, то $f(t)$ просто равняется числу 1. Производная равна нулю, как и для любой функции, значение которой не меняется. Если $n = 1$, $f(t) = t$, а производная будет равна 1 — так всегда бывает, когда берется производная чего-либо по самому себе. Вот производные некоторых степенных функций:

$$\frac{d(t^2)}{dt} = 2t,$$

$$\frac{d(t^3)}{dt} = 3t^2,$$

$$\frac{d(t^4)}{dt} = 4t^3,$$

$$\frac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}.$$

Еще ряд производных, которые пригодятся нам в будущем:

$$\frac{d(\sin t)}{dt} = \cos t,$$

$$\frac{d(\cos t)}{dt} = -\sin t,$$

(2)

$$\frac{d(e^t)}{dt} = e^t,$$

$$\frac{d(\ln t)}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Небольшой комментарий относительно третьей из этих формул — $\frac{d(e^t)}{dt} = e^t$. Смысл e^t вполне ясен для целых t . Например, $e^3 = e \times e \times e$. Для нецелых значений аргумента он не столь очевиден. По сути, функция e^t и определяется тем свойством, что ее производная равна самой себе. Так что третья формула на самом деле — определение.

Есть несколько полезных правил, которые надо помнить при работе с производными. Все их можно

доказать, если вы хотите поупражняться. Первое правило состоит в том, что производная константы всегда равна 0. Это очевидно; ведь производная — это скорость изменения, а константа никогда не меняется, так что

$$\frac{dc}{dt} = 0.$$

Если умножить функцию на постоянный коэффициент, то ее производная также умножится на этот коэффициент:

$$\frac{d(cf)}{dt} = c \frac{df}{dt}.$$

Пусть заданы две функции $f(t)$ и $g(t)$. Их сумма — тоже функция, а ее производная

$$\frac{d(f+g)}{dt} = \frac{d(f)}{dt} + \frac{d(g)}{dt}.$$

Это *правило дифференцирования суммы*.

Произведение тех же функций — еще одна функция, производная которой вычисляется по правилу

$$\frac{d(fg)}{dt} = f(t) \frac{d(g)}{dt} + g(t) \frac{d(f)}{dt},$$

которое, естественно, называется *производной произведения*.

Далее, пусть $g(t)$ — функция t , а $f(g)$ — функция g . Тогда f будет *сложной функцией* t . Если нужно полу-

чить f для определенного значения t , то сначала надо вычислить $g(t)$. Затем, зная g , можно вычислить $f(g)$. Вычислить производную f по t совсем нетрудно:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt}.$$

Это правило *дифференцирования сложной функции*. Написанное выше соотношение было бы очевидным тождеством, будь производная на самом деле отношением; в этом случае числитель и знаменатель можно было бы просто сократить на dg . В действительности это один из тех случаев, когда наивный ответ оказывается *верным*. В отношении сложных функций важно помнить, что можно искусственно вводить функцию $g(t)$, чтобы упростить $f(t)$, превратив ее в $f(g)$. Например, если

$$f(t) = \ln(t^3)$$

и надо вычислить $\frac{df}{dt}$, то t^3 под логарифмом может представлять проблему. Поэтому введем промежуточную функцию $g = t^3$, так что $f(g) = \ln g$. Теперь можно применить правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dt}.$$

Используя наши формулы для производных: $\frac{df}{dg} = \frac{1}{g}$ и $\frac{dg}{dt} = 3t^2$, получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{3t^2}{g}.$$

Или после подстановки $g = t^3$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{3t^2}{t^3} = \frac{3}{t}.$$

Вот так обычно и применяется правило дифференцирования сложной функции.

Пользуясь вышеприведенными правилами, можно вычислить массу различных производных. По сути это все, что составляет основы дифференциального исчисления.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Вычислите производные следующих функций:

$$f(t) = t^4 + 3t^3 - 12t^2 + t - 6,$$

$$g(x) = \sin x - \cos x,$$

$$\theta(\alpha) = e^\alpha + \alpha \cdot \ln \alpha,$$

$$x(t) = \sin^2 t - \cos t.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Производная от производной называется второй производной и записывается в виде $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$. Вычислите вторые производные приведенных выше функций.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Используя правило для дифференцирования сложной функции, найдите производные следующих функций:

$$g(t) = \sin(t^2) - \cos(t^2),$$

$$\theta(\alpha) = e^{3\alpha} + 3\alpha \ln(3\alpha),$$

$$x(t) = \sin^2(t^2) - \cos(t^2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 4

Докажите правила для производной суммы (совсем просто), производной произведения (просто, если применить маленькую хитрость) и производной сложной функции (совсем просто).

УПРАЖНЕНИЕ 5

Докажите все формулы (2). *Подсказка: посмотрите в справочнике тригонометрические тождества и свойства пределов.*

Движение частицы

Концепция точечной частицы — это идеализация. Никакой объект, даже электрон, не является столь малым, как точка. Но во многих ситуациях можно пренебречь протяженной структурой объектов и обращаться с ними как с точками. Например, очевидно, что планета Земля — не точка, но рассматривая ее движение вокруг Солнца, можно пренебречь размерами Земли даже при высокой точности расчетов.

Положение частицы задается путем указания значений всех трех ее пространственных координат, а движение описывается ее положением в каждый момент времени. Математически можно задать эти положения тремя функциями пространственных координат от времени: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Положение можно также представлять себе как радиус-вектор $\vec{r}(t)$, компоненты которого x , y , z заданы на определенный момент t . Путь частицы, ее траектория, задается как функция времени $\vec{r}(t)$. Задача классической механики — определить $\vec{r}(t)$ по заданным начальным условиям и динамическому закону.

Следующей по важности характеристикой частицы после ее положения является скорость. Это тоже вектор. Чтобы его определить, нам понадобится немного математического анализа.

Рассмотрим смещение частицы между моментом t и чуть более поздним моментом $t + \Delta t$. В этом

интервале времени частица перемещается из точки с координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в точку $x(t + \Delta t)$, $y(t + \Delta t)$, $z(t + \Delta t)$, или, в векторных обозначениях, — из $\vec{r}(t)$ в $\vec{r}(t + \Delta t)$. Таким образом, смещения определены как

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t),$$

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t),$$

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$$

или

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

Смещение — это небольшое расстояние, проходимое частицей за короткий интервал времени Δt . Чтобы получить скорость, мы делим это смещение на Δt и переходим к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Например,

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Это, естественно, — определение производной координаты x по времени t .

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Точка над величиной — это общепринятое сокращенное обозначение для производной по времени. Это обозначение можно использовать для любых производных по времени, не только для производных от положения частицы. Например, если T используется для обозначения температуры ванны с водой, то \dot{T} — это скорость изменения температуры во времени. Такое обозначение будет использоваться постоянно, поэтому привыкайте к нему.

Постоянно выписывать формулы для x , y , z довольно утомительно, поэтому мы будем пользоваться сокращенной нотацией. Три координаты x , y , z вместе обозначаются как x_i , а компоненты скорости — v_i :

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i,$$

где i принимает значения x , y , z , или, в векторной форме,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Скорость имеет абсолютную величину $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

которая говорит о том, как быстро движется частица независимо от направления. Величину $|\vec{v}|$ называют *модулем скорости*.

Ускорение — это величина, говорящая, как меняется скорость. Если вектор скорости не меняется, объект не испытывает ускорения. Постоянство вектора скорости означает сохранение не только модуля скорости, но также и ее направления. Вы испытываете ускорение всякий раз, когда меняется вектор вашей скорости, не важно, по величине или по направлению. По определению ускорение — это производная скорости по времени:

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i,$$

или, в векторной форме,

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}.$$

Поскольку v_i — это производная x_i по времени, а a_i — производная v_i по времени, ускорение оказывается второй производной x_i по времени:

$$a_i = \frac{d^2x_i}{dt^2} = \ddot{x}_i.$$

Две точки над буквой v обозначают вторую производную по времени.

Примеры движения

Пусть в момент $t = 0$ частица начинает движение, описываемое уравнениями

$$x(t) = 0,$$

$$y(t) = 0,$$

$$z(t) = z(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Очевидно, что частица не движется в направлении осей x и y , а перемещается только вдоль оси z . Константы $z(0)$ и $v(0)$ задают начальные значения координаты и скорости по оси z в момент $t = 0$. Величину g мы тоже считаем постоянной.

Давайте вычислим скорость путем дифференцирования координаты по времени:

$$v_x(t) = 0,$$

$$v_y(t) = 0,$$

$$v_z(t) = v(0) - gt.$$

Компоненты скорости по x и y все время остаются равными нулю. Компонента скорости по оси z начинает меняться от значения $v(0)$ в момент $t = 0$. Иными словами, $v(0)$ — это начальное условие для скорости.

С течением времени член $-gt$ становится ненулевым. Рано или поздно он перекрывает начальное значение скорости и частица оказывается движущейся в отрицательном направлении оси z .

Теперь вычислим ускорение, еще раз продифференцировав уравнения по времени:

$$a_x(t) = 0,$$

$$a_y(t) = 0,$$

$$a_z(t) = -g.$$

Ускорение вдоль оси z — постоянно и отрицательно. Если ось z представляет собой высоту, то частица ускоряется вниз, как при свободном падении.

Рассмотрим теперь колеблющуюся частицу, движущуюся взад и вперед по оси x . Поскольку по двум другим направлениям движения не происходит, мы будем их игнорировать. Простое колебательное движение описывается тригонометрической функцией

$$x(t) = \sin \omega t,$$

где строчная греческая буква ω — это константа. Чем больше ω , тем чаще и быстрее становятся колебания. Движение такого типа называется *простым гармоническим колебанием* (рис. 1).

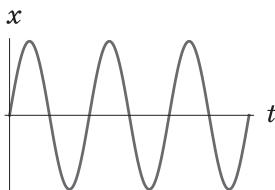


Рис. 1. Простое гармоническое колебание

Давайте вычислим скорость и ускорение. Для этого надо продифференцировать $x(t)$ по времени. Вот результат первого дифференцирования:

$$v_x = \frac{d}{dt} \sin \omega t.$$

Под знаком производной стоит синус произведения.
Введем обозначение $b = \omega t$:

$$v_x = \frac{d}{dt} \sin b.$$

Применив правило для производной сложной функции, получаем

$$v_x = \frac{d}{db} \sin b \frac{db}{dt},$$

или

$$v_x = \cos b \frac{d}{dt}(\omega t),$$

или

$$v_x = \omega \cos \omega t.$$

Аналогичным образом получаем ускорение

$$a_x = -\omega^2 \sin \omega t.$$

Обратите внимание на один интересный момент. Всякий раз, когда координата x достигает максимума или минимума, скорость оказывается равной нулю. Верно и обратное: когда $x = 0$, скорость максимальна или минимальна. Говорят, что координата и скорость расходятся по фазе на 90° . Это видно на рис. 2 и 3, где представлены графики $x(t)$ и $v(t)$.

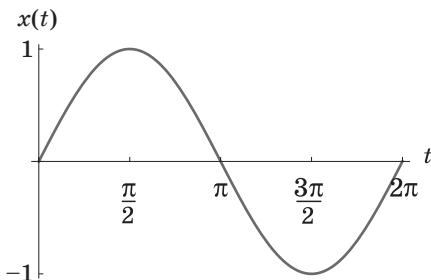


Рис. 2. Зависимость положения от фазы при гармоническом колебании

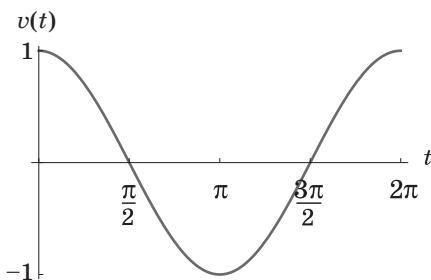


Рис. 3. Зависимость скорости от фазы при гармоническом колебании

Положение и ускорение тоже связаны между собой, поскольку и то и другое пропорционально $\sin \omega t$. Но обратите внимание на знак минус в формуле для ускорения. Этот минус говорит, что всякий раз, когда x имеет положительное (отрицательное) значение, ускорение, наоборот, отрицательно (положительно). Другими словами, где бы ни находилась частица, ее ускорение направлено к началу координат. Формально говорят, что положение и ускорение расходятся по фазе на 180° .

УПРАЖНЕНИЕ 6

Сколько времени уходит у колеблющейся частицы на совершение одного полного цикла своего движения?

Далее рассмотрим частицу, совершающую равномерное движение по окружности вокруг начала координат. То есть движение по окружности происходит с постоянным модулем скорости. В этой задаче можно игнорировать ось z и считать, что движение происходит в плоскости xy . Для его описания нам потребуются две функции: $x(t)$ и $y(t)$. Для определенности договоримся, что частица движется против часовой стрелки. И пусть радиус ее орбиты будет R .

Полезно визуализировать движение, спроектировав его на две оси. Поскольку частица обращается вокруг начала координат, x колеблется между $x = -R$ и $x = R$. То же можно сказать и о координате y . Но эти две координаты сдвинуты по фазе на 90° : когда x в максимуме, y обращается в ноль, и наоборот.

В общем виде равномерное круговое движение вокруг начала координат (против часовой стрелки) математически описывается так:

$$x(t) = R \cos \omega t,$$

$$y(t) = R \sin \omega t.$$

Входящий в эти уравнения параметр ω называется *круговой частотой*. Она определяется как число радиан, на которое происходит поворот за единицу времени. Она также связана с интервалом времени, необходимым для совершения одного полного оборота, то есть с периодом движения таким же, как уже встречался нам в упражнении 6:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Теперь нетрудно путем дифференцирования вычислить компоненты скорости и ускорения:

$$\begin{aligned} v_x &= -R\omega \sin \omega t, \\ v_y &= R\omega \cos \omega t, \\ a_x &= -R\omega^2 \cos \omega t, \\ a_y &= -R\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда видно интересное свойство кругового движения, которое Ньютона использовал, анализируя движение Луны: ускорение на круговой орбите параллельно радиус-вектору, задающему положение, но имеет противоположное направление. Другими словами, вектор ускорения направлен радиально внутрь окружности к началу координат.

УПРАЖНЕНИЕ 7

Покажите, что при движении по окружности радиус-вектор и вектор скорости перпендикулярны друг другу.

УПРАЖНЕНИЕ 8

Вычислите скорость и ее модуль, а также ускорение для каждого из перечисленных ниже радиус-векторов. Если у вас есть программа для построения графиков, начертите для каждого случая радиус-вектор, вектор скорости и вектор ускорения.

$$\vec{r} = (\cos \omega t, e^{\omega t}),$$

$$\vec{r} = (\cos(\omega t - \varphi), \sin(\omega t - \varphi)),$$

$$\vec{r} = (c \cos^3 t, c \sin^3 t),$$

$$\vec{r} = (c(t - \sin t), c(1 - \cos t)).$$

Интерлюдия 2.

Интегральное исчисление

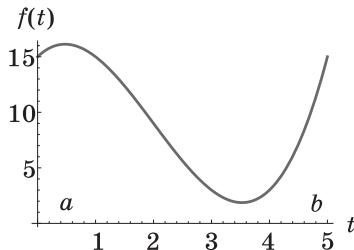
«Джордж, я люблю все делать наоборот. Нельзя ли дифференцировать наоборот?»

«Конечно, можно, Ленни. Это называется интегрированием».

Интегральное исчисление

Дифференциальное исчисление занимается скоростями изменений. Интегральное же имеет дело с суммами множества крохотных накапливающихся величин. Сразу далеко не очевидно, что у этих вещей есть между собой нечто общее, но оно есть.

Начнем с графика функции $f(t)$ (рис. 1).

Рис. 1. Поведение функции $f(t)$

Центральная задача интегрального исчисления — подсчитать площадь под кривой, заданной функцией $f(t)$. Чтобы уточнить постановку задачи, рассмотрим эту функцию между двумя значениями аргумента, которые назовем *пределами интегрирования*, $t = a$ и $t = b$. Площадь, которую мы хотим подсчитать, показана серым цветом на рис. 2.

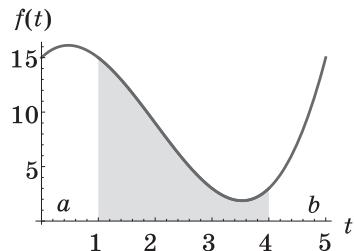


Рис. 2. Пределы интегрирования

Для выполнения этого подсчета разобъем область на очень тонкие прямоугольники и сложим их площади (рис. 3).

Конечно, это приблизительный подсчет, но он становится точным, если устремить ширину прямоугольников к нулю. Чтобы выполнить эту процедуру,

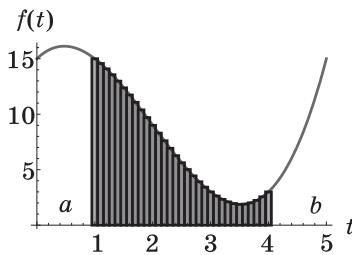


Рис. 3. Иллюстрация интегрирования

разделим сначала интервал между $t = a$ и $t = b$ на N подынтервалов — каждый шириной Δt . Рассмотрим прямоугольник, расположенный у определенного значения t . Его ширина составляет Δt , а высота соответствует значению $f(t)$ в данной точке. Отсюда площадь отдельного прямоугольника δA равна

$$\delta A = f(t)\Delta t.$$

Теперь сложим площади всех отдельных прямоугольников и получим приближенное значение искомой площади:

$$A = \sum_i f(t_i) \Delta t,$$

где заглавная греческая буква сигма (Σ) означает сумму величин с последовательными значениями i . Таким образом, при $N = 3$ получаем

$$\begin{aligned} A &= \sum_i^3 f(t_i) \Delta t = \\ &= f(t_1) \Delta t + f(t_2) \Delta t + f(t_3) \Delta t. \end{aligned}$$

Здесь t_i — положение i -го прямоугольника на оси t .

Для получения точного ответа надо перейти к пределу, устремив Δt к нулю, число прямоугольников при этом возрастет до бесконечности. Такой предел называется определенным интегралом $f(t)$ от $t = a$ до $t = b$ и записывается в виде

$$A = \int_a^b f(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i f(t_i) \Delta t.$$

Знак интеграла (\int) заменяет символ суммирования, а Δt , как и в дифференциальном исчислении, заменяется на dt . Функция $f(t)$ называется подынтегральным выражением.

Внесем изменение в обозначения и назовем один из пределов интегрирования T . А именно заменим b на T и рассмотрим интеграл

$$\int_a^T f(t) dt,$$

где T мы будем считать переменной величиной вместо t . В этом случае интеграл определяет функцию параметра T , который может принимать любые значения t . Такой интеграл является функцией T , потому что имеет определенное значение для каждого значения T :

$$F(T) = \int_a^T f(t) dt.$$

Получается, что задание функции $f(t)$ определяет вторую функцию $F(T)$. Можно было бы позволить

также варьировать и предел a , но мы не станем этим заниматься. Функция $F(T)$ называется *неопределенным интегралом* $f(t)$. Неопределенным — потому что вместо интегрирования от одного фиксированного значения до другого мы интегрируем до переменной величины. Обычно такой интеграл записывается без обозначения пределов интегрирования:

$$F(T) = \int f(t) dt. \quad (1)$$

Основная теорема анализа — один из самых простых и красивых результатов в математике. Она обнаруживает глубокую связь между интегралами и производными, утверждая, что если $F(T) = \int f(t) dt$, то

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим приращение интеграла при изменении T от T до $T + \Delta t$. Это будет новый интеграл

$$F(T + \Delta t) = \int_a^{T + \Delta t} f(t) dt.$$

Иначе говоря, мы добавили еще один прямоугольник шириной Δt в точке $t = T$ к площади, показанной на рис. 3. В действительности разность $F(T + \Delta t) - F(T)$ — это как раз площадь дополнительного прямоугольника, которая равна $f(T)\Delta t$. Другими словами,

$$F(T + \Delta t) - F(T) = f(T)\Delta t.$$

Поделив на Δt

$$\frac{F(T + \Delta t) - F(T)}{\Delta t} = f(T),$$

получаем основную теорему, связывающую F и f , когда переходим к пределу $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dF}{dT} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (F(T + \Delta t) - F(T)) = f(T).$$

Можно упростить запись, игнорируя различие между t и T :

$$\frac{dF}{dt} = f(t).$$

Другими словами, процедуры интегрирования и дифференцирования взаимно противоположны: производная от интеграла равна подынтегральной функции.

Можно ли точно определить функцию $F(t)$, зная ее производную $f(t)$? Почти, но не совсем. Проблема в том, что добавление константы к $F(t)$ не меняет значение производной. Для данной функции $f(t)$ неопределенный интеграл неоднозначен, он определен лишь с точностью до *постоянной интегрирования*.

Чтобы понять, как используется основная теорема, возьмем несколько неопределенных интегралов. Найдем, например, интеграл степенной функции $f(t) = t^n$. Начнем с того, что

$$F(T) = \int f(t) dt.$$

Отсюда следует, что

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt},$$

или

$$t^n = \frac{dF(t)}{dt}.$$

Все, что нам нужно сделать, — это найти такую функцию F , производная которой равна t^n , и это совсем нетрудно.

В прошлой главе мы выяснили, что для любого m

$$\frac{d(t^m)}{dt} = mt^{m-1}.$$

Если сделать подстановку $m = n + 1$, то получится

$$\frac{d(t^{n+1})}{dt} = (n+1)t^n$$

или, если поделить на $n + 1$,

$$\frac{d(t^{n+1} / n+1)}{dt} = t^n.$$

Итак, мы нашли, что t^n — это производная от $\frac{t^{n+1}}{n+1}$. Подставляя соответствующие значения в исходное выражение, получаем

$$F(T) = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Единственная недостающая вещь здесь — неопределенная константа, которую можно добавить к F . Поэтому результат следует записать так:

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c,$$

где c — константа, которую надо определять другими средствами.

Эта постоянная интегрирования тесно связана с неоднозначностью выбора другого предела интегрирования, который мы ранее обозначили a . Чтобы понять, как a влияет на постоянную интегрирования c , рассмотрим интеграл

$$\int_a^T f(t) dt.$$

В вырожденном случае, когда оба предела интегрирования совпадают, то есть когда $T = a$, интеграл обращается в ноль. Этот факт можно использовать для определения c .

В общем случае основная теорема анализа записывается в виде¹

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Другой способ выразить ту же основную теорему одним равенством:

¹ Формула Ньютона—Лейбница. — *Примеч. перев.*

$$\int \frac{df}{dt} dt = f(t) + c. \quad (3)$$

Иными словами, интегрирование производной дает исходную функцию (с точностью до постоянной интегрирования). Интегрирование и дифференцирование взаимно отменяют друг друга.

Вот некоторые формулы интегрирования:

$$\int adt = at + c,$$

$$\int cf(t)dt = c \int f(t)dt,$$

$$\int tdt = \frac{t^2}{2} + c,$$

$$\int t^2dt = \frac{t^3}{3} + c,$$

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + c,$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + c,$$

$$\int \cos t dt = \sin t + c,$$

$$\int e^t dt = e^t + c,$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t + c,$$

$$\int [f(t) \pm g(t)] dt = \int f(t) dt \pm \int g(t) dt.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Найдите неопределенные интегралы следующих функций путем обращения процедуры дифференцирования и добавления постоянной:

$$f(t) = t^4,$$

$$f(t) = \cos t,$$

$$f(t) = t^2 - 2.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Примените основную теорему анализа для вычисления каждого из интегралов упражнения 1 в пределах интегрирования от $t = 0$ до $t = T$.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Пусть выражения из упражнения 1 описывают ускорение частицы. Проинтегрируйте их по времени один раз, чтобы определить скорости, и второй раз, чтобы определить траектории. Поскольку мы собираемся использовать t в качестве одного из пределов интегрирования, то в подынтегральном выражении мы будем применять немую переменную t' . Интегрируйте по ней от $t' = 0$ до $t' = t$.

$$v(t) = \int_0^t t'^4 dt',$$

$$v(t) = \int_0^t \cos t' dt',$$

$$v(t) = \int_0^t (t'^2 - 2) dt'.$$

Интегрирование по частям

Для взятия интегралов часто используются небольшие хитрости. Одна из таких хитростей — заглянуть в таблицу интегралов. Другая — научиться пользоваться программой *Mathematica*. Но если вам надо справиться самостоятельно, то самый старый трюк называется *интегрированием по частям*. Это просто обратное применение правила для производной произведения. Вспомните из лекции 2, что для дифференцирования функции, которая является произведением двух других функций, используется правило

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}.$$

Теперь проинтегрируем обе части этого уравнения в пределах от a до b :

$$\int_a^b \frac{d[f(x)g(x)]}{dx} dx = \int_a^b f(x)\frac{dg(x)}{dx} + \int_a^b g(x)\frac{df(x)}{dx}.$$

Левая часть уравнения тривиальна. Интеграл от производной (производной от fg) — это просто сама функция. Так что левая часть будет

$$f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

что обычно записывают в форме

$$f(x)g(x) \Big|_a^b.$$

Теперь вычтем один из двух интегралов из правой части, перенеся его в левую часть:

$$f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \frac{dg(x)}{dx} = \int_a^b g(x) \frac{df(x)}{dx}. \quad (4)$$

Допустим, задан интеграл, который мы не можем взять, но замечаем, что подынтегральное выражение представляет собой произведение функции $g(x)$ и производной другой функции $f(x)$. Иначе говоря, после некоторого анализа мы видим, что интеграл имеет такой вид, как в правой части уравнения (4), но непонятно, как его взять. Однако иногда может посчастливиться и интеграл в левой части этого уравнения окажется уже известным. И тогда все становится замечательно¹.

¹ Существует простая мнемоническая фраза, позволяющая запомнить формулу интегрирования по частям. Если записать формулу в виде $\int U dV = UV - \int V dU$, то для ее запоминания достаточно произнести: «Интеграл УДиВительный равен, УВЫ, минус Интегралу Весьма Даже Удивительному. — Примеч. ред.

Рассмотрим пример. Допустим, нам надо взять интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Его нет в нашем списке интегралов. Но заметим, что

$$\cos x = \frac{d \sin x}{dx},$$

так что интеграл можно представить как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{d \sin x}{dx} dx.$$

Уравнение (4) говорит нам, что этот интеграл равен

$$x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{dx} \sin x dx,$$

или попросту

$$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

Теперь все тривиально. Интеграл $\int \sin x dx$ есть в нашем списке — это просто $-\cos x$. Остальное вы можете доделать самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЕ 4

Завершите взятие интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.

Вас, вероятно, интересует, насколько часто срабатывает этот прием? Ответ: весьма часто, но, конечно, не всегда. Желаю удачи.

Лекция 3. Динамика

Ленни: «Что заставляет все вещи двигаться, Джордж?»

Джордж: «Силы, Ленни».

Ленни: «А что их останавливает?»

Джордж: «Силы, Ленни».

Закон движения Аристотеля

Аристотель жил в мире, где главной силой было трение. Чтобы заставить предмет двигаться — например, стронуть с места телегу с деревянными колесами, — надо было ее толкнуть, то есть приложить к ней *силу*. Чем сильнее вы толкаете, тем быстрее она движется; если же перестать ее толкать, телега очень быстро остановится. Аристотель пришел к ошибочному выводу, поскольку не понимал, что трение — это тоже сила. Но все равно полезно разобрать его идеи, пользуясь современным языком. Если бы Аристотель знал

математический анализ, то мог бы сформулировать такой закон движения:

Скорость любого объекта пропорциональна сумме приложенных к нему сил.

Знай он, как записывать векторные уравнения, его закон мог бы выглядеть так:

$$\vec{F} = m\vec{v}.$$

\vec{F} — это, конечно, приложенная сила, а результатом ее действия (согласно Аристотелю) был бы вектор скорости \vec{v} . Связывающий эти две величины множитель m неким образом характеризует сопротивление тела попыткам его двигать; при заданной силе чем больше m объекта, тем меньше его скорость. Немного поразмыслив, древний философ мог бы отождествить m с массой объекта. Ведь очевидно же, что тяжелые вещи двигать труднее, чем легкие, а значит, масса должна каким-то образом входить в уравнение.

Можно предположить, что Аристотель никогда не катался на коньках, иначе он бы хорошо знал, что остановить тело почти так же трудно, как привести его в движение. Закон движения Аристотеля совершенно ошибочен, но его тем не менее полезно изучить, чтобы знать, как уравнения движения предопределяют будущее системы. С этого момента будем называть тело частицей.

Рассмотрим одномерное движение частицы вдоль оси x под действием заданной силы. Под *заданной*

я имею в виду силу, величина которой известна в любой момент времени. Можно обозначить ее как $F(t)$ (обратите внимание, что знак вектора в нашем случае излишен, так как движение происходит в одном измерении). Учитывая тот факт, что скорость — это производная положения x , уравнение Аристотеля можно записать в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{F(t)}{m}.$$

Прежде чем решать это уравнение, посмотрим, как оно соотносится с детерминистическими законами из лекции 1. Одно очевидное отличие уравнения Аристотеля состоит в том, что оно не является дискретным — ни t , ни x не являются дискретными и не меняются внезапными скачками. Напротив, они меняются непрерывно. Тем не менее сходство можно обнаружить, если допустить, что время разбито на интервалы длительностью Δt , и заменить производную на $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Выполнив это, получаем

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{F(t)}{m}.$$

Иначе говоря, где бы ни находилась частица в момент t , в следующее мгновение ее положение изменится на определенную величину. Например, если сила постоянна и положительна, то с каждым шагом частица будет смещаться вперед на величину $\Delta t \frac{F(t)}{m}$. Очевидно, что

этот закон движения является детерминистичным. Зная, что частица была в точке $x(0)$ (или x_0) в момент $t = 0$, можно легко предсказать, где она окажется в будущем. Так что по критериям лекции 1 Аристотель не совершил никакого преступления.

Вернемся к точному уравнению движения:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{F(t)}{m}.$$

Уравнения с неизвестными функциями, содержащие производные, называются *дифференциальными уравнениями*. В данном случае мы имеем дифференциальное уравнение *первого порядка*, поскольку оно содержит только первые производные. Такого рода уравнения легко решаются. Прием состоит в том, чтобы проинтегрировать обе части уравнения:

$$\int \frac{dx(t)}{dt} dt = \int \frac{F(t)}{m} dt.$$

Левая часть уравнения — это интеграл от производной. Здесь пригождается основная теорема анализа, согласно которой левая часть — это просто $x(t) + c$.

С другой стороны, правая часть — это интеграл от некой заданной функции и, за исключением постоянной интегрирования, это тоже вещь вполне определенная. Например, если F — постоянная, то правая часть будет

$$\int \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} t + c.$$

Заметьте, что в результат уже входит постоянная в качестве слагаемого. Добавлять произвольную постоянную к обеим частям уравнения — избыточно. В нашем случае уравнению движения соответствует функция

$$x(t) = \frac{F}{m}t + c.$$

Но как определить постоянную c ? Ответ: по начальным условиям. Например, если известно, что частица стартовала из точки $x = 1$ в момент $t = 3$, то можно просто подставить эти значения и, получив уравнение

$$1 = \frac{F}{m}3 + c,$$

решить его относительно c :

$$c = 1 - 3\frac{F}{m}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Пусть сила меняется во времени по закону $F = 2t^2$, а начальное условие в нулевой момент времени $x(0) = \pi$. Используя закон движения Аристотеля, найдите $x(t)$ для всех моментов времени.

Аристотелевские уравнения движения детерминистичны, но являются ли они обратимыми? Как я говорил в лекции 1, *обратимость* означает, что если

все стрелки развернуть в обратную сторону, то получившийся новый закон движения тоже будет детерминистичным. Процедуру, аналогичную обращению стрелок, очень просто выполнить в случае непрерывного времени. Везде, где в уравнения входит время, надо изменить его на знак. Это приведет к тому, что будущее и прошлое поменяются местами. Замена t на $-t$ касается также и знака приращения времени. Другими словами, Δt следует заменить на $-\Delta t$. Фактически это можно сделать на уровне дифференциалов dt . Обращение стрелок означает замену дифференциалов dt на $-dt$. Вернемся к уравнению Аристотеля

$$F(t) = m \frac{dx}{dt}$$

и поменяем в нем знак времени. Получим

$$F(-t) = -m \frac{dx}{dt}.$$

Левая часть уравнения — это сила, но сила, определенная в момент $-t$, а не в момент t . Однако если $F(t)$ — известная функция, тогда известна и $F(-t)$. В обратной задаче сила также является известной функцией обращенного времени.

В правой части уравнения мы заменили dt на $-dt$, что привело к изменению знака всего выражения. На самом деле можно перенести знак минус в левую часть уравнения:

$$-F(-t) = m \frac{dx}{dt}.$$

Отсюда следует простое заключение: обращенное уравнение движения в точности такое же, как исходное, но с другим видом зависимости силы от времени. Окончательный вывод ясен: аристотелевское уравнение движения детерминистично в будущем и детерминистично в прошлом. Проблема не в том, что это уравнение противоречиво, а в том, что оно неверно.

Интересно, что уравнение Аристотеля применяется в физике, а не в качестве фундаментального закона природы, но в качестве приближения. Силы трения во многих случаях настолько существенны, что догадка Аристотеля о том, что предметы перестают двигаться, если их не толкать, оказывается почти корректной. Силы трения не фундаментальны. Они возникают как следствие взаимодействия тела с огромным числом других крошечных объектов — атомов и молекул, слишком малых и слишком многочисленных, чтобы за ними уследить. Поэтому мы усредняем все скрытые степени свободы. Результатом являются силы трения. Когда они очень велики, как, например, в случае камня, движущегося сквозь грязь, уравнение Аристотеля служит очень хорошим приближением, но с некоторыми модификациями. Пропорциональность между силой и скоростью определяется не массой, а так называемым коэффициентом вязкости. Но сейчас эта информация будет для нас лишней.

Масса, ускорение и сила

Ошибкой Аристотеля было предположение, что для поддержания движения объекта необходимо, чтобы к нему была «приложена» ненулевая сила. Правильное предположение состоит в том, что одна — приложенная — сила нужна для того, чтобы преодолеть другую — силу трения. Изолированному объекту, движущемуся в пустом пространстве без всяких сил, ничего не нужно для продолжения движения. На самом деле сила понадобится, чтобы его остановить. Это называется *законом инерции*. Суть действия силы состоит в изменении состояния движения тела. Если тело первоначально покоялось, нужна сила, чтобы привести его в движение. Если оно движется, требуется сила для его остановки. Если тело движется в определенном направлении, нужна сила, чтобы изменить это направление. Все эти примеры связаны с *изменением* скорости объекта, то есть с его ускорением.

Из опыта мы знаем, что некоторые объекты обладают большей инерцией, чем другие; для изменения их скорости требуется больше усилий. Яркими примерами объектов с большой и малой инерцией могут служить соответственно тепловоз и шарик для пинг-понга. Количественной мерой инерции объекта служит его *масса*.

В ньютоновский закон движения входят три величины: ускорение, масса и сила. Ускорение мы раз-

бирали в лекции 2. Следя за положением тела в ходе его движения, вдумчивый наблюдатель, немного знакомый с математикой, сможет определить его ускорение. Масса — это новое понятие, определяемое через силу и ускорение. Но мы пока еще не дали определение силе. Это начинает напоминать порочный круг, в котором сила определяется как причина изменения движения заданной массы, а масса определяется как сопротивление изменению. Чтобы разорвать этот круг, давайте присмотримся к тому, как на практике определяется и измеряется сила.

Существуют весьма изощренные устройства, измеряющие силу с огромной точностью, но для наших целей лучше представить себе очень старомодное устройство — динамометр. Он состоит из пружины и линейки для измерения ее растяжения относительно естественной равновесной длины (рис. 1).

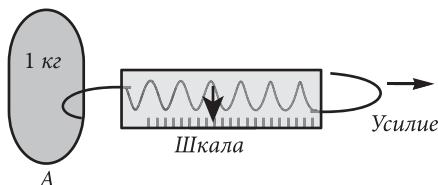


Рис. 1. Динамометр

У пружины имеются два крюка: к одному крепится тело, масса которого будет измеряться, а за другой тянут. Да, и раз уж вы этим занялись, сделайте сразу несколько одинаковых устройств.

Определим единицу силы, закрепив один крюк на некоем объекте A и потянув за другой, пока указатель не сдвинется на одно деление шкалы. Таким образом, мы приложили к A единицу силы.

Для определения двух единиц силы просто потянем крюк так, чтобы пружина растянулась на два деления. Однако это предполагает одинаковое поведение пружины при растяжении на одно и на два деления, что вернет нас к порочному логическому кругу, который мы хотели разорвать. Поэтому поступим иначе и определим две единицы силы, прикрепив к A два динамометра и растягивая каждый из них с силой в одну единицу (рис. 2).

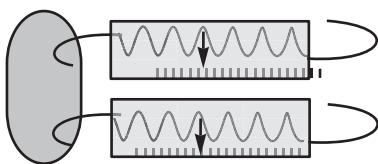


Рис. 2. Двойная сила

Другими словами, мы тянем за оба крюка так, чтобы указатели стояли на единичной отметке. Три единицы силы определяются с использованием трех пружин и так далее.

Выполнив этот эксперимент в открытом космосе, мы обнаружим интересный факт: объект A ускоряется в том направлении, в котором его тянет крюк. Если быть точнее, то ускорение пропорционально силе — оно становится вдвое больше, когда сила удваивает-

ся, втрое больше, когда сила достигает трех единиц, и так далее.

Попробуем как-нибудь поменять инерцию A . Например, удвоим ее, сцепив вместе два экземпляра объекта A (рис. 3).

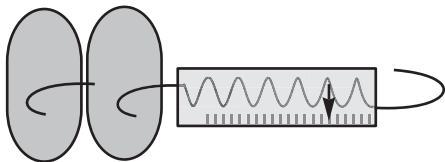


Рис. 3. Двойная масса

Мы обнаружим, что при приложении единичной силы (если тянуть одним динамометром, растянутым на одно деление) ускорение составит лишь половину от первоначального. Инерция (масса) стала теперь вдвое больше, чем прежде.

Очевидно, что эксперимент можно обобщить; зацепив три массы, мы получим ускорение в одну треть исходного, и так далее.

Можно проделать еще много экспериментов, в которых мы будем цеплять любое число пружин к любому числу объектов A . Наблюдения обобщаются в одной формуле второго закона движения Ньютона, который говорит, что сила равна массе, умноженной на ускорение:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1)$$

Это уравнение можно также записать в форме

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2)$$

Или, в словесной форме, **сила равна произведению массы на темп изменения скорости**: нет силы — нет изменения скорости.

Заметим, что эти уравнения являются векторными. И сила, и ускорение — векторы, поскольку они имеют не только величину, но и направление.

Интерлюдия о размерностях величин

Математика может вполне удовлетворить утверждение, что длина отрезка равна 3. Однако физик или инженер — да и простой обыватель — поинтересуется: «Три чего?» Три дюйма, три сантиметра или три световых года?

Аналогично нет никакой информации в утверждении о том, что масса объекта равна 7 или 12. Чтобы числа приобрели смысл, надо указать используемые единицы измерений. Давайте начнем с длины.

Где-то в Париже лежит эталонный метровый стержень. Он хранится в запечатанном контейнере при постоянной температуре и защищен от любых воз-

действий, которые могут повлиять на его длину¹. С этого момента мы примем этот метровый стержень в качестве единицы длины.

Будем записывать это так:

$$[x] = [\text{длина}] = \text{метры}.$$

Несмотря на внешнее подобие, это не уравнение в привычном нам смысле. Эта запись читается так: *x измеряется в единицах длины, которая измеряется в метрах*.

Аналогично t имеет размерность времени и измеряется в секундах. Определение секунды можно дать как время одного колебания маятника определенной длины:

$$[t] = [\text{время}] = \text{секунды}.$$

Названия единиц измерения «метры» и «секунды» принято сокращать до «м» и «с» соответственно.

Имея единицы для длины и времени, можно сконструировать единицы скорости и ускорения. Чтобы вычислить скорость объекта, мы делим пройденное им расстояние на время. Результат имеет размерность *длина за время*, или — в наших единицах — метры в секунду:

$$[v] = \left[\frac{\text{длина}}{\text{время}} \right] = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

¹ Существует более современное определение метра через длину волн света, испускаемого атомами, перескакивающими из одного квантового состояния в другое. Но для наших целей идеально подойдет парижский метровый стержень.

Аналогично ускорение — это темп изменения скорости, а значит, его единицы — скорость в единицу времени, или длина в квадрат единицы времени:

$$[a] = \left[\frac{\text{длина}}{\text{время}} \right] \left[\frac{1}{\text{время}} \right] = \left[\frac{\text{длина}}{\text{время}^2} \right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Единица массы, которой мы будем пользоваться, — это килограмм. Он определен как масса куска платины, который также хранится где-то во Франции. Таким образом,

$$[m] = [\text{масса}] = \text{килограмм} = \text{кг}.$$

Теперь рассмотрим единицу силы. Ее можно было бы определить, например, с использованием некоей пружины из определенного металла, которая под действием единичной силы растягивается на 0,01 метра, или каким-нибудь другим подобным образом. Но на самом деле новой единицы для силы не требуется. Она у нас уже есть — это сила, которая придает одному килограмму ускорение в один метр в секунду за секунду. Еще лучше использовать второй закон Ньютона: $F = ma$. Очевидно, что сила имеет размерность массы, умноженной на ускорение:

$$\begin{aligned} [F] &= [\text{сила}] = \\ &= [ma] = \\ &= \left[\frac{\text{масса} \times \text{длина}}{\text{время}^2} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{kg \cdot m}{c^2}.$$

У этой единицы силы есть имя. Один килограмм-метр на секунду в квадрате называется *ньютоном* и обозначается «Н». Сам Ньютон, будучи англичанином, вероятно, предпочел бы использовать британскую единицу, а именно фунт. В нем примерно 4,4 Н.

Некоторые простые примеры решения ньютоновских уравнений

Простейший из всех примеров — это частица, на которую не действуют силы. В уравнении движения (2) подставим ноль вместо силы:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$

или, используя точку для обозначения производной,

$$m \dot{\vec{v}} = 0.$$

Можно отбросить массу как постоянный множитель и записать это уравнение покомпонентно:

$$\dot{v}_x = 0,$$

$$\dot{v}_y = 0,$$

$$\dot{v}_z = 0.$$

Решение элементарно: компоненты скорости постоянны и просто равны их начальным значениям:

$$v_x(t) = v_x(0). \quad (3)$$

То же самое происходит с двумя другими компонентами. Полученный нами результат, кстати, часто называют *первым законом движения Ньютона*:

Любое тело в состоянии равномерного прямолинейного движения стремится сохранять это состояние движения, пока к нему не будет приложена внешняя сила.

Уравнения (1) и (2) называются *вторым законом движения Ньютона*:

Связь между массой m объекта, его ускорением a и приложенной силой F задается уравнением

$$F = ma.$$

Но, как мы видели, первый закон — это просто частный случай второго закона, когда сила равна нулю¹.

Вспомнив о том, что скорость — это производная положения, мы можем записать уравнение (3) в виде

$$\dot{x} = v_x(0).$$

¹ На самом деле все несколько сложнее. Первый закон Ньютона постулирует существование особых систем отсчета, называемых *инерциальными*, в которых выполняется второй закон Ньютона. Другими словами, первый закон — эта сцена, на которой разворачивается действие второго закона. Убрав сцену, мы, вообще говоря, не сможем восстановить ее как частный случай действия. — Примеч. ред.

Это простейшее возможное дифференциальное уравнение, решение которого (для всех компонент) записывается в виде

$$x(t) = x_0 + v_x(0)t,$$

$$y(t) = y_0 + v_y(0)t,$$

$$z(t) = z_0 + v_z(0)t.$$

Или, в векторной форме,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t.$$

Более сложное движение получается в случае приложения постоянной силы. Пусть для начала она действует только в направлении z . Разделив уравнение движения на m , получаем

$$\dot{v}_z = \frac{F_z}{m}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Проинтегрируйте это уравнение. Подсказка: используйте определенные интегралы.

Из этого результата выводим

$$v_z(t) = v_z(0) + \frac{F_z}{m}t,$$

или

$$\dot{z}(t) = v_z(0) + \frac{F_z}{m} t.$$

Это, по-видимому, второе по простоте дифференциальное уравнение. Нетрудно решить его:

$$z(t) = z_0 + v_z(0)t + \frac{F_z}{2m}t^2. \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3

Продемонстрируйте дифференцированием, что данное решение удовлетворяет уравнению движения.

Этот простой случай, вероятно, вам знаком. Если z представляет высоту над поверхностью Земли, а — заменить ускорением свободного падения, $\frac{F_z}{m} = -g$, то уравнение (4) будет описывать движение тела, брошенного с высоты z_0 с начальной скоростью $v_z(0)$:

$$z(t) = z_0 + v_z(0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь случай простого гармонического осциллятора. Эту систему лучше всего представлять себе как частицу, движущуюся вдоль оси x под действием силы, которая тянет ее к началу координат. Закон, описывающий эту силу:

$$F_x = -kx.$$

Знак минус указывает, что каким бы ни было значение x , возвращающая сила тянет тело к точке $x = 0$. Так, если значение x положительное, сила будет отрицательной, и наоборот. Уравнение движения можно записать в форме

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

или, если определить $\frac{k}{m} = \omega^2$,

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (6)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4

Покажите путем дифференцирования, что общее решение уравнения (6) дается уравнением с двумя константами A и B :

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Выразите начальное положение и скорость в момент $t = 0$ через A и B .

Гармонический осциллятор — это чрезвычайно важная система, которая встречается в самых разных контекстах, от движения маятника до колебаний электрического и магнитного полей в световой волне. Очень полезно изучить его досконально.

Интерлюдия 3. Частное дифференцирование

«Посмотри сюда, Ленни. Не правда ли, прелестные холмы и долины?»

«Да, Джордж. Мы ведь сможем там осесть, когда раздобудем немного денег? Не так ли?»

Джордж прищурился: «Именно там, куда ты смотришь, Ленни?»

Ленни протянул руку: «Прямо вон там, Джордж. Там локальный минимум».

Частное дифференцирование

Анализ функций многих переменных — это прямое обобщение анализа для одной переменной. Вместо функции, зависящей от одной переменной t , рассмотрим функцию нескольких переменных. Для определенности назовем их x, y, z , хотя это не обязательно координаты в обычном пространстве. К тому же

переменных может быть больше или меньше, чем три. Давайте также рассмотрим функцию этих трех переменных $V(x, y, z)$. Для каждого набора значений x, y, z существует единственное значение $V(x, y, z)$, которое, как мы предполагаем, плавно меняется, когда мы меняем координаты.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных крутится вокруг понятия *частной производной*. Допустим, мы исследуем окрестность точки x, y, z и хотим узнать скорость, с которой меняется V , когда мы изменяем x , зафиксировав значения y и z . Мы можем просто представить себе, что y и z — это постоянные параметры, так что единственной переменной является x . Производной V будет тогда

$$\frac{dV}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}, \quad (1)$$

где ΔV определяется как

$$\Delta V = V([x + \Delta x], y, z) - V(x, y, z). \quad (2)$$

Заметим, что в определении ΔV меняется только x , а y и z остаются зафиксированными.

Производная, определяемая формулами (1) и (2), называется частной производной V по переменной x и обозначается

$$\frac{\partial V}{\partial x}$$

или, когда надо подчеркнуть, что y и z остаются неизменными,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y,z}.$$

Таким же способом можно определить частную производную по любой другой переменной:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta y}.$$

Краткая форма записи частной производной V по y :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \partial_y V.$$

Частные производные тоже можно брать много-кратно. Если $\frac{\partial V}{\partial x}$, в свою очередь, рассматривать как функцию x, y, z , то ее можно дифференцировать. Таким образом можно определить частную производную по x второго порядка:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \partial_x \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \partial_{x,x} V.$$

Имеют смысл также и смешанные производные. Например, можно продифференцировать $\partial_y V$ по x :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \partial_x \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \partial_{x,y} V.$$

Интересный и важный факт состоит в том, что смешанные производные не зависят от порядка, в котором выполняется дифференцирование. Иначе говоря,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Вычислите все первые и вторые частные производные (включая смешанные) для следующих функций:

$$x^2 + y^2, \quad \sin(xy),$$

$$\frac{x}{y} e^{x^2+y^2},$$

$$e^x \cos y.$$

Стационарные точки и минимизирующие функции

Рассмотрим функцию переменной y , которую назовем F (см. рис. 1).

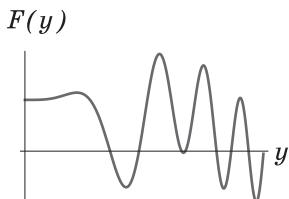


Рис. 1. График функции $F(y)$

Заметим, что на этой кривой есть места, где сдвиг по y в любом направлении приведет к сдвигу F только в направлении вверх. Эти точки называются *локальными минимумами*. На рис. 2 добавлены точки, указывающие положения локальных минимумов.

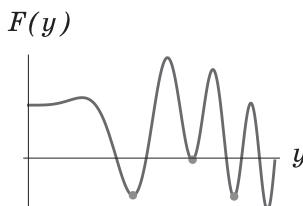


Рис. 2. Локальные минимумы

Если в локальном минимуме сместиться в любом направлении вдоль y , вы подниметесь выше точки $F(y)$. Все эти точки находятся на дне небольших впадин. *Глобальным минимумом* называют самую нижнюю из всех точек кривой.

Одно из условий локального минимума состоит в том, что в этой точке производная функции по независимой переменной равна нулю. Это необходимое условие, но не достаточное. Такому условию удовлетворяет любая *стационарная точка*

$$\frac{d}{dy}F(y)=0.$$

Второе условие проверяет характер стационарной точки по значению в ней второй производной. Если вторая производная больше 0, то все окрестные точки будут располагаться выше стационарной точки и она является *локальным минимумом*:

$$\frac{d^2}{d^2y}F(y)>0.$$

Если же вторая производная меньше 0, то все точки в окрестности лежат ниже стационарной точки и в ней достигается *локальный максимум*:

$$\frac{d^2}{d^2y}F(y) < 0.$$

На рис. 3 показаны примеры локальных максимумов.

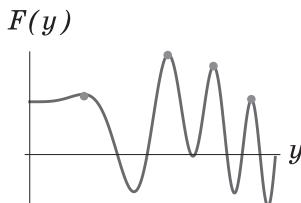


Рис. 3. Локальные максимумы

Если вторая производная равна 0, то она меняет свой знак в стационарной точке, которая называется *точкой перегиба*:

$$\frac{d^2}{d^2y}F(y) = 0.$$

Пример точки перегиба показан на рис. 4.

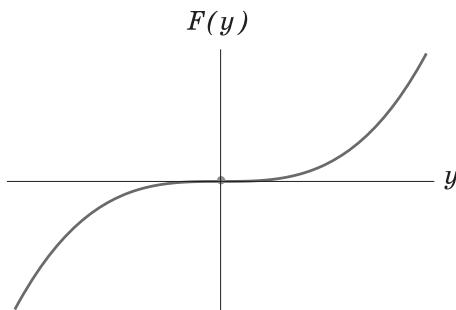


Рис. 4. Точка перегиба

Все это вместе называется *проверкой по второй производной*.

Стационарные точки в многомерном случае

Локальные максимумы, локальные минимумы и другие стационарные точки могут возникать и у функций более чем одной переменной. Представьте себе холмистый ландшафт. Высота — это функция, зависящая от двух координат, скажем долготы и широты. Назовем ее $A(x, y)$. Вершины холмов и самые глубокие точки долин — это локальные максимумы и минимумы $A(x, y)$. Но не только в этих местах ландшафт становится локально горизонтальным. Между парами холмов располагаются седловые точки. Пример такой точки показан на рис. 5.

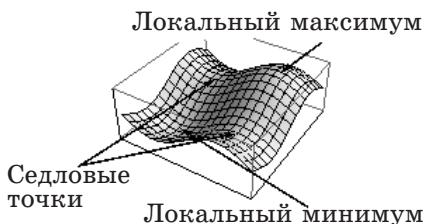


Рис. 5. Функция нескольких переменных

Самая вершина холма — это место, где независимо от того, в какую сторону двинуться, вы станете спускаться. Нижние точки долин — прямая противопо-

ложность; здесь все пути ведут вверх. Но и там и там поверхность горизонтальна.

Есть и другие места, где поверхность горизонтальная. Между двумя холмами можно найти точку, называемую седловой (или перевалом). В седловых точках поверхность горизонтальна, но вдоль одной оси высота быстро увеличивается в обоих направлениях, а вдоль другой оси, в перпендикулярном направлении, высота, наоборот, убывает. Все такие точки называются стационарными.

Давайте построим сечение нашего пространства, параллельное оси x и проходящее через локальный минимум A (рис. 6).

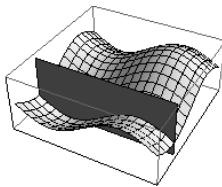


Рис. 6. Сечение, параллельное оси x

Похоже, что в точке минимума производная A по x обращается в нуль:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0.$$

С другой стороны, сечение можно было бы ориентировать параллельно оси y , и тогда мы получили бы, что

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Условием минимума и, вообще говоря, любой стационарной точки является обращение в нуль обеих производных. Если бы у пространства, на котором задана функция A , было бы больше измерений, то условием стационарности точки было бы

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

для всех x_i .

Существует сокращенная форма записи этих уравнений. Обратим внимание, что изменение значения функции при небольшом изменении x_i задается уравнением

$$\delta A = \sum_i \frac{\partial A}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Система уравнений (3) эквивалентна условию

$$\delta A = 0 \quad (4)$$

при любых небольших вариациях x .

Допустим, мы нашли такую точку. Как определить, что это — минимум, максимум или седло? Ответ дает обобщение критерия, используемого в случае функции одной переменной. Смотрим на вторые производные. Однако вторых частных производных существует несколько. В двумерном случае их четыре:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$$

и

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x},$$

причем две последние — одинаковы.

Эти частные производные часто сводят в специальную матрицу, называемую *матрицей Гессе*:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Важную роль играют величины, называемые *определителем и следом* этой матрицы. Определитель этой матрицы (*гессиан*) вычисляется по формуле

$$\text{Det } H = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y},$$

а *след* задается выражением

$$\text{Tr } H = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}.$$

Матрицы с их определителями и следами могут ничего не значить для вас за рамками данных определений, но их понимание понадобится, если вы доберетесь до тех лекций, где обсуждается квантовая механика. Пока же вам достаточно этих формул и следующих правил для классификации стационарных точек.

Если определитель и след матрицы Гессе положительны, то данная точка является локальным минимумом.

Если определитель положителен, а след отрицателен, то в данной точке достигается локальный максимум.

Если определитель отрицателен, то независимо от знака следа данная точка является седловой.

Имеется, однако, важная оговорка. Перечисленные правила применимы к функциям двух переменных. При большем числе переменных правила усложняются. На нашем уровне они являются далеко не очевидными, но позволяют проверять различные функции и находить у них разного типа стационарные точки. Рассмотрим пример. Пусть

$$F(x, y) = \sin x + \sin y.$$

Выполнив дифференцирование, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos y.$$

Рассмотрим точку $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, обе производные обращаются в нуль и данная точка является стационарной.

Теперь определим тип этой стационарной точки, вычислив вторые производные:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\sin x,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = 0.$$

Поскольку $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, мы видим, что и определитель матрицы Гессе положителен, а след — отрицателен. Значит, это точка максимума.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Проанализируйте точки:

$$\left(x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2} \right),$$

$$\left(x = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\left(x = -\frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2} \right).$$

Являются ли они стационарными точками следующих функций и если да, то какого они типа?

$$F(x, y) = \sin x + \sin y,$$

$$F(x, y) = \cos x + \cos y.$$

Лекция 4. Системы из более чем одной частицы

Томный летний вечер. Ленни и Джордж лежат в траве, глядя в небо.

«Расскажи мне о звездах, Джордж. Это частицы?»

«Своего рода, Ленни».

«И им удается оставаться неподвижными?»

«Удается, Ленни. Просто они находятся очень далеко».

«Их так много, Джордж. Как ты думаешь, этот парень, Лаплас, в самом деле мог все их себе представить?»

Системы частиц

Если бы, как считал Лаплас, все системы состояли из частиц, тогда все законы природы были бы ди-

намическими законами, определяющими движение этих частиц. Вспомним вновь Лапласа: «Мыслящее существо, которое в определенный момент знало бы все движущие силы... и все положения...» Но чем определяется сила, действующая на конкретную частицу? Положениями всех остальных частиц.

Существует много типов сил, таких как трение, давление воздуха, вызванное ветром, или сила реакции опоры, благодаря которой пол удерживает вас от падения на землю. Но все эти силы не фундаментальны. Они возникают за счет микроскопических взаимодействий между атомами и молекулами.

Фундаментальные силы — это лишь те, которые действуют между частицами подобно гравитации или электрическим силам. Они зависят от ряда вещей: гравитационные силы, действующие между частицами, пропорциональны произведению их масс, а электрические — произведению зарядов. Заряды и массы считаются внутренними свойствами частиц, и их указание является частью описания системы.

Помимо этих внутренних свойств на силы влияет расположение частиц. Например, расстоянием между объектами определяет электрическую и гравитационную силу, с которой одна частица действует на другую. Допустим, что расположение всех частиц описано их координатами: x_1, y_1, z_1 для первой частицы, x_2, y_2, z_2 — для второй, x_3, y_3, z_3 — для третьей и так далее вплоть до последней, N -й частицы. Тогда сила, дей-

ствующая на любую из этих частиц, будет функцией ее положения, а равным образом положений всех остальных частиц. Можно записать эту силу в виде

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i(\{\vec{r}\}).$$

Приведенное уравнение означает, что сила, действующая на i -ю частицу, является функцией положений всех частиц. Обозначение $\{\vec{r}\}$ символизирует совокупность положений всех частиц системы, или, иными словами, это обозначение множества всех радиус-векторов.

Как только нам стали известны силы, действующие на каждую частицу — например, на частицу номер 1, — мы можем записать для этой частицы уравнение движения Ньютона:

$$\vec{F}_1(\{\vec{r}\}) = m_1 \vec{a}_1,$$

где m_1 и \vec{a}_1 — соответственно масса и ускорение частицы 1. Подставив вместо ускорения вторую производную радиус-вектора, получаем

$$\vec{F}_1(\{\vec{r}\}) = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}.$$

Такое уравнение можно записать для каждой частицы:

$$\vec{F}_1(\{\vec{r}\}) = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2},$$

$$\vec{F}_2(\{\vec{r}\}) = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2},$$

$$\vec{F}_3(\{\vec{r}\}) = m_3 \frac{d^2 \vec{r}_3}{dt^2},$$

⋮

$$\vec{F}_N(\{\vec{r}\}) = m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2},$$

или, в компактной форме,

$$\vec{F}_i(\{\vec{r}\}) = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}.$$

Можно также представить эти уравнения покомпонентно:

$$(F_x)_i(\{x\}) = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2},$$

$$(F_y)_i(\{y\}) = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad (1)$$

$$(F_z)_i(\{z\}) = m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}.$$

В этих уравнениях $(F_x)_i$, $(F_y)_i$ и $(F_z)_i$ означают соответственно x , y и z компоненты силы, действующей на i -ю частицу, а $\{x\}$, $\{y\}$ и $\{z\}$ — множества всех x -координат, y -координат и z -координат всех частиц.

Последняя система уравнений показывает, что имеется по уравнению для каждой координаты каждой частицы, которые говорят лапласовскому «обширному разуму», как движется каждая частица, если известны все начальные условия. Сколько всего здесь уравне-

ний? Три для каждой частицы, так что для N частиц понадобится в совокупности $3N$ уравнений.

Пространство состояний системы частиц

Строгий смысл понятия «состояние системы» — это все, что вам нужно знать (с идеальной точностью), чтобы предсказывать будущее по заданному динамическому закону. Вспомните из лекции 1, что пространство состояний — это совокупность всех возможных состояний системы. В качестве примеров там приводились пространства состояний, которые обычно были дискретными наборами вариантов: А и Р для монеты, от 1 до 6 для игральной кости и т. п. В аристотелевской механике, предполагающей, что силы, действующие на объект, известны, состояние задается просто указанием положения объекта. Согласно закону движения Аристотеля, сила определяет скорость, а скорость говорит нам, где окажется частица в следующий момент времени.

Однако ньютоновский закон отличается от аристотелевского: он дает нам ускорение, а не скорость. А это значит, что в качестве начальных условий нам надо знать не только расположение, но также и скорости частиц. Знание скорости говорит нам, где окажется частица в следующий момент времени, а знание ускорения — какая у нее будет скорость.

Все это означает, что состояние системы частиц содержит не только их текущие положения, но также включает их текущие скорости. Например, если система состоит из единственной частицы, ее состояние описывается шестью параметрами: тремя компонентами положения и тремя компонентами скорости. Другими словами можно сказать, что состояние — это точка в шестимерном пространстве с осями: x, y, z, v_x, v_y, v_z .

Теперь рассмотрим движение частицы. В каждый момент времени ее состояние задается значениями шести переменных: $x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)$. Историю частицы можно изобразить траекторией в этом шестимерном пространстве состояний.

Далее рассмотрим пространство состояний системы из N частиц. Чтобы задать состояние системы, нам нужно задать состояние каждой частицы. Очевидно, это означает, что пространство состояний имеет $6N$ измерений: по три компонента положения и три компонента скорости для каждой из N частиц. Можно даже сказать, что движение системы — это траектория в $6N$ -мерном пространстве.

Но не спешите. Если пространство состояний $6N$ -мерно, то почему $3N$ уравнений в системе (1) хватает для определения эволюции системы? Может быть, мы упустили половину уравнений? Вернемся к системе из одной частицы, движущейся под действием заданной силы, и запишем уравнения Ньютона, учитывая, что ускорение — это темп изменения скорости:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Поскольку здесь нет выражения для скорости, добавим еще одно уравнение, выражающее тот факт, что скорость — это темп изменения положения:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Вместе с этой второй формулой мы получаем в совокупности шесть уравнений, дающих нам изменение шести координат в пространстве состояний. Применив эти соображения к каждой частице, мы получаем $6N$ уравнений, определяющих движение системы в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \vec{F}_i. \\ \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \vec{v}_i. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, ответ на поставленный выше вопрос: да, мы действительно потеряли половину уравнений.

Где бы вы ни оказались в $6N$ -мерном пространстве, система уравнений (2) укажет, где вы будете в следующий момент. Она также говорит, где вы были мгновение назад. Так что система (2) — это подходящий нам динамический закон. Теперь у нас есть $6N$ уравнений для N частиц.

Импульс и фазовое пространство

Если с вами столкнется движущийся объект, исход будет зависеть не только от его скорости, но также и от массы. Очевидно, что шарик для пинг-понга, лежащий со скоростью 50 км/ч (около 13 м/с), окажет значительно меньшее механическое воздействие, чем тепловоз, движущийся с такой же скоростью. В действительности воздействие пропорционально *импульсу* объекта, который мы пока определим как произведение скорости и массы. Поскольку скорость — векторная величина, то же самое относится и к импульсу, который обозначается буквой p :

$$p_i = mv_i$$

или

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Ввиду тесной связи скорости и импульса мы можем использовать импульс и положение вместо скорости и положения для указания точек пространства состояний. Когда пространство состояний описывается подобным образом, его называют *фазовым пространством*. Фазовое пространство частицы — это шестимерное пространство с координатами x_i и p_i (рис. 1).

Если это пространство описывает *конфигурацию* системы, то почему мы не называем это пространство конфигурационным? Зачем нужен новый термин *фазовое*

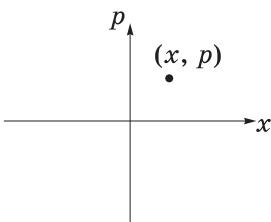


Рис. 1. Точка в фазовом пространстве

пространство? Дело в том, что термин *пространство конфигураций*¹ используется в другом значении, а именно для положений в трехмерном пространстве — просто для r_i . Его можно было бы также называть позиционным пространством; тогда можно было бы сказать: позиционное пространство плюс импульсное пространство равно фазовому пространству. На самом деле мы так и поступаем, но на равных используем термины «пространство конфигураций» и «позиционное пространство».

Пространство конфигураций + импульсное пространство = фазовое пространство.

Возможно, вас удивит, зачем заменять интуитивно ясное понятие скорости заметно более абстрактной

¹ В русскоязычной терминологии различают понятия *пространства конфигураций* и *конфигурационного пространства*. Термин «пространство конфигураций» используется в том же смысле, в котором его использует автор, а конфигурационное пространство является общим случаем фазового пространства. — Примеч. ред.

концепцией импульса при описании состояния частицы. Ответ должен стать ясен по мере ознакомления с основными понятиями классической механики в следующих лекциях. А пока просто запишем уравнения (2) в применении к импульсам вместо скоростей. Для этого сначала заметим, что

$$m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

это не что иное, как темп изменения импульса, то есть $\frac{d\vec{p}}{dt}$, или, в компактной нотации,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{p}}.$$

С учетом этого полная система уравнений приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= F_i(\{x\}) \\ \dot{r}_i &= \frac{p_i}{m}.\end{aligned}\tag{3}$$

Простая и элегантная система уравнений — именно такими, как представлял себе Лаплас, и должны быть законы природы: для каждой координаты в фазовом пространстве у нас есть одно уравнение, говорящее, как она меняется на неограниченном интервале времени.

Действие, противодействие и сохранение импульса

Закон сохранения импульса является глубоким следствием абстрактных общих принципов классической механики, которые нам еще предстоит сформулировать. Но его также можно понять на элементарном уровне, опираясь на *третий закон движения Ньютона*:

На любое действие есть равная и противоположная направленная реакция.

Проще всего понять третий закон — это представить себе, что частицы взаимодействуют попарно. Каждая частица j порождает силу, действующую на частицу i , а общая сила, приложенная к любой частице, равна сумме сил, действующих со стороны всех остальных частиц. Если мы обозначим как \vec{f}_{ij} силу, действующую на частицу i со стороны частицы j , то суммарная сила, действующая на частицу i , будет

$$\bar{F}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}. \quad (4)$$

Здесь левая часть — это совокупная сила, действующая на частицу i , а правая часть — сумма сил, действующих на i со стороны всех остальных частиц.

Ньютоновский закон действия и противодействия касается силы \vec{f}_{ij} , возникающей между парой частиц. Смысл его очень прост: сила воздействия одной части-

цы j на другую частицу i равна и противоположна по направлению силе, с которой частица i действует на j . Для любой пары частиц i и j третий закон имеет вид

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}. \quad (5)$$

Перепишем первое из уравнений (3), подставив в него (4),

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}.$$

Другими словами, скорость изменения импульса любой частицы равна сумме сил, действующих на нее со стороны других частиц. Сложим теперь все эти уравнения, чтобы получить суммарное изменение импульса:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij}.$$

В левой части этого уравнения стоит сумма скоростей изменения всех импульсов. Иначе говоря, это скорость изменения совокупного импульса системы. А правая часть уравнения равна нулю. Если расписать стоящую там двойную сумму, то каждая пара частиц даст вклад в виде двух членов: силы, действующей на i со стороны j , и силы, действующей на j со стороны i . Согласно закону действия и противодействия (5), они компенсируют друг друга. Результат можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0.$$

Это уравнение и есть точное математическое выражение «сохранения» импульса: суммарный импульс изолированной системы никогда не меняется.

Рассмотрим $6N$ -мерное пространство импульсов и координат. В каждой точке определен набор импульсов всех частиц, а значит, каждая точка фазового пространства характеризуется (в частности) значением суммарного импульса. Мы можем обойти все фазовое пространство, указав для каждой точки соответствующий ей суммарный импульс. Теперь представьте, что система начинает движение из определенной точки. С течением времени фазовая точка прочерчивает определенную траекторию в фазовом пространстве. Каждая точка на этой траектории помечена одним и тем же значением суммарного импульса. Это очень близко к тому пониманию законов сохранения, как они объяснялись в лекции 1.

Лекция 5. Энергия

«Старик, что ты высматриваешь под паровозом?»

Ленни нравились большие паровые локомотивы, так что на этот раз, как бывало и в другие выходные, Джордж взял его в железнодорожное депо. Тут им повстречался глубокий старик, который, казалось, что-то потерял.

«Где лошадь, которая тянет эту штуку?» — спросил старик у Джорджа.

«Ну, ей не нужна лошадь. Сейчас я объясню, как это работает. Вот, видите это место, — показал он, — это топка, где горит уголь, выделяя химическую энергию. А вот здесь, рядом, котел, где тепло кипятит воду, чтобы получить пар. Давление пара толкает поршень вот в этом ящике. Затем поршень давит на эти стержни, а они заставляют колеса крутиться». Старик улыбнулся, пожал Джорджу руку и удалился.

Ленни стоял неподалеку, пока Джордж объяснял работу паровоза. Теперь с восхищенным видом он подошел к Джорджу и сказал: «Джордж, я в восторге от того, как ты все ему объяснил. И я тоже все понял. Топка, котел, поршень. Я только одну вещь не уяснил».

«Какую, Ленни?»

«Ну, мне просто интересно... Где же все-таки лошадь?»

Сила и потенциальная энергия

Обычно нас учат, что существует много видов энергии (кинетическая, потенциальная, тепловая, химическая, ядерная...) и что их полная сумма сохраняется. Но если все свести к движению частиц, то классическая физика в действительности работает лишь с двумя видами энергии: кинетической и потенциальной. Лучший способ вывести закон сохранения энергии — это сразу перейти к формальным математическим принципам, а затем, отступив на шаг, посмотреть, что у нас получилось.

Фундаментальный принцип — назовем его *принципом потенциальной энергии* — утверждает, что все силы выводятся из функции потенциальной энергии, обозначаемой $V(\{x\})$. Напомним, что $\{x\}$ означает набор из $3N$ координат — пространство конфигураций —

всех частиц системы. Чтобы проиллюстрировать этот принцип, начнем с простейшего случая одиночной частицы, движущейся вдоль оси x под действием силы $F(x)$. Согласно принципу потенциальной энергии, сила, действующая на частицу, связана с производной потенциальной энергии $V(x)$:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (1)$$

В одномерном случае принцип потенциальной энергии на самом деле просто дает определение $V(x)$. Фактически потенциальную энергию можно реконструировать по силе путем интегрирования формулы (1):

$$V(x) = -\int F(x) dx. \quad (2)$$

Можно понимать формулу (1) следующим образом. Сила всегда направлена так, чтобы толкать частицу в направлении уменьшения потенциальной энергии (обратите внимание на знак «минус»). Более того, чем круче наклонена функция $V(x)$, тем больше будет сила. Правило, выражающее эту идею: *сила толкает вас вниз по склону холма.*

Сама по себе потенциальная энергия не сохраняется. По мере движения частицы $V(x)$ меняется. Зато сохраняется сумма потенциальной и кинетической энергий. Грубо говоря, по мере того как частица катится вниз по склону холма (иными словами, по мере движения в сторону уменьшения потенциальной энер-

гии), она набирает скорость. А катясь вверх по склону, она скорость теряет. При этом нечто сохраняется.

Кинетическая энергия определена через скорость v и массу m частицы. Она обозначается T :

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Полная энергия E частицы равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x).$$

При движении частицы вдоль оси x эти два типа энергии по отдельности меняются, но всегда так, что их сумма сохраняется неизменной. Докажем, что производная E по времени равна нулю.

Сначала вычислим скорость изменения кинетической энергии. Масса предполагается постоянной, однако v^2 может меняться. Производная v^2 по времени:

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} = 2v\dot{v}. \quad (3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Докажите уравнение (3). Подсказка: используйте правило дифференцирования произведения.

Отсюда производная кинетической энергии по времени:

$$\dot{T} = mv\dot{v} = mva,$$

где производная скорости по времени заменена на ускорение.

Теперь вычислим скорость изменения потенциальной энергии. Тут главное понять, что $V(x)$ меняется во времени, потому что меняется x . Вот формула, которая это выражает:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

(Производную вполне допустимо считать отношением и сокращать на dx в числителе и знаменателе.) Другой способ записи этого уравнения состоит в том, чтобы заменить $\frac{dx}{dt}$ скоростью v :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} v.$$

(Будьте внимательны и не путайте V и v .)

Теперь мы можем вычислить скорость изменения полной энергии:

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{V} =$$

$$= mva + \frac{dV}{dx} v.$$

Отметим, что поскольку оба члена содержат множитель v , его можно вынести за скобки:

$$\dot{E} = v \left(ma + \frac{dV}{dx} \right).$$

Рассмотрим выражение в скобках. Учитывая тот факт, что производная V связана с силой, и не забывая о знаке «минус» в формуле (1), мы получаем, что изменение E задается формулой

$$\dot{E} = v \left(ma - F(x) \right).$$

Это и есть то, что нам требовалось для доказательства сохранения энергии: по закону Ньютона $F = ma$, и это именно то условие, при котором множитель в скобках обращается в ноль, что, в свою очередь, говорит о том, что полная энергия является константой.

Одно замечание, прежде чем я перейду к многомерному движению. Мы показали, что энергия сохраняется, но почему в этом случае не сохраняется импульс? Ведь в предыдущей главе мы показали, что в изолированной системе частиц третий закон Ньютона приводит к тому, что импульс сохраняется. Ответ состоит в том, что за пределами системы кое-что остается, а именно объект, порождающий силу, которая действует на одномерную частицу. Например, если в задаче рассматривается падение частицы в гравитационном поле, то сила тяжести порождается Землей. Когда частица падает, ее импульс меняется, но это изменение в точности компенсируется ничтожным изменением в движении Земли.

Более одного измерения

Компоненты силы равны производным потенциальной энергии, но это не определение силы. Так получается, когда надо следить более чем за одним x , потому ли, что пространство имеет более одного измерения, или из-за того, что имеется больше одной частицы, или по обеим причинам сразу. Совсем нетрудно вообразить такие формулы для сил, которые не будут получаться дифференцированием функции потенциальной энергии, однако природа не использует такие *неконсервативные* силы.

Будем рассуждать чуть более абстрактно, чем до сих пор. Обозначим координаты пространства конфигураций x_i (напомним, что пространство конфигураций — это то же самое, что и позиционное пространство). В данном случае индекс i будет означать не частицу, о которой идет речь, и не направление в пространстве. Он перебирает все их сочетания. Другими словами, для системы из N частиц имеется $3N$ значений i . Давайте забудем пока, откуда они взялись; мы просто рассматриваем систему абстрактных координат, обозначаемых индексом i .

Запишем теперь уравнения движения:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i(\{x\}). \quad (4)$$

Для каждой координаты известны масса m_i и компонента силы F_i . Каждая компонент силы зависит от всех положений $\{x\}$.

В одномерном случае мы видели, что сила — это производная потенциальной энергии, взятая с обратным знаком, как в формуле (1). Это было определением V , а не особым условием для силы. Однако при наличии более чем одного измерения все усложняется. Если у вас есть набор функций $F_i(\{x\})$, то в общем случае их нельзя получить дифференцированием одной функции $V(\{x\})$. Если мы станем утверждать, что компоненты силы можно описать как (частные) производные единой функции потенциальной энергии, то это будет совершенно новый принцип.

На самом деле это не просто гипотеза, а фундаментальное математическое выражение одного из самых важных принципов физики:

Для любой системы существует потенциал $V(\{x\})$, такой что

$$F_i(\{x\}) = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Какой закон природы выражает формула (5)? Вы наверняка уже догадались, что это закон сохранения энергии. Вскоре мы в этом убедимся, но сначала постараемся понять, что она означает.

Изобразим ландшафт, высота которого в каждой точке задается функцией $V(\{x\})$. Прежде всего знак «минус» в формуле (5) означает, что сила направлена вниз в сторону спуска с холма. Формула также указывает, что сила больше в том направлении, в котором

склон идет круче. Например, на топографической карте нет сил, толкающих вдоль линий горизонталей. Вектор силы перпендикулярен этим линиям.

Вернемся теперь к выводу закона сохранения энергии. Для этого подставим формулу (5) в уравнение движения (4):

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Далее умножим каждое из уравнений (6) на соответствующую скорость x_i и просуммируем:

$$\sum_i m_i \dot{x}_i \ddot{x}_i = -\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i}. \quad (7)$$

Итак, мы проделали с обеими частями уравнения те же манипуляции, что и в нашем одномерном примере. Определим кинетическую энергию как сумму кинетических энергий по всем координатам:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2.$$

Это как раз то, что дает нам обе части уравнения (7). Сначала получим левую часть:

$$\sum_i m_i \dot{x}_i \ddot{x}_i = \frac{dT}{dt},$$

а теперь — правую:

$$-\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial V(\{x\})}{\partial x_i} = -\frac{dV}{dt}.$$

Таким образом, (7) можно переписать в виде

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0. \quad (8)$$

В точности как в одномерном случае уравнение (8) говорит, что производная полной энергии по времени равна нулю — энергия сохраняется.

Чтобы представить себе, что происходит, вообразите ландшафт, по которому без трения катится шарик. Всякий раз, когда шарик теряет высоту, он набирает скорость, а когда катится вверх, — теряет. Наши вычисления говорят, что это происходит особым образом, а именно так, что сохраняется сумма кинетической и потенциальной энергий.

Возможно, вам интересно, почему силы в природе всегда представляют собой градиенты (производные) одной функции. В следующей главе мы переформулируем классическую механику на основе принципа наименьшего действия. В этой формулировке в нее изначально «встраивается» наличие функции потенциальной энергии. Но тогда тот же вопрос можно задать и о принципе наименьшего действия. В конечном счете ответ можно проследить до законов квантовой механики и источника сил в теории поля — области физики, которая пока еще нам недоступна. Но причем тут квантовая теория поля? В какой-то момент мы сдаемся и говорим, что просто так уж оно устроено. Или не сдаемся и продолжаем допытываться.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Рассмотрим частицу в двух измерениях: x и y . Частица имеет массу m . Потенциальная энергия $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$. Выведите уравнения движения. Покажите, что существуют круговые орбиты и что все орбиты имеют одинаковый период. Докажите в явном виде, что энергия сохраняется.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Повторите упражнение для потенциала $V = \frac{k}{2(x^2 + y^2)}$. Существуют ли круговые орбиты? Если да, все ли они имеют одинаковый период? Сохраняется ли полная энергия?

Прежде чем переходить к принципу наименьшего действия, я хотел бы перечислить несколько различных типов энергии, с которыми приходится иметь дело в физике, и посмотреть, как они ложатся в нарисованную картину. Рассмотрим:

- механическую энергию;
- тепловую энергию;
- химическую энергию;
- атомную/ядерную энергию;
- электростатическую энергию;

- магнитную энергию;
- энергию излучения.

Некоторые, хотя и не все из этих понятий немного старомодны. Под *механической энергией* обычно понимается кинетическая и потенциальная энергия крупных, видимых объектов вроде планет или грузов, поднимаемых краном. К этой же категории часто относят и гравитационную потенциальную энергию.

Тепло, содержащееся в газе или других совокупностях молекул, также является кинетической и потенциальной энергией. Единственное отличие состоит в том, что рассматривается быстрое и хаотическое движение такого большого числа частиц, что мы даже не пытаемся проследить за ними во всех подробностях. Химическая энергия — это тоже частный случай: энергия, запасенная в химических связях, — это комбинация потенциальной и кинетической энергии частиц, составляющих молекулы. Понять это немного труднее, поскольку классическую механику заменяет квантовая, но все равно это потенциальная и кинетическая энергия частиц. То же самое относится к атомной и ядерной энергии.

Электростатическая энергия — это просто еще одно название для потенциальной энергии, связанной с силами притяжения и отталкивания между электрически заряженными частицами. Фактически, помимо гравитационной энергии, это основная форма потенциальной энергии в обычном, классическом мире. Это

Лекция 5. Энергия

и есть потенциальная энергия между заряженными частицами в атомах и молекулах.

Магнитная энергия устроена хитрее, однако сила, действующая между полюсами магнитов, — это форма потенциальной энергии. Хитрости же возникают, когда мы рассматриваем силы между магнитами и заряженными частицами. Магнитные силы, действующие на заряженные частицы, — это явление нового типа, вызываемое силами, зависящими от скорости. Далее в этой книге мы к ним еще вернемся.

Наконец, существует энергия, запасенная в электромагнитном излучении. Она может принимать форму тепла, идущего от Солнца, или энергии, содержащейся в радиоволнах, лазерном импульсе, других формах излучения. В некотором очень общем смысле это тоже комбинация кинетической и потенциальной энергии, но это энергия не частиц (во всяком случае, пока мы не доберемся до квантовой теории поля), а полей. Так что отложим пока электромагнитную энергию и вернемся к ней позже.

Лекция 6. Принцип наименьшего действия

Ленни был расстроен — не лучший поворот дела, учитывая его внушительную комплекцию, — вдобавок у него разболелась голова. «Джордж, мне не упомнить все это хозяйство! Силы, массы, уравнения Ньютона, импульс, энергия... Ты сказал, что необязательно все это заучивать, чтобы заниматься физикой. Нельзя ли обойтись одной самой важной вещью, которую надо запомнить?»

«О'кей, Ленни. Расслабься. Я сейчас все упрощу. Все, что надо запомнить, — это то, что действие всегда стационарно».

Переход к теоретической механике

Принцип наименьшего действия (а на самом деле принцип стационарности¹ действия) — это самая компактная форма выражения законов классической физики. Это простое правило, которое записывается одной строкой и охватывает сразу все: не только принципы классической механики, но и электромагнетизм, общую теорию относительности, квантовую механику, химию — все, вплоть до самых фундаментальных составляющих материи — элементарных частиц.

Мы начнем с того, что сделаем одно общее замечание об основной задаче классической механики, а именно о задаче определения траекторий (или орбит) систем по их уравнениям движения. Обычно при постановке этой задачи указываются три вещи: массы частиц, совокупность сил $F(\{x\})$ (а еще лучше формула для потенциальной энергии) и начальные условия. Система стартует с определенными значениями координат и скоростей, а затем движется под влиянием заданных сил в соответствии со вторым законом Ньютона. Если в целом имеется N координат (x_1, x_2, \dots, x_N), то начальные условия состоят в задании $2N$ положений и скоростей. Например, можно

¹ Стационарность — одно из условий экстремума функции. Поэтому иногда говорят об «экстремальности действия». — *Примеч. перев.*

задать положения $\{x\}$ и скорости $\{\dot{x}\}$ в начальный момент t_0 , а затем решить уравнения, чтобы найти, какими они станут в момент t_1 . По ходу дела мы обычно полностью определяем траекторию между t_0 и t_1 (рис. 1).

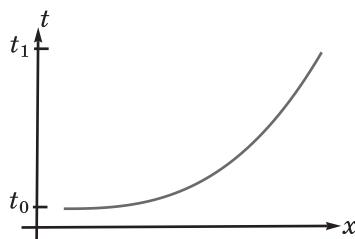


Рис. 1. Траектория от момента t_0 до момента t_1

Но эту задачу классической механики можно сформулировать и другим способом, также требующим задания $2N$ элементов информации. Вместо задания начальных положений и скоростей можно указать начальные и конечные положения. Это можно представить следующим образом. Допустим, бейсболист готовится подать мяч (из точки x_0 в момент t_0) и хочет, чтобы тот попал на вторую базу (x_1) ровно через 1,5 секунды (t_1). Как должен двигаться мяч между базами? Часть задачи в этом случае состоит в том, чтобы определить начальную скорость мяча. При такой постановке задачи скорость не входит в состав начальных данных, а является частью решения.

Чтобы прояснить этот момент, нарисуем пространственно-временную диаграмму (рис. 2). По го-

ризонтальной оси откладывается положение частицы (или мяча), а по вертикальной — время. Начало и конец траектории — это пара точек на данной пространственно-временной диаграмме, а сама траектория — кривая, соединяющая эти точки.

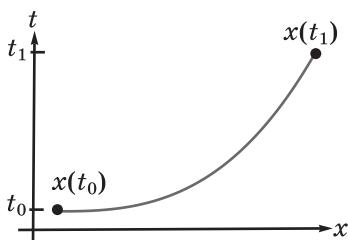


Рис. 2. Траектория мяча

Два варианта постановки задачи о движении аналогичны двум способам задания прямой в пространстве. В одном случае мы можем попросить построить прямую, идущую из заданной точки в определенном направлении. Это аналог траектории, заданной начальным положением и скоростью. Или можно попросить провести прямую, соединяющую две конкретные точки. Это уже аналог поиска траектории, начинающейся в одной точке и заканчивающейся в другой спустя заданное время. Во второй форме задача похожа на вопрос о том, как нацелить прямую из начальной точки, так, чтобы она прошла через конечную. Ответ: надо найти кратчайший путь между точками. Для задачи классической механики ответ состоит в том, чтобы найти путь со стационарным значением действия.

Действие и лагранжиан

Для формулировки принципа наименьшего действия требуется в точности те же параметры, которые используются в ньютоновских уравнениях. Необходимо знать массы частиц и потенциальную энергию. Действие для траектории — это интеграл, который берется от начала траектории в момент t_0 до ее конца в момент t_1 . Я скажу вам только, что это за интеграл, но не почему он такой, а затем мы изучим следствия его минимизации¹. В результате получатся ньютоновские уравнения. Едва только вы увидите, как это работает, потребность в каких-либо дальнейших мотивировках отпадет. Если все эквивалентно уравнениям Ньютона, какие еще нужны обоснования?

Прежде чем переходить к обобщениям, проиллюстрируем эту идею на примере одиночной частицы, движущейся вдоль прямой. Положение частицы в момент t — $x(t)$, а ее скорость — $\dot{x}(t)$. Кинетическая и потенциальная энергии равны соответственно

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2,$$

¹ Я использую термин «минимизация», потому что, насколько мне известно, не существует глагола, означающего приятие величине стационарного значения. Я пробовал слова «стационаризировать», «стационировать» и некоторые другие, но, в конце концов, сдался и пошел по пути наименьшего действия. Но помните, наименьшее действие на самом деле означает стационарное действие.

$$V = V(x).$$

Действие вдоль траектории записывается как

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Может показаться, что в формуле (1) допущена опечатка. Энергия — это сумма T и V , однако под интегралом стоит их разность. Почему разность, а не сумма? Посмотрите сами, что получится с суммой $T + V$, но ответ у вас выйдет неверный. Величина $T - V$ называется *лагранжианом* системы и обозначается буквой L . Для задания лагранжиана надо знать массу частицы (для кинетической энергии) и потенциальную энергию $V(x)$. И конечно, это не случайно те же самые вещи, которые нужны для записи уравнений движения Ньютона.

Воспринимайте лагранжиан как функцию положения x и скорости \dot{x} . Он является функцией положения, поскольку потенциальная энергия зависит от x , и функцией скорости, поскольку кинетическая энергия зависит от \dot{x} :

$$L = L(x, \dot{x}).$$

Теперь можно записать действие как интеграл лагранжиана:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt. \tag{2}$$

Принцип стационарности действия совершенно поразителен. Такое впечатление, словно частица обладает сверхъестественной способностью ощущать все возможные траектории и выбирать среди них одну, на которой действие оказывается стационарным. Остановимся недолго и посмотрим, что мы делаем и куда движемся.

Процесс минимизации действия — это обобщение минимизации функции. Действие — это не обычная функция нескольких переменных. Оно зависит от бесконечного числа переменных — от всех координат *в каждый момент времени*. Мысленно заменим непрерывную траекторию «строскопической», состоящей из миллиона точек. Каждая точка задается координатой x , но вся траектория задана, лишь когда указан весь миллион значений x . Действие — это функция всей траектории, а значит, оно является функцией миллиона переменных. Минимизация действия включает миллион уравнений.

Время в действительности не является дискретным, а траектория — это функция бесконечного непрерывного множества переменных. Если выразить это иначе, траектория задается функцией $x(t)$, а действие — это функция функции. Такая величина — функция функции, значение которой зависит от функции в целом, — называется *функционалом*. Минимизацию функционалов изучает особая ветвь математики, называемая *вариационным исчислением*.

Тем не менее, несмотря на отличия от обычных функций, условие стационарности действия очень сильно напоминает условие для стационарной точки функции. Фактически оно имеет в точности тот же вид, что и формула (4) в интерлюдии 3, а именно

$$\delta A = 0.$$

Здесь, однако, вариации — это не просто небольшие смещения по нескольким координатам, а все возможные малые вариации всей траектории.

Далее в этой лекции мы будем выводить уравнения, минимизирующие действие. Их называют уравнениями Эйлера—Лагранжа. В случае одной степени свободы имеется по одному уравнению для каждой точки вдоль траектории. Фактически эти уравнения приводят к дифференциальным уравнениям, которые говорят, как двигаться системе от одного мгновения к следующему. Так что частице не нужно сверхъестественных способностей, чтобы проверить все будущие траектории, — по крайней мере не больше, чем требуется, чтобы следовать уравнениям движения Ньютона.

Сейчас мы займемся выводом уравнения Эйлера—Лагранжа. Но в порядке одолжения я сначала продемонстрирую их форму. Если вы привыкли все проверять сами, то можете попробовать подставить сюда лагранжиан и посмотреть, удастся ли вывести ньютоновские уравнения движения. Итак, вот

уравнение Эйлера—Лагранжа для одной степени свободы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Вывод уравнения Эйлера—Лагранжа

Попробуем вывести уравнение Эйлера—Лагранжа для одной степени свободы. Начнем с замены непрерывного времени стробоскопическим. Мгновения можно обозначать целыми числами n . Интервал времени между соседними мгновениями очень мал. Обозначим его Δt . Действие — это интеграл, но, как всегда, интеграл — это предел суммы. В данном случае мы будем рассматривать сумму по интервалам между последовательными мгновениями.

Вот замены, которые делаются, когда мы аппроксимируем интеграл суммой:

$$\int L dt = \sum L \Delta t,$$

$$\dot{x} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}.$$

Первая замена — это просто обычное приближение, состоящее в замене интеграла дискретной суммой членов, каждый из которых содержит в качестве множителя малый интервал времени Δt . Вторая формула

тоже знакома. Она заменяет скорость \dot{x} разностью положений, деленной на малый интервал времени.

В последней замене есть одна тонкость. Поскольку мы собираемся рассматривать сумму по малым интервалам между соседними мгновениями, то необходимо выражение для положения на полпути между ними. Его нетрудно получить. Просто заменим $x(t)$ средним положением между двумя соседними:

$$x(t) = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}.$$

Обратите внимание, что всюду, где в лагранжиане встречается \dot{x} , я подставил $\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}$, а x заменил на $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$.

Полное значение действия находится путем сложения вкладов от всех интервалов:

$$A = \sum_n L \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) \Delta t. \quad (3)$$

Я в максимально явном виде разложил действие на составляющие, почти как если бы писал компьютерную программу для его вычисления.

Теперь допустим, что мы хотим минимизировать действие, варьируя любое одно значение x_n и приравнивая результат к нулю. Выберем из этих значений, скажем, x_8 (любое другое было бы ничем не хуже). Это может показаться очень сложным, но заметьте,

что x_8 появляется только в двух членах формулы (3). Вот эти два члена, содержащие x_8 :

$$A = L \left(\frac{x_9 - x_8}{\Delta t}, \frac{x_8 + x_9}{2} \right) \Delta t + \\ + L \left(\frac{x_8 - x_7}{\Delta t}, \frac{x_7 + x_8}{2} \right) \Delta t.$$

Нам остается лишь продифференцировать действие по x_8 . Отметим, что x_8 появляется в каждом члене двумя способами: через выражение для скорости и через выражение для x . Производная A по x_8

$$\frac{\partial A}{\partial x_8} = \frac{1}{\Delta t} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{n=9} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{n=8} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{n=8} + \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{n=9} \right).$$

Обозначение $|_{n=8}$ предписывает определить значение функции в дискретный момент $n = 8$.

Для минимизации действия в отношении вариаций x_8 мы приравняем dA/dx к нулю. Но прежде чем это сделать, давайте посмотрим, что случится с dA/dx в пределе, когда Δt стремится к нулю. Начнем с первого члена:

$$\frac{1}{\Delta t} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{n=9} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{n=8} \right).$$

Он представляет собой разность между величинами, соответствующими двум соседним моментам $n = 8$ и $n = 9$,

деленную на малый интервал между ними. Очевидно, что эта величина стремится к производной, а именно

$$\frac{1}{\Delta t} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{n=9} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{n=8} \right) \rightarrow -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.$$

Второй член

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{n=8} + \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{n=9} \right)$$

также является простым пределом. Это полусумма значений $\frac{\partial L}{\partial x}$, взятых в соседние моменты. Когда интервал между ними устремляется к нулю, мы получаем просто $\frac{\partial L}{\partial x}$.

Условие $\frac{\partial A}{\partial x_8} = 0$ переходит в уравнение Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Покажите, что уравнение (4) является просто другой формой ньютоновского уравнения движения $F = ma$.

Для случая многих степеней свободы вывод, по сути, остается таким же. Уравнение Эйлера—Лагранжа записывается для каждой координаты x_i :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

Эта производная показывает, что в способности частицы чувствовать весь путь, прежде чем начать по нему двигаться, нет никакой магии. В каждом месте траектории частица минимизирует только действие между данным и следующим моментами времени. Принцип наименьшего действия просто становится в каждый момент дифференциальным уравнением, которое определяет самое ближайшее будущее.

Много частиц и измерений

Итак, пусть у нас имеется N координат, которые мы обозначим x_i . Движение системы описывается траекторией, или *орбитой* в N -мерном пространстве. Для еще более точного описания добавим время и будем считать орбиту траекторией, лежащей в $N + 1$ измерениях. Начальная точка траектории пусть будет $x_i(t_0)$, конечная точка — $x_i(t_1)$. Орбита, лежащая в $(N + 1)$ -мерном пространстве, описывается заданием координат как функций времени $x_i(t)$. Принцип наименьшего действия для многих степеней свободы, в сущности, не отличается от случая для одной степени свободы. Лагранжиан равен разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) - V(\{x\}).$$

Действие, в точности как и раньше, есть интеграл этого лагранжиана

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L(\{x\}, \{\dot{x}\}) dt, \quad (5)$$

а принцип наименьшего (стационарного) действия состоит в том, что траектория минимизирует это действие.

Когда переменных много, траекторию можно варьировать множеством разных способов. Например, можно варьировать $x_1(t)$ или $x_2(t)$ и так далее. Это напоминает минимизацию функции многих переменных, когда составляется по уравнению для каждой переменной. То же самое происходит и с уравнениями Эйлера—Лагранжа: их будет по одному для каждой переменной x_i . Каждое из них имеет в целом ту же форму, что и уравнение (4):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}. \quad (6)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Покажите, что уравнение (6) является просто другой формой ньютоновского уравнения движения $F_i = m_i \ddot{x}_i$.

Что хорошего в наименьшем действии?

Для использования принципа наименьшего действия есть две основные причины. Прежде всего он сжимает

всю информацию о системе до предельно краткой формы. Все параметры (вроде масс и сил) и все уравнения движения упакованы в одну-единственную функцию — лагранжиан. Если он известен, то остается лишь задать начальные условия. Это действительно большой прогресс: одна функция, совокупно описывающая поведение любого числа степеней свободы. В будущих книгах мы обнаружим, что целые теории: максвелловская электродинамика, эйнштейновская теория гравитации, стандартная модель элементарных частиц — все они описываются лагранжианами.

Вторая причина использования принципа наименьшего действия — практическое преимущество лагранжевой формулировки механики. Проиллюстрируем это на примере. Допустим, нам надо записать уравнения Ньютона в неких иных координатах или в другой системе отсчета, которая движется или ускоряется.

Рассмотрим частицу, которая движется в одном измерении и с точки зрения некоего покоящегося наблюдателя удовлетворяет законам Ньютона. Физик, находящийся в покое, — назовем его Ленни — использует координату x для указания положения объекта.

Другой физик — Джордж — движется относительно Ленни без вращения и хочет знать, как описывать объект в своей собственной системе координат. Прежде всего выясним, что означает, когда мы го-

ворим о координатах Джорджа? Поскольку Джордж движется относительно Ленни, начало его системы координат движется относительно начала системы координат Ленни. Это легко описать, перейдя из системы координат x , используемой Ленни, в систему X , используемую Джорджем.

Вот как это делается. В любой момент времени t Ленни определяет положение начала координат Джорджа как $x + f(t)$, где f — некая функция, описывающая, как Джордж движется относительно Ленни. Для события (в момент t), которому Ленни припишет координату x , Джордж определит координату X , где

$$X = x - f(t).$$

Когда Ленни видит частицу, движущуюся по траектории $x(t)$, Джордж наблюдает ту же частицу движущейся по траектории $X = x(t) - f(t)$. Если Джордж не хочет все время спрашивать Ленни, как движется частица, ему надо вывести свои собственные законы движения для описания объекта в своих координатах. Простейший способ *преобразовать* уравнения движения из одной системы координат в другую состоит в использовании принципа наименьшего действия, или уравнений Эйлера—Лагранжа.

У Ленни действие вдоль траектории равно

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) dt. \quad (7)$$

Но можно также записать действие и в координатах Джорджа. Все, что нужно для этого сделать, — это выразить \dot{x} через \dot{X} :

$$\dot{x} = \dot{X} + \dot{f}.$$

Подставим это выражение в формулу (7) и получим

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m (\dot{X} + \dot{f})^2 - V(X) \right) dt.$$

Потенциальная энергия $V(X)$ означает просто ту же самую потенциальную энергию, которую использовал бы Ленни, зная положение объекта, но выраженную в координатах Джорджа, — та же точка, только с другой меткой. И вот мы уже знаем лагранжиан в системе отсчета X :

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{X} + \dot{f})^2 - V(X),$$

где можно раскрыть квадрат суммы

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + 2\dot{X}\dot{f} + \dot{f}^2) - V(X). \quad (8)$$

Что делать Джорджу с формулой (8)? Записать уравнение Эйлера—Лагранжа. Вот что он в результате получит:

$$m \ddot{X} + m \ddot{f} = -\frac{\partial V}{\partial X},$$

или, в чуть иной форме:

$$m \ddot{X} = -\frac{\partial V}{\partial X} - m \ddot{f}.$$

В этом результате нет ничего удивительного. Джордж наблюдает дополнительную «фиктивную» силу, действующую на объект и равную $-m\ddot{f}$. Что здесь интересно, так это процедура: вместо преобразования уравнений движения мы работали непосредственно с лагранжианом.

Рассмотрим еще один пример. На этот раз Джордж находится на вращающейся карусели. Ленни пользуется координатами x и y . Координаты в системе отсчета Джорджа — X и Y , и его координатные оси вращаются вместе с каруселью. Вот связь между двумя системами отсчета:

$$\begin{aligned}x &= X \cos \omega t + Y \sin \omega t, \\y &= -X \sin \omega t + Y \cos \omega t.\end{aligned}\tag{9}$$

Оба наблюдателя видят частицу, движущуюся в плоскости. Допустим, Ленни видит, что на нее не действует никаких сил. Он описывает ее движение, используя принцип наименьшего действия с лагранжианом

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).\tag{10}$$

Что нам надо теперь сделать, так это выразить действие во вращающейся системе отсчета Джорджа, а затем использовать уравнения Эйлера—Лагранжа для вывода уравнений движения. Поскольку мы уже знаем эти уравнения в системе отсчета Ленни, все что требуется — это выразить скорость в его системе отсчета через переменные Джорджа. Продифференцируем уравнения (9) по времени:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{X} \cos \omega t - \omega X \sin \omega t + \dot{Y} \sin \omega t + \omega Y \cos \omega t, \\ \dot{y} &= -\dot{X} \sin \omega t - \omega X \cos \omega t + \dot{Y} \cos \omega t - \omega Y \sin \omega t.\end{aligned}$$

После несложных алгебраических преобразований, использующих равенство $\sin^2 + \cos^2 = 1$, мы получаем для $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \omega^2(X^2 + Y^2) + 2\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X). \quad (11)$$

Остается подставить формулу (11) в выражение для лагранжиана Ленни (10) и получить лагранжиан Джорджа. Это тот же самый лагранжиан, но только выраженный через координаты Джорджа:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + m\omega(\dot{X}Y - \dot{Y}X). \quad (12)$$

Проанализируем члены этого выражения. Первый член, $\frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$, нам уже знаком — это то, что Джордж должен называть кинетической энергией. Заметьте, что если угловая скорость равна нулю, все этим членом и ограничится. Следующий член, $\frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2)$, — это нечто новое, связанное с вращением. Для Джорджа это выглядит как потенциальная энергия

$$V = -\frac{m\omega^2}{2}(X^2 + Y^2),$$

которая, как нетрудно заметить, создает направленную вовне силу, пропорциональную расстоянию от центра вращения:

$$F = m\omega^2 \vec{r}.$$

Это не что иное, как центробежная сила.

Последний член формулы (12) чуть менее знаком. Его называют *силой Кориолиса*. Чтобы понять, как все это работает, запишем уравнения Эйлера—Лагранжа:

$$m\ddot{X} = m\omega^2 X - 2m\omega \dot{Y},$$

$$m\ddot{Y} = m\omega^2 Y - 2m\omega \dot{X}.$$

Они в точности соответствуют ньютоновским уравнениям с учетом центробежной и кориолисовой сил. Отметим кое-что новое в форме выражения для силы. Компоненты силы Кориолиса

$$F_X = -2m\omega \dot{Y},$$

$$F_Y = 2m\omega \dot{X}$$

зависят не только от положения частицы, но также от ее скорости. То есть сила Кориолиса относится к классу сил, зависящих от скорости.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Примените уравнения Эйлера—Лагранжа для вывода уравнений движения из лагранжиана, заданного формулой (12).

Главный смысл этого упражнения не столько в выводе выражений для центробежной и кориолисовой сил, сколько в том, чтобы показать, как перенести

механическую задачу из одной системы отсчета в другую простым переписыванием лагранжиана в новых координатах. Этот способ намного проще попыток прямого преобразования уравнений Ньютона.

Другой пример, который мы предлагаем вам рассмотреть самостоятельно, состоит в преобразовании уравнений Джорджа в полярные координаты:

$$X = R \cos \theta,$$

$$Y = R \sin \theta.$$

УПРАЖНЕНИЕ 4

Выведите лагранжиан и уравнения Эйлера—Лагранжа для системы отсчета Джорджа в полярных координатах.

Обобщенные координаты и импульсы

В декартовых координатах нет ничего исключительного. Существует много систем координат, которые можно использовать для описания разных механических систем. Допустим, к примеру, что мы собираемся изучать движение объекта, перемещающегося по сфере, скажем по земной поверхности. В этом случае декартовы координаты не слишком удобны. Гораздо естественнее задавать координаты двумя углами —

широтой и долготой. Еще более общим примером может быть объект, катящийся по поверхности произвольного вида, подобной холмистому ландшафту. В этом случае может и не быть никакой предпочтительной системы координат. Вот почему важно представить уравнения классической механики в общем виде, чтобы они были применимы к любой системе координат.

Рассмотрим абстрактную задачу, в которой система задается обобщенным набором координат. Обычно мы используем обозначения x_i для декартовых координат. Обобщенные координаты обозначаются q_i . Они могут быть и декартовыми, и полярными, и любыми другими, какие мы только сможем придумать.

Также нам нужно задавать скорости, которые в этой абстрактной ситуации будут производными обобщенных координат q_i по времени. Начальные условия представляют собой набор обобщенных координат и скоростей (q_i, \dot{q}_i) .

В обобщенной системе координат уравнения движения могут усложняться, но принцип наименьшего действия применим всегда. Все системы классической физики — даже волны и поля — описываются лагранжианами. Иногда лагранжиан вычисляется на основе каких-то предварительных знаний. Примером может служить вычисление лагранжиана Джорджа по известному лагранжиану Ленни. Иногда вид лагранжиана задается на основании определенных теоретических

установок или принципов, а порой мы выводим его из эксперимента. Однако как бы мы его ни получили, лагранжиан аккуратно сводит все уравнения движения в один простой набор.

Почему все системы описываются принципом наименьшего действия и лагранжианами? Это нелегко объяснить, но причина очень тесно связана с квантовой природой классической физики. Она также тесно связана с сохранением энергии. Пока мы просто примем как данность, что все известные системы в классической физике можно описать посредством принципа наименьшего действия.

Лагранжиан всегда является функцией координат и скоростей: $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, а принцип наименьшего действия всегда имеет вид:

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0.$$

Это означает, что уравнения имеют вид уравнений Эйлера—Лагранжа. Итак, это самая общая форма классических уравнений движения. Имеется по одному уравнению для каждой координаты q_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (13)$$

Вот и вся классическая физика! Если вам известно, что такое q_i , и вы знаете лагранжиан, то больше вам ничего не нужно.

Давайте внимательнее присмотримся к двум сторонам уравнения (13). Начнем с выражения $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Допустим на мгновение, что q_i — это обычные декартовы координаты частицы, а L — обычная кинетическая энергия за вычетом потенциальной энергии. В этом случае лагранжиан будет содержать $\frac{m}{2} \dot{x}^2$, а $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ станет просто $m\dot{x}$, иными словами, компонентой импульса в направлении x . Поэтому мы называем $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ обобщенным импульсом, сопряженным с q_i , или просто сопряженным импульсом для q_i .

Концепция сопряженного импульса выходит далеко за рамки простого примера, в котором импульс возникает как произведение массы и скорости. В некоторых лагранжианах уловить смысл сопряженного импульса бывает нелегко, но он всегда определяется как

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Обобщенный импульс принято обозначать p_i .

При таком определении уравнения Эйлера—Лагранжа приобретают вид

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Рассмотрим пару примеров, начав с частицы в полярных координатах. В этом случае q_i — это радиус r и угол θ . Воспользовавшись результатом упражнения 4, получим лагранжиан:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2).$$

Обобщенный импульс, сопряженный с r (r -импульс), равен

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

а соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2.$$

Используя равенство $\dot{p}_r = m\ddot{r}$ и сокращая обе части на m , можно записать

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2.$$

Особенно интересно уравнение движения для угла θ . Начнем с сопряженного импульса для θ :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

Вы должны узнать данную величину. Это угловой момент¹ частицы. Угловой момент и p_θ — это в точности одно и то же.

¹ В русском языке есть по меньшей мере пять терминов для обозначения данной величины: *момент количества движения*, *момент импульса*, *кинетический момент*, *угловой момент*, *орбитальный момент*. Первый из них на сегодня устарел. Следующие два характерны для «чистой» механики. Последние два — для более широкого контекста, включающего квантовую механику и астрофизику; они также подчеркивают связь данной величины с вращательной симметрией пространства. Поскольку автор подчеркивает нацеленность изложения на подготовку к изучению квантовой теории, в переводе отдаётся предпочтение термину *угловой момент*. — Примеч. перев.

Теперь рассмотрим уравнение движения по θ . Поскольку сама величина θ не появляется в лагранжиане (появляется только ее производная), в правой части не будет ничего и мы получим

$$\frac{dp_\theta}{dt} = 0. \quad (14)$$

Иными словами, угловой момент (момент импульса) сохраняется. Уравнение (14) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \quad (15)$$

Отсюда видно, что $r^2\dot{\theta}$ является константой. Вот почему угловая скорость увеличивается, когда частица приближается к началу координат.

УПРАЖНЕНИЕ 5

Примените этот результат для предсказания движения маятника с длиной l .

Циклические координаты

Как мы только что увидели, иногда бывает, что какие-то координаты сами не появляются в лагранжиане, но в него входят их производные по времени. Такие координаты называются *циклическими* (я не знаю, почему).

Но зато мы твердо знаем, что лагранжиан не меняется, когда вы меняете значение циклической координаты. Всякий раз, когда появляется циклическая координата, сопряженный с ней импульс сохраняется. Угловой момент — это один пример. Другой пример — обычный импульс. Рассмотрим случай одиночной частицы с лагранжианом:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Ни одна из координат не присутствует в лагранжиане, так что все они являются циклическими. Еще раз отмечу, что тут нет никаких циклов — это просто такой термин. Таким образом, все компоненты импульса сохраняются. При наличии потенциальной энергии, зависящей от координат, это уже будет не так.

Возьмем другой случай: две частицы, движущиеся вдоль прямой, с потенциальной энергией, зависящей от расстояния между ними. Для простоты я буду считать, что их массы равны, хотя такой выбор не-принципиален. Обозначим положения частиц x_1 и x_2 . Лагранжиан будет иметь вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - V(x_1 - x_2). \quad (16)$$

Теперь лагранжиан зависит от обеих координат x_1 и x_2 , так что ни одна из них не является циклической.

Однако мы упустили важный момент. Выполним преобразование координат. Определим x_+ и x_- следующим образом:

$$x_+ = \frac{(x_1 + x_2)}{2},$$

$$x_- = \frac{(x_1 - x_2)}{2}.$$

Нетрудно переписать лагранжиан в новых координатах. Кинетическая энергия будет

$$T = m(\dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2).$$

УПРАЖНЕНИЕ 6

Объясните, как мы это получили.

Важный момент состоит в том, что потенциальная энергия зависит только от x_- и лагранжиан равен

$$L = m(\dot{x}_+^2 + \dot{x}_-^2) - V(x_-).$$

То есть здесь скрывалась циклическая координата, а именно x_+ . Это значит, что импульс p_+ , сопряженный координате x_+ , сохраняется. Нетрудно увидеть, что p_+ — это не что иное, как полный импульс:

$$p_+ = 2m\dot{x}_+ = m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2.$$

Однако по-настоящему важная идея, к которой мы приедем в следующей главе, касается не циклических координат, а симметрий.

Лекция 7. Симметрии и законы сохранения

Ленни запутался, изучая карту. Ему казалось, что куда ни пойдешь, направляешься на север. Почему столько трудностей с севером, югом, востоком и западом, удивлялся он, не то что с верхом и низом. Сам он почти всегда мог правильно встать и сесть.

Подготовительные вопросы

Взаимоотношения между симметриями и законами сохранения — одна из самых главных тем современной физики. Мы собираемся начать с некоторых примеров законов сохранения в простых системах. Первоначально сам факт, что некоторая величина сохраняется, кажется чем-то случайным — не тянет, во всяком случае, на глубокий принцип. Наша подлинная цель не в том, чтобы найти случайно сохраняющиеся ве-

личины, а в том, чтобы выявить набор принципов, которые связывают их с чем-то более глубоким.

Начнем мы с системы, которую рассматривали в конце лекции 6 в уравнении (16), но при этом не станем интерпретировать ее как пару частиц, движущихся вдоль прямой линии. Это может быть любая система с двумя координатами: частицы, поля, вращающиеся твердые тела — что угодно. Чтобы подчеркнуть этот обобщенный контекст, обозначим координаты буквой q вместо x и запишем лагранжиан в похожей, но не совсем идентичной форме:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - V(q_1 - q_2). \quad (1)$$

Потенциал здесь является функцией одной комбинации переменных, а именно $(q_1 - q_2)$. Будем записывать как V' производную потенциала V по координате. Уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -V'(q_1 - q_2), \\ \dot{p}_2 &= +V'(q_1 - q_2). \end{aligned} \quad (2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Выведите уравнения (2) и объясните различие в знаках.

Сложив эти два уравнения, мы увидим, что сумма $p_1 + p_2$ сохраняется.

Теперь сделаем кое-что посложнее. Пусть вместо функции от $(q_1 - q_2)$ потенциал будет описываться функцией от обобщенной линейной комбинации q_1 и q_2 . Обозначим эту комбинацию $(aq_1 - bq_2)$. Потенциал в этом случае примет вид

$$V(q_1, q_2) = V(aq_1 - bq_2). \quad (3)$$

Тогда уравнения движения запишутся как

$$\dot{p}_1 = -aV'(aq_1 - bq_2),$$

$$\dot{p}_2 = +bV'(aq_1 - bq_2).$$

Может показаться, что мы потеряли закон сохранения; сложив эти два уравнения, мы не обнаружим сохранения $p_1 + p_2$.

Но закон сохранения не исчез; он просто немного изменился. Умножив первое уравнение на b , а второе — на a и сложив их, мы увидим, что $bp_1 + ap_2$ сохраняется.

УПРАЖНЕНИЕ 2

Объясните сохранение $bp_1 + ap_2$.

Наконец, предположим, что потенциал описывается функцией из более широкого класса зависимостей от координат q , как, например, $q_1 + q_2^2$. В этом случае сохраняющейся комбинации величин p не существует. Но в чем же тогда состоит принцип?

От чего зависят существование законов сохранения и их содержание? Ответ на этот вопрос известен уже почти сто лет из работы немецкого математика Эмми Нёттер.

Примеры симметрий

Рассмотрим переход от координат q_i к новому набору переменных q'_i . Каждая величина q'_i является функцией всех исходных координат q :

$$q'_i = q'_i(q_j).$$

Есть два способа рассмотрения этой замены координат. Первый из них называется *пассивным*. Вы ничего не делаете с системой — просто переобозначаете точки пространства конфигураций.

Допустим, например, что на оси x расставлены отметки $x = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ и в точке $x = 1$ находится частица. Теперь предположим, что вам нужно выполнить преобразование координат:

$$x' = x + 1. \tag{4}$$

Согласно пассивной модели, это преобразование состоит в стирании всех меток и замене их новыми. Точка, которая раньше обозначалась $x = 0$, теперь будет называться $x' = 1$. Точка, прежде известная как $x = 1$, теперь будет $x' = 2$, и так далее. Частица при этом осталась там, где была (если она находилась

в $x = 1$, то теперь ее положение обозначено как $x' = 2$); изменились только метки.

Но есть и другой способ восприятия преобразования координат, называемый *активным*, при котором вовсе не требуется переобозначать точки. Преобразование $x' = x + 1$ рассматривается как инструкция: где бы ни находилась частица, переместить ее на единицу вправо. Иными словами, это указание реально перенести систему в новую точку пространства конфигураций.

В дальнейшем мы будем придерживаться активного способа. Всякий раз, когда я делаю преобразование координат, это означает, что система действительно переносится в новую точку пространства конфигураций. Короче, при выполнении преобразования система реально изменяется. Если, например, мы перемещаем объект, то потенциальная энергия, а значит и лагранжиан, может изменяться.

Теперь я могу объяснить, что означает симметрия. *Симметрия* — это активное преобразование координат, которое не меняет значение лагранжиана. На самом деле безразлично, где в пространстве конфигураций расположена система, если преобразование не меняет лагранжиан.

Рассмотрим простейший пример: одну степень свободы с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2.$$

Допустим, мы меняем координату q , сдвигая ее на величину δ . Иными словами, любая конфигурация заменяется другой, в которой координата q смешена (рис. 1).

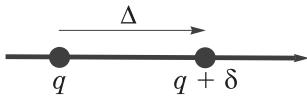


Рис. 1. Смещение координаты точки q на величину δ

Если сдвиг δ не зависит от времени (как мы будем предполагать), то скорость \dot{q} не меняется и — самое главное — не меняется и лагранжиан. Другими словами, при изменении

$$q_1 \rightarrow q + \delta \quad (5)$$

изменение лагранжиана будет $\delta L = 0$.

В уравнении (5) величина δ может быть любым числом. В дальнейшем, когда мы будем рассматривать преобразования с бесконечно малыми шагами, символ δ будет использоваться для представления бесконечно малых величин, но пока это не имеет значения.

Можно рассмотреть более сложный лагранжиан с потенциальной энергией $V(q)$. Если эта функция не является константой, не зависящей от q , лагранжиан при сдвиге q будет меняться. В этом случае симметрии нет. Симметрия, относящаяся к перемещению системы в пространстве при добавлении константы

к координатам, называется *трансляционной симметрией*, и мы еще потратим немало времени на ее обсуждение.

Теперь посмотрим на уравнение (2). Допустим, мы смещаем q_1 , но не трогаем q_2 . В этом случае лагранжиан изменяется, поскольку меняется потенциальная энергия. Но если мы сдвинем на одинаковую величину обе координаты, так что разность $q_1 - q_2$ не поменяется, то значение лагранжиана останется неизменным. Мы говорим, что лагранжиан является *инвариантом* по отношению к преобразованиям

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow q_1 + \delta, \\ q_2 &\rightarrow q_2 + \delta. \end{aligned} \tag{6}$$

Можно сказать, что лагранжиан симметричен относительно преобразований, заданных уравнениями (6). Тут мы вновь имеем дело с трансляционной симметрией, но в данном случае для сохранения симметрии необходимо смещать обе частицы так, чтобы расстояние между ними оставалось неизменным.

В более сложном случае (3), где потенциал зависит от $aq_1 - bq_2$, симметрия не столь очевидна. Вот соответствующие преобразования:

$$\begin{aligned} q_1 &\rightarrow q_1 - b\delta, \\ q_2 &\rightarrow q_2 + a\delta. \end{aligned} \tag{7}$$

УПРАЖНЕНИЕ 3

Покажите, что комбинация $aq_1 + bq_2$ и соответствующий лагранжиан инвариантны относительно преобразований (7).

Если потенциал является функцией более сложной комбинации переменных, то не всегда ясно, будет ли иметь место симметрия. Чтобы продемонстрировать более сложную симметрию, вернемся к декартовым координатам частицы, движущейся в плоскости xy . Пусть эта частица имеет потенциальную энергию, которая зависит от расстояния до начала отсчета:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x^2 + y^2). \quad (8)$$

Совершенно очевидно, что уравнение (8) обладает симметрией. Представьте себе поворот пространства конфигураций вокруг начала отсчета на угол θ (рис. 2).

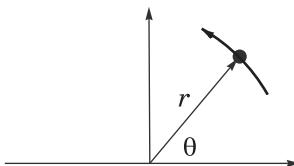


Рис. 2. Вращение на угол θ

Поскольку потенциал является функцией только расстояния от начала отсчета, он не меняется, когда система поворачивается на некоторый угол. Более

того, кинетическая энергия тоже не изменяется при вращении. Вопрос состоит в том, как выразить такое изменение. Ответ ясен — простым вращением координат:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x \cos \theta + y \sin \theta, \\y &\rightarrow -x \sin \theta + y \cos \theta,\end{aligned}\tag{9}$$

где θ — произвольный угол.

И тут мы подошли к важному моменту, касающемуся преобразований трансляции (переноса) и вращения. Выполнять их можно малыми — бесконечно малыми — шагами. Например, вместо переноса частицы из x в $x + 1$ можно переместить ее из x в $x + \delta$. Тут я уже использую δ для обозначения бесконечно малой величины. Фактически можно скомпоновать исходное перемещение $x \rightarrow x + 1$ из множества крошечных шагов размером δ . То же верно и в отношении вращения. Подобные преобразования называются *непрерывными*. Они зависят от непрерывного параметра (угла поворота), и, более того, этот параметр можно сделать бесконечно малым. Вы убедитесь, что это очень хорошее свойство, поскольку оно позволяет изучать все следствия непрерывных симметрий, сконцентрировав внимание на случае бесконечно малой величины.

Поскольку конечные преобразования можно составить из бесконечно малых, при изучении симметрий достаточно рассматривать лишь очень малые изменения координат, так называемые *бесконечно малые преобразования*. Так что давайте рассмотрим,

что произойдет с уравнениями (9), когда угол θ заменяется бесконечно малым углом δ . В первом порядке по δ получаем

$$\cos \delta = 1,$$

$$\sin \delta = \delta.$$

(Напомню, что для малых углов $\sin \delta = \delta$, а $\cos \delta = 1 - \frac{1}{2}\delta^2$, так что в первом порядке приближения изменения косинуса не происходит, а изменение синуса становится равным δ .)

Тогда вращение, выраженное уравнениями (9), упрощается до

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + y\delta, \\ y &\rightarrow y - x\delta. \end{aligned} \tag{10}$$

Также можно заметить, что меняются компоненты скорости. Просто продифференцируем уравнения (10) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\rightarrow \dot{x} + \dot{y}\delta, \\ \dot{y} &\rightarrow \dot{y} - \dot{x}\delta. \end{aligned} \tag{11}$$

Другой способ выразить результат бесконечно малого преобразования — сконцентрироваться на изменениях координат и записать:

$$\begin{aligned} \delta_v x &= y\delta, \\ \delta_v y &= -x\delta. \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь в качестве простого упражнения в анализе покажите, что лагранжиан не меняется в первом порядке по δ . Вариация обозначена δ_v .

УПРАЖНЕНИЕ 4

Покажите, что это действительно так.

Еще полезно заметить, что если потенциал не является функцией расстояния от начала отсчета, то лагранжиан не будет инвариантом относительно бесконечно малых поворотов. Это очень важное утверждение, которое следует проверить на явных примерах. Простой пример — это потенциал, зависящий только от x , но не от y .

Симметрии более общего вида

Прежде чем переходить к связи между симметриями и законами сохранения, давайте обобщим наше представление о симметрии. Пусть q_i — координаты абстрактной динамической системы. Общая идея бесконечно малого преобразования состоит в том, что это небольшой сдвиг координат, который сам может зависеть от значения координат. Этот сдвиг параметризуется бесконечно малым параметром δ и имеет вид

$$\delta_v q_i = f_i(q) \delta. \quad (13)$$

Иначе говоря, каждая координата сдвигается на величину, пропорциональную δ , но коэффициент пропорциональности зависит от того, где вы находитесь

в пространстве конфигураций. В примере (6) значения f_1 и f_2 равны 1. В примере (7) эти функции равны соответственно $f_1 = a$ и $f_2 = -b$. Но в более сложном примере вращения (12) функции f не являются константами:

$$f_x = y,$$

$$f_y = -x.$$

Если мы хотим знать изменение скоростей — например, для того чтобы вычислить изменение лагранжиана, — нам надо просто проинтегрировать уравнение (13). Несложные выкладки дают

$$\delta_v \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (\delta q_i). \quad (14)$$

Например, из (12) получаем

$$\begin{aligned} \delta_v \dot{x} &= \dot{y} \delta, \\ \delta_v \dot{y} &= -\dot{x} \delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь мы можем переформулировать понятие симметрии в применении к случаю бесконечно малых величин. Непрерывная симметрия — это бесконечно малое преобразование координат, при котором изменение лагранжиана равно нулю. При непрерывной симметрии убедиться в инвариантности лагранжиана особенно легко: все, что нужно сделать, — это проверить, равна ли нулю вариация лагранжиана в первом порядке. Если да, то имеет место симметрия.

Теперь давайте рассмотрим, какие следствия дает симметрия.

Следствия симметрии

Вычислим, насколько меняется $L(q, \dot{q})$, когда выполняется преобразование, сдвигающее q_i на величину, определяемую по формулам (13), и одновременно меняющее \dot{q}_i на величину, задаваемую уравнением (14). Все, что нужно сделать, — это вычислить приращение, вызванное изменением \dot{q}_i , и прибавить приращение, вызванное изменением q_i :

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right). \quad (16)$$

Теперь добавим немного магии. Следите внимательно. Для начала вспомним, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ — это импульс, сопряженный с q_i , который обозначается p_i . Так что первый член в уравнении (16) — $\sum_i p_i \delta \dot{q}_i$. Держите это в уме, пока мы разбираемся со вторым членом $\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i$. Для оценки членов этого типа предположим, что система движется вдоль траектории, удовлетворяющей уравнениям Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt}.$$

Объединяя эти члены, мы получаем вариацию лагранжиана

$$\delta L = \sum_i (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{p}_i \delta q_i).$$

И последний магический прием состоит в использовании правила дифференцирования произведения:

$$\frac{\partial(FG)}{\partial t} = F\dot{G} + \dot{F}G.$$

Итак, получаем результат:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \delta q_i.$$

Какое отношение все это имеет к симметрии и сохранению? Прежде всего по определению симметрия означает, что вариация лагранжиана равна нулю. Так что если уравнения (13) представляют симметрию, то $\delta L = 0$ и

$$\frac{d}{dt} \sum_i p_i \delta q_i = 0.$$

А теперь подставим сюда выражение симметричной операции (13) и получим

$$\frac{d}{dt} \sum_i p_i f_i(q) = 0. \quad (17)$$

Вот оно! Закон сохранения доказан. Уравнение (17) утверждает, что некая величина

$$Q = \sum_i p_i f_i(q) \quad (18)$$

не меняется во времени. Другими словами, она сохраняется. Доказательство одновременно абстрактное и сильное. Оно не зависит от особенностей системы, а только от общей идеи симметрии. Теперь вернемся к частным примерам и рассмотрим их в свете общей теории.

Назад к примерам

Применим уравнение (18) к рассмотренным ранее примерам. В первом примере (1) вариация координат в уравнении (6) задается функциями f_1 и f_2 , строго равными 1. Подставляя $f_1 = f_2 = 1$ в уравнение (18), получаем в точности то, что нашли раньше: $(p_1 + p_2)$ сохраняется. Но теперь можно сделать гораздо более общее утверждение: *для любой системы частиц, если лагранжиан инвариантен относительно синхронного сдвига положений всех частиц, импульс сохраняется.* Это утверждение справедливо и для каждой отдельной пространственной компоненты импульса. Если L инвариантен относительно сдвигов вдоль оси x , тогда суммарная величина x -компоненты импульса сохраняется. Отсюда мы видим, что третий закон Ньютона — действие равно противодействию — это следствие одного фундаментального свойства пространства: *ничто в законах физики не изменится, если все синхронно сдвинуть в пространстве.*

Теперь обратимся ко второму примеру, в котором вариации из уравнения (7) имеют значения $f_1 = b$, $f_2 = -a$. Вновь подставляем их в уравнение (18) и находим, что сохраняющаяся величина — $bp_1 + ap_2$.

Последний пример — вращение — интереснее. В нем появляется новый закон сохранения, с которым мы еще не встречались. Из уравнения (12) мы получаем: $f_x = y$, $f_y = -x$. На этот раз сохраняющаяся

величина включает как координаты, так и импульсы. Она называется *угловым моментом* и обозначается l . Из уравнения (18) мы получаем

$$l = yp_x + xp_y.$$

И вновь, как и в случае сдвига, мы сталкиваемся с более глубоким фактом, чем просто сохранение углового момента отдельной частицы: *для любой системы частиц, если лагранжиан инвариантен относительно одновременного поворота положений всех частиц вокруг начала отсчета, угловой момент сохраняется.*

УПРАЖНЕНИЕ 5

Выполните уравнение движения математического маятника¹ длиной l , описывающего дугу в плоскости x, y с начальным углом θ .

До сих пор наши примеры были совершенно тривиальными. Лагранжева формулировка красива, элегантна и т. д., и т. п., но действительно ли она хороша для решения трудных задач? Не лучше ли нам попросту использовать $F = ma$?

Попробуйте. Вот пример — двойной маятник. Маятник, закрепленный в начале координат, качается в плоскости xy . Стержен маятника невесом, а груз

¹ *Математический маятник* — маятник, вся масса которого сосредоточена в грузе, представляющем собой материальную точку. — Примеч. ред.

на его конце имеет массу M . Для простоты пусть стержень имеет длину 1 метр, а груз — массу 1 килограмм. Теперь возьмем еще один такой же маятник, но закрепим его на грузе первого маятника, как показано на рис. 3. Мы можем рассмотреть два случая: с гравитационным полем и без него.

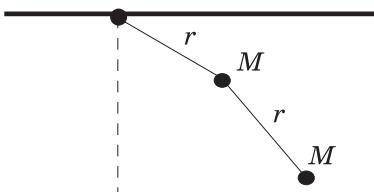


Рис. 3. Двойной маятник

Нашей целью будет не решение уравнений движения. Это мы всегда можем сделать, пусть даже просто запрограммировав компьютер и решив их численно. Цель состоит в том, чтобы найти эти уравнения. Это непростая задача, если пытаться решать ее, отталкиваясь от $F = Ma$. Среди прочего придется определять силы, передаваемые стержнями. Метод, основанный на лагранжиане, намного проще. Для этого имеется более или менее механическая процедура. Вот ее пошаговое описание:

1. Выберите систему координат, которая однозначно описывает конфигурацию всех компонентов. Можете взять любую систему на свой вкус, главное убедиться, что ее достаточно для описания конфигурации, и пусть она будет как можно более простой.

В примере с двойным маятником вам понадобятся две координаты. В качестве первой я выберу угол наклона первого маятника к вертикали. Обозначим его θ . Далее у меня есть выбор. Следует ли мне второй угол (задающий положение второго стержня) также отсчитывать от вертикали, или же мне лучше измерять его от направления первого стержня? Ответ: это не имеет значения. Один из вариантов может сделать уравнения немного проще, но оба приведут вас к нужному ответу. Я предпочту измерять угол α относительно первого стержня, а не относительно вертикали.

2. Вычислите полную кинетическую энергию. В данном случае это кинетическая энергия двух грузов.

Простейший способ сделать это — временно перейти к декартовым координатам x, y . Пусть x_1, y_1 — это положение первого груза, а x_2, y_2 — второго. Вот соотношения, связывающие углы θ, α с координатами x, y . Для первого груза

$$x_1 = \sin \theta,$$

$$y_1 = \cos \theta,$$

а для второго груза

$$x_2 = \sin \theta + \sin(\alpha + \theta),$$

$$y_2 = \cos \theta + \cos(\alpha + \theta).$$

Теперь, продифференцировав по времени, вы можете вычислить декартовые компоненты скорости, выраженные через углы, и их производные по времени.

Наконец, получим выражения для кинетической энергии $\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ каждого груза и сложим их. Это должно занять пару минут. Помните, что мы выбрали массы грузов и длины стержней равными 1.

Кинетическая энергия первого груза

$$T_1 = \frac{\dot{\theta}^2}{2},$$

а кинетическая энергия второго

$$T_2 = \frac{\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} + \dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\alpha})\cos\alpha.$$

Если нет гравитационного поля, то кинетическая энергия и будет лагранжианом:

$$L = T_1 + T_2 = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} + \dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\alpha})\cos\alpha.$$

При наличии гравитации надо вычислить гравитационную потенциальную энергию. Это нетрудно: следует добавить к лагранжиану высоту каждого груза, умноженную на mg . Вот формула для потенциальной энергии:

$$V(\theta, \alpha) = -g[2\cos\theta + \cos(\theta - \alpha)].$$

3. Выведите уравнения Эйлера—Лагранжа для каждой степени свободы.

4. На будущее выведите сопряженные импульсы для каждой координаты $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

УПРАЖНЕНИЕ 6

Выведите уравнения Эйлера—Лагранжа для θ и α .

Возможно, вы захотите пойти еще дальше. В частности, можно выявлять сохраняющиеся величины. Первой из них обычно является энергия. Полная энергия равна просто $T + V$. Но существуют и другие. Поиск симметрий не всегда оказывается такой механической процедурой; вам придется научиться распознавать определенные паттерны. В случае двойного маятника без гравитации существует еще один закон сохранения. Он вытекает из вращательной симметрии. Без гравитационного поля, если повернуть всю систему относительно начала координат, ничего не изменится. Это подразумевает сохранение углового момента, но чтобы выразить этот угловой момент, вам понадобится провести до конца описанную нами процедуру, включая получение сопряженных импульсов.

УПРАЖНЕНИЕ 7

Выведите выражение для углового момента двойного маятника и докажите, что он сохраняется в отсутствие гравитационного поля.

Лекция 8. Гамильтонова механика и симметрия относительно сдвига во времени

Док сидел в баре, пил, как обычно, пивной молочный коктейль и читал статью, когда вошли Ленни и Джордж. «О чем ты читаешь, Док?»

Док взглянул на Ленни поверх очков. «Я разбираюсь, о чем это старик Эйнштейн сказал: “Безумие — делать одно и то же и каждый раз ожидать иного результата”. Что вы об этом думаете?»

Ленни с минуту поразмышлял. «Ну, это вроде как я каждый раз, когда обедаю здесь, то заказываю острый чили, а потом у меня болит живот?»

Док усмехнулся: «Да, хорошая мысль. Я вижу, вы начинаете понимать Эйнштейна».

Симметрия относительно сдвига во времени

У вас мог возникнуть вопрос о том, что случилось с сохранением энергии и укладывается ли оно в схему, связывающую симметрии с законами сохранения? Да, укладывается, но несколько иначе, чем примеры из лекции 7. Во всех тех примерах симметрия касалась сдвигов координат q_i . Например, трансляция (перенос) — это симметрия, которая одновременно сдвигает все декартовы координаты всех частиц на одну и ту же величину. Симметрия, связанная с сохранением энергии, имеет дело со сдвигом во времени.

Представьте себе эксперимент с замкнутой системой, удаленной от любых источников возмущений. Эксперимент начинается в момент t_0 при определенных начальных условиях, продолжается заданный период времени и завершается определенным результатом. Затем эксперимент повторяется в точности так же, но в более позднее время. Начальные условия такие же, как прежде; то же касается и длительности эксперимента. Единственное отличие состоит в том, что время запуска сдвинуто вперед на момент $t_0 + \Delta t$. Можно ожидать, что результат будет в точности тем же самым и сдвиг на Δt не окажет никакого влияния. Если это так, то о системе говорят, что она инвариантна относительно *сдвига во времени*.

Инвариантность относительно сдвига во времени имеет место не всегда. Например, мы живем в расши-

ряющейся Вселенной. Влияние расширения на типичные лабораторные эксперименты обычно ничтожно, но принципиально оно существует. При определенном уровне точности эксперимент, начатый позже, даст немного иной результат, чем такой же эксперимент, начатый раньше.

А вот другой, более приземленный пример. Допустим, интересующая нас система — это заряженная частица, движущаяся в магнитном поле. Если магнитное поле постоянно, движение частицы будет инвариантно относительно сдвига во времени. Но если ток, создающий поле, медленно увеличивается, то при одних и тех же начальных условиях для частицы — но в разные моменты времени — результат будет получаться разным. Описание частицы не будет инвариантным относительно сдвига во времени.

Как симметрия относительно сдвига во времени или ее отсутствие отражается на лагранжевой формулировке механики? Ответ прост. В тех случаях, когда такая симметрия есть, лагранжиан не зависит явно от времени. Это довольно тонкий момент: значение лагранжиана может меняться во времени, но только потому, что меняются координаты и скорости. Явная зависимость означает, что *форма* лагранжиана зависит от времени. Возьмем, например, гармонический осциллятор с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 - kx^2).$$

Если m и k не зависят от времени, то лагранжиан инвариантен относительно сдвига во времени.

Но нетрудно заметить, что коэффициент упругости k может по каким-либо причинам изменяться со временем. Например, если эксперимент проводится в меняющемся магнитном поле, это может оказать небольшое влияние на атомы пружины, что, в свою очередь, приведет к изменению k . В этом случае можно записать

$$L = \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 - k(t)x^2).$$

Это я и имею в виду под явной зависимостью от времени. В обобщенном виде такая зависимость выражается как

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (1)$$

где зависимость от t относится ко всем параметрам, определяющим поведение системы и меняющимся со временем.

С учетом этого понимания мы можем теперь сформулировать сжатый математический критерий симметрии по сдвигу во времени: *система инвариантна относительно сдвига во времени, если в ее лагранжиане нет явной зависимости от времени.*

Сохранение энергии

Давайте рассмотрим, как фактическое значение лагранжиана (1) меняется в ходе эволюции системы.

Есть три источника зависимости L от времени. Первый и второй связаны с зависимостью от времени координат q и скоростей \dot{q} . Если бы этим все исчерпывалось, можно было бы записать

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

Но если лагранжиан имеет явную зависимость от времени, то появляется дополнительный член:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2)$$

Проанализируем различные члены формулы (2) с использованием уравнений движения Эйлера—Лагранжа. Члены первого типа $\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i$ можно записать в форме

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i = \dot{p}_i \dot{q}_i.$$

Члены второго типа $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$ приобретают вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = p_i \ddot{q}_i.$$

Если все это объединить, то получится

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Первые два члена можно дополнительно упростить. Воспользуемся равенством

$$\sum_i (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) = \frac{d}{dt} \sum_i (p_i \dot{q}_i)$$

и получим

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3)$$

Обратите внимание, что даже в отсутствие явной зависимости L от времени лагранжиан будет тем не менее зависеть от времени за счет первого члена $\sum_i \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i)$. Вывод состоит в том, что не существует такой вещи, как сохранение лагранжиана.

Анализ уравнения (3) позволяет выяснить кое-что интересное. Если ввести новую величину H

$$\sum_i (p_i \dot{q}_i) - L = H, \quad (4)$$

то (3) приобретает исключительно простую форму:

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{dL}{dt}. \quad (5)$$

Выкладки, приводящие к уравнению (5), могут показаться немного сложноватыми, но результат очень прост. Новая величина H меняется во времени, только если лагранжиан имеет явную зависимость от времени. Еще интереснее отметить, что *если система инвариантна относительно сдвига во времени, то величина H сохраняется*.

Величина H называется *гамильтонианом*, и, как вы могли догадаться, она важна, поскольку (среди прочих причин) это энергия системы. Но она даже более чем важна; это центральный элемент совершенно новой формулировки механики, которая называется *гамильтоновой*. Но сейчас давайте

познакомимся с ней, вернувшись к простому примеру, движению частицы в потенциальном поле. Лагранжиан равен

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(X), \quad (6)$$

а канонический импульс равен обычному импульсу

$$p = m\dot{x}. \quad (7)$$

Подставим (6) и (7) в уравнение (4), определение H

$$\begin{aligned} H &= (m\dot{x})\dot{x} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \\ &= m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x). \end{aligned}$$

Обратите внимание, что произошло: два члена, пропорциональных $m\dot{x}^2$, объединяются и дают обычную кинетическую энергию, а потенциальный член становится равным $+V(x)$. Другими словами, H просто оказывается обычной полной энергией — кинетической плюс потенциальной.

Это общая ситуация, которую можно проверить для любого числа частиц. Если лагранжиан есть кинетическая энергия минус потенциальная, то гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - T + V = \\ &= T + V. \end{aligned}$$

Существуют системы, для которых лагранжиан имеет более сложную форму, чем просто $T - V$. В некоторых

случаях невозможно четко разделить кинетическую и потенциальную энергию. Тем не менее правило конструирования гамильтониана остается неизменным. Общее определение энергии для системы:

Энергия равна гамильтониану.

Более того, если нет явной зависимости лагранжиана от времени, то энергия H сохраняется.

Если, однако, лагранжиан явно зависит от времени, тогда из уравнения (5) вытекает, что гамильтониан не сохраняется. Что случается с энергией в этом случае? Для понимания того, что происходит, рассмотрим пример. Допустим, что заряженная частица с единичным электрическим зарядом движется между обкладками конденсатора. Конденсатор создает однородное электрическое поле ϵ за счет заряда на обкладках. (Мы используем ϵ для обозначения электрического поля вместо более привычного E , чтобы не путать его с энергией.) Вам не нужно ничего знать об электричестве. Достаточно того, что конденсатор создает потенциальную энергию, равную ϵx . Лагранжиан равен

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \epsilon x.$$

Пока поле остается постоянным, энергия сохраняется. Но, допустим, конденсатор заряжается, так что значение ϵ увеличивается. Тогда лагранжиан приобретает явную зависимость от времени:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \varepsilon(t) x.$$

Теперь энергия частицы не сохраняется. В зависимости от мгновенного положения x частицы энергия меняется в соответствии с формулой

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} x.$$

Откуда появляется эта энергия? Ответ: она поступает от батареи, которая заряжает конденсатор.

Я не стану входить в детали, но суть в том, что когда мы определяем систему как состоящую только из частицы, мы сужаем рассмотрение лишь до одной части более крупной системы, которая включает конденсатор и батарею. Эти дополнительные элементы также состоят из частиц, а значит обладают энергией.

Рассмотрим всю экспериментальную установку целиком, включая батарею, конденсатор и частицу. Эксперимент начинается с незаряженного конденсатора и частицы, покоящейся где-то между обкладками. В некоторый момент мы замыкаем цепь и в конденсатор начинает поступать ток. На частицу начинает действовать зависящее от времени поле, и к концу эксперимента конденсатор заряжен, а частица движется.

Что, если мы повторим весь эксперимент часом позже? Результат, конечно, будет точно таким же. Другими словами, полная замкнутая система инвариантна относительно сдвига во времени, так что совокупная энергия всех элементов сохраняется. Если мы

рассматриваем всю их совокупность как одну систему, она окажется инвариантной относительно сдвига во времени, а полная энергия будет сохраняться.

Тем не менее нередко бывает полезно разделить систему на части и сконцентрироваться на одной из них. В этом случае энергия части системы не будет сохраняться, если другие части изменяются во времени.

Фазовое пространство и уравнения Гамильтона

Гамильтониан важен потому (в числе других причин), что он равен энергии. Но его значение гораздо глубже: он служит основой для коренной модернизации классической механики и он еще важнее для квантовой механики.

Лагранжева — основанная на действии — формулировка механики концентрируется на траектории системы в пространстве конфигураций. Эта траектория описывается координатами $q(t)$. Уравнения для нее являются дифференциальными уравнениями второго порядка, так что знать начальные координаты недостаточно; надо также знать и начальные скорости.

Гамильтонова формулировка концентрируется на фазовом пространстве. Это пространство содержит как координаты q_i , так и сопряженные импульсы p_i . Фактически q и p рассматриваются единообразно,

а движение системы описывается ее траекторией в фазовом пространстве. Математически это описание задается набором функций $q_i(t)$, $p_i(t)$. Заметьте, что число измерений у фазового пространства вдвое больше пространства конфигураций.

Что мы выигрываем от удвоения числа измерений? Ответ заключается в том, что уравнения движения становятся дифференциальными уравнениями первого порядка. Если выражаться в не столь техническом стиле, это означает, что будущее предопределено, если мы знаем только начальные положения в фазовом пространстве.

Первый шаг в рассмотрении гамильтоновой формулировки состоит в том, чтобы избавиться от \dot{q}_i и заменить их на p_i . Цель этого в том, чтобы выразить гамильтониан как функцию q_i и p_i . Для частиц в обычных декартовых координатах импульсы и скорости — это почти одно и то же, они различаются лишь множителем, который равен массе. Как обычно, хорошей иллюстрацией служит частица на прямой линии.

Начнем с двух уравнений

$$\begin{aligned} p &= m\dot{x}, \\ H &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x). \end{aligned}$$

Когда мы заменяем скорость на p/m , гамильтониан становится функцией p и x :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (8)$$

И последний момент, прежде чем мы запишем уравнения движения в гамильтоновой форме: частная производная H по x — это просто $\frac{dV}{dx}$, или сила, взятая с обратным знаком. Таким образом, уравнение движения ($F = ma$) принимает форму

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (9)$$

Ранее мы отмечали, что в гамильтоновой формулировке координаты и импульсы рассматриваются однотипно. Отсюда вы могли бы догадаться, что существует и другое уравнение, подобное (9), где p и x меняются местами. Это почти так и есть, но лишь почти. Правильное уравнение

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (10)$$

где вместо знака «минус» стоит «плюс».

Чтобы понять, почему верно уравнение (10), просто продифференцируйте выражение для H по p . Уравнение (8) дает нам

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m},$$

что согласно первому из тех же уравнений равно просто \dot{x} .

Итак, мы получили очень простой симметричный пакет уравнений. У нас теперь два уравнения вместо одного, но зато оба они первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}.\end{aligned}\tag{11}$$

Это гамильтоновы уравнения для частицы, движущейся вдоль прямой. Вскоре мы выведем их общую форму для произвольной системы, а пока я расскажу, что это такое. Начнем с гамильтониана, который является функцией всех q_i и p_i :

$$H = H(q_i, p_i).$$

Полученный результат можно использовать для обобщения уравнений (11)

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}.\end{aligned}\tag{12}$$

Отсюда мы видим, что для каждого направления в фазовом пространстве имеется по одному уравнению первого порядка.

Остановимся и рассмотрим связь этих уравнений с самой первой лекцией нашей книги, где мы описывали, как детерминистические законы физики предсказывают будущее. Уравнения (12) говорят нам:

Если в любой момент вы знаете точные значения всех координат и импульсов, а также форму гамильтониана, то уравнения Гамильтона дадут вам соответствующие значения в бесконечно близкий момент в будущем. Применяя их шаг

за шагом, вы можете построить траекторию в фазовом пространстве.

Гамильтониан гармонического осциллятора

Гармонический осциллятор — это, безусловно, самая важная простая система в физике. Он описывает все виды колебаний, в которых одна из степеней свободы возмущена и затем осциллирует вокруг положения равновесия. Чтобы понять, почему это так важно, допустим, что степень свободы q имеет потенциальную энергию $V(q)$, обладающую минимумом. Этот минимум описывает устойчивое равновесие, и когда степень свободы возмущается, она стремится вернуться к положению равновесия. Фактически без всякой потери общности мы можем поместить минимум в $q = 0$. Общего вида функция, имеющая минимум в этой точке, может быть аппроксимирована квадратичной функцией

$$V(q) = V(0) + cq^2, \quad (13)$$

где $V(0)$ и c — константы. Причина, по которой нет линейного члена, пропорционального q , в том, что производная $\frac{dV}{dq}$ должна быть равна нулю в минимуме. Мы можем также отбросить член $V(0)$, поскольку добавление константы к потенциальной энергии никак не влияет.

Форма уравнения (13) не слишком общая; V может содержать члены всех порядков, например q^3 или q^4 .

Но система отклоняется от $q = 0$ лишь на малую величину, эти члены высших порядков будут ничтожными в сравнении с квадратичным членом. Это рассуждение применимо ко всем типам систем: пружинам, маятникам, звуковым колебаниям, электромагнитным волнам и т. п.

Я запишу лагранжиан в специальной, как может показаться, форме, содержащей единственную константу, обозначаемую ω :

$$L = \frac{1}{2\omega} \dot{q}^2 - \frac{\omega}{2} q^2. \quad (14)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Начните с лагранжиана $\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}x^2$ и покажите, что если выполнить замену переменных $q = (km)^{1/4}x$, то этот лагранжиан примет такую же форму, как в уравнении (14). Какова связь между k , m и ω ?

УПРАЖНЕНИЕ 2

Отталкиваясь от уравнения (14), выразите гамильтониан в терминах p и q .

Гамильтониан, соответствующий уравнению (14), очень прост:

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2). \quad (15)$$

Именно для того чтобы получить H в столь простой форме, мы в упражнении 1 выполнили замену переменной x на q .

Одна из отличительных особенностей гамильтоновой формулировки — симметричность вхождения в нее q_i и p_i . В случае гармонического осциллятора наблюдается почти полная симметрия. Единственная асимметрия — это знак «минус» в первом из уравнений (12). Для единственной степени свободы гамильтоновы уравнения приобретают форму (11). Если подставить наш гамильтониан (15) в уравнения (12), то получится

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\omega q, \\ \dot{q}_i &= \omega p.\end{aligned}\tag{16}$$

Как эти два уравнения соотносятся с уравнениями Лагранжа, которые можно вывести из (14)? Прежде всего существует только одно лагранжево уравнение:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q.\tag{17}$$

Далее, это уравнение второго порядка, то есть в него входит вторая производная по времени. В этом его отличие от гамильтоновых уравнений, которые все имеют первый порядок. Это означает, что два уравнения первого порядка в каком-то смысле эквивалентны одному уравнению второго порядка, что можно показать, про-дифференцировав по времени второе из уравнений (16)

$$\ddot{q}_i = \omega \dot{p},$$

а затем применив первое из тех же уравнений. Оно позволит нам заменить \dot{p} на $-\omega q$ и получить уравнение движения Эйлера—Лагранжа (17).

Какая из этих формулировок лучше? Кто сказал последнее слово: Лагранж или Гамильтон? Вы можете решить это самостоятельно, но подождите немного. Нам надо освоить еще пару курсов — теорию относительности и квантовую механику, — прежде чем полностью раскроется подлинный смысл лагранжиана и гамильтониана.

Вернемся к уравнениям (16). Обычно мы «думаем» в конфигурационном пространстве. Гармонический осциллятор — это система, которая движется вперед и назад вдоль определенной оси. Но это также отличная стартовая точка, для того чтобы начать привыкать «думать» в фазовом пространстве. Фазовое пространство (для осциллятора) двумерно. Нетрудно заметить, что траектории осциллятора в фазовом пространстве являются концентрическими окружностями вокруг начала координат. Доказать это очень просто. Вернемся к выражению для гамильтониана (15). Гамильтониан, будучи энергией, сохраняется. Отсюда следует, что $q^2 + p^2$ не меняется во времени. Иными словами, расстояние от начала координат фазового пространства — это константа, и фазовая точка движется по окружности фиксированного радиуса. Фактически (16) — это уравнения для точки, движущейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг начала координат. Особенно интересен тот факт, что угловая скорость в фазовом пространстве одинакова для всех орбит независимо от энергии осциллятора. По ходу обращения фазовой точки по этой окружности

можно спроектировать ее движение на горизонтальную ось q , как показано на рис. 1.

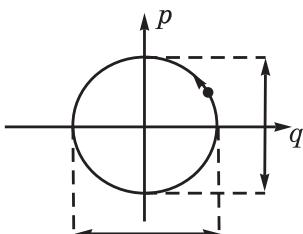


Рис. 1. Гармонический осциллятор в фазовом пространстве

Проекция испытывает колебательные движения вперед и назад, в точности как и ожидалось. Однако двумерное круговое движение в фазовом пространстве — это более полное описание движения. Рассматривая проекцию на вертикальную ось p , мы видим, что импульс тоже колеблется.

Гармонический осциллятор особенно прост. В общем случае движение системы в фазовом пространстве гораздо сложнее и менее симметрично. Универсальный факт, однако, состоит в том, что фазовая точка всегда остается на контуре постоянной энергии. В дальнейшем мы откроем более общие свойства движения в фазовом пространстве.

Производная уравнений Гамильтона

Давайте завершим дело, которое мы оставили незаконченным: дадим общий вывод уравнений Гамильтона.

тона. Лагранжиан — это некая общего вида функция координат и скоростей:

$$L = L(\{q\}, \{\dot{q}\}),$$

а гамильтониан —

$$H = \sum_i (p_i \dot{q}_i) - L.$$

Изменение гамильтониана равно

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum_i (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i) - \delta L = \\ &= \sum_i \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right). \end{aligned}$$

Теперь, если обратиться к определению p_i , а именно $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, мы видим, что первый и последний члены в точности компенсируют друг друга, и остается

$$\delta H = \sum_i \left(\dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right).$$

Сравним это выражение с общим правилом для малых изменений функции нескольких переменных:

$$\delta H(\{q\}, \{p\}) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right).$$

Сгруппировав члены, пропорциональные δq_i и δp_i , получаем

Лекция 8. Гамильтонова механика и симметрия

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i, \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.\end{aligned}\tag{18}$$

Остается один последний шаг, а именно — записать уравнения Лагранжа в форме

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (18), получаем уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i, \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\dot{p}_i.\end{aligned}\tag{19}$$

Лекция 9. Фазовая жидкость и теорема Гиббса—Лиувилля

Ленни любил смотреть на реку, особенно следить за мелкими соринками, плывущими по поверхности. Он пытался представить себе, как они будут двигаться между камнями или попадая в водовороты. Но течение реки как целого — совокупное движение большого объема воды, с разделяющимися, сходящимися и обгоняющими друг друга потоками, — это было за пределами его понимания.

Фазовая жидкость

Сконцентрироваться на конкретных начальных условиях и следить за отдельной траекторией в фазовом пространстве — это очень естественно для классической механики. Но есть и более широкий взгляд, который охватывает целое семейство траекторий. Вме-

сто того чтобы помещать кончик карандаша в некую точку фазового пространства и прослеживать оттуда единственную траекторию, попытаемся сделать нечто более амбициозное. Представим, что у нас бесконечное число карандашей, и используем их так, чтобы однородно заполнить точками фазовое пространство (под однородностью я имею в виду то, что плотность точек в пространстве q, p везде одинакова). Считайте эти точки частицами, составляющими воображаемую жидкость, заполняющую фазовое пространство.

Пусть теперь каждая точка перемещается согласно гамильтоновым уравнениям движения:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i},\end{aligned}\tag{1}$$

чтобы наша жидкость бесконечно текла по фазовому пространству.

Гармонический осциллятор — хороший начальный пример. В лекции 8 мы видели, что каждая точка движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью. (Напомню, что мы говорим о фазовом, а не о координатном пространстве. В координатном осциллятор движется взад и вперед в одном измерении.) Вся жидкость в целом совершает твердотельное движение, равномерно вращаясь вокруг начала координат фазового пространства.

Теперь вернемся к общему случаю. Если число координат равно N , то фазовое пространство и жидкость в нем $2N$ -мерные. Жидкость течет, но весьма специфическим образом. У ее потока есть особые свойства. Одно из них состоит в том, что если точка стартует с определенной энергией — то есть при заданном значении $H(q, p)$, — то она сохраняет это значение энергии. Поверхности постоянной энергии (например, с энергией равной E) определяются уравнением

$$H(q, p) = E. \quad (2)$$

Для каждого значения E у нас есть одно уравнение с $2N$ переменными фазового пространства, которое определяет поверхность размерностью $2N - 1$. Другими словами, для каждого значения E имеется своя поверхность; когда вы пробегаетесь по всем значениям E , эти поверхности заполняют все фазовое пространство. Можно рассматривать фазовое пространство с поверхностями, заданными уравнением (2), как карту изолиний (рис. 1), на которой горизонтали представляют не высоту, а значения энергии. Если точка жидкости находится на определенной поверхности, она останется на ней вечно. Это закон сохранения энергии.

Фазовое пространство гармонического осциллятора двумерно, а энергетические поверхности являются окружностями:

$$\frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) = E. \quad (3)$$

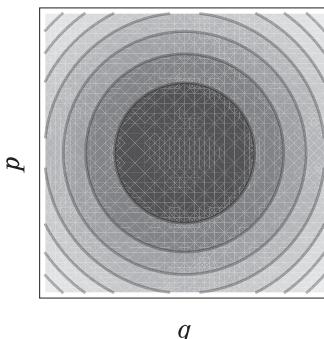


Рис. 1. Карта изолиний энергии для гармонического осциллятора в фазовом пространстве

В общем случае энергетические поверхности механической системы слишком сложны для визуализации, но принцип остается тем же самым: *энергетические поверхности заполняют фазовое пространство как слои, а поток движется так, что точки остаются на той поверхности, на которой были изначально.*

Короткое напоминание

Здесь хочется остановиться и напомнить, о чем говорилось в самой первой лекции, где обсуждались монеты, кости и простейшие представления о законах движения. Мы описывали эти законы с помощью набора стрелок, соединяющих точки, которые представляют состояния системы. Мы также объяснили, что законы бывают допустимые и недопустимые, причем допустимые — обратимы. Суть в том, что каждая точка

должна иметь ровно одну входящую стрелку и ровно одну исходящую. Если хотя бы в одной точке число входящих стрелок превосходит число исходящих (это называется *конвергенцией*), то такой закон необратим. То же самое относится и к случаю, когда исходящих стрелок больше, чем входящих (это называется *дивергенцией*). Как дивергенция, так и конвергенция стрелок нарушают обратимость и запрещены. До сих пор мы не возвращались к этой линии рассуждений. Теперь время пришло.

Поток и дивергенция

Рассмотрим некоторые простые примеры течения жидкости в обычном пространстве. Забудем на время о фазовом пространстве и просто рассмотрим обычную жидкость, движущуюся в привычном трехмерном пространстве с осями, обозначенными как x , y , z . Поток можно описать *полем скоростей*. Поле скоростей $\vec{v}(x,y,z)$ определяется заданием в каждой точке пространства вектора скорости (рис. 2).

Можно также описать поле скоростей компонентами скорости: $v_x(x,y,z)$, $v_y(x,y,z)$, $v_z(x,y,z)$. Также скорость в точке может зависеть от времени, но давайте будем считать, что этой зависимости нет. В этом случае течение называется *стационарным*.

Теперь предположим, что жидкость несжимаема. Это означает, что определенное количество жидкости всегда

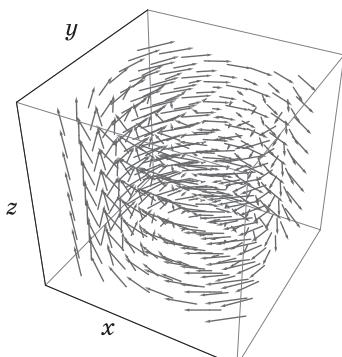


Рис. 2. Поле скоростей

занимает одинаковый объем. Это также значит, что плотность жидкости — число молекул в единице объема — везде одинакова и неизменна во времени. Кстати, термин «несжимаемость» означает также и нерастяжимость. Иными словами, жидкость не может увеличиваться в объеме. Рассмотрим небольшую кубическую ячейку, заданную условиями:

$$x_0 < x < x_0 + dx,$$

$$y_0 < y < y_0 + dy,$$

$$z_0 < z < z_0 + dz.$$

Несжимаемость подразумевает, что число точек жидкости в каждой такой ячейке постоянно. Это также означает, что суммарный поток жидкости, входящий в ячейку (в единицу времени), должен быть нулевым. (Сколько точек потока входит, столько же и выходит.) Рассмотрим число молекул, проходящих в единицу

времени через поверхность ячейки $x = x_0$. Оно будет пропорционально скорости потока на этой поверхности $v_x(x_0)$.

Если скорость v_x одинакова в x_0 и в $x_0 + dx$, то поток в ячейку через $x = x_0$ будет таким же, как поток из нее через $x = x_0 + dx$. Но если v_x меняется на протяжении ячейки, то эти два потока окажутся несбалансированными. Совокупный поток, идущий в ячейку через эти две грани, будет пропорционален

$$-\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Точно такие же рассуждения применимы к граням y_0 и $y_0 + dy$, а также z_0 и $z_0 + dz$. Если все их сложить, то суммарный поток молекул внутрь ячейки (приток минус отток) составит

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Комбинация производных в скобках носит название *дивергенции* векторного поля $\vec{v}(t)$ и обозначается

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Дивергенция отражает степень рассеяния молекул, или увеличения занимаемого ими объема. Если жидкость несжимаема, этот объем не должен меняться, а значит, дивергенция должна быть равна нулю.

Один из способов понимания несжимаемости состоит в том, чтобы представлять себе каждую молекулу или точку как занимающую объем, который не может быть изменен. Их нельзя сжать в меньший объем, они не исчезают и не появляются ниоткуда. Немного подумав, можно увидеть, как похожи несжимаемость и обратимость. В примерах, которые мы разбирали в лекции 1, стрелки тоже определяли своего рода поток. И по сути этот поток был несжимаемым, по крайней мере если он был обратим. Естественный вопрос, который отсюда вытекает: является ли поток в фазовом пространстве обратимым? Ответ — да, если система удовлетворяет уравнениям Гамильтона. И теорема, выражющая эту несжимаемость, называется теоремой Лиувилля.

Теорема Лиувилля

Вернемся к потоку жидкости в фазовом пространстве и рассмотрим компоненты скорости жидкости в каждой точке фазового пространства. Нет надобности говорить, что фазовая жидкость не является трехмерной в координатах x, y, z . Она является $2N$ -мерной жидкостью в координатах p_i, q_i . Таким образом, имеется $2N$ компонент поля скоростей — по одной для каждой координаты q и каждой координаты p . Обозначим их v_{q_i} и v_{p_i} .

Понятие дивергенции, выраженное уравнением (4), легко обобщается на любое число измерений. В трех измерениях — это сумма производных от компонент скорости по соответствующим направлениям. Точно так же она определяется для любого числа измерений. В случае фазового пространства дивергенция потока — это сумма $2N$ членов:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_i \left(\frac{\partial v_{q_i}}{\partial q_i} + \frac{\partial v_{p_i}}{\partial p_i} \right). \quad (5)$$

Если жидкость несжимаема, то это выражение должно быть равно нулю. Чтобы вычислить его, нужно знать компоненты поля скоростей — они, конечно, не что иное, как скорости частиц фазовой жидкости.

Вектор течения в данной точке идентифицируется со скоростью воображаемой частицы в этой точке. Иными словами,

$$v_{q_i} = \dot{q}_i,$$

$$v_{p_i} = \dot{p}_i.$$

Причем \dot{q}_i и \dot{p}_i — это как раз те величины, которые входят в уравнения Гамильтона (1):

$$\begin{aligned} v_{q_i} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ v_{p_i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Все, что нужно сделать, — это подставить уравнения (6) в формулу (5) и получить

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (7)$$

Вспомнив, что вторая производная вида $\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i}$ не зависит от порядка дифференцирования, мы поймем, что члены уравнения (7) попарно в точности уничтожают друг друга:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Итак, фазовая жидкость несжимаема. В классической механике несжимаемость фазовой жидкости называется теоремой Лиувилля, хотя она не имеет почти никакого отношения к французскому математику Джозефу Лиувиллю. Первым в 1903 году ее опубликовал великий американский физик Джозайя Уиллард Гиббс, и она также известна как теорема Гиббса—Лиувилля.

Мы определили несжимаемость жидкости, потребовав, чтобы общее количество жидкости, входящей в любую малую ячейку, было равно нулю. Существует другое строго эквивалентное определение. Представим себе объем жидкости в некоторый момент времени. Этот объем может иметь любую форму: сферическую, кубическую, каплеобразную — какую угодно. Теперь проследим за движением всех точек этого объема. Спустя некоторое время капля жидкости будет нахо-

диться в другом месте и иметь другую форму. Но если жидкость несжимаема, объем капли останется таким же, каким он был первоначально. Так что можно переформулировать теорему Лиувилля: *объем, занимаемый каплей фазовой жидкости, сохраняется во времени.*

Рассмотрим пример гармонического осциллятора, в котором жидкость вращается вокруг начала отсчета. Очевидно, что капля сохраняет объем, поскольку все ее движение сводится к твердотельному вращению. Форма капли остается неизменной, но это имеет место именно для гармонического осциллятора. Рассмотрим другой пример. Допустим, гамильтониан имеет вид

$$H = pq.$$

Возможно, это покажется вам непохожим на гамильтониан, хотя он совершенно корректный. Выведем уравнения движения:

$$\dot{q} = q,$$

$$\dot{p} = -p.$$

Согласно этим уравнениям, q экспоненциально возрастает со временем, а p с такой же скоростью экспоненциально убывает. Другими словами, поток прижимает жидкость к оси p , одновременно и в той же степени расширяя ее вдоль оси q . Любая капля растягивается вдоль q и сжимается вдоль p . Очевидно, что капля испытывает колоссальные деформации, но ее фазовый объем не меняется.

Теорема Лиувилля — это ближайший вообразимый аналог того типа необратимости, который мы обсуждали в лекции 1. В квантовой механике теорема Лиувилля заменяется квантовой версией, которая называется *унитарностью*. Унитарность еще больше похожа на то, что мы обсуждали в лекции 1, но это тема следующего выпуска «Теоретического минимума».

Скобка Пуассона

О чём думали французские математики девятнадцатого века, когда они изобретали эти невероятно красивые — и чрезвычайно формальные — математические способы осмысления механики? (Сам Гамильтон в порядке исключения был ирландцем.) Как они дошли до принципа наименьшего действия, уравнения Лагранжа, гамильтонианов, теоремы Лиувилля? Решали ли они физические задачи? Или они просто играли с уравнениями и смотрели, насколько симпатичными можно их сделать? Я думаю, что было и то и другое, во всем этом они достигли невероятных успехов. Но по-настоящему удивительный успех пришел только в двадцатом веке, когда была открыта квантовая механика. Такое впечатление, словно прежнее поколение математиков состояло из провидцев, которые изобрели точные аналоги позднейших квантовых концепций.

И это не все. Существует еще одна формулировка механики, которая кажется по-настоящему пророческой. Ей мы обязаны французскому математику Пуассону, чья фамилия по-французски означает «рыба». Чтобы обосновать идею скобки Пуассона, рассмотрим какую-нибудь функцию q_i и p_i . Примером может служить кинетическая энергия системы, зависящая от p , потенциальная энергия, зависящая от q , и угловой момент, зависящий от p и q . Существует, конечно, и множество других интересных величин. Не задавая конкретной функции, назовем ее просто $F(q, p)$.

О функции $F(q, p)$ можно думать двояко. Прежде всего это функция положения в фазовом пространстве. Но если мы следуем за движением любой точки по фазовому пространству, а значит, за фактической траекторией системы, то вдоль нее значение F будет меняться. Иными словами, движение системы вдоль конкретной траектории превращает F в функцию времени. Рассчитаем, как F меняется в ходе движения выбранной точки, вычислив производные F по времени:

$$\dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right).$$

Общая схема должна быть уже ясна: мы используем уравнения Гамильтона для производных q и p по времени:

$$\dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (8)$$

Я не знаю точно, чем занимался Пуассон, когда он изобрел свою скобку, но подозреваю, что он просто устал записывать правую часть уравнения (8) и решил сократить ее, введя новое обозначение. Возьмем любые две функции, заданные на фазовом пространстве, $G(q, p)$ и $F(q, p)$. Не важно, какой они имеют физический смысл и является ли одна из них гамильтонианом. Скобка Пуассона от F и G определяется как

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (9)$$

С их помощью Пуассон избавился от утомительного переписывания уравнения (8). Вместо него он смог писать

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (10)$$

Ценность уравнения (10) в том, как много смыслов оно в себе содержит. Производная по времени от чего угодно дается скобкой Пуассона от этой вещи и гамильтониана. В них даже содержатся сами уравнения Гамильтона. Чтобы убедиться в этом, допустим, что $F(q, p)$ является просто одной из координат q :

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\}.$$

Теперь если мы выведем выражение для скобки Пуассона от q_i и H , то обнаружим, что в нем имеется всего один член, а именно тот, в котором координата q_k дифференцируется сама по себе. Поскольку $\frac{\partial q_k}{\partial q_k} = 1$, то

ясно, что скобка Пуассона $\{q_k, H\}$ равна просто $\frac{\partial H}{\partial p}$, и тем самым мы восстановили первое из уравнений Гамильтона. Второе уравнение, как нетрудно заметить, эквивалентно

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\}.$$

Заметьте, что в этой формулировке два уравнения имеют одинаковый знак. Различие в знаке скрыто в определении скобки Пуассона.

Французское стремление к элегантности принесло здесь свои плоды. Скобка Пуассона превратилась в одну из самых фундаментальных операций квантовой механики — коммутатор.

Лекция 10. Скобка Пуассона, угловой момент и симметрии

Ленни спросил: «Слушай, Джордж, а мы не можем повесить рыбу на скобку Пуассона?»

Джордж улыбнулся: «Только если они обе теоретические».

Аксиоматическая формулировка механики

Давайте абстрагируемся и установим набор правил, позволяющих манипулировать со скобкой Пуассона (далее я буду пользоваться аbbревиатурой СП), не тратя сил на то, чтобы явным образом ее вычислять. Вы можете проверить (пусть это будет вашим домашним заданием), что эти правила действительно вытекают из определения СП. Пусть A , B и C — это функции координат p_i и q_i . В последней лекции я определил СП как

$$\{A, C\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right). \quad (1)$$

- Первое свойство — это *антисимметричность*. Если поменять местами две функции в СП, то она сменит знак:

$$\{A, C\} = -\{C, A\}. \quad (2)$$

В частности, это означает, что СП от функции, взятой самой с собой, дает ноль:

$$\{A, A\} = 0. \quad (3)$$

- Следующее свойство — *линейность* по каждому параметру. Линейность складывается из двух свойств.

Первое: если умножить A (но не C) на константу k , то СП умножается на ту же константу:

$$\{kA, C\} = k\{A, C\}. \quad (4)$$

Второе: если сложить $A + B$ и взять СП с C , то результат будет аддитивным:

$$\{(A + B), C\} = \{A, C\} + \{B, C\}. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) определяют линейные свойства СП.

- Далее рассмотрим, что случится, если перемножить A и B , а затем взять СП с C . Чтобы выяснить это, нам достаточно вернуться к определению СП и применить правило дифференцирования произведения:

$$\frac{\partial(AB)}{\partial q} = A \frac{\partial B}{\partial q} + B \frac{\partial A}{\partial q}.$$

То же происходит и при дифференцировании по p . Отсюда вытекает правило

$$\{(AB), C\} = B\{A, C\} + A\{B, C\}. \quad (6)$$

- Наконец, есть некоторые особые СП, которые будут нам полезны. Прежде всего заметим, что любая из координат q или p может рассматриваться как функция p_i и q_i . Поскольку любая СП включает производные как по p_i , так и q_i , то СП от любой из координат q по другой координате q равна нулю. То же верно и для СП от двух разных p :

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= 0, \\ \{p_i, p_j\} &= 0.\end{aligned} \quad (7)$$

Но СП от q и p не равна нулю. Правило состоит в том, что $\{q_i, p_j\}$ будет единицей, если $i = j$, и нулём в остальных случаях. Используя символ Кронекера, можно записать

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (8)$$

Теперь у нас есть все, что нужно для вычисления СП. Можно забыть определение и считать уравнения (2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8) набором аксиом формальной математической системы.

Пусть нам надо вычислить

$$\{q^n, p\}, \quad (9)$$

где для простоты я предполагаю, что у системы имеется лишь по одной координате q и p . Я сначала дам ответ, а потом докажу его. Итак, ответ:

$$\{q^n, p\} = nq^{(n-1)}. \quad (10)$$

Метод доказательства такого рода формул основывается на использовании *математической индукции*. Он включает два шага. Первый (*индукционный переход*) состоит в том, чтобы, предположив, что ответ верен для n (это база индукционного перехода, выраженная уравнением (10)), доказать его правильность для $n + 1$. Второй шаг состоит в явном доказательстве *базы индукции* в целом, то есть для $n = 1$.

Итак, заменим n на $n + 1$ и запишем уравнение (9) с учетом свойства (6):

$$\begin{aligned} \{q^{(n+1)}, p\} &= \{q \cdot q^n, p\} = \\ &= q \{q^n, p\} + q^n \{q, p\}. \end{aligned}$$

Далее применим свойство (8), которое в данном случае сводится к $\{q, p\} = 1$:

$$\begin{aligned} \{q^{(n+1)}, p\} &= \{q \cdot q^n, p\} = \\ &= q \{q^n, p\} + q^n. \end{aligned}$$

Теперь используем базу индукции (10) и получим

$$\begin{aligned} \{q^{(n+1)}, p\} &= \{q \cdot q^n, p\} = \\ &= q n q^{(n-1)} + q^n = \\ &= (n+1) q^n. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) — это как раз и есть база индукции, но для $n + 1$. Таким образом, нам остается только показать, что уравнение (10) выполняется для $n = 1$. Но в этом случае оно сводится просто к $\{q, p\} = 1$, что очевидно истинно.

Данный пример можно записать иначе, получив далеко идущие выводы. Заметим, что $nq^{(n-1)}$ — это не что иное, как производная q^n . Так что для данного случая

$$\{q^n, p\} = \frac{d(q^n)}{dq}. \quad (12)$$

Теперь возьмем любой полином от q (можно даже бесконечный степенной ряд). Применив (12) к каждому члену этого полинома и сгруппировав члены, можно, используя свойство линейности, доказать, что

$$\{F(q), p\} = \frac{dF(q)}{dq}. \quad (13)$$

Любая гладкая функция хорошо аппроксимируется полиномом, и это позволяет нам доказать уравнение (13) для любой функции q . На самом деле можно сделать даже больше. Для любой функции q и p нетрудно доказать, что:

$$\{F(q, p), p_i\} = \frac{\partial F(q, p)}{\partial q_i}. \quad (14)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Докажите формулу (14).

Итак, мы обнаружили новое свойство скобки Пуассона: *взятие СП от любой функции с p_i эквивалентно дифференцированию этой функции по q_i .* Это можно было бы доказать, отталкиваясь непосредственно от определения СП, но я хотел продемонстрировать, что данное свойство следует из формальных аксиом.

А что, если взять скобку Пуассона от $F(q, p)$ с q_i ? Ответ предсказуем из соображений симметрии вхождения p и q во все аксиомы. Можно даже догадаться, какой знак будет в ответе:

$$\{F(q, p), p_i\} = \frac{\partial F(q, p)}{\partial q_i}. \quad (15)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Уравнения Гамильтона можно записать в форме $\dot{q} = \{q, H\}$ и $\dot{p} = \{p, H\}$. Пусть гамильтониан имеет вид $H = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$. Используя аксиомы СП, выведите ньютоновские уравнения движения.

Угловой момент

В лекции 7 я объяснил связь между вращательной симметрией и сохранением углового момента. Чтобы освежить память, я кратко рассмотрю это на примере частицы, движущейся в плоскости x, y . Запишем формулы для бесконечно малого поворота в форме:

$$\begin{aligned}\delta x &= \varepsilon f_x = -\varepsilon y, \\ \delta y &= \varepsilon f_y = \varepsilon x.\end{aligned}\tag{16}$$

Далее, предположив, что лагранжиан инвариантен относительно поворота, выведем сохраняющуюся величину

$$Q = p_x f_x + p_y f_y,$$

поменяв знак, получим то, что называется угловым моментом L :

$$L = xp_y - yp_x.\tag{17}$$

Теперь я хочу перейти в трехмерное пространство, где угловой момент становится вектором. Уравнение (16) сохраняет силу, но приобретает новый смысл: оно становится правилом, описывающим поворот системы вокруг оси z :

$$\begin{aligned}\delta x &= \varepsilon f_x = -\varepsilon y, \\ \delta y &= \varepsilon f_y = \varepsilon x, \\ \delta z &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Уравнение (17) также не меняется, за исключением того, что его левую часть мы интерпретируем как z -компоненту углового момента. Другие две его компоненты также легко вычислить, а можно просто получить выражения для них циклической подстановкой $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ в уравнение (17):

$$L_z = xp_y - yp_x,$$

$$L_x = yp_z - zp_y,$$

$$L_y = zp_x - xp_z.$$

Как и следовало ожидать, все компоненты вектора \vec{L} сохраняются, если система обладает вращательной симметрией относительно любой оси.

Теперь рассмотрим некоторые скобки Пуассона, включающие угловой момент. Например, СП от x, y и z с L_z :

$$\begin{aligned} \{x, L_z\} &= \{x, (xp_y - yp_x)\}, \\ \{y, L_z\} &= \{y, (xp_y - yp_x)\}, \\ \{z, L_z\} &= \{z, (xp_y - yp_x)\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Можно вычислить эти СП, исходя из определения (1) или используя аксиомы.

УПРАЖНЕНИЕ 3

Вычислите СП в уравнениях (19) как исходя из определения СП, так и с помощью аксиом. *Подсказка: в каждом выражении найдите в скобках то, что имеет ненулевую СП с координатами x , y и z . Например, в первой СП x имеет ненулевую СП с p_x .*

Вот результаты:

$$\{x, L_z\} = -y,$$

$$\{y, L_z\} = x,$$

$$\{z, L_z\} = 0.$$

Если сравнить их с уравнениями (18), то обнаруживаются интересные параллели. Взяв СП от координат с L_z , мы получили (с точностью до ε) выражение для бесконечно малого поворота вокруг оси z . Иными словами,

$$\{x, L_z\} \sim \delta x,$$

$$\{y, L_z\} \sim \delta y,$$

$$\{z, L_z\} \sim z,$$

где символ \sim означает «с точностью до множителя ε ».

Тот факт, что взятие в СП с сохраняющейся величиной дает преобразование координат, соответствующее симметрии, связанной с данным законом

сохранения, — не случайность. Это очень глубокое общее свойство, позволяющее по-новому взглянуть на взаимосвязь между симметрией и сохранением. Прежде чем углубиться в изучение этой взаимосвязи, исследуем другие СП, включающие угловой момент. Для начала нетрудно обобщить результат на другие компоненты L . И вновь можно использовать циклическую подстановку: $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$. Получится еще шесть уравнений, и естественно спросить: нет ли удобного способа свести их воедино? Такой способ есть.

Математическая интерлюдия. Символ Леви-Чивиты

Одно хорошее обозначение стоит множества символов, особенно если оно появляется снова и снова. Пример тому дельта-символ Кронекера δ_{ij} . В этом разделе я введу еще одно обозначение — *символ Леви-Чивиты*, который также называют ϵ -символом ϵ_{ijk} . Как и в случае символа Кронекера, символы i, j, k соответствуют трем направлениям пространства, а именно x, y, z , или 1, 2, 3. Символ Кронекера принимает два значения — 1 или 0 — соответственно в случаях $i = j$ и $i \neq j$, а ϵ -символ принимает одно из трех значений — 0, 1 или -1 . Правило для ϵ_{ijk} немного сложнее, чем для δ_{ij} .

Прежде всего $\epsilon_{ijk} = 0$, если любые два индекса совпадают. Например, ϵ_{111} и ϵ_{223} равны нулю. Отличен от нуля символ ϵ_{ijk} только в том случае, когда все три

индекса различны. Имеется шесть таких возможностей: ε_{123} , ε_{231} , ε_{312} , ε_{213} , ε_{132} , ε_{321} . Первые три из них имеют значение 1, а вторые три — -1.

Чем различаются эти два случая? Вот один из способов это описать. Расположим три числа 1, 2, 3 на окружности, как на трехчасовом циферблате (рис. 1).

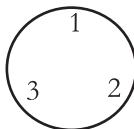


Рис. 1. Круговое расположение чисел 1, 2 и 3

Начнем с любого из этих трех чисел и пойдем по часовой стрелке. Мы получим (123), (231) или (312) в зависимости от точки старта. Если осуществить такой же обход против часовой стрелки, получится (132), (213) или (321). Правило для символа Леви-Чивиты состоит в том, что $\varepsilon_{ijk} = 1$ для последовательностей, получающихся при обходе по часовой стрелке, и $\varepsilon_{ijk} = -1$ — для получающихся в противоположном направлении.

Возвращаемся к угловому моменту

Теперь с помощью ε -символа можно записать СП для всех координат и всех компонент \vec{L} в виде

$$\{x_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} x_k. \quad (20)$$

Допустим, например, что надо узнать $\{y, L_x\}$. Соотнеся 1, 2, 3 с x, y, z и подставив в уравнение (20), получим

$$\{x_2, L_1\} = \varepsilon_{213} x_3.$$

Поскольку 213 — последовательность, идущая против часовой стрелки, $\varepsilon_{213} = -1$, так что

$$\{x_2, L_1\} = -x_3.$$

Рассмотрим другой набор СП, а именно от p_i с компонентами \vec{L} . Их нетрудно вывести и выразить с использованием ε -символа

$$\{p_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k.$$

Например,

$$\{p_x, L_z\} = -p_y.$$

Стоит отметить, что СП от компонент p и L имеет в точности тот же вид, что и от компонент x и L . Это интересно, поскольку компоненты p и x одинаково преобразуются при вращении системы координат. Точно так же как $\delta x \sim -y$ при вращении вокруг оси z , вариация p_x пропорциональна $-p_y$.

В этом заключен очень глубокий смысл. Утверждается, что для вычисления изменения любой величины при вращении системы координат надо найти скобку Пуассона от этой величины с угловым моментом. Для поворота вокруг i -й оси

$$\delta F = \{F, L_i\}. \quad (21)$$

Угловой момент является генератором вращения.

Мы еще вернемся к этой теме и глубокой связи между преобразованиями симметрии, скобками Пуассона и сохраняющимися величинами, но сначала я хочу объяснить, как СП помогает формулировать и решать задачи.

Волчки и прецессия

Мы пока еще не пробовали вычислять СП между разными компонентами углового момента. СП любой величины самой с собой всегда дает ноль, но СП от одной компоненты \vec{L} с другой отлична от нуля. Рассмотрим

$$\{L_x, L_y\} = \{(yp_z - zp_y), (zp_x - xp_z)\}.$$

Опираясь на определение СП или используя аксиомы, получаем

$$\{L_x, L_y\} = L_z.$$

Попробуйте это сделать.

Общее соотношение можно получить циклической подстановкой x, y, z . Вот так оно записывается с использованием символа Леви-Чивиты:

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k. \quad (22)$$

Замечательно, конечно, но что с этим делать? Для демонстрации моци таких соотношений, как (22), рассмотрим небольшой быстро врачающийся шарик в пустом пространстве. Назовем его *волчком*.

В любой момент у него существует ось вращения и угловой момент направлен вдоль этой оси. Если наш волчок защищен от любых воздействий, то его угловой момент будет сохраняться, а ось вращения не будет меняться.

Теперь предположим, что волчок несет некоторый электрический заряд. Поскольку волчок быстро вращается, он ведет себя как электромагнит с северным и южным полюсами, расположенными на оси вращения. Индукция диполя пропорциональна скорости вращения, или, лучше сказать, угловому моменту. Это ничего не меняет, пока мы не поместим всю систему в магнитное поле \vec{B} . В этом случае появится определенная энергия, связанная с любым отклонением \vec{L} от \vec{B} (рис. 2).

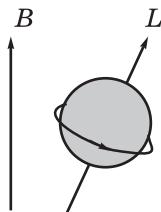


Рис. 2. Волчок, наклоненный по отношению к магнитному полю

Эта энергия пропорциональна косинусу угла между двумя векторами и произведению их абсолютных величин. Другими словами, энергия пропорциональна скалярному произведению

$$H \sim \vec{B} \cdot \vec{L}. \quad (23)$$

Я обозначил эту энергию H , поскольку в дальнейшем мы идентифицируем ее с гамильтонианом системы.

Давайте направим магнитное поле вдоль оси z , чтобы энергия H была пропорциональна z -компоненте \vec{L} . Сводя магнитное поле, электрический заряд, радиус сферы и прочие неупомянутые постоянные в одну константу ω , получим выражение для интересующей нас энергии:

$$H = \omega L_z. \quad (24)$$

Приостановимся и осмотримся: что мы делаем и куда движемся? Очевидно, что без магнитного поля система вращательно симметрична, то есть энергия не меняется при повороте оси волчка. Но в магнитном поле есть относительно чего поворачиваться. Поэтому вращательная симметрия разрушается. Уравнения (23) и (24) отражают вращательную асимметрию. Но к чему она приводит? Ответ очевиден: угловой момент больше не сохраняется: нет симметрии — нет сохранения. Это значит, что направление вращения будет меняться со временем. Но как именно?

Можно попробовать догадаться. Волчок — это магнит, вроде стрелки компаса, и интуиция подсказывает, что угловой момент будет поворачиваться в направлении к \vec{B} подобно маятнику. Но это ошибка, если вращение достаточно быстрое. На самом деле угловой момент прецессирует вокруг вектора магнитного поля в точности, как гироскоп вокруг вектора гравитационного поля. Чтобы убедиться в этом, применим ме-

ханику, сформулированную через скобки Пуассона, для вывода уравнения движения вектора \vec{L} .

Первым делом вспомним, что производная по времени любой величины — это СП от этой величины с гамильтонианом. Применение этого правила к компонентам \vec{L} дает

$$\dot{L}_z = \{L_z, H\},$$

$$\dot{L}_x = \{L_x, H\},$$

$$\dot{L}_y = \{L_y, H\},$$

или, с учетом (24),

$$\dot{L}_z = \omega \{L_z, L_z\},$$

$$\dot{L}_x = \omega \{L_x, L_z\},$$

$$\dot{L}_y = \omega \{L_y, L_z\}.$$

Теперь смысл проясняется. Даже если мы ничего не знаем о материале волчка, о распределении по нему заряда и о том, сколько частиц вовлечено в движение, мы все равно можем решить задачу, поскольку знаем СП между всеми компонентами \vec{L} . Начнем с уравнения для \dot{L}_z . Поскольку в нем берется СП от компоненты L_z с самой собой, то

$$\dot{L}_z = 0.$$

Значит, z -компоненты \vec{L} не меняется. Это сразу находит на мысль о том, что \vec{L} вращается вокруг \vec{B} подобно круговому маятнику.

Следующим шагом используем уравнения (22) для вычисления \dot{L}_x и \dot{L}_y :

$$\dot{L}_x = -\omega L_y,$$

$$\dot{L}_y = \omega L_x.$$

Это не что иное, как уравнение вектора в плоскости xy , равномерно вращающегося вокруг начала координат с круговой частотой ω . Иначе говоря, \vec{L} прецессирует вокруг вектора магнитного поля. Магия скобок Пуассона позволила нам решить задачу, не зная почти ничего, кроме того, что гамильтониан пропорционален $\vec{B} \cdot \vec{L}$.

Симметрия и сохранение

Вернемся к уравнению (21), смысл которого в том, что вариация любой величины под действием вращения пропорциональна СП от этой величины с L_i . Более того, L_i оказывается величиной, которая сохраняется в силу инвариантности относительно вращения. Это интересная связь, и было бы любопытно узнать, насколько общий характер она имеет. Позвольте мне привести пару других примеров на эту тему. Рассмотрим частицу на прямой. Если имеет место трансляционная симметрия, импульс p будет сохраняться. Возьмем теперь СП от любой функции x с p :

$$\{F(x), p\} = \frac{dF}{dx}.$$

Чему равно изменение $F(x)$ при бесконечно малом перемещении на величину ε ?

$$\delta F = \varepsilon \frac{dF}{dx},$$

или

$$\delta F = \varepsilon \{F(x), p\}.$$

А вот еще пример. Если система обладает симметрией относительно переноса во времени, то ее гамильтониан сохраняется. Чем является малое изменение некой величины при сдвиге во времени? Вы уже догадались — СП от этой величины с H .

Посмотрим, можем ли мы обобщить эту взаимосвязь. Пусть $G(q, p)$ — любая функция координат и импульсов системы. Я использую букву G , поскольку собираюсь называть эту функцию *генератором*. А генерирует она малые сдвиги точек фазового пространства. По определению мы смещаем каждую точку в фазовом пространстве на величину $\delta q_i, \delta p_i$, где

$$\begin{aligned}\delta q_i &= \{q_i, G\}, \\ \delta p_i &= \{p_i, G\}.\end{aligned}\tag{25}$$

Уравнение (25) генерирует бесконечно малое преобразование фазового пространства. Это преобразование, генерируемое функцией G , может быть или не быть симметрией системы. Что в точности означает утверждение о том, что это — симметрия? Это означает, что независимо от того, с чего начать, преобразование не

меняет энергию. Иными словами, если под действием преобразования, генерируемого G , $\delta H = 0$, тогда это преобразование является симметрией. Таким образом, можно записать условие симметрии:

$$\{H, G\} = 0. \quad (26)$$

Но уравнение (26) можно трактовать и иначе. Поскольку обмен местами двух функций в СП меняет только знак, (26) можно представить в виде

$$\{G, H\} = 0, \quad (27)$$

что является утверждением о том, что G сохраняется. Можно выразиться иначе: скобка Пуассона, которая говорит нам, как меняется H под влиянием преобразования, генерируемого G , также говорит нам, как G меняется во времени.

Лекция 11. Электрические и магнитные силы

Он носил магнит в кармане пальто. Его не переставала завораживать способность магнита притягивать гвозди и другие металлические предметы, а также закручивать стрелку компаса, заставляя ее метаться по всем сторонам света. Что за магия скрыта внутри этого подковообразного куска железа? Чем бы она ни была, Ленни не переставал забавляться со своей любимой игрушкой.

Чего он не знал, так это того, что вся Земля — это тоже магнит. И того, что земной магнетизм служит той чудесной силой, которая защищает его самого от смертоносной солнечной радиации, отклоняя траектории заряженных частиц в безопасном направлении. Пока эти вещи были за пределами воображения Ленни.

«Расскажи мне о магнитах, Джордж».

Векторные поля

Поле — это не что иное, как функция пространства и времени, обычно представляющая некую физическую величину, которая может меняться от точки к точке и от мгновения к мгновению. Пара примеров из метеорологии — локальная температура и давление воздуха. Поскольку температура может меняться, ее разумно рассматривать как функцию пространства и времени $T(x, y, z, t)$, или, проще, $T(x, t)$. Температура и давление воздуха — явно не векторные поля. Они не чувствительны к направлению и не имеют компонент по разным направлениям. Абсурдно спрашивать об y -компоненте температуры. Поле, состоящее только из одного числа в каждой точке пространства, называется *скалярным полем*. Поле температур — скалярное.

Есть, однако, векторные поля, такие, например, как локальная скорость ветра. У ветра есть и сила, и направление, и компоненты. Можно записать это поле как $\vec{v}(x, t)$ или разложить по компонентам: $v_i(x, t)$. Другими примерами векторных полей являются электрическое и магнитное поля, создаваемые электрическими зарядами и токами.

Поскольку такие поля меняются в пространстве, можно конструировать новые поля, дифференцируя исходные. Например, три частных производных температуры — $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$ — можно рассматривать как компоненты векторного поля, называемого *gra-*

диен том температуры. Если температура возрастает с севера на юг, то градиент будет направлен к югу. Давайте потратим немного времени на знакомство с приемами, используемыми для создания новых полей из старых посредством дифференцирования.

Математическая интерлюдия: набла

Введем фиктивный вектор, обозначаемый $\vec{\nabla}$. Он называется набла и обозначается перевернутой буквой дельта (Δ). Компоненты $\vec{\nabla}$ — не числа, а символы частных производных:

$$\begin{aligned}\nabla_x &\equiv \frac{\partial}{\partial x}, \\ \nabla_y &\equiv \frac{\partial}{\partial y}, \\ \nabla_z &\equiv \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1}$$

На первый взгляд формулы (1) кажутся абсурдными. Компоненты вектора должны быть числами, а не символами производных. Да и вообще, символы производных сами по себе лишены смысла — от чего они производные? Хитрость в том, что ∇ никогда не встречается в одиночестве. Так же как и символ производной $\frac{d}{dx}$, он должен на что-то действовать, должна быть какая-то функция, подлежащая дифференцированию. Например, ∇ может действовать на скалярное поле вроде температуры. Компоненты ∇T будут иметь вид

$$\nabla_x T \equiv \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\nabla_y T \equiv \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\nabla_z T \equiv \frac{\partial T}{\partial z}.$$

и это действительно компоненты полноценного векторного поля — градиента температуры. Подобным образом можно получить градиент любого скалярного поля.

Теперь давайте определим *дивергенцию* векторного поля. Это делается по аналогии со скалярным произведением двух векторов $\vec{V} \cdot \vec{A} = V_x A_x + V_y A_y + V_z A_z$, которое, к слову сказать, является скаляром. Дивергенция вектора — тоже скаляр. Возьмем векторное поле $\vec{A}(x)$. Дивергенция \vec{A} — это скалярное произведение $\vec{\nabla}$ и \vec{A} , иначе говоря, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Смысл этого обозначения легко понять по аналогии с обычным скалярным произведением:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2)$$

Рассмотрим векторное произведение двух векторов \vec{V} и \vec{A} , которое дает новый вектор. Компоненты векторного произведения:

$$(\vec{V} \times \vec{A})_x = V_y A_z - V_z A_y,$$

$$(\vec{V} \times \vec{A})_y = V_z A_x - V_x A_z,$$

$$(\vec{V} \times \vec{A})_z = V_x A_y - V_y A_x.$$

А вот более экономный способ записать его с использованием символа Леви-Чивиты:

$$\left(\vec{V} \times \vec{A}\right)_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} V_j A_k. \quad (3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1

Проверьте формулу (3), а также докажите, что
 $V_i A_j - V_j A_i = \sum_k \varepsilon_{ijk} \left(\vec{V} \times \vec{A}\right)_k.$

Подставим теперь в формулу (3) фиктивный вектор \vec{V} вместо \vec{V} :

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}.$$

Или, в явном виде:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Таким образом, начав с векторного поля $\vec{A}(x)$, мы построили новое векторное поле $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ путем дифференцирования A неким особым образом. Это векторное поле называют *ротором* \vec{A} .

Следующая теорема доказывается буквально за несколько секунд. Для любого векторного поля $\vec{A}(x)$ ротор A не имеет дивергенции:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = 0.$$

У этой теоремы есть на самом деле и более сильная формулировка, доказать которую труднее. Поле имеет нулевую дивергенцию тогда и только тогда, когда оно является ротором другого поля.

А вот еще одна теорема, которая легко доказывается. Пусть векторное поле определено как градиент скалярного поля:

$$\vec{E}(x) = \vec{\nabla}V(x),$$

где V — скалярное поле. Отсюда следует, что ротор \vec{E} равен нулю:

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla}V(x)] = 0. \quad (4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2

Докажите формулу (4).

Магнитные поля

Магнитные поля (обозначаемые $\vec{B}(x)$) — это векторные поля. Но не любое векторное поле может служить представлением магнитного. Все магнитные поля имеют одну характерную особенность: их дивергенция равна нулю. Отсюда следует, что любое магнитное поле можно представить как ротор некоторого вспомогательного поля:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (5)$$

где \vec{A} называется *векторным потенциалом*. В по-
компонентной записи:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{6}$$

Векторный потенциал — это довольно странное поле. В известном смысле оно не обладает той же реальностью, как магнитное и электрическое поля. Оно просто по определению таково, что его ротор — это магнитное поле. Магнитное и электрическое поля — это нечто такое, что можно измерить локально. Другими словами, если надо узнать, присутствует ли электрическое/магнитное поле в небольшой области пространства, то это можно выяснить, проведя эксперимент в этой же области. Эксперимент обычно состоит в проверке, имеются ли в данной области силы, действующие на заряженные частицы. Однако векторный потенциал невозможно определить локально. Прежде всего он не определяется единственным образом по магнитному полю, которое описывает. Допустим, \vec{B} задано векторным потенциалом, как выражено в уравнении (5). Можно добавить к \vec{A} некий градиент и получить новый векторный потенциал, не вызывав изменения \vec{B} . Причина этого в том, что ротор градиента всегда равен

нулю. Таким образом, если два векторных потенциала связаны соотношением

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla s,$$

где s — некое скалярное поле, то они порождают одинаковые магнитные поля и их невозможно различить в эксперименте.

Мы не первый раз сталкиваемся с неоднозначностью, возникающей, когда одна вещь определяется производной от другой. Вспомните, что сила в системе — это градиент потенциальной энергии, взятый с обратным знаком:

$$\vec{F}(x) = -\nabla U(x).$$

Потенциальная энергия не определена однозначно: к ней всегда можно добавить константу, не приводя к изменениям силы. Это значит, что никогда нельзя непосредственно измерить потенциал — только его производную. Сходная ситуация имеет место с векторным потенциалом; на самом деле именно поэтому он и назван потенциалом.

Рассмотрим пример магнитного поля и связанного с ним векторного потенциала. Простейший случай — это однородное магнитное поле, направленное, допустим, вдоль оси z :

$$\begin{aligned} B_x &= 0, \\ B_y &= 0, \\ B_z &= b, \end{aligned} \tag{7}$$

где b — число, выражающее напряженность поля. Теперь зададим векторный потенциал:

$$\begin{aligned} A_x &= 0, \\ A_y &= bx, \\ A_z &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

При вычислении ротора \vec{A} останется только один не-нулевой член, а именно $\frac{\partial A_y}{\partial x} = b$. Так что единственная компонента магнитного поля — это z -компоненты, и ее значение равно b .

В формулах (8) есть кое-что забавное. Однородное магнитное поле выглядит совершенно симметричным относительно вращения в плоскости x, y . Однако векторный потенциал имеет только y -компоненту. Можно, однако, использовать другой векторный потенциал, \vec{A}' , имеющий лишь x -компоненту, но порождающий тоже самое магнитное поле:

$$\begin{aligned} A'_x &= -by, \\ A'_y &= 0, \\ A'_z &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

УПРАЖНЕНИЕ 3

Покажите, что векторные потенциалы, заданные формулами (8) и (9), дают одно и то же однородное магнитное поле. Это означает, что разность между ними является градиентом. Найдите скалярное поле, градиент которого при добавлении к формулам (8) дает (9).

Операция перехода от одного векторного потенциала к другому, описывающему то же самое магнитное поле, называется *калибровочным преобразованием*. Почему «калибровочным»? Это историческое недоразумение. В какой-то момент ошибочно считалось, что оно отражает неопределенность калибровки длин в разных точках пространства. Зачем вообще заморачиваться с этим векторным потенциалом, если он неоднозначен, а магнитное поле четко определено? Ответ состоит в том, что без него невозможно выразить принцип стационарности действия, то есть дать лагранжеву, гамильтонову и пуассонову формулировки механики для частиц в магнитных полях. Это странная ситуация: физические явления калибровочно-инвариантны, но формализм требует выбрать калибровку (то есть конкретный вид векторного потенциала).

Сила, действующая на заряженную частицу

Электрически заряженные частицы подвержены действию электрического и магнитного полей \vec{E} и \vec{B} . Сила, связанная с электрическим полем, проста и относится к тому классу, который мы уже изучали на прошлых лекциях; а именно она описывается градиентом потенциальной энергии. Если использовать понятие электрического поля, то

$$\vec{F} = e\vec{E},$$

где e — заряд частицы. Один из законов электромагнетизма состоит в том, что статическое (независящее от времени) электрическое поле не имеет ротора и должно быть градиентным. Обычно это записывают как

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

так что силу можно представить в виде:

$$\vec{F} = -e\vec{\nabla}V.$$

Потенциальная энергия равна $e\bar{V}V$, и все выглядит совершенно обыденно.

Магнитные силы, действующие на заряженную частицу, иные и несколько более сложные. Они зависят не только от величины магнитного поля и положения частицы, но также и от ее скорости. Их так и называют: *силы, зависящие от скорости*. Формула для магнитной силы, действующей на заряженную частицу, впервые была записана великим голландским физиком Х. А. Лоренцем и называется *силой Лоренца*. В ее формулу входят вектор скорости частицы и скорость света c :

$$\vec{F} = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \quad (10)$$

Обратите внимание, что сила Лоренца перпендикулярна как скорости, так и магнитному полю. Объединяя формулу (10) с законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, находим уравнение движения частицы в магнитном поле:

$$m\vec{a} = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \quad (11)$$

Сила Лоренца — не первая обнаруженная сила, зависящая от скорости. Вспомним, что во вращающейся системе отсчета есть две так называемые фиктивные силы — центробежная сила (основная) и сила Кориолиса. Последняя определяется формулой

$$\vec{F} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}, \quad (12)$$

где $\vec{\omega}$ — вектор, представляющий угловую скорость вращающейся системы отсчета. Силы Кориолиса и Лоренца очень похожи, причем магнитное поле и угловая скорость играют в них одну и ту же роль. Конечно, не все магнитные поля однородны, поэтому ситуация с магнитным полем сложнее, чем в случае кориолисовой силы.

Лагранжиан

Все это поднимает вопрос о том, как выразить магнитные силы посредством действия в лагранжевой формулировке механики. Один из источников путаницы заключается в том, что для обозначения действия и векторного потенциала служит одна и та же буква A . В дальнейшем мы будем использовать A для действия \vec{A} или A_i для векторного потенциала. Пренебрегаем или приравняем к нулю электрическое поле и сконцентрируемся на магнитном, или силе Лоренца. Начнем с действия для свободной частицы, на которую не влияют никакие силы:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}) dt,$$

где

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_i)^2.$$

Здесь i относится к направлениям в пространстве, а знак суммирования по x, y, z подразумевается, но для краткости опущен. Привыкайте к этому.

Что можно добавить к действию или к лагранжиану, чтобы появилась сила Лоренца? Ответ не так очевиден. Тем не менее мы знаем, что каким бы ни был дополнительный ингредиент, он будет пропорционален электрическому заряду и должен в той или иной форме включать магнитное поле.

Попытки просто поэкспериментировать быстро разочаровывают. Нет ничего такого, что напрямую включало бы \vec{B} и давало силу Лоренца. Ключ к проблеме — векторный потенциал. Простейшая вещь, которую можно сделать с векторным потенциалом, — это скалярно перемножить его с вектором скорости. Напомню, что лагранжиан включает только положения и скорости. Можно также попробовать скалярное произведение вектора положения с \vec{A} , но это ни к чему хорошему не приведет. Так что давайте попробуем добавить в лагранжиан член

$$\frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(x) = \frac{e}{c} \sum_i [\dot{x}_i A_i(x)]. \quad (13)$$

Основанием для включения скорости света служит то, что она появляется вместе с зарядом в выражении для силы Лоренца. Итак, мы пробуем действие

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\frac{m}{2} (\dot{x}_i)^2 + \frac{e}{c} \dot{x}_i \cdot A_i(x) \right] dt. \quad (14)$$

Тут вы можете возразить, что в уравнении движения должно быть магнитное поле, а вовсе не векторный потенциал. Мы знаем, что векторный потенциал не определен однозначно, а раз так, то не получим ли мы другой ответ, выполнив калибровочное преобразование $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}s$? Давайте посмотрим, что случится с действием, если мы его применим.

Важная для нас часть действия — это член, появившийся из уравнения (13):

$$A_L = \frac{e}{c} \int_{t_0}^{t_1} \sum_i [\dot{x}_i A_i(x)] dt,$$

или, в более явном виде,

$$A_L = \frac{e}{c} \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[A_i(x) \frac{dx_i}{dt} \right] dt.$$

В этом уравнении A_L — часть действия, добавленная в попытке учесть силу Лоренца (отсюда индекс L). Допустим, что мы меняем \vec{A} , добавляя к нему $\vec{\nabla}s$. Очевидно, что это вызовет добавление к A_L члена

$$\frac{e}{c} \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right] dt.$$

Но если приглядеться внимательно, то все сводится к очень простому выражению; dt в числителе и знаменателе сокращаются:

$$\frac{e}{c} \sum_i \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial s}{\partial x_i} dx_i \right).$$

И тогда вся эта штука равна просто разности между значениями s в начале и в конце траектории. Другими словами, калибровочное преобразование добавляет к действию член $s_1 - s_0$, где s_0 и s_1 — значения s в начальной и конечной точках траектории соответственно. Иначе говоря, изменение действия в результате калибровочного преобразования составляет

$$s_1 - s_0. \quad (15)$$

Приводит ли такое изменение к каким-либо отличиям в уравнениях движения? Вспомним, о чем в точности говорит принцип наименьшего действия. Если в пространстве и времени заданы две точки x_0, t_0 и x_1, t_1 , то есть много соединяющих их траекторий, но частица пройдет только по одной из них. Истинная траектория — та, на которой действие минимизируется, или, точнее, делается стационарным. Так что мы занимаемся тем, что исследуем все траектории, соединяющие данные точки, пока не найдем решение со стационарным действием. Из этого принципа выводятся уравнения движения Эйлера—Лагранжа.

Как видно из уравнения (15), калибровочное преобразование меняет действие, но только если ме-

няются граничные точки. Если же они остаются неподвижными, изменение в действии не оказывает влияния. Стационарность относится только к вариациям траектории без движения концевых точек. Получается, что действие изменилось, но уравнения движения — нет, равно как и их решения. Мы говорим, что уравнения движения и их решения *калибровочно-инвариантны*.

И еще немного жаргона: поскольку есть много разных вариантов векторного потенциала, описывающих одну и ту же физическую ситуацию, выбор среди них одного определенного называется *калибровкой*. Например, уравнения (8) и (9) — это две разные калибровки, описывающие одно и то же однородное магнитное поле. Физический принцип, согласно которому результаты любого эксперимента не могут зависеть от выбора калибровки, называется *калибровочной инвариантностью*.

Уравнения движения

Вернемся к действию (14) и запишем лагранжиан в наиболее явной форме:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \quad (16)$$

Уравнение движения Лагранжа по координате x

$$\dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (17)$$

Тут появляются канонические импульсы: если вы думаете, что это просто привычные произведения массы на скорость, то это не так. Корректное определение канонического импульса состоит в том, что он является производной лагранжиана по компоненте скорости. Отсюда получается $p = mv$ для лагранжиана обычной частицы, но с магнитным полем все меняется. Из уравнения (16) мы имеем

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x. \quad (18)$$

Это может вызвать беспокойство, поскольку указывает, что канонический импульс не является калибровочно-инвариантным. Так оно и есть, но мы ведь не закончили. Надо сделать еще две вещи: вычислить производную p_x и найти правую часть уравнения (17). Быть может, нам повезет и все калибровочно-неинвариантные элементы сократятся.

В левой части уравнения (17) получается

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= ma_x + \frac{e}{c} \frac{d}{dt} A_x = \\ &= ma_x + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right), \end{aligned}$$

где a_x — x -компоненты ускорения.

В правой части уравнения (17) получается:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z} \right).$$

Теперь объединим левую и правую части:

$$ma_x = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \dot{y} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \dot{z}. \quad (19)$$

Уравнение (19) кажется сложным, но заметьте, что комбинации производных

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

и

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

мы уже встречали в уравнении (7), и это — z - и y -компоненты магнитного поля. Можно переписать уравнение (19) в гораздо более простой форме:

$$ma_x = \frac{e}{c} (B_z \dot{y} - B_y \dot{z}). \quad (20)$$

Приглядимся внимательнее к формуле (20). Вас должны впечатлить несколько моментов. Прежде всего то, что уравнение калибровочно-инвариантно: векторный потенциал полностью исчез из правой части, где вместо него появилось магнитное поле. В левой части стоит произведение массы и ускорения — то, что и должно быть в левой части ньютоновского уравнения. На самом деле уравнение (20) — это не что иное, как x -компонента уравнения движения Ньютона—Лоренца (11).

Кто-то может удивиться: зачем мы вообще стали возиться с введением векторного потенциала? Почему

бы сразу не записать калибровочно-инвариантное уравнение Ньютона—Лоренца? Поступить так, конечно, было можно, но тогда мы потеряли бы всякую возможность формулировать уравнения на базе принципа наименьшего действия, а значит, и записать гамильтоновы уравнения движения. Может быть, это и не трагедия для классической теории, но это стало бы катастрофой для квантовой механики.

Гамильтониан

Прежде чем обсуждать гамильтониан заряженной частицы в магнитном поле, давайте вернемся к определению импульса частицы. Оно по-прежнему может вас смущать. Дело в том, что есть два разных понятия: механический импульс и канонический импульс. Первый вы изучали в элементарной механике (*импульс равен произведению массы и скорости*), а второй — в теоретической механике (*канонический импульс равен производной от лагранжиана по скорости*). В простейшем случае, когда лагранжиан — это просто разность кинетической и потенциальной энергий, эти два типа импульсов совпадают, потому что единственная зависимость от скорости приходит из выражения $\frac{1}{2}mv^2$.

Но как только лагранжиан усложняется, эти два типа импульсов могут начать различаться. В уравнении (18) мы находим тому пример. Канонический

импульс — это механический импульс плюс член, пропорциональный векторному потенциалу. Это можно записать в векторном виде:

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}(x). \quad (21)$$

Механический момент не только хорошо нам знаком, но еще и калибровочно-инвариантен. Его можно непосредственно наблюдать, и в этом смысле он «реален». Канонический момент незнаком и менее «реален»; он меняется, когда выполняется калибровочное преобразование. Но, так или иначе, он все же реален и необходим, если надо выразить механику заряженных частиц на языке лагранжианов и гамильтонианов.

Для перехода к гамильтониану вспомним его определение:

$$H = \sum_i (p_i \dot{q}_i) - L,$$

что в нашем случае дает

$$H = \sum_i \left\{ p_i \dot{x}_i - \left[\frac{m}{2} (\dot{x}_i)^2 + \frac{e}{c} \dot{x}_i \cdot A_i(x) \right] \right\}. \quad (22)$$

Давайте разберемся. Прежде всего надо избавиться от скоростей; гамильтониан всегда мыслится как функция координат и импульсов. Это несложно. Мы просто разрешим уравнение (21) относительно скорости, выразив ее через p :

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} \left[p_i - \frac{e}{c} A_i(x) \right]. \quad (23)$$

Теперь везде, где в уравнении (22) появляются компоненты скорости, заменим их по формуле (23) и немного преобразуем выражение. Получится

$$H = \sum_i \left\{ \frac{1}{2m} \left[p_i - \frac{e}{c} A_i(x) \right] \left[p_i - \frac{e}{c} A_i(x) \right] \right\}. \quad (24)$$

УПРАЖНЕНИЕ 4

Используя гамильтониан (24), выведите уравнения движения Гамильтона и покажите, что мы вновь приходим к уравнению движения Ньютона—Лоренца.

Если внимательно посмотреть на уравнение (24), то можно увидеть нечто слегка удивительное. Выражение $\left[p_i - \frac{e}{c} A_i(x) \right]$ — это механический импульс mv_i . Гамильтониан — это не что иное, как

$$H = \frac{1}{2} mv^2.$$

Иными словами, его численное значение — это тоже самое, что самая обычная кинетическая энергия. Это доказывает (помимо прочих вещей), что энергия калибровочно-инвариантна. Поскольку эта величина сохраняется, обычная кинетическая энергия также сохраняется, если только магнитное поле не меняется во времени. Но это не означает, что магнитное поле не влияет на движение частицы. Если вы хотите использовать гамильтониан для нахождения

уравнений движения, то должны выразить его через канонические импульсы, а не через скорости, а затем использовать уравнения Гамильтона. Или же, напротив, вы можете работать со скоростями и использовать лагранжеву форму уравнений, но в этом случае лагранжиан уже не является обычной кинетической энергией. В любом случае, если вы все это проработаете, то обнаружите, что заряженная частица испытывает воздействие калибровочно-инвариантной магнитной силы Лоренца.

Движение в однородном магнитном поле

Задачу о движении в однородном магнитном поле достаточно легко решить, и она иллюстрирует многие принципы, которые мы обсуждали. Возьмем поле, направленное вдоль оси z и имеющее величину b . Эта ситуация описывается уравнениями (6–8). Выбор между векторными потенциалами (7, 8) — это пример неоднозначности, связанной с калибровочными преобразованиями. Давайте для начала выберем уравнения (7) и запишем гамильтониан (24), используя ($A_x = 0$, $A_y = bx$, $A_z = 0$). Получится

$$H = \frac{1}{2m} \left[(p_x)^2 + (p_z)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} bx \right)^2 \right].$$

Как всегда, первым делом надо разобраться с законами сохранения. Один мы уже знаем: сохранение энергии.

Как мы видели, энергия — это старая добрая кинетическая энергия $\frac{1}{2}mv^2$. Отсюда следует, что абсолютная величина скорости остается постоянной.

Далее заметим, что единственная координата, которая фигурирует в H , — это x . Это значит, что при выводе уравнений Гамильтона мы обнаружим, что p_x не сохраняется, но p_z и p_y — сохраняются. Что из этого следует? Рассмотрим прежде всего z -компоненту. Раз $A_z = 0$, то $p_z = mv_z$. А значит, из сохранения p_z привычным образом следует, что z -компонента скорости равна константе.

Теперь обратимся к сохранению p_y . На этот раз p_y равно не mv_y , а $mv_y + \frac{e}{c}bx$. Сохранение p_y говорит нам, что

$$ma_y + \frac{e}{c}bv_x = 0,$$

или

$$a_y = -\frac{eb}{mc}v_x. \quad (25)$$

Заметьте, что из сохранения p_y вовсе не следует, что сохраняется y -компонента скорости.

А что с p_x ? Кажется, тут сохранения быть не должно, поскольку H явным образом зависит от x . Можно использовать уравнения Гамильтона для определения x -компоненты ускорения, но я хочу применить другой подход. Вместо уравнений (8) я собираюсь на ходу изменить калибровку и использовать уравнения (7). Вспомните, что физические явления не должны меняться. Новый гамильтониан, получающийся с уравнениями (7):

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{e}{c} b y \right)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2 \right].$$

Теперь гамильтониан не зависит от x , что подразумевает сохранение p_x . Как такое может быть? Ранее мы показали, что p_x не сохраняется, когда используются уравнения (8). Разгадка состоит в том, что при выполнении калибровочного преобразования компоненты p изменяются. В двух обсуждаемых случаях p_x имеет разный смысл.

Рассмотрим следствия сохранения p_x при новой калибровке. Используя уравнения (7), получаем $p_x = m v_x - \frac{e}{c} b y$. Таким образом, сохранение p_x выражается как

$$a_x = \frac{eb}{mc} v_y. \quad (26)$$

Вы уже наверняка заметили сходство уравнений (25) и (26). Это уравнения Ньютона—Лоренца для движения в однородном магнитном поле.

УПРАЖНЕНИЕ 5

Покажите, что в плоскости xy решение уравнения (25) и решение уравнения (26) дают круговые орбиты с центром где-то на этой плоскости. Выразите радиус орбиты через скорость.

Калибровочная инвариантность

Я отложил магнитные силы на последнюю лекцию, для того чтобы вы помнили этот урок в ходе дальнейшего обучения, когда мы дойдем до квантовой механики и теории поля. Калибровочные поля и калибровочная инвариантность — это не малозначительные особенности записи силы Лоренца в лагранжевой форме. Это основополагающие принципы, лежащие в основе всего — от квантовой электродинамики до общей теории относительности и далее. Они играют ведущую роль в физике конденсированных сред, например в объяснении самых разных лабораторных явлений, таких как сверхпроводимость. Я завершу эти лекции по классической механике, охарактеризовав смысл калибровочной идеи, но ее подлинное значение прояснится лишь в дальнейших лекциях.

Простейшее объяснение смысла калибровочного поля, самым элементарным примером которого служит векторный потенциал, состоит в том, что это вспомогательное приспособление, вводимое, для того чтобы гарантировать выполнение некоторых ограничений. В случае задания магнитного поля позволено использовать не любую функцию $\vec{B}(x)$. Ограничение на поле $\vec{B}(x)$ состоит в том, что у него не должно быть дивергенции:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Чтобы гарантировать это, мы записываем магнитное поле как ротор некого $\vec{A}(x)$, поскольку ротор автоматически не имеет дивергенции. Это прием, избавляющий от заботы о том, чтобы в явном виде проверять соблюдение наложенных на $\vec{B}(x)$ ограничений.

Но вскоре мы обнаруживаем, что попросту не можем обойтись без $\vec{A}(x)$. Формулу для силы Лоренца нельзя вывести из лагранжиана без обращения к векторному потенциалу. И это характерно для всей современной физики: чтобы записывать уравнения в лагранжевой или гамильтоновой форме, приходится вводить вспомогательные калибровочные поля. Правится вам это или нет, они совершенно необходимы.

Но при этом они континтуитивны и абстрактны. Хотя они необходимы, их можно менять, не вызывая изменений в физических явлениях. Подобные изменения называются *калибровочными преобразованиями*, а тот факт, что физические явления при этом не изменяются, — *калибровочной инвариантностью*. Таким образом, мы оказываемся в странной ситуации: калибровочные поля не могут быть «реальными», поскольку мы можем менять их, не влияя на калибровочно-инвариантную физику. Но с другой стороны, мы не можем без них выразить законы физики.

Я не буду пытаться подбросить вам неожиданную идею, как избавиться от этого напряжения. Я только скажу вам, что таково положение дел: законы физи-

ки включают калибровочные поля, но объективные явления калибровочно-инвариантны.

До новых встреч

На этом мы завершаем знакомство с классической механикой. Если вы следили за лекциями и помните их материал, значит, вы усвоили теоретический минимум — все, что вам понадобится знать о классической механике, чтобы двигаться дальше. Увидимся на курсе квантовой механики!

Приложение. Центральные силы и планетные орбиты

Ленни, согнувшись, вглядывался в окуляр телескопа. Он занимался этим впервые в жизни. Увидев кольца Сатурна, он присвистнул от их красоты: «Джордж, ты видел эти кольца?»

Джордж кивнул: «Ага, видал».

Ленни перевел на него взгляд и с нажимом спросил: «Откуда они взялись?»

«Они крутятся, как Земля вокруг Солнца», — ответил Джордж.

Ленни наклонил голову: «А как она крутится?»

Центральная сила гравитации

Центральное силовое поле — это сила, которая направлена к центру, или, другими словами, к определенной точке пространства (рис. 1). Кроме того, чтобы сила

была центральной, она должна иметь одинаковую величину во всех направлениях от центра.

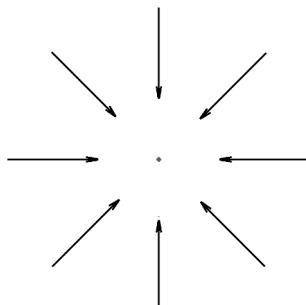


Рис. 1. Центральная сила

Помимо этой очевидной вращательной симметрии в центральных силах нет больше ничего особенного с математической точки зрения. Но их роль в физике и истории физики совершенно особая. Первые задачи, решенные Ньютона (связанные с планетными орбитами), были задачами о центральной силе. Движение электрона, обращающегося вокруг ядра атома водорода, — это задача о центральной силе. Описание двух атомов, которые обращаются друг вокруг друга в простой молекуле, можно свести к задаче о центральной силе, центр которой находится в центре масс. Поскольку у нас не было времени, чтобы охватить этот предмет на лекциях, я добавил данное приложение.

Сконцентрируемся на движении Земли по ее орбите вокруг намного более тяжелого Солнца. Согласно законам Ньютона, сила, действующая со стороны Солнца на Землю, равна и противоположна по на-

правлению силе, с которой Земля действует на Солнце. Кроме того, направления действия этих сил лежат на линии, соединяющей два тела. Поскольку Солнце намного массивнее Земли, движением Солнца можно пренебречь, а его положение можно считать неизменным. Выберем систему отсчета так, чтобы Солнце было в начале отсчета: $x = y = z = 0$. Земля, напротив, движется по орбите вокруг этой точки. Обозначим положение Земли вектором \vec{r} с компонентами x, y, z . Поскольку Солнце расположено в начале отсчета, сила, действующая на Землю, направлена к нему же, как показано на рис. 1. Более того, величина этой силы зависит только от расстояния до начала отсчета. Сила с такими свойствами — направленная к началу отсчета и зависящая только от расстояния до него — называется *центральной силой*.

Вспомним единичный вектор из интерлюдии 1:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

В математической форме определение центральной силы имеет вид

$$\vec{F} = f(\vec{r})\hat{r},$$

где $f(\vec{r})$ определяет две вещи. Во-первых, абсолютная величина $f(\vec{r})$ — это значение силы, когда Земля находится на расстоянии r . Во-вторых, знак $f(\vec{r})$ определяет, направлена ли эта сила к Солнцу или от него, иначе говоря, является ли эта сила притягивающей или отталкивающей. В частности, если $f(\vec{r})$

положительная, то сила направлена от Солнца (отталкивающая), а если отрицательная, то — к Солнцу (притягивающая).

Сила между Солнцем и Землей, конечно, является гравитационной. Согласно ньютоновскому закону всемирного тяготения, сила гравитации между двумя массами m_1 и m_2 имеет следующие свойства:

N1. Сила является притягивающей и пропорциональна произведению масс объектов и постоянной, обозначаемой G . Величину G сегодня называют ньютоновской гравитационной постоянной.

Ее значение $G \approx 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$.

N2. Сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между массами.

Итак, сила притягивающая, а ее величина составляет

$$\frac{Gm_1m_1}{r^2}.$$

Другими словами, функция $f(\vec{r})$ задается формулой

$$f(\vec{r}) = \frac{Gm_1m_1}{r^2},$$

а сила гравитации

$$\vec{F}_{\text{грав}} = -\frac{Gm_1m_1}{r^2} \hat{r}.$$

Для системы «Земля—Солнце» обозначим массу Солнца M , а массу Земли m . Тогда сила, действующая на Землю, будет

$$\vec{F}_{\text{грав}} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}.$$

Уравнение движения для Земли — это обычное $F = ma$, или, используя выражение для силы гравитации,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}.$$

Отметим интересный факт: масса Земли в обеих частях уравнения сокращается, так что уравнение движения не зависит от ее величины:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (1)$$

Объект совершенно иной массы, например спутник, может обращаться вокруг Солнца по той же орбите, что и Земля. Есть, впрочем, одна оговорка относительно данного факта: он имеет место, только если Солнце столь массивно по отношению к Земле или спутнику, что его движение можно игнорировать.

Гравитационная потенциальная энергия

Сила гравитации выводится из функции, описывающей потенциальную энергию. Вспомним, что сила связана с потенциальной энергией как градиент потенциала, взятый с обратным знаком:

$$F = -\nabla V.$$

В случае гравитации нетрудно найти вид V . Прежде всего, поскольку сила пропорциональна GMm , следует ожидать, что и в формуле для потенциальной энергии

будет такой же множитель. Далее, поскольку величина силы зависит только от расстояния r , следует ожидать, что и потенциальная энергия $V(r)$ тоже зависит только от r . Наконец, поскольку для получения силы мы дифференцируем $V(r)$ и сила пропорциональна $-1/r^2$, потенциальная энергия должна быть пропорциональна $-1/r$. Поэтому естественно попробовать

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

И это действительно совершенно верный результат.

Земля движется в плоскости

Ранее мы упоминали, что задачи с центральной силой обладают симметрией. Вы наверняка поняли, что это вращательная симметрия относительно начала отсчета. Ее следствием, рассмотренным в лекции 7, является сохранение углового момента. Допустим, в некоторый момент Земля имеет положение \vec{r} и скорость \vec{v} . Эти два вектора определяют плоскость, в которой лежит и Солнце, — это мгновенная плоскость земной орбиты.

Вектор углового момента \vec{L} пропорционален векторному произведению $\vec{r} \times \vec{v}$, так что он перпендикулярен как \vec{r} , так и \vec{v} (рис. 2). Другими словами, угловой момент перпендикулярен к плоскости орбиты. В комбинации с сохранением углового момента это очень

важный факт. Сохранение говорит нам, что вектор \vec{L} никогда не меняется. Отсюда можно заключить, что никогда не меняется и плоскость орбиты. Пусть для простоты земная орбита и Солнце постоянно лежат в определенной фиксированной плоскости. Зная это, можно повернуть координаты так, чтобы орбита лежала в плоскости x, y . Вся задача становится двумерной, а третья координата, z , перестает играть какую-либо роль.

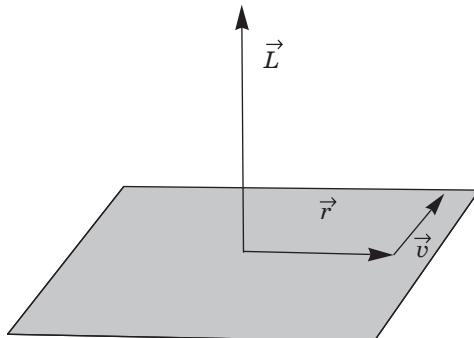


Рис. 2. Взаимосвязь между угловым моментом \vec{L} , вектором положения \vec{r} и скоростью \vec{v}

Полярные координаты

Можно работать в декартовых координатах x, y , но задачи с центральной силой гораздо проще решать в полярных координатах r, θ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}.$$

В них несложно записать кинетическую энергию Земли:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2). \quad (2)$$

Потенциальная энергия записывается еще проще — в нее вообще не входит θ :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (3)$$

Уравнения движения

Как это часто бывает, простейший путь к уравнениям движения дает метод Лагранжа. Вспомним, что лагранжиан — это разность кинетической и потенциальной энергий: $L = T - V$. С учетом уравнений (2) и (3), лагранжиан в полярных координатах имеет вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}. \quad (4)$$

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

в явном виде записываются как

$$\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r} \quad (5)$$

и

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \quad (6)$$

Последнее из этих уравнений имеет вид закона сохранения. И неудивительно, что это сохранение углового момента. (Если быть точными, то это сохранение z -компоненты углового момента.) Традиционно угловой момент обозначается буквой L , но мы задействовали ее для лагранжиана, так что будем использовать обозначение p_θ . Если известно значение p_θ в какой-то определенный момент, то оно известно и во все остальные моменты. Можно записать

$$mr^2\dot{\theta} = p_\theta \quad (7)$$

и просто пользоваться p_θ как известной константой.

Это позволяет выразить угловую скорость через расстояние Земли от Солнца. Просто решим уравнение (7) относительно $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}. \quad (8)$$

Мы еще вернемся к этому соотношению между угловой скоростью и радиальным расстоянием, но сначала давайте обратимся к уравнению для r , а именно

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2}. \quad (9)$$

В уравнении (9) присутствует угловая скорость, но с помощью (8) ее можно исключить:

$$m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}. \quad (10)$$

Это уравнение для r имеет интересную интерпретацию. Оно выглядит как уравнение движения по одной координате r под действием комбинированной «эффективной» силы:

$$F_{\text{эфф}} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}. \quad (11)$$

Член $-\frac{GMm}{r^2}$ — это просто сила тяготения, а вот другой член может поначалу вызвать удивление. На самом деле это не что иное, как фиктивная центробежная сила, действующая на частицу, имеющую определенную угловую скорость относительно начала отсчета.

Полезно представлять себе, что (11) действительно описывает движение частицы под действием совокупной силы, которая включает как реальную силу тяготения, так и центробежную силу. Конечно, для каждого значения углового момента мы должны использовать свое p_θ , но пока p_θ сохраняется, его можно рассматривать как фиксированную величину.

При заданной эффективной силе можно построить функцию эффективной потенциальной энергии, которая учитывает действие притяжения и центробежной силы:

$$V_{\text{эфф}} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что

$$F_{\text{эфф}} = -\frac{V_{\text{эфф}}}{dr}.$$

Для всех практических целей можно считать, будто движение по r — это поведение частицы, кинетическая энергия которой имеет обычную форму $\frac{m\dot{r}^2}{2}$, потенциальная энергия — $V_{\text{эфф}}$, а лагранжиан

$$L_{\text{эфф}} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}. \quad (13)$$

Диаграммы эффективной потенциальной энергии

Для того чтобы прочувствовать задачу, часто бывает полезно построить график потенциальной энергии. Например, точки равновесия (где система способная находится в покое) можно найти как стационарные точки (минимумы и максимумы) потенциала. Для понимания движения под действием центральной силы мы делаем в точности то же самое, с той лишь поправкой, что используем эффективный потенциал. Нарисуем для начала два члена $V_{\text{эфф}}$ по отдельности (рис. 3). Заметим, что эти два члена противоположны по знаку; центробежный член положителен, а гравитационный — отрицателен. Причина в том, что гравитация — притягивающая сила, а центробежная сила отталкивает частицу от начала отсчета.

Теоретический минимум

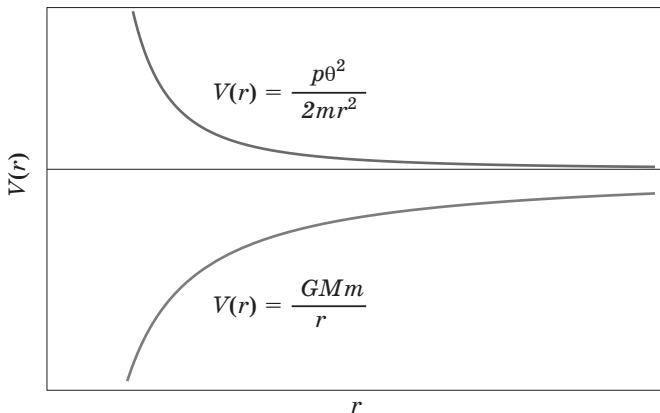


Рис. 3. Графики потенциальной энергии для центробежного и гравитационного членов

Вблизи начала отсчета центробежный член наиболее важен, но при больших значениях r доминировать начинает гравитационный член. Если их объединить, получается график $V_{\text{эфф}}$, показанный на рис. 4.

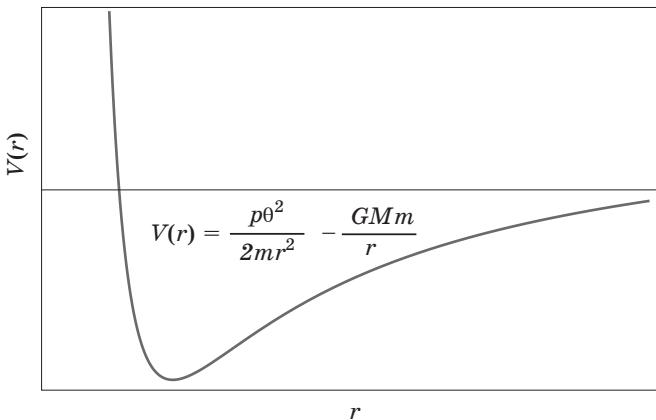


Рис. 4. График эффективной потенциальной энергии $V_{\text{эфф}}$

Заметим, что при объединении двух членов у графика появляется минимум. Это может показаться странным; мы не ожидали найти точку равновесия, в которой Земля может оставаться в покое. Однако надо помнить, что мы обсуждаем только движение по координате r , игнорируя угловую координату θ . Суть в том, что для каждого значения углового момента существует орбита, на которой в процессе движения сохраняется постоянная радиальная дистанция от Солнца. Такие орбиты являются круговыми. На графике $V_{\text{эфф}}$ круговая орбита представлена воображаемой частицей, находящейся в покое в точке минимума.

Давайте вычислим значение r в этом минимуме. Все что для этого нужно, — продифференцировать $V_{\text{эфф}}$ и приравнять производную к нулю. Эти несложные выкладки я оставляю вам. А в результате получится, что минимум находится в точке

$$r = \frac{p_\theta^2}{GMm^2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) дает радиус земной орбиты (в предположении, что она круговая, что не совсем верно), определяемый ее угловым моментом.

Законы Кеплера

Тихо Браге был датским астрономом XVI века, жившим незадолго до появления телескопов. С помощью длинного шеста и некоторых угломерных инструментов он составил лучшие для дотелескопной эпохи таблицы, в которых зафиксировал движения тел Солнечной системы. Как теоретик он кое-что напутал, так что его наследием стали именно таблицы.

Иоганн Кеплер был помощником Тихо, и именно он успешно применил эти таблицы. Взяв записи Тихо, Кеплер выявил в его наблюдательных данных простые геометрические и математические факты. Он не знал, почему планеты движутся по найденным им законам, — по современным меркам его теории о том, почему так происходит, были в лучшем случае странными, — но найденные им закономерности оказались верны.

Великое достижение Ньютона, в известном смысле положившее начало современной физике, состояло в том, что он объяснил кеплеровские законы движения планет на основе собственных законов движения, включая обратно-квадратичный закон тяготения. Вспомним три закона Кеплера:

К1. Орбита любой планеты является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце.

К2. Отрезок, соединяющий планету с Солнцем, замечает равные площади за равные интервалы времени.

*K3. Квадрат орбитального периода планеты
прямо пропорционален кубу радиуса ее орбиты.*

Начнем с K1, закона эллипсов. Выше объяснялось, что круговые орбиты соответствуют положению равновесия в минимуме эффективного потенциала. Однако существуют движения эффективной одномерной системы, при которых она колеблется назад и вперед, а не пребывает в минимуме. Такого рода движение периодически приближает Землю к Солнцу и отдаляет от него. Между тем в силу наличия углового момента L , Земля должна также двигаться вокруг Солнца. Другими словами, угол θ увеличивается со временем. Получающаяся траектория, вдоль которой расстояние колеблется, а угловая координата растет, является эллиптической. На рис. 5 показана как раз такая эллиптическая орбита. Если проследовать вдоль этой орбиты, следя только за радиальным расстоянием, то окажется, что Земля периодически движется к центру и обратно, как если бы она колебалась в эффективном потенциале.

Доказать, что орбита будет в точности эллиптической, не так просто, и мы не станем сейчас этим заниматься.

Посмотрим на движение частицы в эффективном потенциале немного с другой стороны. Вообразим частицу со столь большой энергией, что она полностью вырывается из потенциальной ямы. Такая частица приходит по орбите из бесконечности, отскакивает от

потенциального барьера вблизи $r = 0$ и улетает прочь, чтобы никогда больше не вернуться. Подобные траектории называют разомкнутыми гиперболическими орбитами.

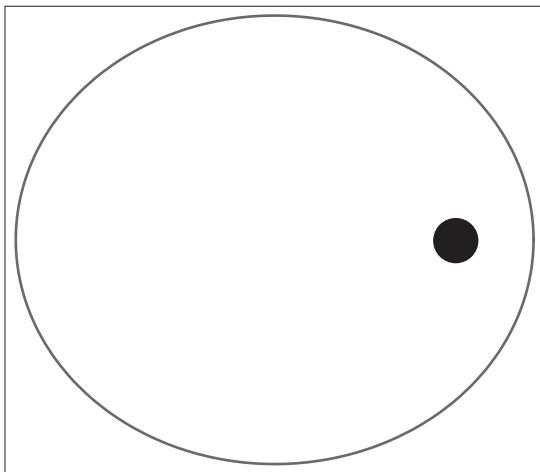


Рис. 5. Эллиптическая орбита Земли вокруг Солнца

Перейдем к К2. Согласно второму закону Кеплера, по мере того как радиус-вектор поворачивается, площадь, которую он заметает за единицу времени, всегда остается постоянной. Это похоже на закон сохранения, и это действительно сохранение углового момента. Вернемся к уравнению (7) и разделим его на массу m :

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m}. \quad (15)$$

Представим себе радиальную линию, заметающую площадь. За короткое время dt угол изменится на $d\theta$.

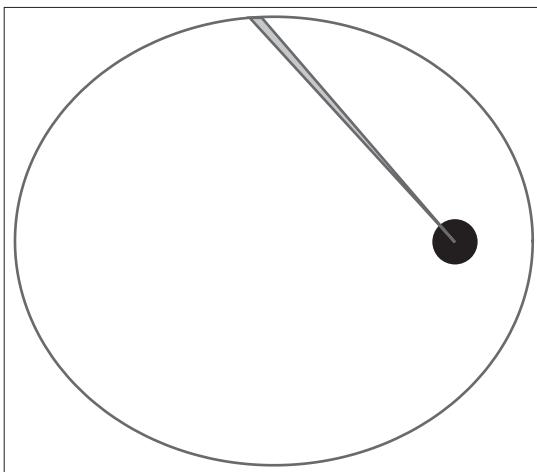


Рис. 6. Площадь, заметаемая линией, соединяющей Землю и Солнце, за короткое время dt

Небольшой треугольник, заметенный на рис. 6, имеет площадь

$$\delta A = \frac{1}{2} r^2 \delta\theta.$$

Можете убедиться в этом, используя тот факт, что площадь треугольника равна половине основания (r), умноженного на высоту ($r \delta\theta$). Если разделить эту величину на малый интервал времени dt , получится

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\theta}.$$

А теперь применим принцип сохранения углового момента в форме (15) и получим окончательное уравнение:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{p_\theta}{2m}. \quad (16)$$

Поскольку p_θ (а также m) не меняется, мы видим, что темп заметания площади остается постоянным и, более того, он прямо пропорционален угловому моменту орбиты.

Перейдем, наконец, к КЗ: квадрат орбитального периода планеты прямо пропорционален кубу радиуса ее орбиты.

Формулировка Кеплера была очень общей, но мы будем работать только с круговыми орбитами. Есть много способов показать третий закон Кеплера, но самый простой — использовать второй закон Ньютона $F = ma$. Сила, действующая на движущуюся по орбите Землю, — это просто сила тяготения, величина которой

$$F = -\frac{GMm}{r^2}.$$

С другой стороны, в лекции 2 мы определили, что ускорение объекта, движущегося по круговой орбите,

$$a = \omega^2 r, \quad (17)$$

где ω — угловая скорость.

УПРАЖНЕНИЕ 1

Покажите, что приведенное выше уравнение (17) является следствием уравнения (3) из лекции 2.

Закон Ньютона приобретает вид

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r.$$

Это уравнение легко решить относительно ω^2

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}.$$

Последний шаг состоит в учете того факта, что орбитальный период — это время, за которое совершается один оборот, и оно связано простым соотношением с угловой скоростью. Обозначив период греческой буквой тау (τ), можно записать

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Традиционно для периода используется буква T , но мы уже задействовали ее для кинетической энергии. Соединив все вместе, получаем

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3.$$

Таким образом, квадрат периода действительно пропорционален кубу радиуса орбиты.

Л. Сасскинд, Дж. Грабовски

**Теоретический минимум. Все, что нужно знать
о современной физике**

Перевел с английского А. Сергеев

Научный консультант Дмитрий Горбунов,
кандидат физико-математических наук

Заведующий редакцией	<i>А. Кривцов</i>
Руководитель проекта	<i>А. Юрченко</i>
Ведущий редактор	<i>Ю. Сергиенко</i>
Литературный редактор	<i>А. Пасечник</i>
Художественный редактор	<i>Л. Адуюевская</i>
Корректоры	<i>В. Ганчурина, М. Одинокова</i>
Верстка	<i>Л. Родионова</i>

ООО «Питер Пресс», 192102, Санкт-Петербург, ул. Андреевская
(д. Волкова), д. 3, литер А, пом. 7Н.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93,
том 2; 95 3005 — литература учебная.
Подписано в печать 09.01.14. Формат 60х90/16. Усл. п. л. 18,000.
Тираж 4000. Заказ
Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного
оригинал-макета в типографии филиала ОАО «ТАТМЕДИА» «ПИК «Идел-Пресс».
420066, Казань, ул. Декабристов, 2. E-mail: idelpress@mail.ru