Интегрирование рациональных функций $\frac{A_m(x)}{B_n(x)}$, где $A_m(x)$ и $B_n(x)$

имеют вид $a_m \cdot x^m + a_{m-1} x^{m-1} \cdots a_0 x^0$
$b_n \cdot x^n + b_n x^{n-1} \cdots b_0 x^0$

1. ~~Если~~ Требуется считать, что x это комплексная переменная

2. В случае, если $\frac{A_m(x)}{B_n(x)}$ неправильная, то стоит ее привести к виду

$$\frac{A_m(x)}{B_n(x)} = C_{m-n}(x) + \frac{\tilde{A}_{\tilde{m}}(x)}{B_n(x)} \qquad \frac{\tilde{A}_{\tilde{m}}(x)}{B_n(x)} \text{ - правильная дробь } \tilde{m} < n$$

Наши полиномы можно выразить через кратности корней

$k_1 + k_2 \cdots k_t = n \qquad B_n(x) = b_n (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \cdot \cdots (x-x_n)^{k_t}$

$$\frac{A_m(x)}{B_n(x)} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{k_i} \frac{O_{ik}}{(x-x_i)^k}$$

$\boxed{\text{В случае, если } k_1, k_2 \cdots k_t = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{O_i}{x-x_i}}$

~~Преобразуем~~ Перейдя к виду $\frac{A_m(x)}{b_n (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_n)^{k_t}}$ преобразим это

в $\frac{A}{b_n (x-x_1)^{k_1}} + \frac{B}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{C}{(x-x_3)^{k_3}} + \cdots \frac{Z}{(x-x_n)^{k_t}}$

Приравняв эти выражения и убрав знаменатель (а также раскрыв скобки) мы получим несколько уравнений и найдем знач-ие $(A, B, C, D \cdots Z)$ далее делаем простое интегрирование на каждую рациональную дробь

$$\int \frac{D}{(x-x_4)^{k_4}} = D \cdot \frac{(x-x_4)^{1-k_4}}{1-k_4} + C$$

Данным способом мы можем интегрировать рациональные функции

Обобщенная функция

Обобщенную функцию можно описать, как обобщающ. понятие функции. Она позволяет математич. выразить плотность (матер. точки / других точечн. объектов)

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x|<\varepsilon \\ 0, & |x|>\varepsilon \end{cases} \qquad \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

$$\int_a^b F(x)\delta(x)\,dx = F(0)$$

Дельта функция Дирака

Обобщенная функция - линейн. непрерыв функционал на простр. основн. функций, то есть функцион. f удовлетв. условиям

$(f, \alpha\varphi + \beta\varphi_1) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \varphi_1)$, где φ_1 и $\varphi \in D$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

и если $\varphi_n \to 0$ в D, то $(f, \varphi_n) \to 0$

Регулярная обобщенная функция - порождаемая линейн-интегрир. функ. f, а если его нельзя так представить, то сингулярной

$\delta(x)$ - сингуляр: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$

Свойства:

Любая обобщ. функц. принадл. $D'(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируема

Все обобщ. функ-ии из $S'(\mathbb{R})$ это частн. производ. от функц. в $\mathbb{R}^n$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$$