

# Семинар 5

Импульс.

Движение тел с переменной массой.

**В основе описания движения тел с переменной массой лежит понятие импульса**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

*или*

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \quad (1)$$

## Первый случай: масса прибавляется

Пусть тело массы  $m$  движется со скоростью  $\vec{v}$ , а другое тело очень малой массы  $\delta m$  движется со скоростью  $\vec{w}$ . За время  $dt$  тела слипаются, и образовавшееся тело массы  $m + \delta m$  движется со скоростью  $\vec{v} + d\vec{v}$ .

Изменение импульса системы:

$$d\vec{p} = (m + \delta m)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + \delta m\vec{w}) = d\vec{v} - (\vec{w} - \vec{v})\delta m + \cancel{\delta m \cdot d\vec{v}}.$$

Последним слагаемым  $\delta m \cdot d\vec{v}$  можно пренебречь — как малой величиной второго порядка по сравнению с остальными величинами первого порядка малости.

## Первый случай: масса прибавляется

Заметим также, что  $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$  есть относительная скорость второго тела, то есть скорость тела  $\delta m$  относительно тела  $m$  до взаимодействия.

Таким образом,

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{u} \delta m.$$

подставляем в

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \tag{1}$$

получаем

$$m d\vec{v} - \vec{u} \delta m = \vec{F} dt$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{\delta m}{dt} \tag{2}$$

## Второй случай: масса убывает

Пусть ракета массы  $m$  движется со скоростью  $\vec{v}$  и за время  $dt$  испускает порцию газовой струи массой  $\delta m$ ; скорость этой порции струи в неподвижной системе отсчета равна  $\vec{w}$ , а относительно ракеты она равна  $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ . После испускания данной порции струи ракета приобретает скорость  $\vec{v} + d\vec{v}$ . Изменение импульса системы «ракета + струя»:

$$d\vec{p} = [(m - \delta m)(\vec{v} + d\vec{v}) + \delta m \cdot \vec{w}] - m \vec{v} = m d\vec{v} + (\vec{w} - \vec{v})\delta m = m d\vec{v} + \vec{u}\delta m$$

подставляем в

$$d\vec{p} = \vec{F} dt \tag{1}$$

получаем

$$m d\vec{v} + \vec{u}\delta m = \vec{F} dt$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{\delta m}{dt} \tag{3}$$

## Уравнение Мещерского

Теперь сопоставим формулы (2) и (3):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{\delta m}{dt} \quad (2)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \frac{\delta m}{dt} \quad (3)$$

Они отличаются только знаком перед  $\delta m$  (*прибавлению массы отвечает случай  $dm > 0$ , уходу массы — случай  $dm < 0$* ). Это позволяет объединить обе данные формулы в одну, введя обычный дифференциал  $dm$ :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt} .$$

## Задача 5.1

Ракета выпускает непрерывную струю газа, имеющую скорость  $u$  относительно ракеты. Расход газа равен  $\mu$  кг/с. Показать, что уравнение движения ракеты:  $ma = F - \mu u$ , где  $m$  — масса ракеты в данный момент,  $a$  — ее ускорение,  $F$  — внешняя сила.

## Задача 5.2

Ракета движется в отсутствие внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью  $\mathbf{u}$ , постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты  $\mathbf{v}$  в момент, когда ее масса равна  $m$ , если в начальный момент она имела массу  $m_0$  и ее скорость была равна нулю.

*Ответ:  $\mathbf{v} = -\mathbf{u} \ln(m_0/m)$ .*



### Задача 5.3

Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением  $a$ , скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна  $u$ , а ее масса в начальный момент равна  $m_0$ .

• *Ответ:  $m = m_0 \exp(-at/u)$ .*

## Задача 5.4

Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы  $F$ , сонаправленной с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью  $\mu$  кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент  $t$ , если в момент  $t = 0$  тележка с песком имела массу  $m_0$  и ее скорость была равна нулю.

*Ответ:*  $\mathbf{a} = F/(m_0 - \mu t)$ ,  $\mathbf{v} = (F/\mu) \ln[m_0/(m_0 - \mu t)]$ .

## Задача 5.5

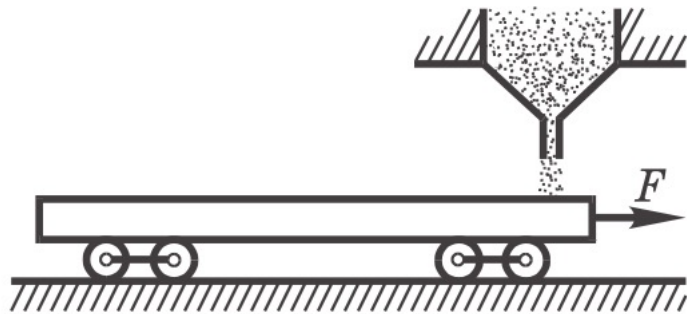


Рис. 1

Платформа массы  $m_0$  начинает двигаться вправо под действием постоянной горизонтальной силы  $F$  (рис. 1). Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна  $\mu$  кг/с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки. Трение пренебрежимо мало.

Ответ:  $\mathbf{v} = \mathbf{F}t / (m_0 + \mu t)$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{F}m_0 / (m_0 + \mu t)^2$ .

## Задача 5.6

Космический корабль массы  $m_0$  движется в отсутствие внешних сил со скоростью  $v_0$ . Для изменения направления движения включили реактивный двигатель, который стал выбрасывать струю газа с постоянной относительно корабля скоростью  $u$ , все время перпендикулярной направлению движения корабля. В конце работы двигателя масса корабля стала равной  $m$ . На какой угол  $\alpha$  изменилось направление движения корабля за время работы двигателя?

Ответ:  $\alpha = (u/v_0) \ln(m_0/m)$ .