ПЛАН-КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

КИСЕЛЕВ А. В.

Аннотация. Лекции читаются в потоках: (1) P3130-P3133, (2) P3166-3168. Во втором из указанных потоков материал будет несколько упрощаться, с учетом специализации.

Содержание

1. Обозначения

$\exists$ — существует
$\exists!$ — существует, и притом единственный
: — такой, что
$\forall$ — для любого (любой)
★ (на полях) — домашнее задание для желающих, за выполнение которого можно получить баллы в счет экзамена. Для этого необходимо оформить решение на отдельном листочке, подписать его и либо передать лектору перед или после лекции, либо (предпочтительно!) загрузить в формате pdf в системе moodle. Изображение должно удовлетворять условию читабельности.

2. Лекция 1

- Направленные отрезки на плоскости и в пространстве
- Понятие множества как набора элементов. Конечные и бесконечные множества. Элементарные операции над множествами (объединение, пересечение). Множество направленных отрезков.
- Отношение эквивалентности на множестве: на множестве Ω задано отношение эквивалентности $\sim$, если про всякую пару элементов $x, y \in \Omega$ можно сказать, находится она в этом отношении или нет, и выполнены следующие условия:
  (1) рефлексивность $x \sim x$
  (2) симметричность $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
  (3) транзитивность $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.
  (Задача: предложить отношение "эквивалентности" на некоем множестве так, чтобы были выполнены второе и третье свойства, но не первое) ★
- Отношение эквивалентности порождает разбиение множества Ω на классы эквивалентности. Здесь классом эквивалентности полагается множество, состоящее из произвольного элемента $x \in \Omega$ и всех иных элементов $y \in \Omega$ таких, что $y \sim x$. Доказательство: самостоятельно для желающих ★
- Примеры отношений эквивалентности и соответствующих им разбиений. Разбиение $\mathbb{Z}$ на четные и нечетные.
- Фактор-множество $\Omega/\sim$ – множество, состоящее из классов эквивалентности по отношению к $\sim$.
- На множестве направленных отрезков назовем два таких отрезка эквивалентными, если один из них получается из другого параллельным переносом. Доказательство того, что это отношение эквивалентности в смысле данного выше определения.
- **def'n:** вектором называется класс эквивалентных относительно $\sim$ направленных отрезков.

- Операция сложения векторов: задается правилом параллелограмма на *представителях* (направленных отрезках), начала которых совпадают.
- Операция умножения вектора на скаляр ($\alpha\vec{x},\ \alpha \in \mathbb{R}$) также задается на *представителях*, т.е. на направленных отрезках: длина изменяется в $|\alpha|$ раз, направление не изменяется при $\alpha > 0$ и меняется на противоположное при $\alpha < 0$.
- Проверка того, что операция умножения на скаляр корректно определена на векторах, понимаемых, как классы эквивалентности. Проверка аналогичного факта для операции сложения: самостоятельно.
- Тем самым, на множестве векторов введена линейная структура: если $\vec{x}, \vec{y}$ – вектора, а α, β – скаляры, то $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ – вектор из того же множества, что и $\vec{x}, \vec{y}$.
- Множество векторов, снабженных линейной структурой, является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

3. Лекция 2

3.1. **Скалярное произведение. def'n:** $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle := |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$ – стандартное скалярное произведение, где $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ — длины векторов $\vec{a}, \vec{b}$, а $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ — это косинус угла между ними.

NB: скалярное произведение – это *скаляр* (различие с произведением в $\mathbb{R}$)! Данное определение не требует введения системы координат.

Свойства:

(1) $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$; $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (невырожденность)

(2) $\langle(\mu\vec{a}), \vec{b}\rangle = \mu\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ – однородность по первому аргументу

(3) $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle\vec{b}, \vec{a}\rangle$ – симметричность

(4) $\langle\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\rangle = \langle\vec{a}, \vec{c}\rangle + \langle\vec{b}, \vec{c}\rangle$ – линейность по первому аргументу.

Свойства (2)+(3)+(4) $\Rightarrow$ линейность по первому и второму аргументам (билинейность). Доказательство свойств (1), (2), (3). Корректность определения для векторов, понимаемых как классы эквивалентных направленных отрезков, – самостоятельно . Линейность по первому аргументу – доказательство будет являться следствием линейности операции проектирования. ★

def'n: проекция вектора $\vec{a}$ на ось l: опускаем перпендикуляры на ось из концов представителя $\vec{a}$ (проверить корректность задания операции на классах эквивалентных направленных отрезков!). Проекция $\operatorname{np}_l \vec{a}$ – это длина отрезка оси l между названными перпендикулярами (направление от перпендикуляра, опущенного из начала вектора $\vec{a}$, к перпендикуляру, опущенному из его конца!), снабженная знаком $+$ в том случае, если отрезок сонаправлен с осью l, и знаком $-$ в обратном случае.

def'n: проекция $\operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ – это проекция $\vec{a}$ на ось, определяемую направлением вектора $\vec{b}$.

Теорема 3.1. *Операция* $\operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a}$ *линейна по аргументу* $\vec{a}$, *т.е.* $\operatorname{np}_{\vec{b}}(\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_1\vec{a_2}) = \alpha_1 \operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a_1} + \alpha_2 \operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a_2}$.

Доказательство: сперва доказать однородность, затем – линейность, разобрав различные случаи направлений векторов $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$.

Предложение 3.2.

$$\operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, \vec{b});$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \operatorname{np}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{np}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Следствие 3.3. *Стандартное скалярное произведение линейно по обоим аргументам (билинейно).*

Достаточно доказать линейность по первому аргументу (следует из линейности операции проектирования и предыдущего предложения), линейность по второму аргументу получается затем с учетом симметричности.

3.2. **Аксиоматическое введение скалярного произведения.** Пусть Ω – линейное пространство (грубо: множество с линейной операцией $\alpha a + \beta b$, $\forall a, b \in \Omega$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ не выводящей за пределы множества Ω). Его элементы также называются векторами.

def'n

(1) Отображение (функция) из множества упорядоченных пар $\Omega \times \Omega$ в $\mathbb{R}$ называется формой (точнее, 2-формой). Упорядоченные пары из $\Omega \times \Omega$ – это пары элементов (a, b), где $a, b \in \Omega$ и (упорядоченность) отмечено, какой из них первый, а какой – второй, так что $(a, b) \neq (b, a)$.
(2) Форма $f[a, b]$ называется линейной по первому аргументу, если $f[\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b] = \alpha_1 f[a_1, b] + \alpha_2 f[a_2, b]$ для всех $a_1, a_2, b \in \Omega$ и всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется линейность по второму аргументу.
(3) Форма f называется билинейной, если она линейна одновременно по первому и второму аргументам.
(4) Форма f называется положительно определенной, если $f[a, a] \geq 0 \forall a \in \Omega$.
(5) Форма f называется невырожденной, если $f[a, a] = 0$ влечет за собой $a = 0$.
(6) Форма f называется симметричной, если $f[a, b] = f[b, a]$ $\forall a, b \in \Omega$.

def'n Выделенная билинейная положительно определенная, невырожденная, симметричная форма называется скалярным произведением. Векторное пространство со скалярным произведением называется Евклидовым пространством.

Примеры Евклидовых пространств: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Если нет положительной определенности, может получиться пространство с индефинитной метрикой (пространство Понтрягина), пример – пространство-время Минковского в ОТО Эйнштейна. Написать аналог скалярного произведения в пространстве Минковского. ★

Пространства квадратных матриц – тоже линейные пространства. Что будет скалярным произведением там? ★

В линейном пространстве достаточно ввести скалярное произведение, после этого длины и углы получаются следующим способом:

def'n Норма (аналог длины) элемента Евклидова пространства $\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}$, где $a \in \Omega$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение (не обязательно стандартное!).

def'n Угол между двумя элементами (векторами) $a, b \in \Omega$ определяется его косинусом: $\cos(a, b) := \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$.

★ Привести пример скалярного произведения в $\mathbb{R}^d$, отличного от стандартного (т.е. относительно которого длина вектора и/или угол между двумя векторами может принимать отличное от стандартного значение).

Описать все возможные *различные* скалярные произведения в $\mathbb{R}^2$; в $\mathbb{R}^3$. ★

3.3. **Координатная система (декартова, или ортогональная).** Введем систему взаимно ортогональных векторов длины один (ортов): i, j в $\mathbb{R}^2$ и i, j, k в $\mathbb{R}^3$. Для произвольного вектора $\vec{a}$ введем $(\text{пр}_i \vec{a}, \text{пр}_j \vec{a}, \text{пр}_k \vec{a})$ – координаты вектора относительно данной системы координат (с естественной модификацией в $\mathbb{R}^2$!)

Множество векторов оказывается биективно (т.е. взаимно однозначно) связанным с множеством троек вещественных чисел. Переход от вектора к тройке чисел – выше, наоборот: пусть даны $a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\vec{a} := a_x i + a_y j + a_z k$ – по линейности, вектор в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, $\text{пр}_i \vec{a} = a_x, \text{пр}_j \vec{a} = a_y, \text{пр}_k \vec{a} = a_z$, ч.т.д.

Как следствие линейности, имеем для $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ формулы, выражающие линейные операции в координатах:

$$\mu\vec{a} = (\mu a_x, \mu a_y, \mu a_z); \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Предложение 3.4. *Если введена система ортогональных координат, то*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{m=1}^{3} a_m b_m, \quad |\vec{a}|^2 = \sum_{m=1}^{3} a_m^2.$$

Здесь $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. (Аналогично и для случая $\mathbb{R}^2$).

Предложение 3.5.

$$\text{пр}_m \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{e}_m \rangle,$$

где $\vec{e}_1 = i, \vec{e}_2 = j, \vec{e}_3 = k$ – орты декартовой системы координат, а $\text{пр}_m \vec{a} := \text{пр}_{\vec{e}_m} \vec{a}$.

3.4. **Определители второго и третьего порядка. def'n** Матрицей называется прямоугольная таблица элементов.

Матрицы размеров 2×2 и 3×3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Внимание: нижний индекс – двойной, первый значок – номер строки, второй значок – номер столбца!

def'n Определитель (детерминант) матрицы 2×2:

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

def'n Определитель (детерминант) матрицы 3×3:

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

NB: детерминант матрицы 2×2 – это разность произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали. Детерминант матрицы 3×3 выражается через детерминанты матриц 2×2. Внимание: знак при втором слагаемом!

Свойства (без доказательства): детерминант меняет знак на противоположный при перестановке двух строк; детерминант не меняется при транспонировании матрицы (отражение относительно главной диагонали, или смена ролей строк и столбцов); (поэтому) детерминант меняет знак при перестановке любых двух столбцов. Для матриц 3×3: детерминант не меняется при циклической перестановке строк.

3.5. **Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.** Внимание: векторное произведение определено только в трехмерном случае (ну, еще в семимерном, но об этом речи не будет)!

def'n $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv [\vec{a}, \vec{b}]$ – векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

(1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
(2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка.

def'n $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, если при вкручивании штопора в направлении от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ штопор входит в полупространство, отмеченное направлением вектора $\vec{c}$.

def'n Декартова система координат называется правой, если орты i, j, k образуют правую тройку.

Отношение эквивалентности $\sim$ между декартовыми системами: две системы координат эквивалентны, если одна может быть получена из другой параллельным переносом и поворотом (проверить свойства отношения $\sim$!)

Все прямоугольные системы координат на плоскости распадаются на два класса эквивалентности: правые и левые. Для того, чтобы от правой СК перейти к левой, надо отразить (обратить направление) одну из осей координат.

Замечание 1. Векторное произведение – это псевдовектор! Определение требует дополнительно к паре векторов, на которой определена, введения понятия ориентации. При смене системы координат координаты векторов меняются контравариантно, координаты векторного произведения – ковариантно (грубо: вообще говоря, по-другому). Пример.

Свойства векторного произведения

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
(2) антикоммутативность $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
(3) $|\vec{a} \times \vec{b}|$ равен площади параллелограмма, натянутого на $\vec{a}, \vec{b}$.
(4) линейность по обоим аргументам (билинейность) ★
(5) формула в координатах (самостоятельно, по линейности!)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

4. Лекция 3

4.1. **Смешанное произведение. def'n** $\langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \rangle$ – смешанное произведение $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Это скаляр!

Свойства смешанного произведения

(1) $\langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \rangle = 0 \Leftrightarrow$ вектора компланарны
(2) $\langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, (\vec{b} \times \vec{c}) \rangle \equiv \vec{a}\vec{b}\vec{c}$
(3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ – не изменяется при циклической перестановке

(4) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$ – изменяет знак при смене мест (транспозиции) любой пары сомножителей.
(5) линейность по каждому аргументу
(6) выражение в координатах:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(7) $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ равен объёму параллелепипеда, натянутого на вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

4.2. **Двойное векторное произведение. def'n** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ – двойное векторное произведение.

Это вектор (не псевдо-!).

Свойства двойного векторного произведения (без доказательства):

(1) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c}\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ – "БАЦ минус ЦАБ" ★
(2) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ (тождество Якоби) ★

4.3. **Комплексные числа.** На множестве упорядоченных пар $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ введем операции сложения и умножения по следующим правилам: для $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$

- $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

def'n $\mathbb{R}^2$ с этими операциями называется множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Естественное вложение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$: сопоставим $x \in \mathbb{R}$ элемент $(x, 0)$. Умножение на вещественные числа в $\mathbb{C}$ понимается именно в этом смысле.

Свойства

(1) коммутативность сложения $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
(2) ассоциативность сложения $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
(3) существование нейтрального элемента по сложению $z + 0 = z$
(4) существование обратного по сложению $z + (-z) = 0$, $-z = (-x, -y)$.
(5) коммутативность умножения $z_1z_2 = z_2z_1$
(6) ассоциативность умножения $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$
(7) существование нейтрального элемента по умножению $z \cdot 1 = z$
(8) при $z \neq 0$ существование обратного элемента по умножению: $z^{-1} : zz^{-1} = 1$
(9) дистрибутивность $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (то же, что линейность умножения)
(10) $0 \cdot z = 0$ (специальная роль нейтрального элемента по сложению для умножения)

Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(0, y); \quad i := (0, 1) \Rightarrow z = x + iy$$

Очевидно из определения умножения: $i^2 = -1$. Комплексное число i называется мнимой единицей.

Сопряжение и модуль

$$\bar{z} \equiv \overline{x + iy} := x - iy; \quad |z| := \sqrt{\bar{z}z}$$

Свойства модуля

(1) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(3) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (неравенство треугольника) ★

(4) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$ (обратное неравенство треугольника, доказывается из (3)).

Геометрическая интерпретация

Введем декартову систему координат на плоскости, для $z = x+iy$ определим $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z = y$ (т.е. $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$). $\operatorname{Re} z$ называется вещественной частью комплексного числа, $\operatorname{Im} z$ — мнимой частью. Поставим в соответствие комплексному числу z направленный отрезок с началом в нуле координат и концом в точке $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Перейдем к полярной системе координат на плоскости из предыдущего пункта, определяя направленный отрезок z его длиной $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ и направлением, которое задается углом ϕ от правой полуоси оси абсцисс до z, отсчитываемом в положительном направлении (ПРОТИВ часовой стрелки).

$$x = |z| \cos\phi, \quad y = |z| \sin\phi \Rightarrow z = |z|(\cos\phi + i \sin\phi)$$

Это тригонометрическая форма записи комплексного числа. ϕ называется аргументом z, записывается $\phi = \arg z$. Внимание: аргумент определен с точностью до $2\pi k$ для $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 4.1. *Верно, что*

$$z_1 z_1 = |z_1||z_2|(\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 + \arg z_2))$$

$$z_1/z_1 \equiv z_1 z_2^{-1} = (|z_1|/|z_2|)(\cos(\arg z_1 - \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 - \arg z_2))$$

Доказательство будет получено позже на основании формул Эйлера, но утверждение можно доказать и непосредственно, с использованием школьных тригонометрических формул.

Следствие 4.2.

$$z^n = |z|^n (\cos n \arg z + i \sin n \arg z);$$

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} (\cos(\arg z/n + 2\pi k/n) + i \sin(\arg z/n + 2\pi k/n)), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

У комплексного числа $z \ne 0$ в точности n разных корней n-той степени! Следствие: у любого вещественного числа тоже в точности n (вообще говоря, комплексных) различных корней n-той степени. Видно, что комплексные числа устроены логичнее, чем вещественные. Домашнее задание: сосчитать $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[4]{1}$.

В вещественном случае верно ли $(x^n)^{1/m} = (x^{1/m})^n$? А верно ли $(z^n)^{1/m} = (z^{1/m})^n$ для комплексных чисел? При каких условиях? ★

5. Лекция 4

5.1. **Основная теорема алгебры.** Полиномом степени n над полем $\mathbb{C}$ называется

$$P_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Комплексное c называется корнем полинома, если $P_n(c) = 0$.

Теорема 5.1 (Основная теорема алгебры)**.** *Всякий полином степени $n \ge 1$ имеет как минимум один корень в комплексной плоскости.*

Аналитическое доказательство будет предъявлено в курсе дифференциального исчисления (если хватит времени).

Сравнить: $x^2 + 1$ и $z^2 + 1$.

Теорема 5.2 (Безу; деление с остатком)**.** *Пусть $P_n(z)$ — полином степени n, $n > 0$, а $c \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$P_n(z) = (z - c)Q_{n-1}(z) + P_n(c),$$

где Q_{n-1} — полином степени $n - 1$.

Следствие 5.3. *Если c — корень, то $P_n(z) = (z - c)Q_{n-1}(z)$.*

Следствие 5.4.

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

где z_k — корни (возможно, кратные) полинома $P_n(z)$.

Замечание 2. Если рассмотреть полином над полем вещественных чисел, то в силу естественного вложения $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ основная теорема применима. Корни, тем не менее, могут быть комплексными. Пример: $x^2 + 1$.

Предложение 5.5. *z_0 — корень полинома с вещественными коэффициентами $\Rightarrow \overline{z_0}$ — тоже корень этого полинома.*

5.2. **Элементы комбинаторики. Комбинаторное доказательство биномиальной формулы.** .

(1) Число перестановок n различных объектов: $P_n = n!$
(2) Число размещений n различных объектов: $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
(3) Число сочетаний (размещений идентичных объектов): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (иначе: биномиальные коэффициенты).

Теорема 5.6 (Бином Ньютона (на самом деле, Аль Каши))**.**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Здесь полагается, что $C_n^0 := 1$.

Предложение 5.7.

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Геометрическая интерпретация для подсчета биномиальных коэффициентов:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \ldots\ldots\ldots & & & & \end{array}$$

5.3. **Метод математической индукции (ММИ). Индукционное доказательство биномиальной формулы.**

Определение 1 (Метод математической индукции)**.** Пусть имеется счетное число утверждений $\mathcal{A}_n$, $n \geq 0$. Базой индукции назовем утверждение $\mathcal{A}_0$. Пусть доказана база, и проверено, что для всякого $n \geq 0$ верно, что из $\mathcal{A}_n$ вытекает $\mathcal{A}_{n+1}$. Тогда верны все утверждения $\{\mathcal{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Бином Ньютона: база очевидна, остается показать, что из

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

вытекает ★

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}.$$

5.4. **Показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера.**

Теорема 5.8 (формулы Эйлера)**.**

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$
$$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$$

Определение 2 (показательная форма $\mathbb{C}$–числа)**.**

$$z = |z|\exp(i\arg z + 2\pi i k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(вытекает немедленно из формул Эйлера и тригонометрической формы комплексного числа).

Определение 3.

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(\operatorname{Re} z)\exp(i\operatorname{Im} z) = \exp(\operatorname{Re} z)(\cos\operatorname{Im} z + i\sin\operatorname{Im} z)$$
$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Определение 4 (комплексный логарифм)**.**

$$w = \log z \Leftrightarrow \exp(w) = z \quad (z \neq 0)$$

Ясно, что

$$\log z = \log|z| + i\arg z + 2\pi k i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение 5 (показательная функция)**.**

$$z_1^{z_2} := \exp(z_2 \log z_1).$$

Самостоятельно: вычислить z^z, i^i, $\exp(i/z)$ ★

Самостоятельно: на основании формул Эйлера и биномиальной формулы вычислить (выразить через тригонометрические функции простых дуг): $\cos(2x+y)$, $\sin 40x + \cos 40x$, $\cos^{20} x$, $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ ★

5.5. **Прямая на плоскости и плоскость в пространстве. Прямая на плоскости** выделяется условием ортогональности $\forall$ вектора, соединяющего две ее точки, выделенному вектору $\vec{N}$ — нормали к прямой. Если $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ — две точки на прямой, а $\vec{N} = (A, B)$, то получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

— уравнение прямой, проходящей через точку M_0. Перебирая разные значения A, B, получим пучок прямых, проходящих через ту же выделенную точку.

Предложение 5.9. *Всякая прямая на плоскости описывается уравнением*

$$Ax + By + C = 0.$$

Обратно, указанное уравнение описывает прямую на плоскости.

Первая часть утверждения по существу доказана выше, вторая: записать уравнение дважды, для двух точек, лежащих на прямой, и вычесть второе из первого.

Особые случаи расположения прямой: (1) $C = 0$ (проходит через начало координат), (2) $A = 0$ (параллельна оси абсцисс), (3) $B = 0$ (параллельна оси ординат).

Уравнение прямой с угловым коэффииентом

$$y = y_0 + k(x - x_0), \quad k = -A/B \quad (B \neq 0).$$

Очевидно, если прямая проходит через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), то $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Отсюда **уравнение прямой, проходящей через две заданные точки**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если прямая отсекает заданные отрезки на осях координат (a и b, соответственно), то последнее уравнение принимает вид:

$$\begin{vmatrix} x - a & y \\ -a & b \end{vmatrix} = 0,$$

или же

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 - \textbf{уравнение прямой в отрезках на осях.}$$

Параметрическое уравнение прямой. Пусть $\vec{l} = (l_x, l_y)$ — направляющий вектор прямой. Тогда, очевидно, для $\vec{r} = (x, y)$ и $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, фиксирующих две точки прямой, имеем

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l},$$

или же в координатах:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl_x \\ y = y_0 + tl_y \end{cases}$$

Выражая из обоих уравнений t, получаем:

$$\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y}$$

(ср. с уравнением пучка прямых, проходящих через точку).

6. Лекция 5

Угол между двумя прямыми — это угол между нормалями к этим прямым, потому для прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеем:

$$\cos\phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Потому

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \quad l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если две прямые заданы в форме с угловым коэффициентом ($l_1 \sim k_1$, $l_2 \sim k_2$), то из тригонометрического тождества $\operatorname{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\operatorname{tg}\phi_2 - \operatorname{tg}\phi_1}{1 + \operatorname{tg}\phi_2 \operatorname{tg}\phi_1}$ следует

$$\operatorname{tg}\phi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right|.$$

При этом

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1; \quad l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

Точка пересечения двух прямых. Необходимо предположить, что прямые не параллельны и не совпадают, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. В этом предположении у системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{cases}$$

$\exists!$ решение для $\forall C_1, C_2$ (следствие альтернативы Фредгольма, будет позже).

Пучок прямых, проходящих через точку пересечения двух данных. Нет необходимости находить точку пересечения! Достаточно записать

$$\gamma_1(A_1x + B_1y + C_1) + \gamma_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Возьмем каноническое уравнение прямой и поделим его на длину вектора нормали (A, B). Получим

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \Leftrightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

— нормальное уравнение прямой. Легко сообразить, что p — в точности расстояние от начала координат до прямой.

Чтобы получить расстояние от заданной точки до прямой, запишем нормальное уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через интересующую нас точку:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - (p + d) = 0,$$

где d — расстояние между двумя прямыми (здесь предположено, что обе прямые "по одну сторону" от начала координат). Но заданная точка (x_0, y_0) заведомо удовлетворяет данному уравнению, потому

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p.$$

Аналогично разбирается случай, когда две прямые лежат “по разные стороны” от начала координат, окончательно:

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Плоскость в пространстве описывается в точности так же, как прямая на плоскости. Связано это с тем, что коразмерности этих двух объектов совпадают и равны единице, так что в обоих случаях алгебраически очевидно, что мы говорим об общем линейном уравнении (на плоскости и в пространстве, соотвественно). Привожу список соответствующих фактов, устанавливаемых в точности так же, как выше.

Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где (A, B, C) — координаты вектора нормали $\vec{N}$.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Нормальное уравнение плоскости:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

где $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — направляющие косинусы нормали, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. При этом p — расстояние от плоскости до начала координат, а направляющие косинусы получаются делением общего уравнения плоскости на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Отсюда расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

Условие ортогональности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0.$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{N}_1 = \gamma \vec{N}_2.$$

Угол между плоскостями:

$$\cos\phi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пучок плоскостей (плоскости, проходящие через одну и ту же прямую):

$$\gamma_1(A_1x + B_1y + C_1z + D1) + \gamma_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

Связка плоскостей (плоскости, проходящие через одну и ту же плоскость), задается тремя плоскостями:

$$\gamma_1(A_1x + B_1y + C_1z + D1) + \gamma_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$$

6.1. **Прямая в пространстве.** Пусть $\vec{l}$ — направляющий вектор прямой, $\vec{r}_0$ отмечает выделенную точку прямой, а $\vec{r}$ — произвольную точку прямой. Тогда, очевидно,

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \gamma\vec{l}.$$

В координатах:

$$\begin{cases} x - x_0 = & \gamma l_x \\ y - y_0 = & \gamma l_y \\ z - z_0 = & \gamma l_z. \end{cases}$$

Отсюда получается каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y} = \frac{z - z_0}{l_z}.$$

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве. Условие параллельности прямых $\vec{l}_0 = (l_0, m_0, n_0)$ и $\vec{l}_1 = (l_1, m_1, n_1)$:

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{m_0}{m_1} = \frac{n_0}{n_1}.$$

Условие перпендикулярности:

$$\vec{l}_0 \perp \vec{l}_1 \Leftrightarrow l_0l_1 + m_0m_1 + n_0n_1 = 0.$$

Угол между двумя прямыми — это угол между их направляющими векторами,

$$\cos\phi = \frac{|l_0l_1 + m_0m_1 + n_0n_1|}{\sqrt{l_0^2 + m_0^2 + n_0^2}\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}.$$

Здесь угол $\phi \in [0, \pi/2]$.

Прямая и плоскость в пространстве.

Ортогональность $\Leftrightarrow \vec{N} \parallel \vec{l} \Leftrightarrow$

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Параллельность $\Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{l} \Leftrightarrow$

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Прямая лежит в плоскости:

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Угол между прямой и плоскостью — это угол, дополнительный до $\pi/2$, к углу между нормалью и направляющим вектором:

$$\sin\phi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Условие пересечения двух прямых. Предполагаем, что прямые не параллельны. Пусть они заданы уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$
$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

Если они пересекаются, то направленный отрезок от точки (x_1, y_1, z_1) к точке (x_2, y_2, z_2) лежит в одной плоскости с направляющими векторами двух прямых. Значит, условие пересечения принимает вид:

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.2. **Эллипс. Гипербола. Парабола.**

6.2.1. *Эллипс.* **def'n:** Эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных (фокусы F_1, F_2) равно постоянной.

Пусть $F_1 = (-c, 0)$; $F_2 = (c, 0)$ относительно некоторой декартовой системы координат. Пусть сумма расстояний от любой точки эллипса до этих фокусов равно $2a$. Введем

$$b := \sqrt{a^2 - c^2}, \epsilon := c/a \text{ — эксцентриситет.}$$

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эксцентриситет $\epsilon \in [0, 1)$. При $\epsilon = 0$ получаем окружность (фокусы совпадают, $c = 0$). При ϵ, близких к 1, получаем эллипс, стремящийся к отрезку $[-a, a]$.

Оптическое свойство эллипса: весь свет, испущенный в одном фокусе и отраженный поверхностью эллипса, соберется во втором фокусе.

6.2.2. *Гипербола.* **def'n:** Гипербола — геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух заданных (фокусы F_1, F_2) равен постоянной.

Пусть $F_1 = (-c, 0)$; $F_2 = (c, 0)$ относительно некоторой декартовой системы координат. Пусть модуль разности расстояний от любой точки эллипса до этих фокусов равен $2a$. Введем

$$b := \sqrt{c^2 - a^2}, \epsilon := c/a \text{ — эксцентриситет.}$$

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эксцентриситет $\epsilon \in (1, +\infty)$.

Асимптоты гиперболы: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Оптическое свойство гиперболы: свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается второй ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.

7. Лекция 6

7.1. **Эллипс. Гипербола. Парабола.**

7.1.1. *Парабола.* Выделяется прямая l (директриса параболы) и точка F (фокус).

def'n: парабола — это геометрическое место точек, равноудаленных от директрисы и фокуса.

Пусть относительно некой декартовой системы координат имеем, что директриса описывается уравнением $x = -p/2$, а фокус находится в точке $(p/2, 0)$. Тогда получаем каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Оптическое свойство параболы: пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.

7.1.2. *Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат.*

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \phi}$$

(вывод – самостоятельно) ★

Эллипс: $p = a - \epsilon c$, $\epsilon \in [0, 1)$. Полярная система координат имеет своим началом левый фокус. p имеет смысл: $\phi = \pi/2 \Rightarrow r = p$.

Гипербола: Полярная система координат имеет своим началом правый фокус, $p = \epsilon c - a > 0$, $\epsilon \in (1, +\infty)$. Смысл $p : \phi = \pi/2 \Rightarrow r = p$.

Парабола: эксцентриситет $\epsilon = 1$. Полярная система координат имеет своим началом фокус параболы. p — расстояние от фокуса до директрисы.

Задача: при фиксированном p изменением ϵ осуществляется переход эллипса в параболу, параболы – в гиперболу. Отследить в *декартовой системе координат:* 1) переход эллипса в параболу, 2) переход гиперболы в параболу ★

7.2. **Общее уравнение второго порядка на плоскости.**

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Возможны варианты: 1) эллипс, 2) гипербола, 3) парабола, 4) пара пересекающихся прямых, 5) пара параллельных прямых, 6) одна прямая, 7) точка, 8) ничего.

Доказательство этого — существо следующих двух параграфов.

7.3. **Линейные преобразования координат на плоскости: сдвиг и поворот.**

7.3.1. *Сдвиг.* Параллельный перенос декартовой системы координат так, что начало координат $O = (0, 0)$ переходит в точку $O' = (a, b)$.

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

7.3.2. *Поворот.* Поворачиваем декартову систему координат на угол ϕ, не меняя начала координат.

$$\begin{cases} x = x'\cos\phi - y'\sin\phi \\ y = x'\sin\phi + y'\cos\phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\phi + y\sin\phi \\ y' = -x\sin\phi + y\cos\phi \end{cases}$$

7.4. **Приведение уравнения второго порядка на плоскости к каноническому виду линейным преобразованием координат. Шаг 1.** Убираем перекрестный член Bxy. Для этого осуществляем поворот на подходящий угол ϕ.

Шаг 2. Если есть соответствующий квадратичный член, делаем сдвиг по отвечающей ему оси с тем, чтобы пропал линейный член.

Удобно: использовать вместо поворота операцию "поворот + равномерное растяжение осей координат". Для этого:

$$\begin{cases} x = x'\alpha - y'\beta \\ y = x'\beta + y'\alpha \end{cases}$$

Здесь ситуация поворота отвечает выполнению условия $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, иначе имеем растяжение системы координат в $1/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ раз, совмещенное с поворотом на тот же угол. Понятно, что от этого геометрические свойства не изменяются.

Замечание: на самом деле, закон инерции квадратичной формы (см. курс линейной алгебры) гарантирует, что приведение $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ к квадратичному виду *произвольным* линейным преобразованием (не обязательно сохраняющим углы, как рассмотренные выше) дает то же количество положительных, отрицательных и нулевых полных квадратов. Задача: взять произвольное уравнение второго порядка на плоскости и привести его к каноническому виду двумя способами: 1) поворотом и сдвигом, 2) "косым" линейным преобразованием и сдвигом. Сравнить результаты в графической форме. ★

7.5. **Элементы линейной алгебры. Линейное пространство. Линейная независимость. Базис. Размерность.**

7.5.1. *Линейное пространство.* **def'n:** Пусть на множестве E определена ассоциативная бинарная операция ($z = x \circ y$, $x, y, z \in E$; ассоциативность: $z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y$). Множество E — группа по $\circ$, если: 1) в ней $\exists$ нейтральный элемент e, и 2) для $\forall\ x \in E$ $\exists x^{-1}$, т.е. $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$.

Пусть имеем E – группу по сложению (группа + свойство коммутативности, тогда $\circ = +$). Пусть также имеем поле K (упрощенно говоря, скаляры: $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Пусть определена операция $\{\alpha, x\} \to y \in E\ \forall \alpha \in K, x \in E$. Будем ее обозначать, как $y = \alpha x \equiv x\alpha$.

def'n: E называется линейным векторным пространством над полем K, если:

(1) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
(2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
(3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
(4) $1x = x1 = x$

для любых $x, y \in E$ и $\alpha, \beta \in K$.

Примеры линейных пространств: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, пространство полиномов степени, не превосходящей n, пространство матриц фиксированного размера и т.д.

Следствие 7.1.

$$0\mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}; \quad (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \qquad \forall\alpha \in K,\ \forall\mathbf{x} \in E.$$

(здесь жирным шрифтом выделены объекты, трактуемые, как элементы E. В частности, $-\mathbf{x}$ — это обратный элемент к $\mathbf{x}$ по сложению в E).

7.5.2. *Линейная зависимость (независимость).* **def'n:** Набор (ненулевых) элементов $x_1, x_2, \dots, x_p$ называется линейно зависимым, если можно найти такие $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = 0.$$

def'n: В противном случае, тот же набор элементов называется линейно независимым.

Пусть в пространстве E дополнительно введена операция скалярного произведения (пространство Евклидово). Пусть любая пара элементов набора ортогональна: $x_k \perp x_j,\ \forall k \neq j$. Тогда этот набор линейно независим (проверьте!).

8. Лекция 7

8.1. Элементы линейной алгебры. Линейное пространство. Линейная независимость. Базис. Размерность.

8.1.1. *Базис.* **def'n:** Если в пространстве указан набор элементов $e_1, e_2, \dots, e_p$, который 1) линейно независим и 2) при добавлении к нему любого элемента x он превращается в линейно зависимый, то такой набор называется базисом. Если такой *конечный* набор существует, то пространство называется конечномерным.

Теорема 8.1. $\forall x \in E\ \exists!$ *представление*

$$x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \dots + \xi^p e_p.$$

def'n: пусть в пространстве E дополнительно введена операция скалярного произведения (пространство Евклидово). Пусть любая пара элементов базиса ортогональна: $e_k \perp e_j,\ \forall k \neq j$. Тогда базис называется ортогональным. Пусть дополнительно все элементы базиса нормированы на единицу, т.е. $\langle e_j, e_j \rangle = 1\ \forall j$. Тогда базис называется ортонормированным.

8.1.2. *Размерность.*

Теорема 8.2. *В конечномерном линейном пространстве все базисы состоят из одинакового числа элементов.*

def'n: количество элементов в базисе называется размерностью линейного векторного пространства. Обозначение: $\dim E$

Теорема 8.3. *1) Любые $n + s$ элементов в $n-$мерном пространстве — линейно зависимы; 2) любые n линейно независимых элементов в $n-$мерном пространстве образуют базис.*

8.2. Проектор. Теорема о проекторе. Ортогональные и косые проекторы.

8.2.1. *Подпространства. Прямая сумма.* **def'n:** подпространство F — это подмножество E, само являющееся линейным векторным пространством.

Является ли прямая $x+y=1$ подпространством в $\mathbb{R}^2$? А плоскость $x+y+z=1$ в $\mathbb{R}^3$? Каково необходимое и достаточное условие того, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ — подпространство? ★

def'n: Если F, G — подпространства в E. $F+G := \{f+g, \forall f \in F, g \in G\}$ — (линейная) сумма подпространств.

def'n: Если F, G — подпространства в E, $F \cap G := \{f : f \in F, f \in G\}$ — пересечение подпространств.

Теорема 8.4. *Пусть $E = F + G$. Представление $x = f + g$ для $x \in L, f \in F, g \in G$ единственно тогда и только тогда, когда $F \cap G = \{0\}$.*

def'n: Если $F \cap G = \{0\}$, то сумма $F+G$ называется прямой. Обозначение: $F \dot{+} G$.

Теорема 8.5. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

Доказательство — для желающих ★

8.2.2. *Проектор.* Пусть имеем $E = F \dot{+} G$ (прямое разложение пространства в сумму подпространств). Тогда $\forall x \in E \quad \exists!$ представление $x = f + g$. Назовем f проекцией x на F параллельно G; аналогично, g — проекция x на G параллельно F. Обозначения:

$$f = P_F^G x; \quad g = P_G^F x, \quad \text{если} \quad x = f + g.$$

Пусть дополнительно в векторном пространстве введена операция скалярного произведения (пространство, следовательно, Евклидово) и $F \perp G$, иными словами, $f \perp g \quad \forall f \in F, g \in G$. В этом случае подпространства F, G называются ортогональными, и пишут $E = F \oplus G$ (ортогональная сумма). Разумеется, всякая ортогональная сумма — прямая.

В случае, когда $E = F \oplus G$, проектор $P_F^G \equiv P_F$ (аналогично, $P_G^F \equiv P_G$) называется ортогональным. Так как по F подпространство G определяется однозначно (и называется ортогональным дополнением), говорят просто об ортогональном проекторе на F.

Внимание: в отличие от аналитической геометрии, проекция — это вектор!!! Как связано алгебраическое и геометрическое определение проекции?

Теорема 8.6. *Проектор линеен, $P_F^G(\alpha x + \beta y) = \alpha P_F^G x + \beta P_F^G y$.*

Задача. Используя скалярное произведение и ортонормированный базис в F, найти выражение для ортогонального проектора P_F ★

Задача. Используя скалярное произведение и ортонормированные базисы в F и G, найти выражение для косого проектора P_F^G (указание: выбрать ортогональный базис в G специальным образом по базису в F). Решить ту же задачу в случае, когда F — прямая в трехмерном пространстве, проходящая через начало координат, а G — неортогональная ей плоскость. Получить в этом случае также выражение для P_G^F. ★

Теорема 8.7 (Теорема о проекторе)**.** *Линейное отображение P в линейном векторном пространстве является проектором тогда и только тогда, когда $PP = P$.*

Задача: доказать теорему ★

Теорема 8.8. *Проектор в Евклидовом пространстве является ортогональным тогда и только тогда, когда*

$$\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$$

для любых x, y.

(данное свойство называется в вещественном случае симметричностью, а в комплексном — эрмитовостью). Задача: доказать это утверждение ★

8.3. **Линейное отображение (оператор). Изображающая матрица.**

8.3.1. *Линейное отображение.* Пусть E, F — линейные пространства.

def'n: Отображение $A : E \to F$ называется линейным, если $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для всех скаляров α, β и всех векторов x, y.

Пример: 1) косой проектор, 2) ортогональный проектор в Евклидовом пространстве.

Является ли умножение полиномов степени, не выше заданной, на x (независимую переменную) линейным отображением? При каких условиях?

8.3.2. *Изображающая матрица.* Пусть задано линейное пространство E размерности $n = \dim E$. Пусть фиксирован базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Тогда имеет место для всякого вектора $x \in E$

$$x = \xi^1 e_1 + \cdots + \xi^n e_n,$$

причем коэффициенты разложения по базису единственны. Обратно: всякий набор коэффициентов задает вектор x, так что имеет место биекция (на самом деле, изоморфизм векторных пространств) между E и пространством столбцов $\mathbb{R}^n$,

$$E \ni x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Возьмем линейный оператор (отображение) $A : E \to F$, базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в E и базис $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в F. Подействуем оператором A на элементы базиса e_k и разложим результат по элементам базиса $\mathbf{f}$:

$$Ae_k = \sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l$$

Составим матрицу a из получившихся коэффициентов следующим образом (мнемоническое правило: коэффициенты разложения каждого из Ae_j — последовательные *столбцы* этой матрицы):

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \ldots & \alpha_n^m \end{pmatrix}$$

def'n: матрица a, составленная по линейному оператору и паре базисов указанным выше образом, называется изображающей матрицей оператора A в паре базисов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$.

Возьмем теперь произвольный $x \in E$ и запишем:

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \xi^k Ae_k = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \sum_{l=1}^{m} \alpha_k^l f_l = \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^l \xi^k \right) f_l = \sum_{l=1}^{m} \eta^l f_l,$$

где, очевидно, η^l — коэффициенты разложения вектора Ax по базису $\mathbf{f}$. Значит,

$$\eta^l = \sum_{k=1}^{n} \alpha^l_k \xi^k, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

А последняя формула есть в точности определение матричного умножения (матрицы на вектор-столбец)!

Вывод: по отношению к фиксированной паре базисов, линейные отображения в паре линейных пространств биективно отображаются на пространство матриц соответствующего размера (определяемого размерностями данных пространств). Иными словами, изучение линейных отображений можно заменить изучением соответствующих матриц. При этом имеет место быть произвол в выборе базисов (а следовательно, их можно выбирать более или менее удобным способом).

Задача: введя базисы в F, G таких, что $E = F \dotplus G$, удобным способом, найти изображающую матрицу проектора P_F^G. Решить ту же задачу для ортогонального проектора P_F в евклидовом случае. ★

Задача: введя стандартный базис $\mathbf{e} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ в линейном пространстве полиномов $\mathcal{P}^n$ степени не выше n, рассмотреть оператор умножения на независимую переменную $p(x) \to xp(x)$ как оператор из $\mathcal{P}^n$ в $\mathcal{P}^{n+1}$. Проверить его линейность. 1) Вычислить его изображающую матрицу в паре стандартных базисов в $\mathcal{P}^n$, $\mathcal{P}^{n+1}$. 2) Ввести в $\mathcal{P}^{n+1}$ базис $\mathbf{f} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+x^2+\cdots+x^n\}$ и вычислить изображающую матрицу того же оператора в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$. ★

9. Лекция 8

9.1. **Действия над матрицами и их связь с линейными отображениями.** Начнем с того, что введем линейные операции над линейными операторами в векторных пространствах.

Определение 6. Пусть A_1, A_2 — линейные операторы из E в F. Сумма $A_1 + A_2$ — это линейный оператор из E в F, определяемый по правилу

$$Ax := A_1x + A_2x \quad \forall x \in E.$$

Определение 7. Пусть A — линейный оператор из E в F. Умножение αA его на скаляр α — это линейный оператор из E в F, определяемый по правилу

$$(\alpha A)x := \alpha(Ax) \quad \forall x \in E.$$

Замечание: линейность $A_1 + A_2$, αA надо проверять! (самостоятельно)

Теорема 9.1. *Множество линейных операторов $\mathcal{L}(E, F)$ из пространства E в F (говорят: линейные операторы в паре пространств E, F) является линейным векторным пространством. В случае, когда пространства E и F конечномерны, размерность $\mathcal{L}(E, F)$ также конечна и равна произведению размерностей E и F.*

Доказательство: самостоятельно. . ★

Помимо линейных операций, определим над линейными операторами и аналог произведения

Определение 8. Пусть $A : E \to F$, $B : F \to G$ — линейные операторы. Композицией $C = BA$ называется линейный оператор из E в G, определяемый правилом:

$$Cx \equiv (BA)x := B(Ax) \quad \forall x \in E.$$

Предложение 9.2. *Свойства композиции:*

$$B(A_1+A_2) = BA_1+BA_2; \quad (B_1+B_2)A = B_1A+B_2A; \quad (\alpha B)A = \alpha(BA); \quad B(\alpha A) = \alpha(BA)$$

Рассмотрим теперь, что происходит с изображающими матрицами операторов при умножении оператора на скаляр; сложении двух операторов; вычислении композиции двух операторов.

Теорема 9.3. *Пусть A, B — линейные операторы из E в F, а α — скаляр. Пусть $\mathbf{e}$ — базис в E, $\mathbf{f}$ — базис в F, а a, b — изображающие матрицы для A, B в этой паре базисов. Тогда*

$$A + B \sim a + b, \quad \alpha A \sim \alpha a,$$

то есть изображающей матрицей (относительно той же пары базисов!) для $A + B$ является $a + b$, а изображающей матрицей для αA является αa.

В предыдущей теореме предполагается следующее *определение* линейных операций над матрицами:

Определение 9. Пусть

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \dots & \beta_n^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^m & \beta_2^m & \dots & \beta_n^m \end{pmatrix}.$$

Тогда по определению полагаем:

$$a + b := \begin{pmatrix} \alpha_1^1 + \beta_1^1 & \alpha_2^1 + \beta_2^1 & \dots & \alpha_n^1 + \beta_n^1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 & \dots & \alpha_n^2 + \beta_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m + \beta_1^m & \alpha_2^m + \beta_2^m & \dots & \alpha_n^m + \beta_n^m \end{pmatrix}, \quad \gamma a := \begin{pmatrix} \gamma\alpha_1^1 & \gamma\alpha_2^1 & \dots & \gamma\alpha_n^1 \\ \gamma\alpha_1^2 & \gamma\alpha_2^2 & \dots & \gamma\alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma\alpha_1^m & \gamma\alpha_2^m & \dots & \gamma\alpha_n^m \end{pmatrix}$$

Обратите внимание: сложение определено только для двух матриц одинаковой размерности!!!

Теперь посмотрим, что происходит с изображающими матрицами, когда мы рассматриваем композицию двух линейных операторов. Пусть, как и раньше, $A : E \to F$, $B : F \to G$. Пусть в пространстве E выбран базис $\mathbf{e}$, в пространстве F — $\mathbf{f}$, а в пространстве G — $\mathbf{g}$. Пусть a изображает оператор A в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{f}$, а b изображает оператор B в паре базисов $\mathbf{f}, \mathbf{g}$.

Теорема 9.4. *Изображающей матрицей для $BA : E \to G$ в паре базисов $\mathbf{e}, \mathbf{g}$ служит матрица $c := ba$, являющаяся произведением матриц b и a. Произведение это вводится по определению следующим образом: если*

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \dots & \beta_m^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^l & \beta_2^l & \dots & \beta_m^l \end{pmatrix},$$

то

$$ba := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \beta_j^1 \alpha_1^j & \sum_{j=1}^m \beta_j^1 \alpha_2^j & \dots & \sum_{j=1}^m \beta_j^1 \alpha_n^j \\ \sum_{j=1}^m \beta_j^2 \alpha_1^j & \sum_{j=1}^m \beta_j^2 \alpha_2^j & \dots & \sum_{j=1}^m \beta_j^2 \alpha_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^m \beta_j^l \alpha_1^j & \sum_{j=1}^m \beta_j^l \alpha_2^j & \dots & \sum_{j=1}^m \beta_j^l \alpha_n^j \end{pmatrix}$$

Последняя матрица имеет l строк и n столбцов.

Обратите внимание: умножение определено только для матриц *согласованной* размерности. Это — следствие того, что, говоря о матрицах, мы говорим на самом деле о линейных операторах, а матричное умножение отражает операцию композиции двух отображений.

Вопрос: а какую роль в этом утверждении играет базис $\mathbf{f}$?

Доказательство: самостоятельно. ★

9.2. **Замена базиса, изменение координат при смене базиса.** Здесь рассмотрим один важный частный случай линейного оператора $A : E \to E$ (sic: оператор действует из пространства E в себя). Именно, пусть оператор A задан на элементах базиса следующим образом:

$$Ae_j = \tilde{e}_j,$$

где $\mathbf{e} = \{e_j\}_{j=1}^n$ и $\tilde{\mathbf{e}} = \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$ — два базиса в пространстве E. Ясно, что таким образом (в силу линейности) действие оператора A определено и на всяком элементе $x \in E$.

Построим изображающую матрицу этого оператора (оператора смены базиса) в паре базисов $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}$ (!!!). Как выяснялось выше, для этого необходимо подействовать A на элементы базиса $\mathbf{e}$ и разложить то, что получится, по этому же базису. Следовательно, мы имеем:

$$Ae_j \equiv \tilde{e}_j = \sum_{l=1}^n \alpha_j^l e_l, \quad j = 1, \dots, n,$$

и искомая матрица получается, как

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

Тогда для произвольного вектора $x \in E$ получим:

$$x = \sum_{j=1}^n \tilde{\xi}^j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^n \tilde{\xi}^j \sum_{l=1}^n \alpha_j^l e_l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\xi}^j \alpha_j^l \right) e_l,$$

откуда

$$\xi^l = \sum_{j=1}^n \alpha_j^l \tilde{\xi}^j, \quad l = 1, \dots, n.$$

Но это есть не что иное, как формула матричного умножения матрицы a на вектор $\tilde{\xi}$, именно:

$$\vec{x} = a\vec{\tilde{x}}, \text{ где } \vec{x} := \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{x}} := \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \tilde{\xi}^2 \\ \dots \\ \tilde{\xi}^n \end{pmatrix}$$

Самостоятельно: 1. Вычислить изображающую матрицу оператора замены базиса A в паре базисов: 1) $\mathbf{e}$, $\tilde{\mathbf{e}}$; 2) $\tilde{\mathbf{e}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$. ★

2. Вычислить матрицу, осуществляющую поворот декартовой системы координат в размерности 3. ★

9.3. **Алгебра квадратных матриц.** Итак, всякий линейный оператор A в пространстве E изображается *квадратной* матрицей. При этом, разумеется, для любой пары линейных операторов в одном и том же пространстве E определена композиция, которая приводит к умножению соответствующих изображающих матриц. В самом деле, очевидно, что квадратные матрицы одинакового размера всегда согласованы.

Таким образом, на множестве квадратных матриц размера $n \times n$ определено не только сложение (с групповыми свойствами), но и умножение (без групповых свойств!) Тем не менее, нейтральный элемент по умножению, очевидно, существует. В самом деле, для всякой a имеем $a\mathbf{1} = \mathbf{1}a = a$, где

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Задачи.

1. Для каких матриц определен обратный элемент по умножению? Т.е. для каких матриц a найдется такая b, что $ba = ab = \mathbf{1}$? ★

2. Ясно, что квадратную матрицу можно возвести в натуральную степень. Разберитесь, что будет с обратной операцией извлечения корня. Именно, вычислите корень из единичной матрицы $\mathbf{1}$ в размерности 2×2. Та же задача — для матрицы ★

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 (нильпотентные матрицы; задача о делителях нуля). Описать все матрицы a размера 3×3 такие, что $a^2 = \mathbf{0}$ и такие, что $a^3 = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нулевая матрица (все матричные элементы равны нулю). ★

4 (идемпотентные матрицы; задача о делителях единицы). Что можно сказать о матрице такой, что $a^2 = \mathbf{1}$? ★

5. Так как пространство линейных операторов из E в F является само по себе линейным пространством, то же верно и для матриц размерности $n \times m$, где n — число столбцов и m — число строк матриц удовлетворяет соотношениям: $n = \dim E$, $m = \dim F$. Можно ли на этом линейном пространстве ввести структуру Евклидова пространства, т.е. определить скалярное произведение, удовлетворяющее всем аксиомам последнего? Как именно? Воспользовавшись ответом на этот вопрос, превратите линейное пространство операторов из E в F в евклидово пространство. ★ ★

9.4. **Детерминант квадратной матрицы.** Рассмотрим последовательность $\{1, 2, \ldots, n\}$ чисел натурального ряда. Обозначим $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ произвольную *перестановку* чисел этой последовательности.

Назовем беспорядком (инверсией) такую ситуацию, что при каких-то j, k таких, что $j < k$ верно, что $i_j > i_k$ (в этом случае ясно, что элементы i_j и i_k стоят в "неправильном" порядке).

Назовем *транспозицией* операцию над перестановкой, при которой какие-то два ее элемента меняются местами.

Припишем перестановке *чётность* $\sigma(\mathcal{I})$: назовем ее четной, если число беспорядков в ней четно, и нечетной в обратном случае. Несложно показать, что четная перестановка переводится в $\{1, 2, \ldots, n\}$ обязательно четным числом транспозиций, а нечетная — нечетным.

Определение 10. Для квадратной матрицы a размерности $n \times n$ детерминант (определитель) вводится по формуле

$$\det a = \sum_{\mathcal{I}} (-1)^{\sigma(\mathcal{I})} a^1_{i_1} a^2_{i_2} a^3_{i_3} \cdots a^n_{i_n},$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ последовательности $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Введем так называемые *допустимые* преобразования матрицы a: (i) две строки матрицы меняются местами, (ii) одна из строк матрицы умножается на скаляр γ, (iii) к данной строке матрицы добавляется (поэлементно!) любая другая строка той же матрицы, умноженная на произвольный скаляр γ.

Теорема 9.5. *В случае (i)* $\det a$ *меняет знак на противоположный, в случае (ii)* $\det a$ *умножается на тот же скаляр* γ, *в случае (iii)* $\det a$ *остается без изменений.*

Доказать самостоятельно. ★

Теорема 9.6 (Основное свойство детерминанта)**.**

$$\forall a, b \in \mathcal{M}(n \times n) \quad \det(ab) = \det(ba) = \det a \det b.$$

(без доказательства).

9.5. **Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.** Здесь рассмотрим системы n уравнений для n неизвестных. Согласно определению матричного умножения, имеем:

$$\begin{cases} \alpha^1_1 x_1 + \alpha^1_2 x_2 + \cdots + \alpha^1_n x_n & = f_1 \\ \alpha^2_1 x_1 + \alpha^2_2 x_2 + \cdots + \alpha^2_n x_n & = f_2 \\ \ldots \\ \alpha^n_1 x_1 + \alpha^n_2 x_2 + \cdots + \alpha^n_n x_n & = f_n \end{cases} \Leftrightarrow a\vec{x} = \vec{f}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}$$

9.5.1. *Формулы Крамера.* При условии $\det a \neq 0$ решение данной системы линейных уравнений дается формулами Крамера:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad \Delta := \det A, \quad \Delta_k := \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_{k-1}^1 & f_1 & \alpha_{k+1}^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{k-1}^2 & f_2 & \alpha_{k+1}^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_{k-1}^n & f_n & \alpha_{k+1}^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}, k = 1, 2, \dots, n.$$

9.5.2. *Метод Гаусса.* Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 & f_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n & f_n \end{array}\right)$$

Допустимыми преобразованиями (теми же, что были введены выше, а именно: смена двух строк местами, умножение любой строки на скаляр, прибавление к данной строке любой другой, умноженной на произвольный скаляр) приведем эту матрицу к верхнетреугольному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{\alpha}_1^1 & \tilde{\alpha}_2^1 & \dots & \tilde{\alpha}_n^1 & \tilde{f}_1 \\ 0 & \tilde{\alpha}_2^2 & \dots & \tilde{\alpha}_n^2 & \tilde{f}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\alpha}_n^n & \tilde{f}_n \end{array}\right).$$

Теперь $x_n = \frac{\tilde{f}_n}{\tilde{\alpha}_n^n}$, далее из предпоследней строки находим x_{n-1}, а затем, перебирая строки снизу вверх, и значения остальных переменных.

9.6. **Вычисление методом Гаусса детерминанта.** Вычисление детерминанта проводится совершенно аналогично:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \dots & \alpha_{n-1}^1 & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \alpha_3^n & \dots & \alpha_{n-1}^n & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

допустимыми преобразованиями (с учетом необходимости при замене двух строк местами изменить знак детерминанта на противоположный, а при умножении строки на скаляр — умножить на тот же скаляр и детерминант!) приводится к детерминанту верхнетреугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_1^1 & \tilde{\alpha}_2^1 & \tilde{\alpha}_3^1 & \dots & \tilde{\alpha}_{n-1}^1 & \tilde{\alpha}_n^1 \\ 0 & \tilde{\alpha}_2^2 & \tilde{\alpha}_3^2 & \dots & \tilde{\alpha}_{n-1}^2 & \tilde{\alpha}_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{\alpha}_n^n \end{vmatrix},$$

после чего детерминант вычисляется по формуле:

$$\det a = \tilde{\alpha}_1^1 \tilde{\alpha}_2^2 \cdots \tilde{\alpha}_n^n.$$

9.7. **Альтернатива Фредгольма.**

Теорема 9.7. *Либо (i) система уравнений $a\vec{x} = \vec{f}$ с квадратной матрицей a имеет единственное решение при любой правой части $\vec{f}$, либо (ii) однородная система $a\vec{x} = \vec{0}$ обладает нетривиальными решениями. При этом случай (i) выделяется условием $\det a \neq 0$, а случай (ii) — условием $\det a = 0$. В этом последнем случае решение исходной системы $a\vec{x} = \vec{f}$, в зависимости от правой части $\vec{f}$, либо не существует, либо существует, но заведомо не является единственным.*

9.8. **Ранг линейного отображения. Ранг матрицы. Теорема о ранге.**

Определение 11. Ранг линейного отображения $A : E \to F$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{rank} A := \dim \operatorname{Im} A,$$

где образ $\operatorname{Im} A$ оператора A — это подпространство в F, определенное как

$$\operatorname{Im} A := \{Ax : x \in E\}$$

Определение 12. Ранг матрицы a — это ранг оператора, изображающей матрицей относительно некоторой пары базисов которого она является.

ВНИМАНИЕ: разумеется, таких операторов сколько угодно! Тем не менее, можно показать, что у них у всех одинаковая размерность образа!

Тем не менее, надо показать, что существует хоть один такой оператор для любой матрицы. Для этого рассмотрим $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ (понимаемые, как линейные пространства векторов-столбцов). В каждом из них введем естественный базис (*кочующая единица*):

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

и аналогично введем базис $\mathbf{f}$ в F. По матрице a (у которой будем полагать n столбцов и m строк) зададим линейный оператор A по правилу:

$$A\vec{x} := a\vec{x}, \quad \forall x \in E = \mathbb{R}^n.$$

Линейность данного оператора проверяется элементарно.

Предложение 9.8. *Изображающей матрицей введенного оператора A по отношению к паре стандартных базисов в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ является в точности матрица a.*

(Доказательство очевидно из определения изображающей матрицы).

Таким образом, любой матрице можно поставить в соответствие линейный оператор, одной из (заведомо неединственной!!!) изображающих матриц которого она является.

Теорема 9.9. *Ранг матрицы a совпадает с максимальным числом ее линейно независимых строк.*

Разумеется, в силу последней теоремы для вычисления ранга матрицы можно применять все тот же метод Гаусса в точности так же, как это делается при решении систем линейных уравнений.

Теорема 9.10 (Кронекер–Капелли)**.** *Система $a\vec{x} = \vec{f}$ допускает решение в том и только том случае, если ранг расширенной матрицы системы совпадает с рангом матрицы a,*

$$\mathrm{rank}(a|f) = \mathrm{rank}\, a.$$

Доказательство — самостоятельно. ★

10. Лекция 9. Основы математического анализа

Рекомендуемая литература:

(1) В.И. Смирнов. *Курс высшей математики*, т. I
(2) Г.М. Фихтенгольц. *Основы математического анализа*, т. I.
(3) У. Рудин. *Основы математического анализа.*

Студентам, заинтересованным в достаточно глубоком усвоении материала математического анализа, рекомендовано самостоятельно ознакомиться с материалом в (как минимум) объеме книги Рудина. В рамках курса лекций будет дана по необходимости упрощенная картина.

10.1. Предел последовательности.

Рассмотрим последовательность вещественных (внимание! *почти* ничего не изменится, если эти числа считать комплексными!) чисел $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 13. Будем говорить, что последовательность $\{x_k\}$ имеет предел, равный a, когда $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall k > N \text{ имеем, что } |x_k - a| < \varepsilon.$$

Если последовательность имеет предел, будем называть эту последовательность сходящейся.

Теорема 10.1. *Верно следующее.*

- *Независимость от конечного числа членов: свойство последовательности быть сходящейся, а также значение ее предела, не зависит от изменения любого конечного числа ее членов, и, в частности, от отбрасывания любого начального отрезка последовательности*
- *Единственность предела: если $\exists a$ — предел последовательности, то он единственен*
- *Ограниченность сходящейся последовательности: если последовательность сходится, то $\exists C : \forall k\ |x_k| \le C$.*

Доказательство. Первое — непосредственно из определения.

Второе — докажем от противного: пусть $\exists a, b$ — два разных предела. Построим два интервала $[a - \frac{b-a}{3}, a + \frac{b-a}{3}]$ и $[b - \frac{b-a}{3}, b + \frac{b-a}{3}]$, считая для определенности $b > a$. Ясно, что эти интервалы не пересекаются. С другой стороны, по определению предела, начиная с какого-то номера, все члены последовательности должны принадлежать как первому интервалу, так и второму ?!?

Третье: возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N$: при всех $k > N$ имеем: $|x_k - a| < 1$, откуда $|x_k| < |x_k - a| + |a| < 1 + |a|$. □

Теорема 10.2. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$$

и

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

Также, если $y_k \neq 0\ \forall k$ *и* $b \neq 0$, *имеем:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство. Зададимся произвольным ε. На основании определения предела найдем $N_1 : \forall k > N_1\ |x_k - a| < \varepsilon/2$ и $N_2 : \forall k > N_2\ |y_k - b| < \varepsilon/2$. Тогда при $k > \max\{N_1, N_2\}$

$$|x_k + y_k - (a + b)| \leq |x_k - a| + |y_k - b| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Аналогично доказываем второе свойство:

$$|x_k y_k - ab| = |x_k y_k - x_k b + x_k b - ab| \leq |x_k||y_k - b| + |b||x_k - a|.$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдем $N_1 : \forall k > N_1\ |y_k - b| < \varepsilon/(2C)$ и $N_2 : \forall k > N_2 |x_k - a| < \varepsilon/(2|b|)$, где C — такая константа, что $|x_k| \leq C\ \forall k$. Отсюда сразу же получаем искомое при $k > \max\{N_1, N_2\}$.

Наконец, докажем третье свойство:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|bx_n - ay_n|}{|by_n|} = \frac{|b(x_n - a) - a(y_n - b)|}{|b||y_n|}$$

С другой точки зрения,

$$|b| = |b - y_n + y_n| \leq |y_n - b| + |y_n| < \varepsilon + |y_n| \Rightarrow |y_n| > |b| - \varepsilon.$$

Будем считать ε настолько малым, чтобы $|y_n| > |b|/2$, тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{2|x_n - a|}{|b|} + \frac{2|a||y_n - b|}{|b|^2}.$$

Теперь выбираем для всякого достаточно малого ε числа $N_1 : \frac{2|x_k - a|}{|b|} < \varepsilon/2$ при $k > N_1$ и $N_2 : \frac{2|a||y_k - b|}{|b|^2} < \varepsilon/2$ при $k > N_2$, и получаем требуемую оценку для $k > \max\{N_1, N_2\}$. □

Теорема 10.3 (Переход к пределу в неравенствах)**.** *Пусть* $x_k \leq y_k$, *и обе последовательности имеют пределы,* a *и* b, *соответственно. Тогда* $a = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = b$.

Доказательство. Начнем с частного случая: пусть $x_k = x = 0\ \forall k$. Допустим, что $b < 0$. Но это означает, что начиная с некоторого номера N все члены последовательности y_k лежат в $[3b/2, b/2]$, то есть строго левее нуля ?!?

Рассмотрим теперь $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = b - a$, но по уже доказанному получаем: $b - a \geq 0$. □

Теорема 10.4 (Непрерывность абсолютной величины)**.**

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

Доказательство.

$$||x_k| - |a|| \leq |x_k - a|.$$

□

Теорема 10.5 (О двух ментах)**.** *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. *Тогда, если*

$$x_n \le z_n \le y_n,$$

то

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Доказательство. Возьмем ε и N такое, что при всех $k > N$ имеем: $-\varepsilon < x_k - a < \varepsilon$ и $-\varepsilon < y_k - a < \varepsilon$. Тогда

$$-\varepsilon < x_k - a \le z_k - a \le y_k - a < \varepsilon$$

□

Определение 14. Назовем $\{x_n\}$ последовательностью, обладающей свойством Коши (кратко: последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \text{ при } k, j > N \text{ имеем } |x_k - x_j| < \varepsilon.$$

Теорема 10.6 (Критерий Коши)**.** *Для того, чтобы* $\{x_n\}$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она обладала свойством Коши.*

10.2. Максимум, минимум, точные нижняя и верхняя грани множества.

Определение 15. Пусть X — некое множество вещественных чисел. Число $x^* \in X$ называется максимумом X, если $\forall x \in X \ x \le x^*$. Число x_* называется минимумом X, если $\forall x \in X \ x \ge x_*$.

Максимум и минимум могут и не существовать (в случае открытых множеств). Если они существуют, то они единственны. Обозначения: $\max X := x^*$, $\min X := x_*$

Определение 16. Пусть X — некое вещественное множество. Число x^{**} называется верхней гранью множества X, если $\forall x \in X \ x \le x^{**}$. Число x_{**} называется нижней гранью X, если $\forall x \in X \ x \ge x_{**}$.

Если верхняя (нижняя) грань существует, она заведомо не единственна.

Определение 17. Число $\sup X$ называется точной верхней гранью X, т.е. оно является наименьшей верхней гранью, или же $\forall \varepsilon > 0$ число $\sup X - \varepsilon$ уже не является верхней гранью.

Число $\inf X$ называется точной нижней гранью X, т.е. оно является наибольшей нижней гранью, или же $\forall \varepsilon > 0$ число $\inf X + \varepsilon$ уже не является нижней гранью.

Теорема 10.7. *У ограниченного множества X существуют и единственны* $\sup X$ *и* $\inf X$. *Если множество ограничено сверху, существует и единственен* $\sup X$. *Если множество ограничено снизу, существует и единственен* $\inf X$.

Если множество не ограничено сверху, полагают $\sup X = +\infty$. Если множество не ограничено снизу, полагают $\inf X = -\infty$.

Теорема 10.8. *У ограниченного непустого множества* X $\exists \{x_k\} \in X : \lim_{k\to\infty} x_k = \sup X$*; аналогично* $\exists \{y_k\} \in X : \lim_{k\to\infty} y_k = \inf X$

Доказательство. Возьмем натуральное число k. Рассмотрим $\sup X - \frac{1}{k}$. По определению точной верхней границы, это число не является верхней гранью, значит, найдется $x_k \in X$: $x_k > \sup X - \frac{1}{k}$. Но тогда

$$\sup X - \frac{1}{k} < x_k \leq \sup X,$$

и мы воспользуемся двумя ментами для доказательства того, что $\lim_{k\to\infty} x_k = \sup X$. $\square$

11. Лекция 10

11.1. **Монотонные последовательности.**

Определение 18. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем монотонно возрастающей, если $x_k \geq x_j$ для $\forall k > j$ (строго монотонно возрастающей, если $x_k > x_j$ для $\forall k > j$).

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем монотонно убывающей, если $x_k \leq x_j$ для $\forall k > j$ (строго монотонно возрастающей, если $x_k < x_j$ для $\forall k > j$).

Теорема 11.1. *Монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет предел. Аналогично, монотонно убывающая ограниченная снизу последовательность тоже имеет предел.*

Доказательство. Докажем утверждение для случая монотонно возрастающей ограниченной сверху последовательности. Пусть X — множество, состоящее из всех элементов последовательности $\{x_n\}$. По предположению, X ограничено, значит, у него есть $\sup X$. Это значит, что $x_n \leq \sup X$, и $\forall \varepsilon > 0$ найдется x_N, где $N = N(\varepsilon)$, такой что $x_N > \sup X - \varepsilon$. Но раз последовательность монотонно возрастает, то же самое будет верно и для всех $n > N$. Иными словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n > N \text{ имеем } x_n > \sup X - \varepsilon.$$

Но $x_n > \sup X - \varepsilon$ – это то же самое, что $0 \leq \sup X - x_n < \varepsilon$.

$\square$

11.2. **Изображение вещественных чисел бесконечными десятичными дробями.**

В школе сообщается, что вещественное число записывается в виде $q_0, q_1 q_2 q_3 \ldots$, например, $0,333\ldots$. Здесь q_k при $k > 0$ берется из множества $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. В силу использования десятичной системы, это значит, что

$$x = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \cdots,$$

что эквивалентно тому, что мы определяем вещественное число по правилу

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \text{где} \quad x_n := q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \cdots + \frac{q_n}{10^n}.$$

При этом предел в последней формуле существует в силу последней доказанной теоремы, ибо x_n монотонно возрастает и ограничена:

$$x_n \leq q_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \leq q_0 + 9\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = q_0 + 1.$$

Внимание: способ изображения вещественных чисел бесконечными десятичными дробями не единственен:

$$1 = 0,99999\ldots; \quad 0,1 = 0,09999\ldots.$$

Обычный способ борьбы с теми, кто этого не понимает, в интернете:

$$1/3 = 0,333\ldots \Rightarrow 1 = 3 * 0,333\ldots = 0,999\ldots.$$

Рекомендуется прочитать про аксиоматику вещественных чисел по Кантору (вещественные числа возникают при этом, как классы эквивалентности обладающих пределами последовательностей рациональных чисел).

11.3. **Число** e**.**

Определение 19.

$$e := \lim_{n\to\infty} x_n, \quad x_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Ясно, что последовательность x_n ограничена сверху:

$$k! \geq 2^{k-1} \Rightarrow x_n \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} < 3.$$

Очевидно также, что x_n монотонно растет, следовательно, у нее есть предел.

Теорема 11.2. *(i) Число e иррационально; (ii)*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

11.4. **Предел функции.** Рассмотрим множество X вещественных чисел. Зададим на этом множестве функцию (отображение) f, сопоставляющую со всяким $x \in X$ вещественное число $f(x)$. Образ функции $f(X)$ — это множество $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$. Предельная точка a множества X — это такая точка, любая проколотая $\varepsilon-$окрестность $[a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon]$ которой содержит хоть одну точку $x \in X$.

Легко понять, что для всякой предельной точки a множества X найдется хотя бы одна последовательность $\{x_n\}$ элементов множества $X\setminus\{a\}$ такая, что $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Поэтому и термин «предельная точка». Верно и обратное: все пределы последовательностей элементов множества X являются предельными точками этого множества. ★

Определение 20. Пусть a есть предельная точка X. Число b называется пределом функции f при стремлении x к a, если:

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \text{ таких, что } 0 < |x-a| < \delta, \text{ верно, что } |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Привести пример функции, заданной на $X = \mathbb{R}$, у которой нет предела ни в одной точке множества X. ★

Привести пример функции, заданной на $X = \mathbb{R}$, у которой нет предела в точности в одной точке множества X и есть пределы в остальных его точках. ★

Определите предел в точке для комплекснозначной функции комплексной переменной, $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. ★

Теорема 11.3 (о связи предела функции с пределом последовательности)**.** *Для того, чтобы* $\lim_{x\to a} f(x) = b$*, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности* x_n*, целиком лежащей в области определения функции и такой, что* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$*, было верно, что* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$*:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \left\{\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b\right\}$$

В формулировке последней теоремы важно проверять существование предела и равенство его одному и тому же числу b на *любой* последовательности, имеющей пределом a (к слову, хотя бы одна такая последовательность заведомо существует в силу того, что a — предельная точка множества X!) Постройте примеры того, что (i) на некоторых таких последовательностях пределы не существуют, а на других — существуют, (ii) на одних последовательностях пределы равны одному числу, а на других — другому. ★

Распишите утверждение теоремы на языке $\varepsilon - \delta$. Как оно будет выглядеть для комплекснозначных функций комплексной переменной? ★

11.5. **Арифметические свойства предела функции.**

Теорема 11.4. *Пусть* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim_{x\to a} g(x) = c$*, а функции* f *и* g *определены на одном множестве* X *с предельной точкой* a*. Тогда*

- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$*;*
- $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$*;*
- *Если дополнительно* $c \neq 0$*, то* $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x)$*.*
- *Если в некоторой окрестности точки* a *выполнено, что* $f(x) \leq g(x)$*, то* $b \leq c$*.*

Доказательства переносятся со случая соответствующих утверждений для пределов последовательностей с использованием сформулированной выше теоремы о связи предела функции и предела последовательности.

Теорема 11.5. *Верно следующее:*

- *Единственность предела: если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim_{x\to a} f(x) = c$*, то* $b = c$*.*
- *Локальная ограниченность имеющей предел функции: если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$*, то* $\exists \delta > 0$ *и константа* C : *имеем* $|f(x)| \leq C \ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap X$*.*
- *Независимость предела от значений функции вне любой окрестности* a : *факт существования предела и его значение не изменяются, если произвольным образом изменить функцию вне любой окрестности точки* a*.*
- *Независимость предела от значения функции в самой точке* a*: если* $a \in X$*, то изменение значения* $f(a)$ *не влияет ни на факт существования предела при* $x \to a$*, ни на его значение.*

Доказательства вполне аналогичны доказательствам соответствующих свойств пределов последовательностей.

12. Лекция 11

Определение 21. 1) Сужение функции f. Пусть $Y \subset X$, и пусть $g(x)$ определена на Y следующим образом: $g(x) := f(x)$. Тогда g — сужение f, обозначение: $g := f|_Y$.

2) Суперпозиция двух функций. Пусть f определена на X и имеет значения в Y, а g определена всюду на Y и имеет значения в Z. Тогда суперпозиция $g \circ f$ определена на X со значениями в Z по следующему правилу:

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Теорема 12.1 (пределы сужения и суперпозиции)**.** *1) Пусть* $Y \subset X$*, функция* f *определена на* X*. Пусть* a *— предельная точка множества* Y *(тогда, разумеется, она является и предельной точкой множества* X*). Если существует предел* $\lim_{x\to a} f(x) = b$*, то существует и предел сужения* $\lim_{x\to a} f|_Y(x) = b$*.*

2) Пусть f определена на X и имеет значения в Y, а g определена всюду на Y и имеет значения в Z. Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$, то b — предельная точка множества Y. Если дополнительно $\lim_{y\to b} g(y) = c$, то $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$.

Доказательство. 1) Доказательство очевидно;

2) Распишем условия:

$$\forall\delta_2 > 0 \exists\delta_1 > 0 : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-b| < \delta_2$$

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta_2 > 0 : 0 < |y-b| < \delta_2 \Rightarrow |g(y)-c| < \varepsilon.$$

Тот факт, что b — предельная точка множества Y, следует прямо из первой строки. Подставим во вторую строку $y = f(x)$ и начинаем читать вторую строчку: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется δ_2, (теперь из первой строчки:) для этой самой δ_2 найдется $\delta_1 > 0$: $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-b| < \delta_2$ (и снова из второй строчки:) $\Rightarrow |g(f(x))-c| < \varepsilon$. Теперь убираем оттуда промежуточное нахождение δ_2:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1 > 0 : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x))-c| < \varepsilon,$$

то есть в точности то, что нужно. □

12.1. **Односторонние пределы.** Пусть X — область задания функции f. Пусть a — предельная точка этой области. Рассмотрим $X_+ := X \cap [a, +\infty)$ и $X_- := X \cap (-\infty, a]$. Теперь введем сужения функции f на эти множества: $f_+ := f|_{X_+}$, $f_- := f|_{X_-}$.

Определение 22. Если $\exists \lim_{x\to a} f_+ = b$, то говорят, что существует предел справа в точке a функции f, обозначение: $\lim_{x\to a+0} f(x)$.

Если $\exists \lim_{x\to a} f_- = c$, то говорят, что существует предел слева в точке a функции f, обозначение: $\lim_{x\to a-0} f(x)$.

Несложно понять, что в ситуации, когда a — предельная точка обоих множеств X_-, X_+, ★

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \text{одновременно } \exists \lim_{x\to a+0} f(x) = b, \exists \lim_{x\to a-0} f(x) = b.$$

Предложите обобщение понятия односторонних пределов на случай комплекснозначных функций комплексной переменной. Достаточно ли рассматривать сходимость на лучах? Обоснуйте ответ примером. ★

12.2. **Монотонные функции.** В данном пункте будем рассматривать функции, заданные на интервале $I \subset \mathbb{R}$.

Определение 23. Функция f называется монотонно возрастающей, если $\forall x_1, x_2 \in I$: $x_1 < x_2$ имеем $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функция f называется монотонно убывающей, если $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2$ имеем $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функция называется монотонной, если она либо монотонно убывает на I, либо монотонно возрастает на I.

Теорема 12.2. *Ограниченная монотонная функция f на $I = (a, b)$ имеет пределы при $x \to a$ и при $x \to b$.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай, когда f монотонно возрастает, и нас интересует предел в правом конце интервала I, т.е. в b.

Пусть, коль скоро функция ограничена, $c := \sup\{f(x) : x \in I\}$. Покажем, что это и есть предел:

$$c = \lim_{x\to b} f(x).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $c - \varepsilon$. Ясно, что это число не является верхней гранью для $\{f(x) : x \in I\}$. Но тогда найдется $x_1 \in I : f(x_1) > c - \varepsilon$. Но раз функция монотонно возрастает, то же самое верно и для всех $x > x_1$. Значит, для $\forall x \in [x_1, b)$ имеем

$$c - \varepsilon < f(x) \le c < c + \varepsilon.$$

□

А что будет с только что доказанной теоремой, если в условии заменить $I = (a, b)$ на $I = [a, b]$? Сформулируйте и докажите соответствующее утверждение. ★

Докажите, что монотонная функция на интервале $[a, b]$ непрерывна тогда и только тогда, когда она принимает все значения в интервале $[f(a), f(b)]$. ★

Докажите, что монотонная функция на интервале (a, b) в каждой точке интервала имеет пределы слева и справа. ★

12.3. **Бесконечные пределы.**

Определение 24.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N : |x| > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N : x > N \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

(аналогично $x \to -\infty$)

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 1/\varepsilon$$

(аналогично $\lim = -\infty$)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \forall\varepsilon > 0 \exists\delta : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > 1/\varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N : |x| > N \Rightarrow |f(x)| > 1/\varepsilon$$

(и так далее...)

Обобщите понятие бесконечных пределов на случай комплекснозначных функций комплексной переменной. ★

12.4. **Непрерывность функции.**

Определение 25. Функция непрерывна в точке a

$$\iff \exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Функция непрерывна в X, если она непрерывна во всех точках множества X.

Распишите данное определение на языке $\varepsilon - \delta$. Как определить непрерывность для комплекснозначной функции комплексной переменной? ★

Теорема 12.3 (Арифметические операции над непрерывными функциями)**.** *Пусть функции f, g непрерывны на X. Тогда*

- *$f+g$ непрерывна*
- *fg непрерывна*
- *при $g \neq 0$ функция f/g непрерывна*
- *если $Y \subset X$, то сужение $f|_Y$ непрерывно*

Теорема 12.4. *Пусть f определена на X и имеет значения в Y, а g определена всюду на Y и имеет значения в Z. Пусть f и g непрерывны на X, Y, соответственно. Тогда $g \circ f$ непрерывна на X.*

Примеры непрерывных функций.

(1) Постоянная функция
(2) Полином на $\mathbb{R}$.
(3) Экспонента на $\mathbb{R}$ (доказательство будет позже)
(4) $\sin x, \cos x$ на $\mathbb{R}$
(5) $\tan x, \cot x$ на $\mathbb{R}$ вне нулей знаменателей.

12.5. **Классификация точек разрыва.**

Определение 26. Пусть функция задана на интервале (возможно, полу- или бесконечном). Точка a называется точкой разрыва функции f, если функция в данной точке не является непрерывной. Разрывы классифицируются на:

- **Устранимые** $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$. *Устранимые разрывы принято устранять.*
- **Разрывы I рода (скачок)** $\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x)$, но оба предела существуют в классическом понимании (как конечные)
- **Разрывы II рода** — это все неустранимые разрывы, не являющиеся скачками. Например, один (или оба) односторонний предел бесконечен.

13. Лекция 12

13.1. **Функции, заданные на замкнутых интервалах. Теорема Коши.**

Теорема 13.1 (Коши)**.** *Пусть функция f непрерывна на интервале $[a,b]$. Пусть знаки $f(a)$ и $f(b)$ различны. Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что $f(c)=0$.*

Доказательство. Пусть $f(a)<0$, $f(b)>0$. Обозначим $A := \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$. Это множество не пусто и ограничено, значит, у него есть точная верхняя грань. Положим $c := \sup A$ и докажем, что оно-то нам и нужно.

Ясно, что $c \le b$: так как $A \subset [a,b]$, имеем, что c — его верхняя грань, откуда сразу $c \le b$.

Рассмотрим интервал $(c - \frac{1}{k+1}, c)$, где $k \in \mathbb{N}$. Этот интервал заведомо содержит точки из A, иначе $c - \frac{1}{k+1}$ было бы верхней границей, но c — супремум?!?

Выберем теперь точку $x_k \in (c - \frac{1}{k+1}, c)$. Ясно, что: $\lim_{k\to\infty} x_k = c$. Воспользовавшись непрерывностью: $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(c)$. Воспользовавшись $f(x_k)<0$ и перейдя к пределу в неравенстве: $f(c) \le 0$.

Отсюда видно, что $c<b$ строго. Но коль скоро так, построим множества $(c, c+\frac{1}{k+1})$ и ровно таким же способом получим, что $f(c) \ge 0$. □

Следствие 13.2. *Вещественная непрерывная функция, заданная на интервале, наряду с любыми своими двумя значениями принимает и любые промежуточные.*

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$ и $f(x_1) \neq f(x_2)$ (для определенности: $f(x_1) < f(x_2)$). Пусть $f(x_1) < d < f(x_2)$. Рассмотрим $f(x) - d$ и применим к ней теорему Коши. Тогда найдется точка c такая, что $f(c) = d$. $\square$

13.2. **Непрерывность обратной функции.**

Определение 27. Рассмотрим функцию, действующую из X в Y

- f — отображение «на», или сюръекция $\iff \forall y \in Y \exists x \in X : f(x = y)$
- f — отображение «в», или инъекция $\iff \forall x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$
- f — взаимно-однозначное отображение, или биекция $\iff$ она одновременно и сюръекция, и инъекция.

Теорема 13.3. *Пусть f — биекция $I \to I_1$, где I, I_1 — интервалы вещественной оси. Если f непрерывна, то обратная функция f^{-1} тоже непрерывна.*

(без доказательства)

13.3. **Теорема Вейерштрасса.**

Теорема 13.4 (Больцано-Вейерштрасс)**.** *Всякая ограниченная бесконечная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Последовательность ограничена $\Rightarrow$ лежит в интервале $[a_1, b_1]$. Возьмем произвольное $x_1 \in [a_1, b_1]$. Разделим интервал пополам и возьмем ту его половину $[a_2, b_2]$, которая содержит бесконечное число членов последовательности, и $x_2 \in [a_2, b_2]$. Строим бесконечный цикл, получаем последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Покажем, что у этой последовательности есть предел. Но по построению, x_k *и все следующие за ним члены последовательности* лежат в интервале $[a_k, b_k]$ длины, стремящейся к нулю. Доказательство завершается ссылкой на критерий Коши сходимости последовательности. $\square$

Докажите для последовательностей *комплексных* чисел! ★

Теорема 13.5 (Вейерштрасс, а на самом деле — тоже Больцано)**.** *Пусть функция f непрерывна на замкнутом интервале $I = [a, b]$. Тогда*

I. Функция f ограничена на I.

II. Функция f достигает (хотя бы однажды) своих минимального и максимального значений, т.е. $\exists\ c, d \in I : f(c) \le f(x) \le f(d)$ для всех $x \in I$.

Доказательство. I. От противного: пусть она НЕ ограничена. Но тогда $\forall n$ найдется $x_n : f(x_n) > n$. По теореме Больцано-Вейерштрасса, найдется сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Но теперь по непрерывности должны иметь $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k})$. Но по построению видим, что $f(x_{n_k})$ расходится в $+\infty$?!?

II. Докажем теперь, что максимум реализуется. Уже доказано, что функция f ограничена. Рассмотрим $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Покажем, что найдется такая точка $d \in [a, b] : M = f(d)$. Опять же, предположим обратное. Но тогда $1/(M - f(x))$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда по первому пункту она должна быть ограничена, но: $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in [a, b] : f(x) > M - \varepsilon$ (потому что точная верхняя грань!). Это все равно, что $M - f(x) < \varepsilon$, но тогда $1/(M - f(x)) > 1/\varepsilon$?!? $\square$

Верна ли теорема Вейерштрасса для функций $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$? Если да, то в какой форме? Докажите! ★

13.4. **Дополнительные задачи за дополнительные баллы.** 1. Что можно сказать о $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$, если x_n сходится, в том числе к нулю? А если последовательность имеет бесконечный предел? Привести пример.

2. Пусть $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$. Доказать, что $\exists\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$.

3. Показать, что $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ не ограничена в любой окрестности нуля, но не стремится к бесконечности в этой точке.

4. Демидович, 607.
5. Демидович, 637.1.
6. Демидович, 642.
7. Демидович, 671.
8. Демидович, 672.
9. Демидович, 736

13.5. **Определение производной.**

Определение 28. Рассмотрим функцию $f : X \mapsto Y$, где $X, Y \subset \mathbb{R}$. Функция f дифференцируема в точке x_0, внутренней точке множества X, если существует конечный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Если этот предел существует, то он называется производной функции f в точке x_0, обозначение: $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Фактически, производная — это предел в нуле функции $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, которая определена при $h \neq 0$ и таких, что $x_0 + h \in X$.

13.5.1. *Примеры.*

- $f = c \Longrightarrow f' = 0$ всюду.
- $f = x \Longrightarrow f' = 1$ всюду.
- $f = 1/x \Longrightarrow f' = -1/x^2$ всюду, кроме $x = 0$.

Свойство локальности производной: если изменить функцию вне любой фиксированной окрестности точки x_0, производная этого «не заметит».

14. Лекция 13

14.1. O**–символика.** Предложена О-символика Ландау (это Эдмунд Ландау, а не Лев Ландау, и математик, а не физик!)

Определение 29. Пусть есть две функции, f и g, обе определенные в проколотой окрестности точки 0. Тогда

$$f(x) = O(g(x)) \iff |f(x)| \le C|g(x)| \forall\ x \in V,$$

где V — некоторая проколотая окрестность нуля, и C — некая фиксированная константа. В этом случае говорят, что функция f имеет порядок О большое от g.

Определение 30. Пусть есть две функции, f и g, обе определенные в проколотой окрестности точки 0. Тогда

$$f(x) = o(g(x)) \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists V_\varepsilon : |f(x)| \le \varepsilon|g(x)|\ \forall\ x \in V_\varepsilon,$$

и говорят, что функция f имеет порядок о малое от g.

Внимание: в обоих случаях все окрестности берутся проколотыми!

Ясно, что определение о малого означает в точности то, что найдется такая функция $\alpha(x)$, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$, что $f(x) = \alpha(x)g(x)$. Хотелось бы написать тогда, что условие $f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$, но вот с этим могут возникнуть проблемы, если $g(x)$ обращается в ноль, например, в любой сколь угодно малой окрестности точки 0.

В частности, легко сообразить, что:

$$O(g) + O(g) = O(g)$$

$$C \cdot O(g) = O(g)$$

$$o(g) = O(g), \text{ но не наоборот.}$$

$$o(g) + o(g) = o(g)$$

$$C \cdot o(g) = o(g)$$

$$o(g)O(g) = o(g)$$

и так далее (см. задачи 646 и далее в Демидовиче).

Важный частный случай:

$$f = O(1) \iff f \text{ ограничена в некоторой окрестности точки } 0.$$

$$f = o(1) \iff \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Условие существования предела функции в точке 0:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A \iff f(x) = A + o(1).$$

В произвольной точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff f(x_0 + h) = A + o(1)$$

Условие непрерывности функции в точке x_0 :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff f(x_0 + h) = f(x_0) + o(1)$$

Ну а тогда условие дифференцируемости функции в точке x_0 превращается в

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

Следовательно, сравнивая две последние формулировки, имеем бесплатно

Предложение 14.1. *f дифференцируема в точке $x_0 \Longrightarrow f$ непрерывна в точке x_0.*

Привести пример того, что обратное неверно!

Геометрический смысл производной в точке: это угловой коэффициент прямой, которая касается графика функции в заданной точке.

14.2. **Правила дифференцирования.**

Теорема 14.2. *1. Производная линейна:*

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x).$$

2. Производная произведения:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

3. Производная частного:

$$(f(x)/g(x))' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

4. Производная суперпозиции:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Доказательство. 1. Расписать условие наличия производных у f и g с использованием О-символики, сложить и воспользоваться неравенством треугольника.

2. Доказывается ровно таким же образом, но условия не складываются, а перемножаются

3. Получается из 2., 4. и отмеченного выше свойства $(1/x)' = -1/x^2$.

4. Надо записать условие наличия производной функции f, подставить туда $g(x)$ вместо x_0 и $g(x+h)-g(x)$ вместо h и воспользоваться условием дифференцируемости g в точке x. □

Теорема 14.3. *Пусть отображение $f : X \mapsto Y$ — биекция, а x_0 — внутренняя точка X, $y_0 := f(x_0)$ — внутренняя точка Y. Пусть дополнительно $\exists\ f'(x_0) \neq 0$ и $f^{-1} : Y \mapsto X$ непрерывно. Тогда*

$$\exists (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим разностное отношение

$$\Phi_h := \frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h}.$$

Пусть x таково, что $y_0+h = f(x)$, то есть, $x = f^{-1}(y_0+h)$. Это корректно в силу предположений теоремы.

Тогда

$$\Phi_h = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}.$$

Поделим числитель и знаменатель на $x-x_0$. Это можно, потому что, коль скоро оказалось бы, что $x = x_0$, то $f^{-1}(y_0+h) = f^{-1}(y_0)$, что значило бы, что прообразы точек y_0 и y_0+h совпадают, но тогда f — многозначно?!?

Тогда сразу же

$$\lim_{h\to 0} \Phi_h = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

14.3. **Дифференцирование элементарных функций.** 1. Выше отмечалось: $c' = 0$, $x' = 1$, $(1/x)' = -1/x^2$.

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (воспользовались правилом дифференцирования произведения)

3. Любой полином степени n дифференцируем, его производная — полином степени $n-1$ (пользуемся предыдущим пунктом и линейностью дифференцирования).

4. $(e^x)' = e^x$ (без доказательства).

5. $(\ln x)' = 1/x$ (по правилу дифференцирования обратной функции)

6. $(\sin x)' = \cos x$ (можно получить из школьной тригонометрии)

7. $(\cos x)' = -\sin x$ (аналогично)

Таким образом, используя правила дифференцирования, сформулированные в предыдущих двух теоремах, получаем возможность продифференцировать любую элементарную функцию.

14.4. **Дополнительные задачи.** 1. Доказать, что если f дифференцируема в x_0, то $f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+1/n)-f(x_0)}{1/n}$. Предъявить пример того, что обратное неверно.

2. Показать, что следующая функция имеет разрывную производную.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

3. При каком условии функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

(а) непрерывна в нуле? (б)дифференцируема в нуле? (в) имеет непрерывную производную в нуле?

4. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos(1/x)\right|, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности нуля, но дифференцируема при $x = 0$.

5. Можно ли дифференцировать неравенство?

14.5. **Односторонние производные.**

Определение 31.

$$f'(x_0+0) := \lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}; \quad f'(x_0-0) := \lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Очевидно, что существование производной $f'(x_0)$ эквивалентно тому, что обе односторонние производные в этой точке существуют и равны друг другу.

14.6. **Основная теорема дифференциального исчисления.** Всюду предполагается, что функция задана на замкнутом интервале $[a,b]$.

Теорема 14.4 (Ферма)**.** *Пусть в точке x_0 функция дифференцируема и достигает своего максимального значения. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Коль скоро она дифференцируема в x_0, то x_0 — внутренняя точка интервала. Из того, что в точке x_0 максимум, имеем:

$$h > 0 \Longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0.$$

Переходя к пределу, имеем: $f'(x_0+0) \le 0$.

Аналогично,

$$h < 0 \Longrightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0 \Longrightarrow f'(x_0-0) \ge 0.$$

Но так как функция дифференцируема, $f'(x_0-0) = f'(x_0+0) = 0$. □

Разумеется, применяя теорему Ферма к функции $-f$, получаем тот же результат и для минимума функции на интервале.

Теорема 14.5 (Ролль)**.** *Пусть функция непрерывна всюду на $[a,b]$ (в краткой записи: $f \in C[a,b]$), пусть она также дифференцируема всюду на (a,b), и пусть $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса, функция достигает своих максимума и минимума. Если эти последние равны, то функция постоянна, следовательно, ее производная всюду равна нулю, и утверждение теоремы тривиально верно.

Если максимум строго больше минимума, то хоть один из них достигается во внутренней точке интервала, потому что на концах интервала значения функции равны друг другу. Тогда утверждение следует из теоремы Ферма. □

Теорема 14.6 (Коши)**.** *Пусть функции $f, g \in C[a,b]$ и дифференцируемы всюду на (a,b). Пусть также $g'(x) \ne 0$ всюду на (a,b). Тогда*

$$\exists\ x_0 \in (a,b): \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) := (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$

и применим к ней теорему Ролля. □

Теорема 14.7 (Лагранж)**.** *Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема всюду на (a,b). Тогда есть такая точка x_0, что*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a).$$

Доказательство. Возьмем $g(x) = x$ и применим теорему Коши. □

Следствие 14.8 (Основная теорема дифференциального исчисления)**.** *Пусть функция $f \in C[a,b]$ и дифференцируема всюду на (a,b). Тогда*

$$|f(b) - f(a)| \le \sup_{t\in(a,b)} |f'(t)||b-a|.$$

Важно: теоремы Ролля, Коши и Лагранжа не допускают обобщения на случай функций нескольких переменных (включая случай функций комплексной переменной). А вот основная теорема дифференциального исчисления верна и в общем случае.

15. Лекция 14

15.1. **Производные высших порядков.** Пусть f дифференцируема во всех точках (a,b). Тогда имеем новую функцию f', которая определена всюду на (a,b). Она ничем не хуже f, и ее также можно попытаться продифференцировать. Если найдется ее производная в точке x_0, то будем называть ее второй производной функции f в точке x_0, обозначение:

$$f''(x_0) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \equiv \frac{d^2 f}{dx^2}\Big|_{x_0}.$$

Если вторая производная существует во всех точках интервала (a,b), имеем новую функцию $f''(x)$, определенную на (a,b), и можем рассматривать производную уже от нее. Это будет третья производная от исходной функции f. И так далее...

Обозначим: $C(a,b)$ — класс всех непрерывных функций на (a,b); $C^1(a,b)$ — класс всех дифференцируемых функций на (a,b), производные которых непрерывны на (a,b), ..., $C^k(a,b)$ — класс всех k раз дифференцируемых функций на (a,b), $k-$тая производная которых непрерывна на (a,b), ..., $C^\infty(a,b)$ — класс функций, все производные которых непрерывны на (a,b).

Неожиданно, последний класс оказывается довольно широк: туда, например, входят e^x, $\cos x$, $\sin x$ и полиномы.

Теорема 15.1 (Лейбниц)**.** *При условии, что f и g имеют n производных в точке x, имеем*

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Доказательство. По индукции для желающих. □ ★

15.2. **Формула Тейлора.** Формула Тейлора позволяет изучить с любой наперед заданной точностью поведение достаточно гладкой (достаточное число раз дифференцируемой) функции в окрестности некоторой точки, заменив ее в этой окрестности полиномом достаточно высокого порядка. Таким образом, формула Тейлора — это своего рода регулируемое увеличительное стекло, при помощи которого мы смотрим на график функции.

Теорема 15.2 (Тейлор)**.** *Пусть f задана на X, и x_0 — внутренняя точка X. Предположим, что в точке x_0 существуют все производные функции до порядка $m \in \mathbb{N}$ включительно. Тогда*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + o(h^m).$$

Доказательство. Доказательство строится по индукции. При $m = 1$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h),$$

что совпадает с определением дифференцируемости в точке x_0 на языке О-символики Ландау. Предположим теперь, что формула верна при некотором m, и докажем ее для $m+1$ в случае, если в точке x_0 существует $m+1$–ая производная функции f. Заведомо понятно, что

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + r(h),$$

поскольку это можно просто принять за определение функции $r(h)$. Здесь h определена на некоторой окрестности точки 0. Но определенная таким образом $r(h)$ дифференцируема в нуле. В самом деле, $\frac{d}{dh} f(x_0 + h)|_{h=0} = f'(x_0)$ по правилу дифференцирования сложной функции, а остальные члены являются полиномом от h. Применим основную теорему дифференциального исчисления на отрезке $(-h, h)$:

$$|r(h)| \le \sup_{x \in (-h,h)} |r'(x)| 2h$$

С другой точки зрения, продифференцировав $r(h)$, имеем:

$$r'(h) = f'(x_0 + h) - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{k!} f^{(k)}(x_0) h^{k-1}.$$

Может показаться, что здесь мы воспользовались тем, что f' существует не только в точке x_0, но и в некоторой окрестности этой точки, чего предположено не было. Однако для существования второй производной функции в точке x_0, разумеется, требуется, чтобы первая производная была определена в некоторой ее окрестности.

Более того, согласно индукционному предположению, формула Тейлора уже обоснована для m для *любой* функции, имеющей m производных в точке x_0. Мы предположили, что f имеет $m + 1$ производных, значит, f' не только определена в некоторой окрестности точки x_0, но и имеет в точке x_0 m производных, где $m = 1, 2, \ldots$, а следовательно, формула Тейлора верна для нее в форме

$$f'(x_0 + h) = f'(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0) h^k + o(h^m).$$

Сравнивая теперь две последние выделенные формулы, выясняем, что

$$r'(h) = o(h^m),$$

и тогда

$$|r(h)| \le \sup_{x \in (-h,h)} |r'(x)| 2h = o(h^{m+1}),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 15.3. *Пусть f задана на X, и x_0 — внутренняя точка X. Предположим, что в точке x_0 существуют все производные функции до порядка $m + 1 \in \mathbb{N}$ включительно. Тогда*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + O(h^{m+1}).$$

Доказательство. Условия позволяют записать формулу Тейлора в форме

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + o(h^{m+1}),$$

но
$$\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(x_0)h^{m+1}+o(h^{m+1})=O(h^{m+1}).$$
$\square$

15.3. **L'Hôpital.**

Теорема 15.4 **($\frac{0}{0}$).** *Пусть x_0 — внутренняя точка множеств определения функций f и g, причем $f(x_0)=g(x_0)=0$. Пусть f,g дифференцируемы в x_0, причем $g'(x_0)\neq 0$. Тогда*
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Доказательство. Формула Тейлора с $m=1$. $\square$

Ясно, что если в предыдущей теореме считать вместо $g'(x_0)\neq 0$, что $f'(x_0)=g'(x_0)=0$, то ее можно применить и для $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, ну и так далее, так что

Теорема 15.5. *Пусть x_0 — внутренняя точка множеств определения функций f и g, функции f,g дифференцируемы m раз в точке x_0, причем*
$$f(x_0)=g(x_0)=0$$
$$\dots$$
$$f^{(m-1)}(x_0)=g^{(m-1)}(x_0)=0,$$
а $g^{(m)}(x_0)\neq 0$. Тогда
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(m)}(x_0)}{g^{(m)}(x_0)}.$$

Замечание: доказанные теоремы применимы и в ситуации, когда x_0 — предельная точка множества X.

Дополнительная задача: вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$ любым удобным методом. ★

Ну а теперь обслужим и случай бесконечных пределов.

Теорема 15.6 **($\frac{\infty}{\infty}$).** *Пусть f и g заданы на (a,b), дифференцируемы всюду на нем (причем $g(x)$ и $g'(x)$ нигде не обращаются в нуль). Пусть также*
$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to b}g(x)=\infty,\quad \exists\ \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$
Тогда
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Условие существования предела частного производных означает, что
$$\forall\varepsilon>0\exists x_0\in(a,b):\forall t\in(a,x_0)\Rightarrow\left|\frac{f'(t)}{g'(t)}-A\right|<\varepsilon/2.$$

Выберем какой-нибудь $x\in(a,x_0)$ и применим теорему Коши на интервале $[x,x_0]$:
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(t)}{g'(t)},\quad t\in(x,x_0).$$

Значит,

$$\forall x \in (a, x_0) \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - A\right| < \varepsilon/2.$$

Это выглядит почти как то, что надо, если удастся заменить $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ на $\frac{f(x)}{g(x)}$. Рассмотрим их разность:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)g(x)-f(x)g(x_0)}{g(x)(g(x)-g(x_0))} &= \\ = \frac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \frac{f(x)g(x_0)}{g(x)(g(x)-g(x_0))} &= \\ = \frac{f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} + \frac{(f(x_0)-f(x))g(x_0)}{g(x)(g(x)-g(x_0))} &- \frac{f(x_0)g(x_0)}{g(x)(g(x)-g(x_0))}.\end{aligned}$$

Ясно, что крайние слагаемые в последнем выражении представляют из себя $o(1)$. Для среднего слагаемого снова воспользуемся теоремой Коши на интервале $[x, x_0]$, получая:

$$\frac{(f(x_0)-f(x))g(x_0)}{g(x)(g(x)-g(x_0))} = -\frac{f'(t)}{g'(t)}\frac{g(x_0)}{g(x)}$$

для некоторой точки $t \in (x, x_0) \subset (x, x_0)$. Но заведомо известно, что $\frac{f'(t)}{g'(t)}$ ограничено на (a, x_0), а значит, среднее слагаемое тоже оценивается, как $o(1)$. Следовательно, можно выбрать $x_1 \in (a, x_0)$: коль скоро $x \in (a, x_1)$, то

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon/2.$$

Доказательство завершается ссылкой на неравенство треугольника. □

Замечание 3. (1) Утверждение сохраняет силу для $A = \infty$. В этом случае надо дополнительно предположить, что $f(x)$ не обращается в ноль, и поменять f и g ролями.
(2) Теорема верна также и в случае, когда $x \to \pm\infty$. ★

16. Лекция 15

16.1. **Приложения к исследованию функций.**

Теорема 16.1. *$f \in C[a, b]$ и дифференцируема всюду на (a, b), тогда*

$$f = Const \iff f'(x) = 0 \text{ всюду на } (a, b).$$

Доказательство. Доказательство необходимости очевидно. Для доказательства достаточности возьмем $x_1, x_2 \in [a, b]$ и воспользуемся основной теоремой дифференциального исчисления, получив из нее равенство $f(x_1) = f(x_2)$. Это доказывает утверждение в силу произвольности x_1 и x_2. □

Теорема 16.2. *$f \in C[a, b]$ и дифференцируема всюду на (a, b), тогда*

$$f \uparrow \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$$

$$f \upuparrows \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \text{ и не равна нулю тождественно ни на каком меньшем интервале.}$$

Доказательство. Пусть $f \uparrow$. Фиксируем $x \in (a, b)$ и заметим, что для $\forall\ h$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем $f'(x) \geq 0$.

Обратно, пусть $f'(x) \geq 0$. Возьмем две произвольные точки $x_1 < x_2$ и применим теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$. Получаем: $f(x_2) - f(x_1) = f'(t)(x_2 - x_1)$ для $t \in (x_1, x_2)$. Значит, $f \uparrow$.

Пусть теперь $f \upuparrows$. Тогда уже известно, что $f'(x) \geq 0$. Мало того, если на меньшем интервале производная тождественно равна нулю, то это противоречит строгой монотонности по предыдущей теореме.

Обратно, предположим, что функция не строго монотонна. Но она всяко монотонна нестрого, и отсутствие строгой монотонности означало бы, что найдутся x_1, x_2 такие, что $f(x_1) = f(x_2)$. Однако из нестрогой монотонности тогда следует, что функция постоянна на $[x_1, x_2]$ и производная ее равна на нем нулю тождественно, что противоречит предположению. $\square$

Перейдем к анализу экстремумов (минимумов и максимумов) функции, заданной на интервале. Ясно, что таковые могут располагаться в концах интервала. Если это не так, то по теореме Ферма получаем, что в точке максимума f' необходимо обращается в ноль. Конечно же, в обратную сторону это неверно (x^3).

Теорема 16.3. *Пусть $x^* \in (a, b)$ такова, что $f'(x) \leq 0$ при $x \leq x^*$ и $f'(x) \geq 0$ при $x \geq x^*$. Тогда x^* — точка максимума.*

Доказательство. На основании предыдущей теоремы, f возрастает слева от x^* и убывает справа от x^*. $\square$

Определение 32. Будем говорить, что у функции имеется локальный экстремум (максимум или минимум) в точке $x^* \in (a, b)$, если найдется такой интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, что сужение функции $f|_{(\alpha,\beta)}$ имеет экстремум (максимум или минимум) в этой точке.

Теорема 16.4. *Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Пусть $f'(x_0) = 0$. Тогда при $f''(x_0) < 0$ точка x_0 является локальным максимумом, при $f''(x_0) > 0$ — локальным минимумом.*

Доказательство: формула Тейлора.

Определение 33. Функция f называется выпуклой вниз на интервале $[a, b]$, если для любых двух точек $x_1 < x_2$ этого интервала график функции между этими двумя точками находится не выше, чем прямая, соединяющая точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$:

$$\forall\ t \in [0, 1] f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Функция f называется выпуклой вверх, если $-f$ на том же интервале выпукла вниз.

Определение 34. Точка области определения функции f, в которой выпуклость вверх сменяется выпуклостью вниз или наоборот, называется точкой перегиба функции f.

Анализ графика функции на выпуклость/вогнутость и нахождение точек перегиба основывается на все той же самой формуле Тейлора. В частности,

Теорема 16.5. *Пусть $f \in C[a,b]$ и дважды дифференцируема всюду на (a,b). Если $f''(x) \le 0$ всюду, то функция выпукла вверх. Если $f''(x) \ge 0$ всюду, то она выпукла вниз. Если существует третья производная в точке x_0 и $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба.*

Дополнительные задачи: Демидович, 1428, 1427, 1426, 1425, 1374, 1373, 1287, 1293, 1294, 1295. ★

16.2. **Дифференциал функции.** Возьмем функцию f, заданную на множестве (a,b), и предположим, что в окрестности точки x_0 можно записать:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Иными словами, предполагается, что можно выделить линейную часть функции f.

Определение 35. Дифференциалом функции f в точке x_0 называется линейная часть приращения $f(x) - f(x_0)$ при x, находящемся в окрестности точки x_0. Обозначение:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(h) + o(h) \equiv df[x_0](h) + o(h).$$

Так как $h = x - x_0$, то по определению $h = dx$. Поэтому $df = f'dx$ во всех точках x_0, где дифференциал корректно определен.

Ясно, что, сравнивая определение дифференциала с определением производной, имеем:

$$df[x_0](h) = f'(x_0)h = f'(x_0)dx,$$

откуда вытекает

Теорема 16.6. *Дифференциал функции f существует одновременно с производной функции f.*

Представим себе, что x не является независимой переменной, а сама зависит от, например, $t : x = x(t)$. Тогда имеем $df = f'(x(t))x'(t)dt = f'dx$, то есть приходим к *инвариантности формы дифференциала*:

Предложение 16.7. *Независимо от того, является ли x независимой переменной, дифференциал функции $f(x)$ имеет форму*

$$df[x_0] = f'(x_0)dx$$

во всех точках x_0, где он определен.

16.3. **Неопределенный интеграл.**

Определение 36. Неопределенным интегралом функции f называется функция F такая, что $F' = f$.

Ясно, что неопределенный интеграл определен с точностью до аддитивной постоянной (ибо $c' = 0$). Обозначение:

$$F(x) = \int f(t)dt.$$

В отличие от нахождения производных, неопределенный интеграл далеко не для всех элементарных функций находится в виде элементарной функции.