

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (2 СЕМЕСТР)

КИСЕЛЕВ А. В.

АННОТАЦИЯ. Лекции читаются в потоке Р3130-Р3133.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Лекция 1	2
1.1. Неопределённый интеграл	2
1.2. Интегрирование рациональных функций	3
2. Лекция 2.	5
2.1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	5
3. Лекция 3	10
3.1. Элементы комплексного анализа. Голоморфные функции	14
4. Лекция 4	17
5. Определенный интеграл (лекция 12/03)	21
6. Несобственные интегралы (лекция 19/03)	22
7. Равномерная сходимость и перестановочность предельных операций (лекции 26/03 и 2/04)	22
8. Интегральное преобразование Фурье (лекции 2/04, 16/04, 23/04)	22
9. Введение в теорию обобщенных функций (лекции 23/04, 30/04)	31
10. Волновое уравнение	37
10.1. Колебания кирпича на пружинке	37
10.2. Волновое уравнение бесконечной струны	39
10.3. Метод Фурье для решения уравнения бесконечной струны	43
10.4. Волновое уравнение для конечной струны. Начально-краевые задачи.	46
10.5. Резонансы	53
11. Дискретизация дифференциальных уравнений	55
11.1. Откуда вообще берется уравнение конечной струны?	55
11.2. Понижение порядка	58
12. Спектральная теория линейных операторов в конечномерных пространствах	59
12.1. Обратная матрица и обратный оператор	60
12.2. Характеристический полином и спектр квадратной матрицы	61
12.3. Собственный базис и диагонализуемость	65
12.4. Приложения к решению систем дифференциальных уравнений	66
12.5. Функциональное исчисление для матриц и операторов	70
12.6. Спектральная теорема для эрмитового оператора	73
12.7. Жорданова форма	77

1. ЛЕКЦИЯ 1

1.1. Неопределённый интеграл.

Определение 1. Пусть на $I = (a, b)$ задана функция $f(x)$, и пусть при всех $x \in I$ выполнено, что $F'(x) = f(x)$ для некоторой функции $F(x)$, определенной и дифференцируемой на I . Тогда функция F называется первообразной, или неопределённым интегралом, для функции f . Обозначение: $\int f(x)dx$.

Основные свойства первообразной.

- (1) Если F – первообразная для f , то и $F + c$ для произвольной постоянной c – тоже первообразная.
- (2) Обратно, если F_1 и F_2 – две первообразных f , то $F_1 - F_2 = c$ для некоторой константы c . В самом деле: производная разности $F_1 - F_2$ тождественно равна нулю, но тогда сама разность – постоянная функция (доказано в первом семестре).
- (3) Обозначение $\int f(x)dx$ включает в себя неоднозначность, будучи определено с точностью до аддитивной постоянной.
- (4) $d \int f(x)dx = f(x)dx$; $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$ (взаимное «сокращение» значков \int и d).
- (5) Линейность: $\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx$.
- (6) Замена переменной: рассмотрим $\int f(g(x))g'(x)dx$ и будем считать, что нам известен интеграл от f , именно $F(x) = \int f(x)dx$. Тогда имеем

$$\int f(g(x))dg(x) = \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

- (7) Правило интегрирования по частям:

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

Элементарные неопределённые интегралы:

$$\int adx = ax + C$$

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + C, \quad m \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

1.2. Интегрирование рациональных функций.

Определение 2. Рациональная функция (рациональная дробь) – это частное двух полиномов $P_m(x)/Q_n(x)$, где $P_m(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$, $Q_n(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$.

Сразу же будем считать, что x – комплексная переменная, а $\{a_j\}_{j=0}^m, \{b_j\}_{j=0}^n$ – наборы комплексных чисел. Областью определения рациональной функции является вся комплексная плоскость \mathbb{C} за исключением нулей знаменателя $Q_n(x)$. Этих последних в силу основной теоремы алгебры наличествует ровно n штук с учетом кратности.

Из основной теоремы алгебры следует, что

$$Q_n(x) = b_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_l)^{k_l}.$$

Здесь k_1, k_2, \dots, k_l – кратности корней полинома x_1, x_2, \dots, x_l . Ясно, что $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$.

Полином P_m будем называть числителем рациональной функции, а полином Q_n – ее знаменателем.

1.2.1. Частный случай: полином.

$$\int P_m(x)dx = \frac{1}{m+1}a_mx^{m+1} + \dots + a_0x + C.$$

1.2.2. Частный случай: простейшая рациональная функция.

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln(x-a) + C. \quad (\spadesuit)$$

1.2.3. *Комментарий по поводу связи между комплексным вариантом теории и ее вещественным вариантом.* Надо понимать, что если x и/или коэффициенты полинома и/или корни знаменателя полинома комплексны, для понимания того, что такое первообразная, мы должны сперва правильно понять, что такое производная. Всюду в данной лекции предполагается, что производная комплекснозначной функции $f(x)$ определена следующим образом:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

а предел функции комплексного аргумента определен, как

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \epsilon.$$

В последнем определении в обоих случаях модули – это модули комплексных чисел, т.е. $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$.

Эта система определений на самом деле подразумевает некое дополнительное свойство комплексных функций комплексного аргумента, о котором речь пойдет ниже, а именно, свойство голоморфности или аналитичности (которое выполнено автоматически для полиномов и рациональных функций).

Тем не менее, просто в силу того, что данные тут определения предела комплекснозначной функции и ее производной ничем не отличаются от таковых, даваемых в вещественном анализе, все правила дифференцирования элементарных функций переносятся на данный случай без изменений. Единственная «тонкость» возникает с \ln , поскольку он просто не определен для отрицательных чисел в вещественном смысле. В

комплексном смысле он прекрасным образом определен вне начала координат, и легко показать, что $(\ln z)' = 1/z$. Доказать это! Вспомнив о том, что комплексный логарифм — ★
многозначная функция, изучить вопрос о многозначности его производной.

Если дополнительно считать, что аргумент x всех рассматриваемых функций на самом деле вещественен, то логарифм, стоящий в правой части формулы (♠), вычисляется при дополнительном условии $a \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x - a) = \ln|x - a| + i \arg(x - a) + 2\pi i k = \ln|x - a| + c,$$

где константа c выбирается по отдельности для $x - a > 0$ и $x - a < 0$. Таким образом, приходим к классической формуле для интеграла от $(x - a)^{-1}$ в вещественном случае:

$$\int \frac{1}{x - a} dx = \ln|x - a| + C.$$

1.2.4. *Приведение рациональной функции к правильному виду.* Будем называть рациональную функцию правильной, если степень полинома, стоящего в числителе, меньше степени полинома, стоящего в знаменателе.

Теорема 1.1. *Всякая неправильная рациональная функция единственным образом представляется в виде суммы полинома степени $m - n$ (здесь, как и выше, m — степень полинома, стоящего в числителе, n — степень полинома, стоящего в знаменателе) и правильной рациональной функции, знаменатель которой совпадает со знаменателем исходной:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S_{m-n}(x) + \frac{R_{m'}(x)}{Q_n(x)}, \quad m' < n.$$

Доказательство — деление «уголком» с остатком.

1.2.5. *Интегрирование правильной рациональной функции.*

Теорема 1.2. *Пусть рациональная функция правильная. Тогда она единственным образом представляется в виде:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{k_j} \frac{A_{jk}}{(x - x_j)^k},$$

где, как и выше, x_1, \dots, x_l — различные корни полинома Q_n , а k_1, \dots, k_l — их кратности. Данное разложение носит название разложения рациональной функции на простейшие (дроби).

Частный случай: если все корни Q_n простые, то получаем:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{x - x_j}.$$

Следствие 1.3. *Всякая рациональная функция имеет первообразную. Эта первообразная представляет собой сумму рациональной функции и одного или нескольких логарифмов.*

Примеры: $1/(1+x^2)$, $1/((x-1)(x-2))$

Показать, что интегрирование вещественной рациональной функции методом разложения ее на простейшие дроби над полем комплексных чисел приводит к вещественному ответу даже в ситуации, когда некоторые или все корни полинома, стоящего в знаменателе, комплексны.



2. ЛЕКЦИЯ 2.

2.0.1. *Способы нахождения коэффициентов разложения на простейшие.* Разумеется, всегда можно написать формулу разложения на простейшие последней теоремы с неопределенными коэффициентами, привести правую часть к общему знаменателю и приравнять коэффициенты при равных степенях x слева и справа, что приводит к системе линейных уравнений, разрешимой методом Гаусса (см. материал первого семестра).

Однако можно и немного упростить потребные вычисления:

$$A_{jk_j} = \lim_{x \rightarrow x_j} (x - x_j)^{k_j} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

В ситуации, когда все корни знаменателя простые, это дает возможность вычислить все коэффициенты разложения. Если некоторые корни непростые — только коэффициент одной из простейших дробей, им отвечающих. Однако в этом последнем случае, вычислив по одному коэффициенту для каждого корня переходом к пределу, можно вычесть уже определенные простейшие слева и справа в разложении рациональной функции и снова применить тот же трюк.

Наконец, в ситуации, когда корень простой, вычисление соответствующего коэффициента разложения можно еще более упростить:

$$A_j = \lim_{x \rightarrow x_j} (x - x_j) \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_j} \frac{P_m(x)}{\frac{Q_n(x)}{x - x_j}} = \frac{P_m(x_j)}{Q'_n(x_j)}$$

2.1. **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.** Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2)$ двух независимых переменных. Это отображение области задания функции $D \subset \mathbb{R}^2$ в \mathbb{R} (или, не ограничивая общности, в \mathbb{C}).

В рассматриваемой ситуации \mathbb{R}^2 понимается, как линейное пространство над полем \mathbb{R} , наделенное структурой скалярного произведения (как в курсе аналитической геометрии). Будем считать, что в пространстве введена декартова система координат, так что скалярное произведение расписывается в стандартной координатной форме.

2.1.1. Непрерывность.

Определение 3. Пусть a — предельная точка множества задания функции X .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Хотя формально это определение ничем не отличается от определения предела для функции одной вещественной переменной, здесь надо понимать, что $x = (x_1, x_2)$ — координаты точки в \mathbb{R}^2 , $a = (a_1, a_2)$. Отличается также и понимание модуля: в отличие от случая одной переменной, здесь $|x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$ — длина вектора $x - a$. Наконец, $|f(x) - A|$ понимается либо как модуль вещественного, либо как модуль

комплексного числа (в зависимости от того, изучаем ли мы вещественнозначную или комплекснозначную функцию).

Определение 4. Функция f называется непрерывной в предельной точке a своего множества задания, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Функция называется непрерывной в области X , если она непрерывна в каждой точке множества X .

Как и в случае функций одной вещественной переменной, имеется связь между пределом функции и пределом последовательности. Начнем с того, что определим предел последовательности точек из \mathbb{R}^2 .

Определение 5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

Важно понимать, что здесь $|x_n - a|$ — это длина вектора $x_n - a$. Иными словами, начиная с элемента с номером $N + 1$, все члены последовательности оказываются в круге радиуса менее ϵ с центром в точке $a = (a_1, a_2)$.

Теорема 2.1.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \left\{ \forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right\}$$

Наконец, для функций, непрерывных на ограниченном и замкнутом (одним словом: компактном) множестве X выполняется утверждение теоремы Вейерштрасса:

Теорема 2.2. Пусть $f \in C(X)$, где X — компакт в \mathbb{R}^2 . Тогда:

- (1) Функция f ограничена в X ;
- (2) Функция f достигает в X своих наибольшего и наименьшего значений.

В силу данных определений и теоремы о связи предела функции с пределом последовательности сразу же очевидно, что имеют место стандартные утверждения о непрерывности $cf(x, y)$, $f(x, y) + g(x, y)$, $f(x, y)g(x, y)$ и $f(x, y)/g(x, y)$ при дополнительном условии необращения знаменателя в ноль. Доказательства — в точности те же, что и в курсе дифференциального исчисления функции одной вещественной переменной.

2.1.2. Производная и дифференциал.

Определение 6. Частные производные функции двух переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

Здесь предполагается, что точка $x = (x_1, x_2)$ является внутренней точкой области задания функции.

Рассмотрим полное приращение функции

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) = (f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2)) + (f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2)).$$

Применяя два раза теорему Лагранжа, имеем в дополнительном предположении непрерывности обеих частных производных в точке x :

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 + o(|h|)$$

Итак,

Теорема 2.3. Пусть x — внутренняя точка области задания функции f , пусть в ней существуют и непрерывны обе частные производные функции f . Тогда

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 + o(|h|),$$

где $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Определение 7. Дифференциал функции двух переменных — это линейная часть полного приращения функции,

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2.$$

Определение 8. Функция f называется дифференцируемой в точке x , если в этой точке выполнено (ср. с утверждением последней теоремы)

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 + o(|h|).$$

Заметим, что для дифференцируемости можно требовать, чтобы нашлись такие величины A_1 и A_2 , что

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + A_1h_1 + A_2h_2 + o(|h|),$$

то есть чтобы у функции можно было выделить линейную часть в окрестности точки (x_1, x_2) , в точности, как в случае одной переменной. Из последнего соотношения немедленно получается, что A_1, A_2 обязаны быть равны в точности соответствующим частным производным, вычисленным в точке (x_1, x_2) .

Таким образом, имеем

Следствие 2.4. Если обе частные производные непрерывны в точке x , то функция f дифференцируема в этой точке.

Пример 1. Существования частных производных недостаточно даже для непрерывности функции двух переменных в точке x ! В самом деле, рассмотрим

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1x_2 = 0 \\ 1, & \text{если } x_1x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Пример 2. Дополнительные примеры: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (отсутствует непрерывность, существуют частные производные всюду при доопределении нулем в нуле), $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ (разные повторные пределы, отсутствие непрерывности), $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (недифференцируемость), $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ (непрерывна, имеет частные производные, но недифференцируема).

2.1.3. *Дополнительные задачи.* Демидович: 3183, 3183.2, 3204, 3212.3, 3230, 3252, 3253 ★

2.1.4. *Производная и дифференциал сложной функции.* Предположим теперь, что имеем функцию двух переменных $f(x, y)$, причем сами переменные x, y зависят от двух переменных u, v : $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$. Внимание: в данном пункте и далее для простоты вместо $f(x_1, x_2)$ используется запись $f(x, y)$.

Запишем, как и выше:

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)h_2 + o(|h|)$$

и подставим сюда аналогичные выражения для функций x, y :

$$h_1 = x + h_1 - x = x(u + \tilde{h}_1, v + \tilde{h}_2) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\tilde{h}_1 + \frac{\partial x}{\partial v}\tilde{h}_2 + o(|\tilde{h}|);$$

$$h_2 = y + h_2 - y = y(u + \hat{h}_1, v + \hat{h}_2) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u}\hat{h}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\hat{h}_2 + o(|\hat{h}|).$$

Если нас, к примеру, интересует $\frac{\partial f}{\partial u}$, то мы должны, разумеется, рассмотреть

$$\lim_{\tilde{h}_1 \rightarrow 0} \frac{f(x(u + \tilde{h}_1, v), y(u + \tilde{h}_1, v)) - f(x(u, v), y(u, v))}{\tilde{h}_1},$$

что, с учетом равенства $\tilde{h}_1 = \hat{h}_1$, приводит к

$$\lim_{\tilde{h}_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\tilde{h}_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} \tilde{h}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u} \tilde{h}_1 \right),$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Разумеется, совершенно так же получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Для корректности написанного необходимо, разумеется, потребовать не только лишь дифференцируемости $f(x, y)$ в интересующей нас точке (x, y) , но и дифференцируемости $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в отвечающей ей точке (u, v) .

Запишем интересующую нас пару формул в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Или же, в краткой форме записи,

$$\begin{pmatrix} f'_u \\ f'_v \end{pmatrix} = J_{xy} \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad J_{xy} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Здесь J_{xy} носит название Якобиана замены $(x, y) \rightarrow (u, v)$.

2.1.5. *Инвариантность формы полного дифференциала.* В рассмотренной в предыдущем пункте ситуации, в переменных u, v имеем:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

согласно определению полного дифференциала. С другой точки зрения, подставляем найденные нами выражения для частных производных по u, v :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

Или же:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right),$$

что то же самое, что

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Итак, получено следующее утверждение: *форма полного дифференциала функции нескольких переменных инвариантна*, т.е. не зависит от того, какие именно переменные считаются зависимыми, а какие — нет. Аналогичное утверждение для случая функции одной вещественной переменной было получено нами в первом семестре.

Следствие 2.5.

$$d(cf) = cdf; \quad d(f \pm g) = df \pm dg;$$

$$d(fg) = gdf + f dg;$$

$$d(f/g) = \frac{gdf - f dg}{g^2}$$

В самом деле, мы можем сперва считать f и g не функциями, а независимыми переменными. Тогда выписанные формулы очевидны (и, что важно, совпадают с формулами, получающимися в случае функций одной вещественной переменной!). Но в силу инвариантности формы первого дифференциала, они сохраняют свою силу и в ситуации, когда f и g сами являются функциями от нескольких переменных.

2.1.6. *Дифференциалы высших порядков.* Заметим, что в отличие от случая одной вещественной переменной неочевидно, что следует называть *производной*, и тем более неочевидно, как перейти от первой производной к последующим. Удобнее всего это делать здесь на языке дифференциала. Пусть задана функция $f(x, y)$ двух вещественных переменных. Запишем ее дифференциал для приращений независимых переменных x, y , выбранных равными h_1, h_2 :

$$df[x, y] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) h_2$$

Здесь мы вычислили линейную часть полного приращения функции в точке (x, y) ; в силу предположения о том, что функция дифференцируема в данной точке, точность данного линейного представления функции — $o(|h|)$. Пусть теперь сами частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ не просто существуют в данной точке, но также являются дифференцируемыми в ней (в частности, отсюда, конечно, уже следует, что они непрерывны и, тем самым,

существует первый дифференциал). Запишем их дифференциалы по отношению к *тем же* приращениям независимых переменных x, y :

$$d\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_2;$$

$$d\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}h_1$$

Здесь, например, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ — вторая частная производная, полученная путем дифференцирования по y частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$, полагаемой при этом функцией от тех же переменных x, y , что и исходная функция.

Тем самым,

$$d^2 f[x, y] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}h_2h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2^2.$$

Итак,

Определение 9. Второй дифференциал функции нескольких переменных — это дифференциал от ее первого дифференциала, вычисленный при дополнительном предположении, что значения приращений h_1, h_2, \dots взяты теми же, что и при вычислении первого дифференциала.

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

3. ЛЕКЦИЯ 3

Определение 10. Функция нескольких переменных называется дважды дифференцируемой, если она дифференцируема один раз и все ее частные производные также дифференцируемы.

Теорема 3.1. Если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки (x, y) и все ее частные производные второго порядка непрерывны в точке (x, y) , то существует второй дифференциал функции f в точке (x, y) . Более того, в данной ситуации результат вычисления смешанных частных производных не зависит от порядка взятия производных,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Доказательство. Во-первых, для существования второго дифференциала надо, чтобы были дифференцируемы первые частные производные, для чего достаточно потребовать (см. выше), чтобы их частные производные первого порядка (соответственно, частные производные второго порядка исходной функции) были непрерывны в точке.

Во-вторых, установим равенство смешанных производных второго порядка.

Рассмотрим

$$\phi(x, y) := f(x + h_1, y) - f(x, y)$$

и запишем

$$\phi(x, y + h_2) - \phi(x, y) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2) - f(x + h_1, y) + f(x, y).$$

Два раза применяя теорему Лагранжа, имеем:

$$\phi(x, y + h_2) - \phi(x, y) = h_2 \phi'_y(x, y + \theta_2 h_2) = h_1 h_2 f''_{yx}(x + \theta_1 h_1, y + \theta_2 h_2).$$

Теперь наоборот: возьмем

$$\psi(x, y) := f(x, y + h_2) - f(x, y)$$

и запишем

$$\psi(x + h_1, y) - \psi(x, y) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2) - f(x + h_1, y) + f(x, y).$$

Но теперь два применения теоремы Лагранжа дают:

$$\psi(x + h_1, y) - \psi(x, y) = h_1 \psi'_x(x + \tilde{\theta}_1 h_1, y) = h_1 h_2 f''_{xy}(x + \tilde{\theta}_1 h_1, y + \tilde{\theta}_2 h_2).$$

Но левые части совпадают, поэтому

$$f''_{yx}(x + \theta_1 h_1, y + \theta_2 h_2) = f''_{xy}(x + \tilde{\theta}_1 h_1, y + \tilde{\theta}_2 h_2).$$

Используя непрерывность обеих частных производных, переходим к пределу при $h = (h_1, h_2) \rightarrow 0$. \square

Последующие дифференциалы (третьего и дальнейших порядков) определяются совершенно аналогично, путем взятия дифференциалов от предшествующих им.

Внимание: второй и последующие дифференциалы не обладают свойством инвариантности!

3.0.1. Формула Тейлора для случая функций от нескольких переменных. Сперва запишем известную нам формулу Тейлора для функций от одной вещественной переменной в дифференциальной форме. Так как второй дифференциал для функции от одной переменной, очевидно, равен $f''(x)dx^2$, а k -тый, соответственно, $f^{(k)}(x)dx^k$, очевидно, имеет место представление

$$f(x + h) - f(x) = df[x](h) + \frac{1}{2!}d^2f[x](h) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f[x](h) + o(|h|^n),$$

где предполагается, что функция f имеет хотя бы n производных в точке x , причем, как и в конспекте за первый семестр, используется обозначение для дифференциала

$$df[x](h) := f'(x)h$$

и, соответственно,

$$d^k f[x](h) := f^{(k)}(x)h^k.$$

Для функций многих переменных формула Тейлора приобретает совершенно такой же вид:

Теорема 3.2. Пусть функция дифференцируема n раз в точке (x, y) , тогда имеет место формула

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x) = df[x](h) + \frac{1}{2!}d^2f[x](h) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f[x](h) + o(|h|^n).$$

Здесь $h = (h_1, h_2)$, а дифференциалы всех порядков берутся для приращений аргументов h_1, h_2 , как выше.

В частности, в ситуации $n = 2$ имеем:

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x) = df[x](h) + \frac{1}{2!}d^2f[x](h) + o(h^2).$$

Придадим последней формуле более человеческий вид. Для этого нам потребуется

Определение 11. Для функции от двух переменных $f(x, y)$ *градиентом* $\nabla f(x, y)$ называется вектор, компонентами которого являются частные производные функции f в точке (x, y) :

$$\nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что это вектор-функция (т.е. каждая из его компонент в свою очередь является функцией переменных x, y).

С использованием этого определения очевидно, что

$$df[x](h) = \langle \nabla f(x, y), h \rangle,$$

где, как и выше, h — это вектор с компонентами h_1, h_2 , а угловыми скобками обозначается скалярное произведение в \mathbb{R}^2 .

Введем еще матрицу второй производной функции f :

$$D_f(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Тогда получается

Следствие 3.3. Пусть функция дважды дифференцируема в точке (x, y) , тогда имеет место формула

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x) = \langle \nabla f(x, y), h \rangle + \frac{1}{2} \langle D_f(x, y)h, h \rangle + o(|h|^2),$$

где угловыми скобками обозначается скалярное произведение в \mathbb{R}^2 , а $D_f(x, y)h$ — матричное произведение матрицы второй производной функции f в точке (x, y) на вектор $h = (h_1, h_2)$.

Сделаем вывод: можно считать, что в дифференциальном исчислении функций многих переменных первая производная (градиент) — это вектор, вторая производная — это матрица, а производные высших порядков имеют тензорную природу.

3.0.2. Геометрические приложения: анализ поверхностей. Для простоты, рассмотрим тут ситуацию поверхности, заданной в виде $z = f(x, y)$. В предположении, что существуют и непрерывны все вычисляемые частные производные, запишем линейный член в формуле Тейлора разложения f в окрестности точки (x, y) :

$$Z - z = f(X, Y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(Y - y) + o(\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}).$$

Здесь точка (X, Y, Z) принадлежит той же поверхности и располагается вблизи от точки (x, y, z) , которую мы будем считать фиксированной.

Как и в одномерном случае, очевидно, что линейная часть записанного равенства оказывается уравнением касательной плоскости к поверхности в точке (x, y, z) :

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(Y - y).$$

Перепишав уравнение поверхности в виде

$$F(x, y, z) := f(x, y) - z = 0,$$

видим на основании материала по аналитической геометрии, изученного в первом семестре, что в качестве вектора нормали к поверхности в точке (x, y, z) может быть выбран вектор ∇F . Для последнего имеет место формула:

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Совершенно аналогично, начиная с уравнения поверхности в неявной форме

$$F(x, y, z) = 0,$$

получаем тот же результат:

$$\langle \nabla F, \vec{X} - \vec{x} \rangle = 0, \text{ где } \vec{X} - \vec{x} = \begin{pmatrix} X - x \\ Y - y \\ Z - z \end{pmatrix}$$

для касательной плоскости.

Таким образом, можно сделать вывод, что направление вектора градиента к поверхности во всех случаях совпадает с направлением вектора нормали.

Если же нас интересует вопрос об определении точек локальных минимумов и максимумов (надо иметь в виду, что здесь мы говорим о «внутренних» локальных экстремумах; возможно также наличие локальных и глобальных экстремумов на краю поверхности — впрочем, не у всякой поверхности вообще имеется край, пример: сфера $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$), то из сказанного выше немедленно следует: таковые могут возникать лишь в точках, где касательная плоскость параллельна плоскости (x, y) , то есть в тех точках, где вектор нормали коллинеарен вектору k аппликата.

Таким образом, приходим к *необходимому* условию экстремума: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ для поверхности, заданной в явной форме, и $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ для поверхности, заданной в форме неявной.

Дальнейшее уточнение вопроса о наличии экстремума в точке, подозрительной на таковой, осуществляется на основании рассмотрения последующих членов в формуле Тейлора. Остановимся здесь на рассмотрении квадратичного члена в оной.

Для поверхности, заданной в явной форме $z = f(x, y)$, имеем, пренебрегая членами более высокого порядка:

$$Z - z = \langle \nabla f(x, y), h \rangle + \frac{1}{2} \langle D_f(x, y)h, h \rangle,$$

где h — вектор с координатами $(X-x, Y-y)$. Первое слагаемое в правой части обнуляется в точке, подозрительной на экстремум, так что окончательно имеем

$$Z - z = \frac{1}{2} \langle D_f(x, y)h, h \rangle.$$

Дальнейшее изучение квадратичной формы в правой части данного уравнения потребует от нас дополнительных сведений из линейной алгебры, и мы вернемся к нему позже. Впрочем, уже сделанного вполне достаточно для компьютерной визуализации квадратичного приближения поверхности вблизи точки, подозрительной на экстремум.

Наконец, для поверхности, заданной в неявной форме, будем иметь в окрестности точки, подозрительной на экстремум,

$$-\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)(Z - z) = \frac{1}{2} \langle D_F(x, y, z)h, h \rangle,$$

где матрица $D_F(x, y, z)$ — матрица второй производной (размера 3×3) для функции $F(x, y, z)$, определяемая аналогично случаю функций от двух переменных, а h — вектор с координатами $(X - x, Y - y, Z - z)$.

3.1. Элементы комплексного анализа. Голоморфные функции. Здесь речь пойдет о некотором важном специальном случае, который естественным образом выделяется в изучении функций от двух вещественных переменных. В этом случае оказывается, что анализ функций двух переменных совершенно неожиданно оказывается как более естественным, так и существенно более богатым, чем в ситуации функций одной вещественной переменной.

Будем предполагать, что в \mathbb{C} задана *область* (то есть открытое, связное множество) D , на которой, в свою очередь, определена комплекснозначная функция $f(x, y)$, где $z = x + iy$.

Заметим, что:

- (1) Функцию f можно рассматривать, как векторное плоское поле на плоскости $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$.
- (2) К ней, разумеется, применимы все методы, развитые в предыдущей главе (дифференциальное исчисление в вещественном смысле)

3.1.1. Условия Коши-Римана. Разложим $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Теперь u, v — вещественные функции двух вещественных переменных.

Замечание 1. Заметим, что в силу данных в предыдущей главе определений, наличие предела f в данной точке эквивалентно тому, что соответствующий предел имеется у обеих функций u и v одновременно. Также свойство непрерывности f в данной точке эквивалентно тому, что u и v одновременно непрерывны в ней.

Предложение 3.4. Функция f дифференцируема в вещественном смысле в точке $z = (x, y)$ в том и только том случае, если u и v дифференцируемы в вещественном смысле в той же точке.

Для доказательства достаточно написать условие дифференцируемости для всех трех функций и сравнить их.

Итак, в вещественном смысле имеем условие дифференцируемости f :

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) = Ah_1 + Bh_2 + o(|h|),$$

где A, B — комплексные числа. Более того, при выполнении данного условия сразу же получается, что

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

где, как и выше, $z = x + iy$.

Примеры: $f(z) = z$, $f(z) = \operatorname{Re} z$ (в последнем случае функция зависит фактически только от вещественной части $\operatorname{Re} z$!) Однако всегда можно записать:

$$f(x, y) = f(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \equiv f(z, \bar{z}),$$

то есть мы можем, подставляя x, y , как функции от z, \bar{z} , рассмотреть комплекснозначную функцию двух вещественных переменных, как сложную функцию, зависящую от двух переменных z, \bar{z} через посредство зависимых переменных x, y , чем и воспользуемся.

Тогда условие дифференцируемости принимает вид:

$$f(z + h_1, \bar{z} + h_2) - f(z, \bar{z}) = \alpha h_1 + \beta h_2 + o(h),$$

где, естественно,

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z, \bar{z}), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}).$$

В силу правила дифференцирования сложной функции, тут же получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Наложим теперь *ключевое дополнительное условие*: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0}$.

Это значит, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

но теперь вспомним о разложении f в сумму ее вещественной и мнимой частей и вычислим соответственно вещественную и мнимую части последнего равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{Коши-Риман})$$

Итак, получилась

Теорема 3.5. Пусть функция $f(x, y)$ — комплекснозначная функция двух вещественных переменных x и y — записана по правилу сложной функции, как функция от двух комплексных переменных z и \bar{z} . Пусть она дифференцируема в вещественном смысле в точке $z = (x, y)$. Тогда, если $f(z, \bar{z}) = f(z)$ (то есть не зависит явно от \bar{z}), имеем

$$f(z + h) - f(z) = \alpha h + o(h), \quad (\partial)$$

где h — малое комплексное приращение аргумента z . В этом случае для вещественной $u(x, y)$ и мнимой $v(x, y)$ частей функции $f(x, y)$ выполнены условия (Коши-Риман).

Обратно, если для дифференцируемой в точке (x, y) функции $f := u(x, y) + iv(x, y)$ выполнены условия (Коши-Риман), то получившаяся функция f обладает свойством (∂) . Более того, будучи записана, как функция от пары переменных z, \bar{z} , она не зависит явно от \bar{z} .

3.1.2. Дифференцируемость в смысле комплексного анализа.

Определение 12. Назовем функцию $f(z)$ дифференцируемой в комплексном смысле в точке z , если существует конечный предел

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

где h полагается малым *комплексным* приращением аргумента. Данный предел, коли он существует, называется производной (в смысле комплексного анализа) функции f в точке z .

Внимание! Этот предел определен в смысле *двумерного анализа*! Недостаточно считать h малым вещественным числом!

Запишем последнее определение на языке символов Ландау

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + o(h)$$

и сравним его с условием (∂) последней теоремы. Получается, в силу отождествления точки z с точкой (x, y) вещественной плоскости,

Теорема 3.6. Функция $f(z)$ дифференцируема в комплексном смысле в точке $z = (x, y)$ в том и только том случае, когда она дифференцируема в вещественном смысле в точке (x, y) , причем в этой точке выполнены условия Коши-Римана.

Итак, из дифференцируемости в комплексном смысле вытекает дифференцируемость в вещественном смысле, но обратное, вообще говоря, неверно!

Чем же хорошо понятие дифференцируемости в комплексном смысле? Как уже обсуждалось в Лекции 1, оно приводит к тому, что большая часть теорем дифференциального исчисления функций одной вещественной переменной легко переносится на комплексный (иными словами, вещественно двумерный!) случай. В частности, имеем:

$$(cf)' = cf', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (f/g)' = (f'g - fg')/g^2.$$

Особенно важным оказывается стандартное для вещественного анализа правило дифференцирования сложной функции:

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z)$$

(доказательства во всех случаях буквально повторяют таковые, предъявленные в курсе 1го семестра).

3.1.3. Голоморфные функции.

Определение 13. Функция $f(z)$ называется регулярной (синонимы: комплексно аналитической, голоморфной) в области $D \in \mathbb{C}$, если она дифференцируема в комплексном смысле в каждой точке данной области. Обозначение: $f \in \mathcal{H}(D)$.

Обратите внимание, что дифференцируемость в комплексном смысле является более сильным ограничением, чем дифференцируемость функций одной вещественной переменной (в силу отмеченного выше факта, что, хотя определение производной буквально повторяет таковое для одномерного вещественного случая, здесь требуется комплексность приращения h и тем самым независимость предела от пути, по которому $z+h$ стремится к точке z). Тем не менее, следующее утверждение, доказательство которого будет предъявлено через 2–3 лекции, должно показаться удивительным.

Теорема 3.7. Если $f \in \mathcal{H}(D)$, то функция f бесконечно дифференцируема в области D , т.е. ее можно продифференцировать произвольное количество раз.

Пример 3. $f(z) = z^2$ регулярна всюду на комплексной плоскости. $f(z) = |z|$ регулярной не является. $f(z) = \operatorname{Re} z$ регулярной не является. Функция $f(z) = \bar{z}^2$ является дифференцируемой только в нуле, поэтому не регулярна ни в одной области.

Пример 4. Множество регулярных функций весьма богато. Из материала лекции 1 следует, что любая рациональная функция аналитична вне корней знаменателя. Кроме того, комплексной аналитичностью обладают, фактически, все элементарные функции (вопрос области аналитичности надо в каждом случае обсуждать отдельно!), например, $\sin z$, $\cos z$, $\exp(z)$, $\ln z$ и так далее. С учетом того, что суперпозиция регулярных функций регулярна, а арифметические операции над регулярными функциями не выводят за пределы их множества, комплексно аналитических функций бесконечно много и они весьма разнообразны.

3.1.4. *Гармонические функции. Гармоническое сопряжение.* Остановимся еще на важном свойстве аналитических функций.

Определение 14. Пусть $u(x, y)$ — вещественная функция двух вещественных переменных. Пусть в некоторой области $D \in \mathbb{R}^2$ эта функция дифференцируема в вещественном смысле, пусть также ее частные производные дифференцируемы. Если дополнительно

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в D , то функция u называется гармонической в D . Оператор Δ , определенный формулой выше, называется оператором Лапласа. Это линейный дифференциальный оператор в частных производных.

Теорема 3.8. Пусть $f(z) \in \mathcal{H}(D)$, где D — область в \mathbb{C} . Тогда $u := \operatorname{Re} f$ и $v := \operatorname{Im} f$ являются гармоническими в D .

Доказательство получается дифференцированием условий Коши-Римана, с учетом отмеченного выше факта, что у комплексно аналитической функции существуют и аналитичны все производные на области аналитичности исходной функции f .

4. ЛЕКЦИЯ 4

Определение 15. Две гармонические на одной и той же области D функции u, v называются гармонически сопряженными, если они связаны условиями Коши-Римана.

Теорема 4.1. Для любых двух гармонически сопряженных гармонических на одной и той же области D функций u, v функция $f := u + iv$ является комплексно аналитической в области D .

Для доказательства достаточно вспомнить, что выполнение условий Коши-Римана гарантирует дифференцируемость в комплексном смысле.

Таким образом, получаем вывод: для дифференцируемости в комплексном смысле функции f необходимо и достаточно, чтобы ее вещественная и мнимая части были гармонически сопряжены.

4.0.1. *Восстановление аналитической функции по ее части: первый способ.* Более того, зная вещественную или мнимую часть функции f в области D , можно определить и саму функцию f с точностью до аддитивной постоянной (операция напоминает взятие неопределенного интеграла и на самом деле к этому последнему сводится). Рассмотрим эту процедуру на простом примере.

Пример 5. Дана функция $u(x, y) := x^2 - y^2 + 2x$. Сперва необходимо проверить (что несложно), что данная функция гармоническая во всем пространстве.

Далее, запишем для этой функции условия Коши-Римана:

$$v'_y = u'_x = 2x + 2; \quad v'_x = -u'_y = 2y.$$

Первое из этих условий можно проинтегрировать по переменной y , в результате получим:

$$v = 2xy + 2y + C(x).$$

Понятно, что в данном случае мы полагали, что x — параметр, так что свободная постоянная должна нами пониматься, как некая неизвестная функция от x (но не от y !). Отсюда находится производная v'_x :

$$v'_x = 2y + C'(x),$$

которую мы затем подставим во второе условие Коши-Римана:

$$2y + C'(x) = 2y,$$

откуда $C'(x) = 0$ и окончательно $C(x) = c$. Итак,

$$v(x, y) = 2xy + 2y + c, \quad f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y) + ci.$$

Переписывая ответ в терминах переменной z , получаем

$$f(z) = z^2 + 2z + ci.$$

Ясно, что такой алгоритм позволяет и в самом деле определить комплексно аналитическую функцию по ее вещественной или мнимой части во всех случаях (на самом деле: только в случае односвязности области D !).

4.0.2. *Формула Тейлора.* Важно понимать, что комплексно аналитические функции обладают рядом очень интересных свойств. Разумеется, в силу отмеченного выше свойства, что аналитическую функцию можно продифференцировать сколь угодно много раз, имеет место формула Тейлора в той же форме, что и в вещественном случае. Именно, если $f \in \mathcal{H}(D)$ и $z \in D$, то для достаточно маленького по модулю комплексного h и произвольного целого n верно, что:

$$f(z + h) = f(z) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(z)}{k!} h^k + O(|h|^{n+1}).$$

4.0.3. *Теорема единственности и аналитическое продолжение.*

Теорема 4.2 (Теорема единственности). Пусть $f \in \mathcal{H}(D)$. Пусть $f(z_n) = 0$ на последовательности точек $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in D$. Тогда $f \equiv 0$.

Замечание 2. 1. Ясно, что $f(a) = 0$ как следствие непрерывности (в свою очередь, следует из аналитичности). Так что теорему можно переформулировать так: единственной комплексно аналитической функцией, обращающейся в ноль на множестве с предельной точкой, целиком принадлежащем области аналитичности функции f , является нулевая.

2. Отметим, что условие $a \in D$ снять НЕЛЬЗЯ! Привести пример аналитической функции, обращающейся в ноль на последовательности, предел которой принадлежит границе области аналитичности. ★

Следствие 4.3. Если есть две функции $f, g \in \mathcal{H}(D)$ такие, что $f(x_n) = g(x_n)$ на последовательности $\{x_n\}$, предел которой принадлежит D , то эти функции тождественно равны в D . (Именно поэтому предыдущая теорема носит название теоремы единственности).

Полное доказательство здесь приведено не будет, ограничимся «почти доказательством». Запишем формулу Тейлора в точке $z = a$. Ясно, что $f(a) = 0$; также, возможно, некоторое количество производных также обратится в ноль. Но если в ноль обратятся они все, то функция будет тождественно равна нулю, и доказательство закончено. Представим себе, что производная за номером k_0 не равна нулю, но тогда, ясное дело,

$$f(a + h) = \frac{f^{(k_0)}}{k_0!} h^{k_0} + O(|h|^{k_0+1}).$$

Таким образом, можно указать круг достаточно малого радиуса с центром в точке a , причем такой, что нулей внутри этого круга у функции f попросту не будет. Но это противоречит тому, что $z_n \rightarrow a$!

ВНИМАНИЕ: ничего даже отдаленно похожего в анализе функций одной вещественной переменной НЕТ! Привести пример. ★

Определение 16. Пусть функция f определена в $E \subset \mathbb{C}$ (это множество с предельной точкой, не обязательно область!). Пусть $E \subset D$, где D — область. Пусть существует функция $F \in \mathcal{H}(D)$ такая, что

$$f(z) \equiv F|_E(z).$$

В таком случае, F называется аналитическим продолжением функции f в область D .

Из теоремы единственности сразу же следует единственность аналитического продолжения!

Определение 17. f называется целой, если она аналитична на всей комплексной плоскости.

В частности, можно показать, что полиномы, $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$ — целые. Целой является также $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. Проверить это! ★

Более того, ясно, что $f \pm g$, fg , $f \circ g$ — целые, коль скоро f, g — целые.

Обратим внимание на то, что определения $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\ln z$ и т.д., данные в первом семестре, фактически выбраны из того соображения, что эти функции должны были оказаться аналитическими продолжениями своих вещественных «прототипов» в комплексную плоскость. Совместно с понятием целой функции это позволяет доказать, например, основное тригонометрическое тождество.

В самом деле, $\sin^2(z) + \cos^2(z) - 1$ — очевидно, целая функция. С другой точки зрения, при вещественных z она тождественно равна нулю, но тогда при комплексных z

она является аналитическим продолжением нуля, т.е. нулем, с учетом единственности аналитического продолжения.

Аналогично, нами использовалось вещественное определение

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}; \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Если теперь положить по определению

$$e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!},$$

то $\exp(z)$ оказывается аналитическим продолжением вещественной функции $\exp(x)$, причем автоматически оказывается справедливо соотношение $\exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$, которое в первом семестре мы фактически использовали, совместно с формулами Эйлера, для определения комплексной экспоненты. В самом деле, для вещественных z_1 и z_2 это справедливо в рамках вещественного анализа, но тогда, считая z_2 вещественной и фиксированной, имеем целую функцию $\exp(z_1) \exp(z_2) - \exp(z_1 + z_2)$ комплексного z_1 , являющуюся аналитическим продолжением нулевой. Затем считаем z_2 комплексной и фиксированной, а z_1 — комплексной переменной, получая тем самым доказательство при всех z_1, z_2 . Самостоятельно: получить отсюда формулы Эйлера. ★

4.0.4. Восстановление аналитической функции по ее части: второй способ. Воспользуемся теперь аппаратом теоремы единственности для получения альтернативной версии восстановления аналитической функции по ее вещественной или мнимой части. Пусть в области D задана регулярная функция $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Пусть также D содержит некий интервал I вещественной оси. Предположим, что в D корректно определена вспомогательная функция $g(z) := u(z, 0) + iv(z, 0)$ (так оно и будет, коль скоро функции u, v — элементарные). А теперь фокус: на I верно, что

$$f(x, 0) = g(x, 0)$$

Но тогда они обязаны совпадать и в D , на основании теоремы единственности!

Пример 6. Восстановим аналитическую функцию f по ее вещественной части $u(x, y) = e^x \sin y$. Во-первых, проверим, что она гармоническая. Во-вторых, воспользуемся первым из условий Коши-Римана и восстановим мнимую часть на вещественной оси:

$$v'_x = -u'_y, \quad v(x, 0) = - \int u'_y|_{y=0} dx = - \int e^x dx = -e^x + C.$$

Окончательно, имеем:

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = -ie^z + C.$$

Обратите внимание, что по сравнению с предыдущим рассмотренным способом решения задачи этого типа тут не только упрощается вычисление интеграла (одного, вместо двух), но и искомая функция возникает сразу в виде функции от переменной z .

Самостоятельно для всех: а как восстановить функцию f , если заданы ее вещественная $u(0, y)$ и мнимая $v(0, y)$ части? Как восстановить аналитическую функцию по ее модулю? Аргументу?

4.0.5. Классификация изолированных особых точек.

Определение 18. z_0 называется изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, если f аналитична в выколотой окрестности точки z_0 , т.е. $f \in \mathcal{H}(0 < |z - z_0| < r)$

Изолированная особая точка может быть:

- (1) устранимой в том случае, если $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$, причем после доопределения $f(z_0) := c$ функция становится голоморфной в точке z_0 .
- (2) полюсом в том случае, если

$$f(z) = \sum_{k=-p}^{-1} c_k (z - z_0)^k + \phi(z),$$

где $\phi(z)$ — аналитическая в z_0 .

- (3) существенной особенностью в остальных случаях. При этом число p называется порядком полюса.

У рациональных функций, рассмотренных в лекции 1, все особые точки — изолированные, и это полюса. Вычисление соответствующих коэффициентов c_k в этом случае не вызывает затруднений и производится на базе разложения на простейшие.

Пример существенной особой точки: $\exp(1/z)$, точка 0 — существенная особенность: предел отсутствует.

А может ли существовать аналитическая функция, у которой вообще нет особых точек? Да, как отмечалось выше, это целые функции (если мы говорим об особенностях только в конечных точках). Однако тут есть существенное ограничение:

Теорема 4.4 (Лиувилль). $f(z)$ — аналитическая всюду на \mathbb{C} и ограничена $\Rightarrow f = \text{Const}$.

Доказательство этого факта будет предъявлено через пару лекций, а пока:

Следствие 4.5 (Основная теорема алгебры). У всякого полинома степени $n \geq 1$ есть как минимум один полюс в комплексной плоскости.

Доказательство. Полином $p(z)$ — целая функция, рассмотрим $f(z) := 1/p(z)$. Если у $p(x)$ нет ни одного корня, то $f(z)$ — тоже целая, но нетрудно показать, что в таком случае она ограничена всюду в \mathbb{C} . Тогда приходим к противоречию на основании теоремы Лиувилля. \square

А бывают ли НЕизолированные особые точки у аналитических функций? Да, конечно. Примеры: \sqrt{z} — аналитична на комплексной плоскости с разрезом (например) по положительной части вещественной оси. $\ln z$ — аналитична на комплексной плоскости с разрезом (например) по отрицательной части вещественной оси. Здесь разрыв носит характер скачка при переходе через разрез. Такого типа разрывы можно устранить, рассмотрев многозначную функцию на ее Римановой поверхности.

5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ (ЛЕКЦИЯ 12/03)

Начиная с этого места, лекционный курс перешел в online-формат. В связи с этим, здесь и далее разбивка дается по темам, а не по лекциям: так мне удобнее.

См. конспект лекций В.Ф. Лазуткина тут: [Определенный интеграл](#)

6. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (ЛЕКЦИЯ 19/03)

См. конспект лекций В.Ф. Лазуткина тут: [Несобственные интегралы](#)

7. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ И ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ (ЛЕКЦИИ 26/03 и 2/04)

См. конспект лекций В.Ф. Лазуткина тут: [Равномерная сходимость и перестановочность пределов](#)

8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (ЛЕКЦИИ 2/04, 16/04, 23/04)

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (или, что все равно, комплекснозначную) при дополнительном условии, что $f \in L^1(\mathbb{R})$. Это означает, что существует как несобственный интеграл $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$. Дополнительно необходимо предположить, что функция f интегрируема по Риману на всяком интервале вида $[R_1, R_2]$ вещественной оси (это связано с тем обстоятельством, что для интеграла Римана верно, что из интегрируемости функции следует интегрируемость модуля оной, но обратная импликация, вообще говоря, неверна). Это дополнительное условие не является необходимым при рассмотрении интегралов в смысле Лебега, и не будет вызывать у нас проблем, так как мы будем в большинстве случаев дополнительно предполагать непрерывность либо кусочную непрерывность этой функции.

Для данной f прямое преобразование Фурье определено, как

$$(\Phi f)(k) \equiv \hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-ikt) dt.$$

Ясно, что в силу $|\exp(-ikt)| \leq 1$ и интегральной оценки данный интеграл сходится абсолютно при всех $k \in \mathbb{R}$.

Более того, верно следующее утверждение:

Лемма 8.1 (Риман-Лебег). *Для f из рассмотренного класса,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Доказательство. (Здесь приводится эскиз доказательства).

Во-первых, рассмотрим функцию f специального вида (ступенька):

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда преобразование Фурье от нее:

$$\hat{f}_{\alpha,\beta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp(-ikt) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ik} (\exp(-ik\beta) - \exp(-ik\alpha)) \rightarrow 0,$$

когда $k \rightarrow \infty$.

По линейности интеграла Римана, то же верно и для конечной линейной комбинации таких ступенек, т.е. для функции

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i f_{\alpha,\beta}(x).$$

Теперь зададимся $\varepsilon > 0$ и найдем в силу абсолютной сходимости интеграла такое $R > 0$, что $(2\pi)^{-1/2} \int_{|x|>R} |f(t)| dt < \varepsilon/2$. Для отрезка же $[-R, R]$ построим интегральную сумму Римана (представляющую из себя как раз интеграл от ступенчатой функции вида $f_N(x)$), отличающуюся от интеграла $\int_{-R}^R f(x) dx$ не более, чем на $\varepsilon/2$.

Теперь

$$\Phi f = \Phi(f - f_N) + \Phi f_N,$$

причем

$$|\Phi f(k)| \leq |\Phi(f - f_N)(k)| + |\Phi f_N(k)| \leq \varepsilon + |\Phi f_N(k)|.$$

Теперь утверждение леммы следует из того, что оно верно для $\Phi f_N(k)$, в силу произвольности $\varepsilon > 0$. \square

Далее, верно следующее утверждение:

Теорема 8.2. Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то ее преобразование Фурье $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$, то есть оказывается непрерывной функцией на вещественной оси.

Доказательство. Рассмотрим

$$\hat{f}(k) - \hat{f}(k') = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\exp(-ikt) - \exp(-ik't)) dt.$$

В силу интегральной оценки, имеем отсюда:

$$|\hat{f}(k) - \hat{f}(k')| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |1 - \exp(-i(k' - k)t)| dt.$$

В силу того, что $|1 - \exp(-i(k' - k)t)| \leq |t||k' - k|$ (это следует из $|\sin x| \leq |x|$), имеем:

$$|\hat{f}(k) - \hat{f}(k')| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |t||k' - k| dt = |k' - k| \int_{-\infty}^{\infty} |t||f(t)| dt,$$

так что мы доказали то, что требовалось, при дополнительном условии $\int_{-\infty}^{\infty} |t||f(t)| dt < \infty$. Самостоятельно докажите, что это дополнительное условие можно убрать! \square ★

Введем теперь следующий класс функций

Определение 19 (класс Шварца).

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} |x|^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) = 0 \text{ для всех } n, m \in \mathbb{N} \cup 0\}.$$

Иными словами, в этот класс попадают все бесконечно дифференцируемые функции на вещественной оси, которые (вместе со всеми своими производными) убывают на бесконечности быстрее любой степени x . Пример такой функции: $\exp(-x^2)$.

Данный класс оказывается «естественным» с точки зрения преобразования Фурье. Для того, чтобы это увидеть, докажем сперва следующую теорему:

Теорема 8.3. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда

$$\Phi(-ixf(x)) = \frac{d}{dk} \hat{f}(k) \equiv \frac{d}{dk} (\Phi f)(k),$$

$$\Phi(f'(x)) = ik \hat{f}(k) \equiv ik(\Phi f)(k).$$

Доказательство. Первое утверждение получается дифференцированием $\hat{f}(k)$, после смены порядка дифференцирования и интегрирования. Второе утверждение получается интегрированием по частям выражения для $\hat{f}(k)$, причем внеинтегральные члены обнуляются в силу принадлежности f классу Шварца.

□

Следствие 8.4.

$$\Phi((-ix)^m f(x)) = \frac{d^m}{dk^m} \hat{f}(k) \equiv \frac{d}{dk} (\Phi f)(k), \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\Phi(f^{(m)}(x)) = (ik)^m \hat{f}(k) \equiv ik(\Phi f)(k), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(получается повторным применением только что доказанной теоремы m раз).
Теперь получается

Теорема 8.5. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Для доказательства надо рассмотреть $k^m \hat{f}^{(n)}(k)$, для которой получить представление в виде преобразования Фурье от некоторой функции на основании только что доказанного следствия. Далее, так как f принадлежит классу Шварца, то доказательство завершается ссылкой, например, на лемму Римана-Лебега.

Итак, применение преобразования Фурье к функциям из класса Шварца не выводит за пределы последнего. Далее мы увидим, что на деле таким образом получается *весь* класс Шварца. Для этого нам понадобится формула обращения преобразования Фурье.

Теорема 8.6. Пусть f , в дополнение к обычным условиям на нее, непрерывна на вещественной оси. Пусть, кроме того, $\hat{f} \in L^1$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) dk \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Запишем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \hat{f}(k) \exp(ikx) dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) dk$$

и рассмотрим отдельно последний из написанных интегралов. Легко видеть, что

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ik(x + i\varepsilon)) dk.$$

В последнем интеграле подставим явное выражение для $\hat{g}(k)$ и поменяем порядок интегрирования:

$$\int_0^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ik(x + i\varepsilon)) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_0^{\infty} \exp(ik(x + i\varepsilon)) \exp(-ikt) dk \right) dt.$$

Но с другой точки зрения

$$\int_0^{\infty} \exp(ik(x + i\varepsilon)) \exp(-ikt) dk = -\frac{1}{i} \frac{1}{x - t + i\varepsilon}.$$

Аналогичный переход для интеграла

$$\int_{-\infty}^0 \hat{f}(k) \exp(ikx) dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 \hat{f}(k) \exp(ik(x - i\varepsilon)) dk$$

приводит к итоговому выражению:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{i} \frac{1}{x-t-i\varepsilon} - \frac{1}{i} \frac{1}{x-t+i\varepsilon} \right) dt.$$

Наконец,

$$\frac{1}{i} \frac{1}{x-t-i\varepsilon} - \frac{1}{i} \frac{1}{x-t+i\varepsilon} = \frac{1}{i} \frac{2i\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2}$$

Итого:

$$\int_{-\infty}^0 \hat{f}(k) \exp(ikx) dk = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dt.$$

Итак, остается доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dt \rightarrow f(x),$$

когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Это будет следовать из следующей леммы:

Лемма 8.7. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, и пусть она ограничена всюду на вещественной оси. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = f(0).$$

Доказательство. Здесь будет приведен эскиз доказательства.

Пусть на самом деле $f \in C^1(\mathbb{R})$ (или хотя бы дифференцируема в точке 0). Зафиксируем какое-либо (достаточно маленькое) $\delta > 0$ и разложим интеграл по аддитивности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = \int_{-\delta}^{\delta} f(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy + \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) f(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy.$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

равномерно по $x \in (-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty)$. Следовательно, оправдан переход к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) f(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = 0.$$

Что касается оставшегося интеграла, то в нем мы можем разложить f в ряд в окрестности нуля:

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = \int_{-\delta}^{\delta} f(0) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy + \int_{-\delta}^{\delta} f'(0)y \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy + \int_{-\delta}^{\delta} o(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy.$$

При этом

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(0) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = f(0) \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = f(0) + o(1),$$

как следует из явного вычисления интеграла, и

$$\int_{-\delta}^{\delta} f'(0)y \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = 0$$

из-за асимметричности функции $y \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2}$ по y .

Наконец, тот факт, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} o(y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy = o(1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

я предоставляю доказать читателю. ★

Таким образом, осталось доказать утверждение леммы при условии, что f лишь только непрерывна. Это доказательство предоставляется читателю. □ ★

Теперь окончание доказательства теоремы тривиально: в самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{y^2 + \varepsilon^2} dy,$$

и для использования леммы осталось положить $g(y) := f(x+y)$. □

Самостоятельная задача: как надо изменить утверждение леммы из доказательства предыдущей теоремы, если предположить, что у функции f имеется разрыв первого рода в нуле? Докажите это модифицированное утверждение! Как тогда можно будет переформулировать теорему об обращении преобразования Фурье? ★★

Отметим, что Φ является, очевидно, линейным оператором в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (см. материалы лекций за первый семестр): это непосредственно следует из линейности интеграла Римана.

Самостоятельная задача: показать, что линейное пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ бесконечномерно, т.е. в нем наличествует хотя бы один бесконечный набор линейно независимых элементов. ★

Снабдим это линейное пространство структурой «скалярного произведения» (замечание для зануд: то, что будет введено ниже, на самом деле является скалярным произведением не в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, а в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, т.е. пространстве функций, для которых $\int |f(x)|^2 dx$ сходится. Это связано с тем, что L^2 является замыканием пространства \mathcal{S} по ассоциированной с этим скалярным произведением норме. Впрочем, так как $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, мы можем использовать в нем скалярное произведение, позаимствованное из более широкого пространства.) Зададим его так:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

где черта сверху, как обычно, обозначает комплексное сопряжение. Легко убедиться в том, что эта форма линейна по первому элементу и антилинейна по второму, положительно определена, комплексно симметрична ($\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$) и невырождена. Таким образом, см. материалы лекционного курса за первый семестр, это и в самом деле скалярное произведение (в линейном пространстве над полем комплексных чисел).

Это скалярное произведение, тем самым, порождает норму (обобщение понятия модуля вектора) $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, для которой автоматически выполняются неравенства треугольника и Коши-Буняковского-Шварца:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|; \quad |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Рассмотрим теперь две функции из класса Шварца, f и g , и запишем

$$\begin{aligned}\langle \Phi f, \Phi g \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-ikt) dt \right) \overline{\hat{g}(k)} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikt) \overline{\hat{g}(k)} dk \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikt) \hat{g}(k) dk \right)} dt = \\ &= \langle f, \Phi^{-1} \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle.\end{aligned}$$

Здесь при переходе от первого интеграла ко второму заменен порядок интегрирования, а символом Φ^{-1} обозначен оператор обратного преобразования Фурье, так что $\Phi^{-1}\Phi f = f$ для всякой допустимой функции f .

Тем самым, мы доказали следующую теорему:

Теорема 8.8 (Планишерель, Парсеваль). *Для $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ верно:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}(k)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

и в частности верно равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Доказанное свойство в терминах введенной нами нормы может быть переформулировано следующим образом:

$$\|\Phi f\| = \|f\|.$$

Линейные операторы, обладающие этим свойством, называются *унитарными*. Знакомый вам пример унитарного оператора: оператор поворота декартовой системы координат в \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3 .

На самом деле, мы нигде в доказательстве не пользовались тем, что функции f, g принадлежат классу Шварца. Единственное, чем мы на самом деле тут воспользовались, это теоремой об обращении преобразования Фурье, которая в доказанной нами формулировке требует непрерывности функции.

На деле, непрерывность тут не важна, важно лишь одновременное выполнение условий $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Для более слабо убывающих на бесконечности функций ($f \in L^2(\mathbb{R})$) можно определить преобразование Фурье следующим образом: рассмотрим $\hat{f}_R(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(t) \exp(-ikt) dt$. Оказывается, что эта последовательность функций обладает пределом в следующем смысле: имеется $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ такая, что $\|\hat{f}_R - \hat{f}\| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$, или же, в более привычной форме записи,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_R(k) - \hat{f}(k)|^2 dk \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty.$$

Определенная этим свойством \hat{f} и называется в этом случае преобразованием Фурье. Обратите внимание, что стандартная формула преобразования Фурье для таких функций

неприменима: стоящий в ней интеграл попросту расходится! Тем не менее, если теперь определить

$$f_N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \hat{f}(k) \exp(ikx) dk,$$

то оказывается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_N(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow +\infty.$$

В этом смысле, формула обращения преобразования Фурье оказывается верна в том числе и для L^2 -функций. Описанные результаты для $f \in L^2(\mathbb{R})$ следуют сразу же из последней доказанной нами теоремы (применяются базовые вещи из функционального анализа и теории операторов).

В 1966 году великим шведским математиком Карлесоном была доказана *гипотеза Лузина (1915)*, в справедливость которой к тому моменту уже давно никто не верил, а именно, что определенные выше функции $f_N(x)$ сходятся к $f(x)$ не только в указанном выше интегральном смысле (говорят: *в среднем*), но и поточечно, для *почти всех* значений $x \in \mathbb{R}$. Это — знаменитая *теорема Карлесона*.

Обратите внимание, что для функций из, казалось бы, естественного класса L^1 , для которых преобразование Фурье определено непосредственно, как выше в настоящей главе, через абсолютно сходящийся интеграл, этот результат **неверен!** (пример Колмогорова). Фокус тут в том, что интегрируемые функции из L^1 допускают более сильные сингулярности в *конечных* точках вещественной оси. Так что для этих функций формула обращения верна только при наложении дополнительного условия $\hat{f} \in L^1$, что нами и было сделано в формулировке теоремы об обращении преобразования Фурье выше.

Смысл преобразования Фурье. Пусть исходная функция f вещественна, считаем ее преобразование Фурье \hat{f} и предположим, что $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Обратите внимание, что уже для вещественной f ее преобразование Фурье, вообще говоря, комплексно! Разложим теперь $\hat{f}(k) = A(k) + iB(k)$ с вещественными функциями $A(k)$ и $B(k)$. Обратное преобразование Фурье даст:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A(k) + iB(k))(\cos kx + i \sin kx) dk,$$

откуда следует в силу вещественности f :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A(k) \cos kx - B(k) \sin kx) dk,$$

иными словами, мы разложили исходную функцию по синусам и косинусам. При этом $A(k)$ играет роль амплитудной функции косинусов, а $B(k)$ — амплитудной функции синусов.

Если заменить интеграл на интеграл по конечному промежутку (воспользовавшись тем, что интеграл сходится абсолютно и тем самым его бесконечные «хвосты» могут быть сделаны меньше любого наперед заданного числа), то получится:

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R (A(k) \cos kx - B(k) \sin kx) dk \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^{N-1} (A(\xi_m) \cos \xi_m x - B(\xi_m) \sin \xi_m x) \Delta_m,$$

где $\Delta_m = x_{m+1} - x_m$, $\{x_m\}_{m=0}^N$ — разбиение отрезка $[-R, R]$, а ξ_m — выбранные точки внутри соответствующих интервалов разбиения.

Отсюда видим, что $f(x)$ представима (с погрешностью) в виде конечной комбинации синусов и косинусов. Соответствующие точки ξ_m дают (угловые) частоты тех синусов и косинусов, что участвуют в этом представлении, а $A(\xi_m)$, $B(\xi_m)$ — их амплитуды. Иными словами, глядя на график преобразования Фурье, можно увидеть, какие именно частоты оказываются преобладающими в частотном разложении функции: это те точки k , где $|\hat{f}(k)|$ имеет локальные максимумы.

Дополнительно см. файл для Wolfram Mathematica с примерами прямых и обратных преобразований Фурье. Файл находится [здесь](#).

Дискретное преобразование Фурье. Будем считать, что у нас есть какой-то сигнал $f(t)$ (можно считать, что t — время), и мы его дискретно измеряем в моменты времени $0, T, 2T, \dots, (N-1)T$. Обозначим соответствующие измерения $f[0], f[1], \dots, f[N-1]$.

Так как нам неизвестна функция f между ее дискретными измерениями, будем считать ее кусочно-постоянной: от момента 0 до момента T она будет равна постоянной $f[0]$, далее от момента T до момента $2T$ она будет равна $f[1]$, ну и так далее. Подставив эту функцию в формулу преобразования Фурье, получим (не обращая внимания на константу при сумме):

$$\hat{f}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \exp(-ikmT).$$

Теперь нам хочется, начав с дискретного набора значений, получить такой же дискретный набор значений для \hat{f} . Для этого возьмем следующий дискретный набор значений переменной k : $0, \frac{2\pi}{NT}, \dots, \frac{2\pi}{NT}(N-1)$.

Данный выбор обусловлен следующим соображением: учитывая формулу для обратного преобразования Фурье, мы хотим взять в точности те частоты, что соответствующие синусы и косинусы будут иметь целые числа периодов, укладывающиеся на отрезке $[0, NT]$. В самом деле, например, $k = \frac{2\pi}{NT}$ будет соответствовать $\cos \frac{2\pi}{NT}x$, и аргумент этой функции при изменении x от 0 до NT пробегает в точности один период от 0 до 2π . Тем самым, мы получим *периодическое* представление для нашей исходной функции.

Подставляя выбранные нами значения k в формулу для преобразования Фурье, приходим к определению *дискретного преобразования Фурье*:

$$\hat{f}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m] \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}nm\right).$$

Совершенно аналогичным образом можно получить и формулу для обратного *дискретного* преобразования Фурье:

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}[n] \exp\left(i\frac{2\pi}{N}nm\right).$$

Здесь нормировка $1/N$ перед суммой выбрана таким образом, чтобы обратное преобразование Фурье давало в точности исходный дискретный сигнал.

Доказательство формулы обращения я опускаю, желающие могут ознакомиться с ним самостоятельно: в нем нет ничего, кроме формулы подсчета обратной к заданной квадратной матрице.

Быстрое преобразование Фурье (fft) — это название алгоритма нахождения дискретного преобразования Фурье. В то время, как согласно приведенным выше формулам дискретное преобразование Фурье растет, как $O(N^2)$, быстрое преобразование Фурье за счет всевозможных оптимизаций растет логарифмически.

Принцип неопределенности для преобразования Фурье. Отметим, что нижеизложенное — это в точности математическая формулировка (одна из нескольких эквивалентных) принципа неопределенности Гейзенберга.

Суть принципа неопределенности заключается в том, что если исходная функция f обладает высокой степенью локализации (например, $\varepsilon/(x^2 + \varepsilon^2)$ при достаточно малом ε : это острый пик в ε -малой окрестности нуля и бесконечно малая в остальных точках вещественной оси), то ее преобразование Фурье будет, наоборот, весьма «размытым» (для примера, приведенного выше, это будет почти константа). Верно и обратное: если \hat{f} локализована, то исходная функция будет «размытой». Невозможно подобрать функцию, которая и сама, и ее преобразование Фурье обладали бы свойством локализованности.

Математически данный принцип допускает следующую формулировку (без доказательства): определим дисперсию функции f формулой

$$(Df)^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx,$$

где

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad x_0 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx$$

— соответственно, квадрат L^2 -нормы функции f и ее *математическое ожидание*, то есть своего рода «максимум плотности».

Тогда

$$(Df)^2 (D\hat{f})^2 \geq H,$$

где H — независимая константа.

Таким образом, если дисперсия самой функции относительно ее математического ожидания мала (функция «локализована»), то ее преобразование Фурье обязано быть «делокализованным».

Симметрии интегрального и дискретного преобразований Фурье. Представим себе, что $f(x)$ — вещественная функция. Тогда из определения преобразования Фурье очевидно, что

$$\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$$

для всех $k \in \mathbb{R}$. Переходя к модулям, имеем:

$$|\hat{f}(-k)| = |\hat{f}(k)|.$$

Таким образом, для *вещественного сигнала* на графике $|\hat{f}|$ мы увидим «пики» в симметричных относительно нуля точках k . В инженерных приложениях k отождествляется с частотой (см. выше), и отрицательные локальные максимумы комплексной амплитуды \hat{f} отбрасываются в силу указанной симметрии.

Аналитическим сигналом является по определению $h(x) := f(x) + ig(x)$, где $g(x)$ подобрана таким образом, что $h(x)$ может быть продолжена до комплексно аналитической функции в верхней полуплоскости (см. Элементы комплексного анализа выше в данном

курсе). Построение $g(x)$ может быть осуществлено явно, применением преобразования Гильберта к исходному сигналу $f(x)$. В силу аналитических свойств этого аналитического продолжения и теоремы Пэли-Винера, преобразование Фурье от аналитического сигнала $h(x)$ будет тождественно равно нулю на левой полуоси вещественной оси. Более того, переход к аналитическому сигналу позволяет наилучшим методом проводить интерполяцию дискретной функции (см. интерполяция в пространствах с воспроизводящими ядрами, например, книгу Seip). Подробнее базовое изложение теории аналитического сигнала можно найти, например, тут: [Limitations of the Fourier Transform: Need For a Data Driven Approach](#). Там же приводится некое базовое изложение преобразования Гильберта-Хуанга, см. также [Hilbert-Huang transform](#).

В случае дискретного преобразования Фурье указанная выше симметрия (опять же в случае вещественного дискретного сигнала) приобретает несколько иной вид:

$$\hat{f}[N - j] = \overline{\hat{f}[j]}, \text{ или же } |\hat{f}[N - j]| = |\hat{f}[j]|$$

для всякого $j = 0, 1, 2, \dots, [N/2]$. Таким образом, симметрия пиков графика модуля дискретного преобразования Фурье наблюдается относительно *середины* последовательности измерений (грубо говоря, точки $N/2$). Таким образом, на практике надо рассматривать только половину (левую или правую) графика модуля дискретного преобразования Фурье. Аналогично непрерывному случаю, есть возможность перейти к аналитическому (дискретному) сигналу путем применения дискретного преобразования Гильберта, см. подробности в цитированном мануале [Limitations of the Fourier Transform: Need For a Data Driven Approach](#).

9. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ (ЛЕКЦИИ 23/04, 30/04)

Как и выше, обозначаем $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ класс Шварца основных функций. Рассмотрим множество линейных функционалов u над \mathcal{S} (вспомним, что функционалом называется отображение из произвольного линейного пространства в \mathbb{R} или \mathbb{C}). Пример такого функционала: для $u \in L^1(\mathbb{R})$, рассмотрим правило:

$$\langle u, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \quad (\checkmark)$$

Очевидно, данный интеграл абсолютно сходится; функционал линеен по ϕ в силу линейности интеграла. Линейные функционалы будем в дальнейшем обозначать угловыми скобками: $\langle u, \phi \rangle$.

Определение 20. Последовательность функций $\phi_k \in \mathcal{S}$ называется сходящейся в \mathcal{S} к функции $\phi \in \mathcal{S}$, если для всех $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^n |\phi^{(m)}(x) - \phi^{(n)}(x)| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Заметим, что это условие существенно более сильное, чем равномерная по x сходимость последовательности $\phi_k(x)$ к $\phi(x)$.

Определение 21. Функционал u над \mathcal{S} называется *непрерывным*, если для всякой сходящейся в \mathcal{S} последовательности $\phi_k \rightarrow \phi$ выполнено, что

$$\langle u, \phi_k \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Множество *линейных, непрерывных* функционалов над классом \mathcal{S} будем обозначать \mathcal{S}' .

Отметим, что для всякой $u \in L^1$ (см. выше) функционал, определенный (✓), является, разумеется, непрерывным. Поэтому имеем очевидное включение

$$L^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'.$$

Будем писать $u_1 = u_2$, если

$$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

В частности, две функции, различающиеся в конечном или счетном числе точек, дают при этом одинаковые функционалы.

Далее, множество \mathcal{S}' не исчерпывается функционалами, порожденными функциями из L^1 . Приведем соответствующие примеры:

$$\langle \mathbf{1}, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$$

(единица);

$$\langle \delta(x), \phi(x) \rangle := \phi(0); \quad \langle \delta(x-a), \phi(x) \rangle := \phi(a)$$

(дельта-функция Дирака);

$$\langle P \frac{1}{x}, \phi(x) \rangle := V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Для первого из них выполнение свойств линейности и непрерывности очевидно. Например, непрерывность:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_k(x) - \phi(x)) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |(\phi_k(x) - \phi(x))| \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) dx \leq$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|\phi_k(x) - \phi(x)| (1+x^2)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = o(1),$$

когда скоро $\phi_k \rightarrow \phi$ в \mathcal{S} .

Для второго непрерывность следует из

$$|\phi_k(0) - \phi(0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi_k(x) - \phi(x)| = o(1).$$

Для $P \frac{1}{x}$ доказательство непрерывности предоставляется читателю. ★

Тот же факт, что функционал определен на всякой $\phi \in \mathcal{S}$, следует из представления

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(0)}{x} + \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x},$$

где второе слагаемое не имеет особенности в точке $x = 0$ в силу гладкости функции ϕ (формула Тейлора!)

Определение 22. Назовем регулярными обобщенными функциями все $u \in \mathcal{S}'$, порожденные функциями $u \in L^1$ в смысле (✓), и сингулярными — все остальные. Назовем регуляризацией сингулярной обобщенной функции $u \in \mathcal{S}'$ такую последовательность u_k регулярных обобщенных функций, которая сходится к u в смысле \mathcal{S}' , то есть в следующем смысле:

$$u_k \rightarrow u \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ в смысле } \mathcal{S}' \iff \langle u_k, \phi \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle$$

для всех $\phi \in \mathcal{S}$.

Регуляризация сингулярного u неоднозначна, однако возможна для всякого $u \in \mathcal{S}'$. В частности, (одна конкретная) регуляризация дельта-функции Дирака дается леммой из предыдущей главы:

$$u_\varepsilon := \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \Rightarrow u_\varepsilon \rightarrow \delta(x) \text{ в смысле } \mathcal{S}' \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Аналогично,

$$u_\varepsilon^a := \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} \Rightarrow u_\varepsilon^a \rightarrow \delta(x-a) \text{ в смысле } \mathcal{S}' \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Формулы Сохоцкого. Рассмотрим

$$u_\varepsilon := \frac{1}{t-x-i\varepsilon},$$

где x — фиксированный параметр. Тогда в силу

$$\frac{1}{t-x-i\varepsilon} = \frac{t-x}{(t-x)^2 + \varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon}{(t-x)^2 + \varepsilon^2}$$

и того факта, что, как несложно проверить прямым вычислением,

$$\frac{t-x}{(t-x)^2 + \varepsilon^2} \rightarrow P \frac{1}{t-x}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле \mathcal{S}' (см. определение функционала $P \frac{1}{x}$ выше), а также используя только что приведенную регуляризацию дельта-функции Дирака, получаем следующую теорему:

Теорема 9.1 (Сохоцкий).

$$\mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t-x \mp i\varepsilon} = P \frac{1}{t-x} \pm i\pi\delta(t-x),$$

и в частности при $x=0$

$$\mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t \mp i\varepsilon} = P \frac{1}{t} \pm i\pi\delta(t).$$

Условимся пользоваться следующим обозначением:

$$\frac{1}{t-x \mp i0} := \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t-x \mp i\varepsilon}.$$

Разумеется, всюду $\mathcal{S}' - \lim$ означает предел в смысле \mathcal{S}' .

Операции над \mathcal{S}' .

Определение 23. Для произвольных $u, v \in \mathcal{S}'$ и произвольных $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ положим

$$\langle \alpha u + \beta v, \phi \rangle := \alpha \langle u, \phi \rangle + \beta \langle v, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Очевидно, тем самым \mathcal{S}' является линейным пространством.

Определение 24. Для всякой $u \in \mathcal{S}'$ и произвольной $\psi \in C^\infty$ такой, что она допускает оценку $|\psi(x)| \leq C(1+|x|^m)$ при некотором натуральном m , определим умножение ψu следующим образом:

$$\langle \psi u, \phi \rangle := \langle u, \psi \phi \rangle.$$

В последнем определении, очевидно, $\psi\phi \in \mathcal{S}$, так что правая часть корректно определена.

Отметим, что оба данных определения попросту совпадают с обычными для регулярных u . Таким образом, они являются естественными обобщениями этих последних на обобщенные функции класса \mathcal{S}' .

Определение 25. Производная произвольного порядка k определяется, как обобщенная функция, заданная правилом

$$\langle u^{(k)}, \phi \rangle := (-1)^k \langle u, \phi^{(k)} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Отметим, что в случае дифференцируемой в классическом смысле (1 семестр!) $u \in L^1$ данное определение есть попросту формула интегрирования по частям, так что для таких функций оно совпадает с классическим.

Рассмотрим функцию Хевисайда

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

и считаем ее производную в смысле обобщенных функций (очевидно, классическая производная ее не существует в точке $x = 0$). Элементарное вычисление на основании последнего определения дает:

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

и вообще

$$\theta'(x - a) = \delta(x - a).$$

Этот результат неудивителен в силу полученной выше регуляризации для $\delta(x)$. В самом деле, последовательность $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ стремится к нулю при всяком $x \neq 0$ (хотя, разумеется, и неравномерно! Иначе бы в смысле распределений эта последовательность имела бы пределом ноль!) Сингулярные обобщенные функции, обладающие таким свойством, называются распределениями с носителем в одной точке (в данном случае это точка ноль).

Рассмотрим еще

$$\langle \delta^{(k)}(x), \phi(x) \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(0),$$

и вообще

$$\langle \delta^{(k)}(x - a), \phi(x) \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(a).$$

Таким образом, дельта-функция Дирака (и вообще любая обобщенная функция!) оказывается автоматически дифференцируемой сколько угодно раз.

Оказывается, дельта-функция обладает особой ролью, именно, имеет место следующее утверждение: если u — обобщенная функция с носителем в точке $x = 0$, то

$$u = \sum_{k=0}^N \alpha_k \delta^{(k)}(x).$$

Можно показать (для зануд: *сложный для вас обзор [arXiv: 2204.01199](https://arxiv.org/abs/2204.01199)*), что естественной математической моделью так называемых *квантовых точек* (и основанных на них *кубитов*) является именно обобщенная функция с носителем в единственной точке, что и показывает важность дельта-функции и ее производных. Также дельта-функции

применяются для моделирования атомов в кристаллических решетках, а их производные — для моделирования (точечных) диполей.

Задание для самостоятельной работы: чему равна производная от $P_x^{\frac{1}{2}}$?



Сопряженные (двойственные) пространства.

Определение 26. Если X — нормированное пространство, то X' — пространство линейных непрерывных функционалов над X — носит название *сопряженного* (или *двойственного*) пространства.

Замечание: \mathcal{S} — вообще говоря, не нормированное, но в нем есть так называемая система полунорм, чего тоже достаточно. За подробностями отсылаю к учебнику еще одного великого шведа, Хермандера.

Понятно, что чем меньше пространство тестовых функций (аналог нашего \mathcal{S}), тем больше, вообще говоря, будет пространство обобщенных функций над ним. В частности, у нас возникало нормированное (на самом деле, гильбертово, т.е. бесконечномерный аналог евклидова) пространство $L^2(\mathbb{R})$ с нормой

$$\|\phi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx.$$

Ясно поэтому, что

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subseteq (L^2)' \subset \mathcal{S}',$$

но на самом деле верна следующая теорема великого венгерского математика Ф. Рисса:

Теорема 9.2 (Рисс). *Всякий линейный непрерывный функционал u над пространством $L^2(\mathbb{R})$ имеет вид*

$$\langle u, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \phi(x) dx,$$

где $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

Таким образом, $(L^2)' = L^2$, и в частности это означает, что все функционалы над ним регулярны в смысле данного выше определения.

Для других нормированных пространств (например, L^1) описание двойственного пространства дается разными вариантами теоремы Арцела.

Преобразование Фурье в \mathcal{S}' .

Определение 27. Преобразование Фурье от обобщенной функции $u \in \mathcal{S}'$:

$$\langle \Phi u, \phi \rangle := \langle u, \Phi \phi \rangle.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\langle \Phi^{-1} u, \phi \rangle := \langle u, \Phi^{-1} \phi \rangle.$$

Элементарно проверяется (сменой порядка интегрирования), что эти определения совпадают с классическими (см. предыдущую главу) при условии, что $u \in L^1$.

Легко видеть, что:

$$\langle \Phi\delta(x), \phi \rangle = \langle \delta(x), \Phi\phi \rangle = \langle \delta(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \phi(t) dt \rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}, \phi \rangle,$$

то есть

$$\Phi\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}.$$

Аналогично считаем $\Phi\mathbf{1}$. Для этого применим тот же трюк, что и при доказательстве формулы обращения преобразования Фурье в предыдущей главе. При этом возникнет пара интегралов по полуосям, один из которых:

$$\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t) dt \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \left(\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} e^{-itx} dx \right) dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{-1}{-it - \varepsilon} dt.$$

Аналогичное вычисление для интеграла по дополнительной полуоси приводит окончательно к

$$\langle \Phi\mathbf{1}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \phi(t) \frac{2\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2} = \langle \sqrt{2\pi} \delta(t), \phi(t) \rangle.$$

Тем самым,

$$\Phi\mathbf{1} = \sqrt{2\pi} \delta(x).$$

Итак, преобразование Фурье от дельта-функции дает константу, а преобразование Фурье от константы — дельта-функцию, что в «предельной» форме выражает принцип неопределенности для преобразования Фурье, обсуждавшийся в прошлой главе.

Разумеется, с использованием фактически точно таких же вычислений (которые, тем не менее, полезно проделать самостоятельно!) получается также, что

$$\Phi^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1} = \delta(x), \quad \Phi^{-1} \sqrt{2\pi} \delta(x) = \mathbf{1}.$$

Понятно также, что равенство $\Phi^{-1}\Phi u = u$ для всякого $u \in \mathcal{S}'$ следует немедленно из данных нами определений Φ и Φ^{-1} , а также из формулы обращения преобразования Фурье, полученной в прошлой главе и примененной к функции из класса \mathcal{S} .

Наконец, совершенно таким же способом, как и в предыдущей главе, получается следующая

Теорема 9.3. *Для всякой $u \in \mathcal{S}'$ верно, что*

$$\frac{d}{dk} \Phi[u](k) = \Phi[(-ix)u(x)](k),$$

где $\Phi[u]$ обозначает преобразование Фурье от распределения u , а k в круглых скобках обозначает независимую переменную, по которой производится дифференцирование. Также верно, что

$$\Phi[u'](k) = ik\Phi[u](k).$$

Последняя теорема означает, что так же, как и в случае преобразования Фурье от функций из класса Шварца, преобразование Фурье от обобщенных функций $u \in \mathcal{S}'$ переводит дифференцирование в умножение на независимую переменную, а умножение на независимую переменную — в дифференцирование. Мы воспользуемся этим при анализе волнового уравнения в следующей главе.

Задание для самостоятельной работы: сосчитать $\Phi P \frac{1}{x}$, $\Phi \frac{1}{t-x-i0}$.



10. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

10.1. Колебания кирпича на пружинке. Если на хорошо смазанной горизонтальной плоскости лежит кирпич, приделанный к вертикальной стенке на пружинке, то из комбинации закона Гука и второго закона Ньютона, как известно из школьной физики, следует закон его движения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx(t),$$

где $x(t)$ — отклонение кирпича от равновесного положения, k — модуль упругости пружины, m — масса кирпича.

Угадаем два решения этого простейшего дифференциального уравнения:

$$x(t) = \exp(\pm i \sqrt{k/m} t).$$

Так как любая линейная комбинация этих функций тоже является решением, запишем:

$$x(t) = A \exp(i \sqrt{k/m} t) + B \exp(-i \sqrt{k/m} t).$$

Возникает два естественных вопроса: как это уравнение вообще решать, если не заниматься угадывкой, и, во-вторых, все ли решения этого уравнения мы вообще угадали, или есть еще какие-нибудь?

Применим преобразование Фурье к нашему дифференциальному уравнению. Какое именно преобразование Фурье? Ведь у нас их два: классическое и преобразование Фурье в классе распределений. Разумеется, второе, поскольку оба угаданных нами решения равны единице по модулю и тем самым не являются абсолютно интегрируемыми на вещественной оси \Rightarrow надо думать о сингулярных распределениях.

Получаем:

$$\xi^2 \hat{x}(\xi) = \frac{k}{m} \hat{x}(\xi),$$

где $\hat{x}(\xi)$ — преобразование Фурье от $x(t)$, ξ — переменная Фурье. Теперь надо решать полученное уравнение *в классе обобщенных функций*, то есть найти все распределения \hat{x} , удовлетворяющие этому уравнению. Понятно, что указать класс объектов, в котором мы ищем решение, весьма важно: если бы мы искали решения написанного уравнения, например, в классе $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, мы бы нашли единственную такую функцию, тождественно равную нулю.

Приведем пример обобщенной функции, которая является решением уравнения $\xi^2 \hat{u}(\xi) = 0$: это $\delta(\xi)$, дельта-функция Дирака. В самом деле:

$$\langle \xi^2 \delta(\xi), \phi(\xi) \rangle = \langle \delta(\xi), \xi^2 \phi(\xi) \rangle = \xi^2 \phi(\xi)|_{\xi=0} = 0$$

для любой $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ согласно определению дельта-функции.

Теорема 10.1. Единственным решением уравнения $xu(x) = 0$ в классе обобщенных функций является $u(x) = C\delta(x)$, где C — произвольная константа.

Доказательство. То, что это решение, уже фактически проверено выше. С другой точки зрения, из уравнения видно, что носителем решения $u(x)$ является единственная точка 0, а тогда решение обязано иметь вид (см. предыдущую лекцию):

$$u(x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \delta^{(k)}(x).$$

Подставляем эту сумму в наше уравнение и убеждаемся, что уравнение выполнено лишь при условии $\alpha_k = 0$, $k = 1, \dots$. □

Разумеется, таким же способом можно решить и уравнение вида

$$x^m u(x) = 0$$

для произвольного натурального m , а тогда и уравнение

$$P_m(x)u(x) = 0,$$

где $P_m(x)$ — полином степени не выше, чем m . Сделайте это самостоятельно с использованием основной теоремы алгебры! ★

Уравнение кирпича, которым мы занимаемся, преобразуется теперь к виду

$$(\xi - \sqrt{k/m})(\xi + \sqrt{k/m})\hat{x}(\xi) = 0,$$

и теперь мы можем написать его общее решение (оно, разумеется, получается как объяснено в доказательстве предыдущей теоремы):

$$\hat{x}(\xi) = C_1 \delta(\xi - \sqrt{k/m}) + C_2 \delta(\xi + \sqrt{k/m}),$$

причем это именно что общее решение (то есть других решений в классе обобщенных функций заведомо нет). Осталось применить обратное преобразование Фурье, в результате получаем:

$$x(t) = \Phi^{-1} \hat{u}(\xi) = C_1 \exp(i\sqrt{k/m} t) + C_2 \exp(-i\sqrt{k/m} t).$$

Итак, одним выстрелом мы убили двух зайцев: научились решать элементарные дифференциальные уравнения (конкретно: линейные обыкновенные дифференциальные уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами! В самом деле: для любого такого развитый нами метод приводит после преобразования Фурье аккуратно к уравнению вида $p_m(\xi)\hat{u}(\xi) = 0$), и при этом научились находить *все* их решения, безо всякой угадки.

Теперь вспомним, что мы имели дело с совершенно вещественным кирпичом, а вот решение дифференциального уравнения у нас комплексное. Перепишем его, используя дополнительное условие его вещественности, на основании формул Эйлера:

$$x(t) = 2\alpha \cos(\sqrt{k/m} t) - 2\beta \sin(\sqrt{k/m} t),$$

где $C_1 = \overline{C_2}$, $C_1 = \alpha + i\beta$, $C_2 = \alpha - i\beta$.

Таким образом, общим *вещественным* решением нашего уравнения будет:

$$x(t) = A \cos(\sqrt{k/m} t) + B \sin(\sqrt{k/m} t),$$

где A, B — две произвольные вещественные постоянные. Каково их значение? Очевидно,

$$x(t) = x(0) \cos(\sqrt{k/m} t) + \sqrt{m/k} x'(0) \sin(\sqrt{k/m} t),$$

так что для того, чтобы выбрать единственное решение уравнения движения кирпича, необходимо и достаточно указать начальное смещение кирпича относительно положения равновесия и начальную его скорость.

Иными словами, мы получили единственное решение так называемой *задачи Коши* (или начальной задачи) для нашего дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, а именно, следующей задачи:

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) \\ x(t)|_{t=0} = x_0 \\ x'(t)|_{t=0} = x_1. \end{cases}$$

Совершенно аналогично задаче о кирпиче можно рассмотреть уравнение колебаний математического маятника.

Удивительный факт: если из классического математического маятника сделать *двойной* математический маятник, привязав к грузу m_1 на подвесе длины l_1 второй груз m_2 на подвесе длины l_2 , периодических колебаний *не будет вообще*. То есть двойной математический маятник движется целиком *хаотически* (грубо говоря, это значит в точности то, что у него вообще нет периодических траекторий). К слову, этот результат доказан только 20 лет назад, причем при доказательстве существенно применялись компьютерные методы (но при этом доказательство математически строгое!)

Самостоятельно для желающих: создать компьютерную модель колебаний двойного математического маятника.



10.2. Волновое уравнение бесконечной струны.

Определение 28. Волновое уравнение бесконечной струны — это уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

на неизвестную функцию от двух вещественных переменных $u(x, t)$.

Ниже будет показано, из каких физических соображений получается именно такое уравнение.

Как и в предыдущем пункте, мы увидим, что задача Коши для волнового уравнения однозначно разрешима. Тут под решением задачи Коши мы, естественно, понимаем решение волнового уравнения, удовлетворяющее начальным данным $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, где $u_t := \partial u / \partial t$.

Отметим, что волновое уравнение может быть и многомерным (в размерностях 2 и 3). В обоих случаях, оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u,$$

где Δ — оператор Лапласа. Именно, если $\vec{x} = (x_1, x_2)$, то

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

(уравнение мембраны), а если $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, то

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

(трехмерное волновое уравнение). Ниже мы будем решать уравнение струны, но разрабатываем при этом методы, позволяющие решать также и многомерные волновые (да и не только волновые) уравнения.

Так или иначе, волновое уравнение бесконечной струны — это простейший пример дифференциального уравнения в частных производных (линейного, с постоянными коэффициентами). Такие уравнения решаются всегда. Если отказаться или от линейности, или от постоянности коэффициентов (то есть от постоянности скорости распространения волн в среде c), явное решение можно получить только чудом. Физически, когда скорость распространения волн c постоянна, говорят об *однородной среде*, если нет — то о *неоднородной*. Пример неоднородной среды: композитный материал.

10.2.1. *Задачи Коши для однородного и неоднородного уравнений.* Однородное уравнение (не путать с понятием однородности среды!) — это то, что написано выше. Его задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Такое уравнение описывает *свободные* волны в струне (то есть колебания струны в отсутствие вынуждающей внешней силы). Можно представить себе такую картину: струну щипнули в момент времени $t = T < 0$ и отпустили. Понятно, что в момент времени $t = 0$ смещения каждой точки струны в перпендикулярном струне направлении (отсчитываемые от положения равновесия) можно измерить, это $\phi(x)$. Аналогично, можно измерить скорость каждой точки струны — это $\psi(x)$. Далее мы смотрим, что будет происходить со струной, не прикасаясь к ней ($t > 0$). Это и есть решение нашего однородного уравнения, точнее, его задачи Коши.

В более общем случае, к струне в каждый момент времени t приложена вынуждающая сила (в каждой точке струны — разная), это функция $f(x, t)$. Тогда получаем неоднородное уравнение струны и задачу Коши для него:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

10.2.2. *Классическое решение. Формула Даламбера.* Уравнение струны допускает построение классического решения. Делается это так (в этом пункте рассмотрим только решение однородного уравнения. Можно написать формулу Даламбера и для неоднородного, но мы получим это решение ниже другим, существенно более общим, методом).

Перейдем к новым переменным ξ, η по формулам: $\xi = x - ct, \eta = x + ct$. Заменим переменные в волновом уравнении, используя инвариантность формы первого дифференциала:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -c \frac{\partial u}{\partial \xi} + c \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Теперь считаем дифференциал от первой частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$d \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \right) d\xi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) d\eta,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Совершенно аналогично, дифференцируя частную производную неизвестной функции по t , получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \left[-c \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \right) + c \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \right].$$

Подставляя эти выражения в волновое уравнение, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

(здесь, разумеется, написано дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$, рассматриваемая как функция от независимых переменных ξ, η).

Последнее уравнение нетрудно решить. В самом деле,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

откуда заключаем, что функция $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ не зависит от ξ . Значит,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta),$$

а это можно проинтегрировать, и получается

$$u = \int f(\eta) d\eta + F(\xi).$$

Окончательно имеем:

$$u = F(\xi) + G(\eta)$$

для некоторых функций $F(\xi)$ и $G(\eta)$. С другой точки зрения, подставляя $u = F(\xi) + G(\eta)$ в уравнение, убеждаемся, что для любых дифференцируемых F и G такая функция является решением. Итак, общее решение найдено, и можно вернуться к исходным переменным x, t :

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),$$

в предположении, что функции F и G хотя бы дважды дифференцируемы.

Теперь надо подобрать эти функции по начальным данным задачи Коши, то есть по ϕ и ψ . Сделаем это.

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \phi(x) \\ -F'(x) + G'(x) = \psi(x)/c \end{cases},$$

откуда, дифференцируя первое уравнение системы и решая то, что получилось, имеем

$$F(x) = \frac{\phi(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy; \quad G(x) = \frac{\phi(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(y) dy.$$

Окончательно, получаем следующую

Теорема 10.2 (Даламбер). *Решением задачи Коши для однородного волнового уравнения в классе C^2 дважды непрерывно дифференцируемых функций является функция*

$$u(x, t) = \frac{\phi(x - ct) + \phi(x + ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

10.2.3. *Принцип суперпозиции.* Рассмотрим две задачи Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \phi_1(x) \\ u_t(x, 0) = \psi_1(x). \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \phi_2(x) \\ u_t(x, 0) = \psi_2(x). \end{cases}$$

Обозначим решение первой из них $u_1(x, t)$, решение второй — $u_2(x, t)$. Легко видеть, что $u(x, t) := u_1(x, t) + u_2(x, t)$ будет решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \phi_1(x) + \phi_2(x) \\ u_t(x, 0) = \psi_1(x) + \psi_2(x). \end{cases}$$

В физике это называется «принцип суперпозиции». Он показывает, что решение волнового уравнения может быть «разложено» в сумму волн, отвечающих (возможно, более простым) начальным данным; обратно: если у нас есть две волны, являющиеся решениями, отвечающими «своим» начальным данным, то волна, отвечающая комбинации этих данных, есть сумма этих двух. Например, можно выбрать $\phi_1 = \phi$, $\psi_1 = 0$ и $\phi_2 = 0$, $\psi_2 = \psi$. Тогда решение представимо в виде суммы двух волн, первая из которых фиксирована своей формой при нулевом времени, а вторая — скоростью изменения своей формы в нуле времени.

10.2.4. *Анализ структуры решения волнового уравнения.* Всякое классическое решение однородного волнового уравнения представимо в виде $F(x - ct) + G(x + ct)$. Если взять, к примеру,

$$F(y) = G(y) = \exp(-y^2)$$

(колокол с максимумом в точке ноль), то $F(x - ct)$ при растущем t будет тем же самым колоколом, движущимся направо вдоль оси x . При этом максимум будет передвигаться по закону $x = ct$, то есть со скоростью c . Аналогично, $G(x + ct)$ будет колоколом, движущимся налево с той же скоростью. Именно в силу этого наблюдения c в волновом уравнении имеет физический смысл скорости распространения волны в среде.

Разумеется, вовсе не обязательно брать именно колоколообразную форму для F и G : здесь это сделано исключительно для наглядности. Можно представить себе кирпич, уроненный на поверхность воды. Разумеется, в этой ситуации вы увидите волны (вообще

говоря, довольно сложной формы), распространяющиеся по всем направлениям от точки падения кирпича.

10.3. Метод Фурье для решения уравнения бесконечной струны. Теперь сделаем примерно то же самое, что и выше, при анализе уравнения движения подпружиненного кирпича. Перед нами будет опять же стоять двоякая задача: с одной точки зрения, мы будем строить метод решения дифференциального уравнения в частных производных, более общего, чем волновое, с другой же точки зрения, мы проверим, нет ли у уравнения струны других, «неклассических» решений. Актуальность первого вопроса, разумеется, связана с тем, что волновое уравнение методом Даламбера у нас решилось фактически чудом, и нет никаких оснований полагать, что такой метод решения будет применим хоть к чему-нибудь еще (и действительно: для уравнения Шредингера, например, этот трюк уже не работает!)

Итак, мы снова рассматриваем наше однородное волновое уравнение бесконечной струны, и теперь применим к нему преобразование Фурье по переменной t . Будем считать, что преобразование Фурье мы делаем в смысле обобщенных функций. Тогда будем иметь:

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\hat{u}(x, \omega) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2},$$

где $\hat{u}(x, \omega)$ — преобразование Фурье от $u(x, t)$ по переменной t , ω — переменная Фурье, двойственная к t (чуть позже станет ясно, что ее смысл — частота).

Теперь можно считать, что ω — это просто параметр задачи, а переменной является только x . По модулю этой договоренности, можно не писать частные производные по x , заменив их на обычные. Но тогда написанное нами уравнение есть попросту уравнение подпружиненного кирпича, с которого мы начинали. Такое уравнение, разумеется, мы решать умеем (надо сделать второе преобразование Фурье, уже по x , и решить алгебраическое уравнение в классе обобщенных функций). Но коли так, решение мы знаем:

$$\hat{u}(x, \omega) = A(\omega) \exp(i\omega x/c) + B(\omega) \exp(-i\omega x/c).$$

Для того, чтобы получить решение исходного для нас волнового уравнения, теперь достаточно вычислить обратное преобразование Фурье, вернувшись от частоты ω к времени t , но вот этого мы пока и не умеем: нам надо сосчитать обратное преобразование Фурье от *произведения* двух функций.

Посмотрим, что за решение получится в ситуации, когда $A(\omega), B(\omega)$ вообще не зависят от ω . В таком случае, нам надо всего лишь вычислить

$$\Phi^{-1} \exp(\pm i\omega x/c).$$

Разумеется, это можно сделать и непосредственно, но снова потребуются наш испытанный трюк с включением произвольно малого ϵ , как неоднократно демонстрировалось в предыдущей части курса. Поэтому рассмотрим

$$\langle \Phi[\delta(x-ct)], \phi \rangle = \langle \delta(x-ct), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega t} \phi(\omega) d\omega \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega x/c} \phi(\omega) d\omega = \langle e^{-i\omega x/c}, \phi(\omega) \rangle.$$

Вместе со второй такой же выкладкой для $\delta(x + ct)$ это означает, что в классе распределений имеет место быть:

$$\Phi[\delta(x - ct)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x/c}; \quad \Phi[\delta(x + ct)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x/c}.$$

Но коль скоро так, то

$$\Phi^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega x/c}\right] = \delta(x - ct); \quad \Phi^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x/c}\right] = \delta(x + ct),$$

и у нас все готово. В итоге, получаем попросту

$$u(x, t) = A\delta(x - ct) + B\delta(x + ct),$$

что подозрительно напоминает решение Даламбера (классическое!) волнового уравнения. Разумеется, это оно и есть, только вместо гладкой функции $F(x - ct)$, описывающей волну, летящую направо, имеем «точечный» всплеск $\delta(x - ct)$, который точно так же при растущих временах путешествует вправо со скоростью c . Аналогичное утверждение справедливо и для волны, летящей налево.

Разумеется, полученное решение не является классическим: оно удовлетворяет волновому уравнению лишь в смысле обобщенных функций (то есть мы берем все производные в смысле производных обобщенных функций!). Заодно выяснилось, что решений в классе обобщенных функций заведомо много больше, чем классических.

Тем не менее, оно допускает регуляризацию:

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x - t)^2 + \varepsilon^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x + t)^2 + \varepsilon^2}$$

(пределы понимаются в смысле распределений!), которая является даламберовской при всяком ненулевом ε .

Перейдем теперь к общему случаю, когда $A(\omega)$ и $B(\omega)$ предполагаются зависящими от ω произвольным образом. Для того, чтобы вычислить обратное преобразование Фурье в этом случае, нам понадобится понятие свертки. Начнем со свертки двух функций из класса Шварца.

Определение 29. Сверткой функций ϕ и ψ ($\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) называется функция

$$(\phi \star \psi)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\psi(y - x)dy.$$

Легко проверяются следующие свойства свертки:

Предложение 10.3.

$$\begin{aligned} (\phi \star \psi) &= (\psi \star \phi); \\ (\phi \star \psi)' &= (\phi' \star \psi) = (\phi \star \psi'). \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема (доказательство элементарно: нужно лишь сделать линейную замену переменной под знаком интеграла):

Теорема 10.4. Для $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ верно, что

$$\Phi[(\phi \star \psi)](k) = \sqrt{2\pi} \Phi[\phi](k) \Phi[\psi](k).$$

Разумеется, переходя к обратному преобразованию Фурье, получаем:

Следствие 10.5.

$$\Phi^{-1}[(\phi \star \psi)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi^{-1}[\phi](x) \Phi^{-1}[\psi](x).$$

Перейдем теперь от сверток классических функций к сверткам распределений.

Определение 30. Сверткой двух обобщенных функций $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ называется обобщенная функция $(f \star g)$, определенная равенством

$$\langle (f \star g), \phi \rangle = \langle f(y), \langle g(t), \phi(y+t) \rangle \rangle$$

для всех $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Легко проверить, что это определение дает в точности свертку классических функций в той ситуации, когда $(f \star g)$ существует в классическом смысле.

Предложение 10.6. Для произвольного распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ верно:

$$(f \star \delta) = f; \quad (\delta \star f) = f,$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Проверка этого утверждения выполняется элементарно исходя из предыдущего определения. В частности, сие показывает, что свертка представляет собой естественное умножение в классе распределений (напоминаю: обычное произведение для обобщенных функций вовсе не обязано быть определено, например, δ^2 не имеет никакого смысла!) При таком понимании произведения, дельта-функция Дирака является нейтральным элементом по умножению.

Главным результатом, который нам теперь понадобится, является следующая

Теорема 10.7. Пусть $f, g \in \mathcal{S}'$ таковы, что определено умножение $\Phi[f]\Phi[g] \in \mathcal{S}'$. Тогда

$$\Phi[(f \star g)] = \sqrt{2\pi} \Phi[f]\Phi[g].$$

Доказательство — самостоятельно! ★★

Обратите внимание, что существование правой части никоим образом не гарантировано! Тем не менее, *если* так вышло, что и преобразование Фурье от f , и преобразование Фурье от g — регулярные обобщенные функции (или даже сингулярные, но «настоящие» функции!), то это произведение хорошо определено и тоже является обобщенной функцией. Пример, когда эта теорема не работает: $f = g = 1$. Тогда преобразования Фурье от f, g являются дельта-функциями, и правая часть не определена. Так что даже при «приличных» f, g этим фактом может быть невозможно воспользоваться.

Переходя к обратному преобразованию Фурье, получаем:

Следствие 10.8.

$$\Phi^{-1}[fg] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\Phi^{-1}[f] \star \Phi^{-1}[g]),$$

коль скоро $fg \in \mathcal{S}'$.

Применяя последнее следствие к интересующей нас обобщенной функции

$$\hat{u}(x, \omega) = A(\omega) \exp(i\omega x/c) + B(\omega) \exp(-i\omega x/c),$$

мы можем, наконец, вычислить обратное преобразование Фурье, вернувшись к переменной t . Используя тот факт, что

$$\Phi^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega x/c}\right] = \delta(x - ct); \quad \Phi^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega x/c}\right] = \delta(x + ct),$$

после нетрудного вычисления имеем:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(i\omega(t - x/c))A(\omega) + \exp(i\omega(t + x/c))B(\omega))d\omega, \quad (\omega)$$

или же

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-ik(x - ct))\tilde{A}(k) + \exp(ik(x + ct))\tilde{B}(k))dk,$$

где $k := \omega/c$ — так называемое волновое число (имеет физический смысл обратной к длине волны). Последняя формула представляет собой разложение решения волнового уравнения в интеграл по монохроматическим волнам (под монохроматической волной понимается волна вида $\exp(\mp ik(x \mp ct))$, представляющая собой линейную комбинацию косинуса и синуса фиксированной частоты). Обратите внимание, что такое же разложение по монохроматическим волнам можно было бы получить и непосредственно из теоремы Даламбера, представив F и G в виде обратных преобразований Фурье (для тех F и G , для которых это вообще возможно!).

Важным свойством волнового уравнения, выделяющего его из всех других уравнений физики, является то, что *каждая монохроматическая компонента* распространяется в пространстве с одной и той же скоростью c . Именно с этим фактом (известным, как *отсутствие дисперсии*) связано представление Даламбера классических решений волнового уравнения. Для других уравнений, например, уравнения Шредингера, дисперсия есть (волна каждой частоты летит со своей скоростью), так что волновой пакет при больших временах начинает «расплываться» (иными словами, если у вас в момент времени 0 имеется некая форма волны $F(x)$, то с увеличением t эта волна начнет менять свою форму. В частности, хорошо локализованный пакет типа $\varepsilon^{-1}(x^2 + \varepsilon^2)^{-1}$ будет все сильнее и сильнее делокализовываться с течением времени).

Обратите также внимание на то, что разработанный нами метод Фурье решения волнового уравнения бесконечной струны является весьма общим. Именно, он применим для произвольного линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. В частности, решение волнового уравнения в многомерном случае может быть получено ровно таким же образом (см., например, учебник Владимирова «Уравнения математической физики»).

10.4. Волновое уравнение для конечной струны. Начально-краевые задачи. В этой главе мы рассмотрим методы решения волнового уравнения для конечного отрезка (пример: гитарная струна). Если для волнового уравнения на всей вещественной оси необходимо было лишь поставить начальные условия Коши, что приводило к единственной разрешимости, то для конечной струны необходимо добавить так называемые краевые условия, описывающие способ крепления концов струны. Рассмотрим примеры классических краевых условий, чаще всего используемых в физике.

Определение 31. Начально-краевой задачей Дирихле для уравнения конечной струны называется задача определения функции $u(x, t)$ на отрезке $x \in [0, l]$ такой, что

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (D)$$

Приведенная выше постановка отвечает неоднородной задаче; однородная задача отвечает ситуации, когда $g(x, t) = 0$.

Так же, как и в случае бесконечной струны, неоднородность $g(x, t)$ имеет смысл вынуждающей силы; однородная задача описывает свободные колебания. Условия Дирихле $u(0, t) = u(l, t) = 0$ описывают жесткую фиксацию концов струны (мы требуем, чтобы смещения струны в концах струны были равны нулю при всех временах). Другие варианты:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u_x(0, t) = \alpha u(0, t) \\ u_x(l, t) = \beta u(l, t) \end{cases}$$

называется начально-краевой задачей Робена (или задачей третьего типа), а ее частный случай, когда $\alpha = \beta = 0$, называется задачей Неймана. Задача Неймана отвечает незакрепленной струне, а задача Робена — ситуации упругого крепления концов, причем α и β моделируют, насколько это крепление упруго. Формально, задача Дирихле отвечает $\alpha = \beta = \infty$.

Во всех случаях, нас будет интересовать решение начально-краевой задачи при *всех* временах, так что в отличие от случая бесконечной струны мы теперь должны ожидать, что свойства решения, как функции от x , будут в каком-то смысле отличаться от его свойств, как функции от t .

Тем не менее, так как t по-прежнему является произвольным вещественным, мы снова можем начать с того, что сделать по этой переменной преобразование Фурье. Начнем мы с анализа свободных колебаний струны, то есть разберем подробно ситуацию однородного волнового уравнения.

Для разнообразия, мы сделаем это немного иначе, чем раньше, а именно, *методом разделения переменных*. Метод разделения переменных для волнового уравнения состоит в том, что мы *угадываем*, что решение можно искать либо в виде

$$\exp(i\omega t)f_\omega(x),$$

либо в виде

$$\exp(-i\omega t)f_\omega(x).$$

Легко сообразить, что формула (ω) , полученная нами для решения в случае бесконечной струны, как раз и дает разложение решения по функциям указанного вида. Если в уме сделать в случае конечной струны преобразование Фурье по времени и повторить соответствующую часть выкладок, примененных нами в случае бесконечной струны, можно легко показать, что разложение решения должно быть в точности таким же, как в (ω) , и тем самым обосновать метод разделения переменных.

В общем случае метод разделения переменных состоит в том, что мы ищем решение дифференциального уравнения в виде $u(x, t) = v(t)w(x)$ (тем самым, переменные t и x «разделяются»), подставляем функцию в таком виде в уравнение и получаем по отдельности дифференциальные уравнения на v и w . Для волнового уравнения этот трюк приводит к такому:

$$\frac{1}{c^2}v''(t)w(x) = v(t)w''(x),$$

или же

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = c^2 \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Но теперь заметим, что левая часть последнего уравнения зависит исключительно от t , а правая — исключительно от x . Поэтому равенство может быть обеспечено лишь при условии, что левая и правая части равны некоторой константе. Таким образом,

$$v''(t) = -\omega^2 v(t); \quad c^2 w''(x) = -\omega^2 w(x),$$

где $-\omega^2$ — это просто удобное обозначение для указанной константы. Отсюда немедленно следует, что

$$v(t) = \exp(\pm i\omega t),$$

а для функции w остается дифференциальное уравнение

$$c^2 w''(x) = -\omega^2 w(x).$$

Как и в случае бесконечной струны, этот трюк позволяет свести дифференциальное уравнение в частных производных к таковому в обыкновенных производных, что упрощает анализ. Обоснованием метода разделения переменных для уравнения струны, как объяснено выше, служит на самом деле метод преобразования Фурье. Чаше всего, впрочем, метод разделения переменных применяется в многомерных задачах, когда геометрия области, которой принадлежат $x = (x_1, x_2, x_3)$, позволяет сказать, что координаты x_1, x_2 и x_3 независимы друг от друга. Например, для куба это заведомо так: x_1, x_2 и x_3 независимо друг от друга изменяются от 0 до l . Для шара это очевидным образом уже не так ($x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R$), и метод разделения переменных провалится. Тем не менее, для шара существует способ перейти к полярным координатам, что «развязывает» координаты: (r, ϕ, θ) уже независимы! Поэтому для шара также используется метод разделения переменных, но уже в полярных координатах.

Важно отметить, что без дополнительных предположений о геометрии (на самом деле, симметрии) разделение переменных невозможно, и тогда, как правило, явно решить соответствующее дифференциальное уравнение вообще не удастся.

Возвращаясь к нашему уравнению струны, мы получили следующее уравнение на «пространственную» часть функции $f_w(x)$:

$$-\frac{\omega^2}{c^2}f_w(x) = f_w''(x),$$

решениями которого, как мы знаем, являются

$$\exp(\pm ikx),$$

где $k := \omega/c$ — волновое число.

Итого, мы имеем дело с уравнением

$$-k^2 f(x) = f''(x).$$

А что с начальными и краевыми условиями? Как обычно, начальные условия мы пока не рассматриваем: нас интересует (пока!) *общее решение* волнового уравнения. Но, в отличие от случая бесконечной струны, мы обязаны учесть краевые условия: они-то должны быть выполнены для всякого момента времени t ! Поэтому приходим к краевой задаче, или задаче Штурма-Лиувилля, следующего вида:

$$-k^2 f(x) = f''(x), \quad f(0) = f(l) = 0.$$

Здесь k надо воспринимать как параметр задачи. То, что написано строчкой выше, является задачей Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле, и именно этот случай мы будем дальше разбирать подробно. Никто, разумеется, не мешает рассмотреть аналогичную задачу с условиями Неймана ($f'(0) = f'(l) = 0$) или задачу Штурма-Лиувилля третьего типа ($f'(0) = \alpha f(0), f'(l) = \beta f(l)$). Встречаются и более общие краевые условия, например, импедансного типа, о которых мы говорить не будем. Во всех случаях дальнейший анализ задачи проводится примерно так же, как и в случае условий Дирихле.

Общим решением последнего написанного дифференциального уравнения, как мы знаем от подпружиненного кирпича, является

$$f(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Подставляя эту функцию в краевые условия Дирихле, немедленно получаем:

$$A = -B, \quad B \text{ — любое,} \quad \sin kl = 0, \quad k \neq 0.$$

Здесь последнее условие является условием разрешимости задачи: нетривиальное решение существует лишь тогда, когда $\sin kl = 0$, причем $k \neq 0$ (очевидно, при $k = 0$ решение обязано быть равно нулю). Это может быть записано следующим образом: задача разрешима при

$$k = k_m = \frac{\pi m}{l}, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Обратите внимание, что для конечной струны разрешимость задачи есть не всегда, в отличие от того, что у нас возникало для струны бесконечной. Будем называть множество

$$\lambda_m := k_m^2 = \frac{\pi^2 m^2}{l^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

спектром задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле. Аналогично, спектром задачи бесконечной струны можно назвать все

$$\lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Сравните это определение спектра с приведенным ниже определением спектра линейного оператора в конечномерном пространстве. Там, в частности, спектр является множеством корней характеристического полинома, то есть заведомо конечным множеством. Здесь же спектром оказывается бесконечное (и для бесконечной струны несчетное!) множество. Связано это с тем, что в обсуждаемой здесь ситуации соответствующие линейные операторы действуют в *бесконечномерных* Евклидовых пространствах. Для бесконечной струны спектр оказывается *непрерывным*, а для конечной струны — чисто дискретным (хотя и бесконечным). Это типичная ситуация: спектр задачи в конечной области, как правило, дискретен, спектр же задачи в области бесконечной, как правило, непрерывен. Структура спектра играет важную роль в дискретизации дифференциальных уравнений

(то есть в том способе, которым мы можем строить их решения с использованием компьютера).

Возвращаясь к найденным нами решениям задачи Штурма-Лиувилля для уравнения конечной струны, видим, то все ее решения имеют вид

$$f_m(x) = \beta \sin k_m x,$$

где β — произвольная константа (которая может быть выбрана независимо для разных m). Ясно, что это в точности те синусы, для которых в промежуток $[0, l]$ укладывается целое число полупериодов (что и гарантирует выполнение условий Дирихле на концах интервала). Теперь метод разделения переменных дает нам следующее общее решение уравнения конечной струны:

$$u(x, t) = \sum_m \beta_m e^{i\omega_m t} \sin k_m x + \sum_m \alpha_m e^{-i\omega_m t} \sin k_m x,$$

где $\omega_m = ck_m$ при всяком m . Переходя к вещественной форме записи, получаем:

$$u(x, t) = \sum_m \tilde{\beta}_m \cos \omega_m t \sin k_m x + \sum_m \tilde{\alpha}_m \sin \omega_m t \sin k_m x. \quad (\mathcal{L})$$

Все написанные суммы на самом деле надо воспринимать, как формальные выражения. Однако в ситуации, когда лишь конечное число коэффициентов α_m, β_m отлично от нуля, это просто конечные линейные комбинации соответствующих функций.

Сравните полученное общее решение с возникшим для бесконечной струны, формула [\(ω\)](#). Видно, что структура решения по существу такая же, но место интеграла по *всем* частотам (или, что то же самое, по всем длинам волн) занимает сумма по тем частотам, которые лежат в спектре задачи. Это ровно то, чего нам стоило ожидать: если бесконечная струна звучит на всех частотах, то конечная умеет звучать только на своих «резонансных» частотах, полностью определяемых спектром. Если это гитарная струна, то все делается так, чтобы наше ухо воспринимало только *одну* из этих частот (остальные тоже есть, но находятся вне зоны слышимости!) — это и есть чистая нота.

Получим теперь решение исходной начально-краевой задачи, удовлетворив наложенным начальным условиям. Для этого подставим общее решение в условия Коши, как мы делали выше при рассмотрении метода Даламбера. Получим:

$$\begin{aligned} \sum_m \tilde{\beta}_m \sin k_m x &= \phi(x), \\ \sum_m \omega_m \tilde{\alpha}_m \sin k_m x &= \psi(x). \end{aligned}$$

Эту систему условий на коэффициенты $\tilde{\alpha}_m, \tilde{\beta}_m$ можно решить!

В самом деле, домножим первое из выписанных условий слева и справа на $\sin k_n x$ и проинтегрируем справа и слева по промежутку $[0, l]$.

Учитывая, что (проверьте!)

$$\int_0^l \sin k_m x \sin k_n x dx = 0$$

при всех $n \neq m$, получим:

$$\tilde{\beta}_m = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin k_m x dx.$$

Совершенно так же из второго условия получим:

$$\tilde{\alpha}_m = \frac{2}{l\omega_m} \int_0^l \psi(x) \sin k_m x dx.$$

Тем самым, подставляя найденные нами значения коэффициентов в (L), мы находим единственным образом решение однородной начально-краевой задачи Дирихле для уравнения конечной струны.

Перейдем теперь к решению *неоднородной* начально-краевой задачи. Для этого мы будем использовать метод построения *функции Грина* нашего уравнения.

Так как правая часть $g(x, t)$ вовсе не обязательно допускает разделение переменных x и t , сделаем теперь преобразование Фурье по времени, в точности как мы это делали для уравнения бесконечной струны. Тогда наша задача сведется к следующей:

$$\begin{aligned} -k^2 v(x) &= v''(x) + h(x), \\ v(0) &= v(l) = 0, \end{aligned}$$

где $h(x)$ — преобразование Фурье по времени от неоднородности $g(x, t)$. На самом деле, $h(x)$ зависит, разумеется, не только от x , но и от k , но, так как мы рассматриваем k как параметр, мы не будем специально отражать этот факт в обозначениях. Как всегда, мы понимаем преобразование Фурье в смысле обобщенных функций, так что мы не исключаем случая, когда, например, $g(x, t) = g(x)\delta(t)$ (мгновенное приложение внешней силы в момент времени 0, т.е., «щипок струны»).

Введем два стандартных решения *однородной* задачи:

$$s_<(x) := \sin kx; \quad s_>(x) := \sin k(l - x).$$

Первое из них решает однородное дифференциальное уравнение (с $h = 0$) и удовлетворяет условию Дирихле в левом краю струны (но не в правом, если только k не равно одному из k_m !), а второе решает то же самое уравнение и удовлетворяет условию Дирихле в правом краю струны.

Определим следующую функцию от *двух* переменных:

$$\tilde{G}(x, y) := \begin{cases} s_<(x)s_>(y), & x \leq y \\ s_<(y)s_>(x), & y \leq x. \end{cases}$$

Легко видеть, что для всякого фиксированного $y \in (0, l)$ эта функция непрерывна, как функция от x . Более того, опять же как функция от x , она дважды дифференцируема при всех $x \neq y$ и при любом таком x удовлетворяет нашему однородному дифференциальному уравнению. В точке $x = y$ эта функция не является дифференцируемой, но в этой точке существуют конечные производные справа и слева, так что у ее первой производной имеется в этой точке скачок.

Будем вычислять не классическую, а обобщенную ее производную. Ясно, что во всех точках $x \neq y$ (то есть там, где существует классическая производная) ее обобщенная производная равна классической. Так как первая производная функции \tilde{G} допускает представление

$$\tilde{G}'_x(x, y) = \chi(x, y) + c\theta(x - y),$$

где $\chi(x, y)$ — классическая функция, непрерывная по x на всем интервале $[0, l]$, θ — обобщенная функция Хевисайда, а c — числовое значение скачка классической первой

производной функции $\tilde{G}(x, y)$ в точке $x = y$, мы можем воспользоваться доказанным выше равенством $\theta'(x) = \delta(x)$ и записать:

$$\tilde{G}_{xx}''(x, y) = -k^2 \tilde{G}(x, y) + c\delta(x - y).$$

Константу c нетрудно вычислить:

$$c = -k \sin kl,$$

так что окончательно получаем

$$\tilde{G}_{xx}''(x, y) = -k^2 \tilde{G}(x, y) - k \sin kl \delta(x - y).$$

Определение 32. Функцией Грина краевой задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле для уравнения конечной струны называется функция двух переменных $G(x, y)$ такая, что: (1) при всяком $y \in [0, l]$ она является обобщенным решением дифференциального уравнения

$$G_{xx}''(x, y) + k^2 G(x, y) = \delta(x - y);$$

(2) при всяком $y \in [0, l]$ она удовлетворяет (как функция x) краевым условиям Дирихле:

$$G(0, y) = G(l, y) = 0.$$

Заметим, что для других краевых задач (Нейман, Робен) функция Грина задачи определяется целиком аналогично, меняются лишь краевые условия во втором условии. Более того, совершенно так же можно ввести функцию Грина и для любого другого дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теперь наше вычисление для функции $\tilde{G}(x, y)$ показывает, что

$$G(x, y) = -\frac{1}{k \sin kl} \tilde{G}(x, y).$$

Обратите внимание, что функция Грина определена лишь в точках $k \neq k_m$. В точке $k = 0$ она определена (неопределенность раскрывается, например, по правилу Лопиталя).

Теперь рассмотрим

$$v(x) := - \int_0^l G(x, y) h(y) dy.$$

Теорема 10.9. Если $G(x, y)$ является функцией Грина краевой задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле для уравнения конечной струны, то $v(x)$ является решением неоднородного уравнения конечной струны с краевыми условиями Дирихле, т.е. решением задачи

$$\begin{aligned} -k^2 v(x) &= v''(x) + h(x), \\ v(0) &= v(l) = 0, \end{aligned}$$

при всякой $h \in C^2[0, l]$

Доказательство этой теоремы немедленно следует из определения функции Грина. Обратите внимание, что интеграл в

$$v(x) := - \int_0^l G(x, y) h(y) dy.$$

понимается в классическом смысле интеграла Римана. В самом деле, подынтегральная функция непрерывна в условиях теоремы!

Формально, доказательство сводится к следующей строчке:

$$\frac{d^2}{dx^2}v(x) + k^2v(x) = - \int_0^l (G''_{xx}(x, y) + k^2G(x, y))h(y)dy = - \int_0^l \delta(x - y)h(y)dy = -h(x),$$

что и требуется проверить.

Таким образом, нами построено некое фиксированное («частное») решение неоднородной задачи: для этого надо сконструировать функцию Грина задачи и свернуть ее с неоднородностью $h(x)$. Теперь легко проверить, что для *любой* двух решений неоднородной задачи $v_1(x)$ и $v_2(x)$ их разность $v_1 - v_2$ является решением однородной задачи с теми же краевыми условиями. Но *общее* решение этой последней нам уже известно, а следовательно, мы смогли построить и общее решение неоднородной краевой задачи! Оно выражается следующим образом:

$$v_{\text{gen}}(x) = v(x) + v_0(x),$$

где $v(x)$ — частное решение неоднородной задачи, а $v_0(x)$ — общее решение однородной задачи. При этом мы видим, что для нашей краевой задачи справедлива *альтернатива Фредгольма* в следующей форме: *либо неоднородная задача однозначно разрешима для любой неоднородности h , либо однородная задача допускает нетривиальное решение*. Мы видим, что первая возможность реализуется при $k \neq k_m$, а вторая — при $k = k_m$.

Обратите внимание, что неоднородная задача нами решена только *вне спектра* однородной задачи, т.е. при $k \neq k_m$. Теперь нам остается, как обычно, вычислить обратное преобразование Фурье от функции $v(x)$ по переменной ω , что приводит к $u(x, t)$ — решению нашего исходного уравнения. При этом, так как преобразование Фурье — это интеграл, нас не волнует, что функция $v(x)$ не определена в точках $\omega_m = ck_m$.

Таким образом, мы получили полное решение начально-краевой задачи с условиями Дирихле для конечной струны. Отмечу, что решение неоднородной задачи для *бесконечной* струны (что я пропустил в анализе волнового уравнения бесконечной струны) может быть получено по существу тем же самым способом, т.е., методом функции Грина. Фокус тут лишь в том, чтобы «правильно» определить стандартные решения $s_<$, $s_>$. Я не буду здесь останавливаться на подробностях: их можно найти в общедоступной литературе.

10.5. Резонансы. Если у вас есть достаточно длинный мост, можно (очень грубо!) считать, что его колебания тоже описываются уравнением конечной струны с закрепленными концами (т.е. с краевыми условиями Дирихле). Здесь я кратко поясню роль спектра в возникновении явления резонанса. В интернете есть примеры разрушения реальных мостов, по которым маршировали в ногу солдаты или резонанс колебаний моста был вызван вообще ветром. Мост в этой ситуации может начать раскачиваться все сильнее и сильнее, пока не рухнет вниз. Последний пример такого «удачного» проектирования моста — это Millenium Bridge в Лондоне, который пришлось перестраивать, чтоб только не рухнул. Изложение в этом пункте будет в большой степени формальным, однако при желании ему можно придать строгий смысл. За неимением времени, строгие выкладки я тут опускаю.

Рассмотрим сперва нашу «стационарную» задачу с правильно подобранной вынуждающей силой, именно:

$$-k^2\hat{u}(x, \omega) = \hat{u}''(x, \omega) + f_m(x); \quad \hat{u}(0) = \hat{u}(l) = 0.$$

Здесь k_m — одно из дискретного набора значений k_m , при которых нетривиально разрешима однородная задача.

Докажите самостоятельно, что для решения указанной задачи справедлива следующая формула:

★★

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{1}{k^2 - k_m^2} \frac{f_m(x)}{\|f_m\|},$$

где

$$\|f_m\| := \left(\int_0^l f_m^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Выберем теперь подходящую для разрушения нашего моста вынуждающую силу $g(x, t)$ в задаче (D). Зададимся некой фиксированной частотой $\tilde{\omega}$, близкой к «резонансной» частоте $\omega_m = ck_m$, и положим

$$g(x, t) := \cos \tilde{\omega} t \sin k_m x.$$

Тогда преобразование Фурье этой функции $g(x, t)$ будет даваться

$$\hat{g}(x, \omega) = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(\omega - \tilde{\omega}) + \delta(\omega + \tilde{\omega})) f_m(x),$$

и поэтому

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{1}{k^2 - k_m^2} \frac{f_m(x)}{\|f_m\|} \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} (\delta(\omega - \tilde{\omega}) + \delta(\omega + \tilde{\omega})),$$

где мы воспользовались анонсированным результатом для стационарной задачи и тем фактом, что ω и $k = c\omega$ рассматриваются тут, как параметры.

Наконец, обратное преобразование Фурье от последнего результата получится равным:

$$u(x, t) = \cos \tilde{\omega} t \frac{1}{\tilde{k}^2 - k_m^2} \frac{f_m(x)}{\|f_m\|},$$

где $\tilde{k} = c\tilde{\omega}$. Разумеется, нами построено лишь частное решение неоднородной задачи: общее решение получится добавлением к нему общего решения задачи однородной, см. (L).

Обратите внимание, что выбранная нами вынуждающая сила «близка» к слагаемому $\tilde{\beta}_m \cos \omega_m t \sin k_m x$ общего решения однородной задачи (L), а построенное нами частное решение $u(x, t)$ отличается от вынуждающей силы на множитель

$$\frac{1}{\tilde{k}^2 - k_m^2} \frac{1}{\|f_m\|} = \frac{1}{\tilde{\omega}^2 - \omega_m^2} \frac{1}{c^2 \|f_m\|},$$

который, разумеется, неограниченно растет при приближении $\tilde{\omega}$ к ω_m .

Это и есть явление резонанса: если наша вынуждающая сила оказывается близка в указанном смысле к одной из свободных колебательных мод моста, мы получаем неограниченное возрастание амплитуды данной колебательной моды, и мост падает в реку. Иными словами, при проектировании моста надо добиться того, чтобы ни одно из собственных значений $\lambda_m = k_m^2$, или, что то же самое, ни одна из собственных частот ω_m не возбуждалась никаким мыслимым воздействием на мост.

Разумеется, если бы мы прямо положили в предложенной нами вынуждающей силе $\tilde{\omega} := \omega_m$, то никакого роста амплитуды колебаний не произошло бы: решения в этой ситуации попросту не существует (как и моста, увы!). Но в реальности крайне сложно

ожидать, что рота солдат сможет маршировать по мосту с в точности заданной частотой, потому мы и предположили, что частота вынуждающей силы лишь только близка к одной из резонансных частот, но не в точности равна ей.

Отмечу также, что такого сорта соображения, связанные с избеганием резонансных эффектов разрушения различных объектов, оказываются справедливы, разумеется, отнюдь не только для мостов. К примеру, «шуховские мачты» американских дредноутов начала XX века были хороши в порту, но начинали раскачиваться с высокой амплитудой на волне в реальных условиях, а в одном случае таки достигли резонанса, отчего и скрутились чуть менее, чем полностью.

В завершение этого раздела, оговорюсь, что понятие «резонанса» в науке неоднозначно. Описанное выше понимание характерно для инженерных наук, в математике же резонансами обычно именуют несколько иные (хотя и связанные) вещи.

11. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

11.1. Откуда вообще берется уравнение конечной струны? Отмечу сразу две вещи. Первое: уравнение струны, как и многие другие уравнения математики и физики, разумеется, является идеализацией реальной картины мира (примерно того же уровня, что понятие материальной точки в физике). Такие идеализации, тем не менее, широко используются в качестве математических моделей реальных физических процессов — надо, тем не менее, помнить о том, что у каждой такой упрощенной модели есть определенные границы применимости. Второе: для подавляющего большинства идеальных моделей даже эти границы применимости не слишком известны, так как вывод модельного уравнения, как правило, существует лишь на физическом уровне строгости. Это верно, например, для струн, мембран и даже, по-видимому, наиболее хорошо изученного в механике случая тонкой (кирхгоффовской) плиты.

Перейдем теперь к выводу уравнения струны. Представим себе струну в виде набора из N материальных точек («шариков») одинаковой массы m , соединенных одинаковыми маленькими невесомыми пружинками с коэффициентами упругости k и длинами h . Будем считать, что N неограниченно возрастает, так что общая масса будущей струны $M = Nm$, а общая длина $L = Nh$. Ясно уже отсюда, что для бесконечной струны такие соображения просто неприменимы, так как на N равномерно маленьких кусочков ее разделить нельзя. Конкретная природа шариков и пружинок нас не будет интересовать — будь это атомы и межатомные силы или что-то иное, это вопрос к физикам и их интуиции.

Отметим три соседних шарика, находящихся на позициях $x, x+h, x+2h$ нашей струны. Второй закон Ньютона и закон Гука в приложении к шарiku на позиции $x+h$ (среднему из трех) дает такое уравнение движения:

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h, t) = k[u(x+2h, t) - u(x+h, t)] - k[u(x+h, t) - u(x, t)],$$

или же

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h, t) = \frac{k}{m} [u(x+2h, t) - 2u(x+h, t) + u(x, t)].$$

Если ввести обозначение $K := k/N$, то получается:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h, t) = \frac{L^2 K}{M} \frac{u(x+2h, t) - 2u(x+h, t) + u(x, t)}{h^2}$$

Согласно одной из дополнительных задач к этому курсу из первого семестра, по правилу Лопиталя можно установить: если $u(x, t) \in C^2$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+2h, t) - 2u(x+h, t) + u(x, t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Окончательно, после очередного переобозначения, получаем знакомое нам уже уравнение струны:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

и его дискретный аналог:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}.$$

Так как это конечная струна, надо как-то фиксировать ее края. Как обычно, будем считать, что концы струны зафиксированы жестко, так что $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Как отразить эти краевые условия в дискретном уравнении струны?

Для этого введем следующие обозначения:

$$\vec{u}(t) = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t)),$$

$u_j(t) := u(jh, t)$. Тогда дискретное уравнение струны примет вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{u}(t) = A \vec{u}(t),$$

где A — матрица размера $N \times N$, определенная следующим образом:

$$A = \frac{c^2}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Обратите внимание на структуру данной матрицы: она, как говорят, *трехдиагональна* (ненулевые у нее только главная диагональ и две ближайшие к ней). Мало того, сумма матричных элементов каждой строки (кроме первой и последней) у нее равна нулю. Если представить себе, что данная матрица продолжена по тому же правилу до бесконечной (в обе стороны), перед нами пример так называемого дискретного лапласиана графа, представляющего собой бесконечную в обе стороны цепочку (о дискретных лапласианах графов см. ниже в этом курсе). Легко сообразить, откуда взялся этот граф: это в точности графическое отображение наших материальных точек, связанных маленькими пружинками, то есть в точности той картины, которой мы пользовались только что для вывода уравнения струны! Вообще, бесконечные трехдиагональные матрицы в науке обычно называются *матрицами Якоби*.

Наконец, обратим внимание, что при записи первой и последней строк нашего матричного уравнения мы, фактически, предположили, что $u_{-1}(t) = u_{N+1}(t) = 0$, то есть краевые условия Дирихле уже закодированы в нашем матричном представлении уравнения конечной струны.

Самостоятельно: а как закодировать в матричном представлении условия Неймана и Робена?

Обратите внимание, что дискретизацию мы могли сделать только по переменной x , но ни в коем случае не по времени t , поскольку нас интересует поведение системы при всех временах, а бесконечный отрезок времени невозможно поделить на равномерно маленькие интервалы!

Итак, у нас получилось матричное дифференциальное уравнение второго порядка на $\vec{u}(t)$, решения которого, как мы показали, близки при уменьшении h к решению $u(x, t)$ уравнения конченной струны с краевыми условиями Дирихле. Дело за малым: осталось как-то научиться его решать! Ясно, что это матричное уравнение представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $u_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, N$. Несложно также сообразить, что такого сорта матричное представление будет вообще возникать всякий раз, как мы будем пытаться делать дискретизацию любого дифференциального уравнения в частных производных: нужно лишь обеспечить выполнение условия, что пространственные координаты \vec{x} лежат в ограниченном множестве.

Мало того, по форме написанное матричное уравнение целиком аналогично нашему неисчерпаемому источнику вдохновения, а именно уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) = -\frac{k}{m}u(t),$$

описывающему колебания подпружиненного кирпича.

Разумеется, немедленно хочется рассмотреть нашу стандартную пару однородного и неоднородного уравнений

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{u}(t) = A\vec{u}(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}\vec{u}(t) = A\vec{u}(t) + \vec{f}(t),$$

первое из которых будет описывать свободные колебания нашей системы (в рассматриваемом частном случае — струны), а второе, соответственно, ее колебания в присутствии вынуждающей силы $\vec{f}(t)$, после чего применить преобразование Фурье по времени. Разумеется, преобразование Фурье требуется применять к каждой из компонент $u_j(t)$, $f_j(t)$, так что мы определим

$$\Phi\vec{u}(t) := (\Phi u_0(t), \dots, \Phi u_N(t)); \quad \Phi\vec{f}(t) := (\Phi f_0(t), \dots, \Phi f_N(t)).$$

Теперь применение таким образом определенного на векторных функциях преобразования Фурье, разумеется, приведет нас к стационарному уравнению

$$-k^2\Phi[\vec{u}](k) = A\Phi[\vec{u}](k)$$

в однородном случае и к

$$-k^2\Phi[\vec{u}](k) = A\Phi[\vec{u}](k) + \Phi[\vec{f}](k)$$

в случае неоднородном, что, разумеется, разрешимо методами линейной алгебры (например, методом Гаусса).

С другой точки зрения, мы знаем, что обратное преобразование Фурье, примененное к полученному преобразованием Фурье решению стационарного уравнения, приводит в случае однородного уравнения кирпича на пружинке к общему решению вида

$$u(t) = \alpha e^{ikt} + \beta e^{-ikt},$$

наложение же начальных условий задачи Коши приводит к однозначному определению констант α, β :

$$u(t) = u(0) \cos kt + u'(0) \frac{1}{k} \sin kt.$$

Сие соображение однозначно намекает, что структура решения нашего матричного уравнения должна быть похожей:

$$\vec{u}(t) = \exp(\sqrt{A}t)\vec{\alpha} + \exp(-\sqrt{A}t)\vec{\beta},$$

и

$$\vec{u}(t) = \cosh(\sqrt{A}t)\vec{u}(0) + \sinh(\sqrt{A}t)(\sqrt{A})^{-1}\vec{u}'_t(0),$$

соответственно.

Однако последние две написанные формулы выглядят несколько дико, поскольку мы пока не понимаем, что такое корень из матрицы A и что такое экспонента, в показателе которой стоит матрица, и уж тем более — кто такие синус и косинус от матрицы. Тем не менее, все эти объекты оказываются совершенно естественно определены, для чего нам придется вернуться к линейной алгебре в следующей главе курса.

11.2. Понижение порядка. Покуда же научимся полезному трюку, позволяющему перейти от системы дифференциальных уравнений второго (или более высокого) порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Начнем, как всегда, с кирпича на пружинке.

$$u''(t) = -\frac{k}{m}u(t) =: -\lambda u(t).$$

Положим $v_1(t) := u(t)$, $v_2(t) := u'(t)$. Тогда наше дифференциальное уравнение эквивалентно следующей системе уравнений первого порядка:

$$v_1'(t) = v_2(t), \quad v_2'(t) = -\lambda v_1(t).$$

Запишем эту систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}.$$

Перепишем в новых терминах также данные задачи Коши:

$$u(0) = \alpha \Rightarrow v_1(0) = \alpha, \quad u'(0) = \beta \Rightarrow v_2(0) = \beta.$$

Итого, получилось:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = A\vec{v}(t), \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом можно любое линейное дифференциальное уравнение превратить в систему линейных уравнений первого порядка. Рассмотрим следующий пример:

$$-u^{(4)}(t) + u'''(t) - u'(t) = \lambda u(t)$$

Вводим определения:

$$v_1 := u; \quad v_2 = u'; \quad v_3 = u''; \quad v_4 = u'''.$$

Получается система уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = A\vec{v}(t),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом переписываются и начальные данные задачи Коши:

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

Теперь применим этот трюк к нашему изначально матричному уравнению, полученному в процессе дискретизации уравнения струны:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{u}(t) = A\vec{u}(t); \quad \vec{u}(0) = \vec{\alpha}; \quad \vec{u}'(0) = \vec{\beta}.$$

Раз оно и так матричное, греха не будет в том, чтобы сделать его еще более матричным. Положим

$$\vec{v}_1(t) := \vec{u}(t); \quad \vec{v}_2(t) := \vec{u}'(t); \quad \vec{v}(t) := \begin{pmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{v}_2(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ A & \mathbb{O} \end{pmatrix} \vec{v}(t); \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}.$$

Так как этот трюк, как видим, работает просто всегда, нам теперь достаточно научиться решать уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \mathcal{A}\vec{u}(t); \quad \vec{u}(0) = \vec{a}$$

для произвольной квадратной матрицы \mathcal{A} . Именно, мы собираемся получить решение этой последней задачи Коши в виде

$$\vec{u}(t) = \exp(\mathcal{A}t)\vec{a},$$

придав смысл матричной экспоненте $\exp(\mathcal{A}t)$. Вот этим мы теперь и займемся.

12. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой главе будем всюду полагать, что E — линейное конечномерное пространство над полем \mathbb{C} или \mathbb{R} . В качестве конкретных примеров пространства E можно рассмотреть \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n или пространство полиномов \mathcal{P}^n . Будем рассматривать линейный оператор $A : E \mapsto E$ (то есть оператор из линейного пространства в себя). В частности, если A — квадратная матрица размера $n \times n$, то ей соответствует линейный оператор (который я

буду последовательно обозначать той же буквой A !), заданный в линейном пространстве \mathbb{C}^n следующим образом: если

$$x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix},$$

то действие оператора Ax задано следующим образом:

$$Ax = A \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix},$$

то есть как матричное умножение матрицы A на вектор-столбец координат вектора x по отношению к стандартному базису. В этом случае, как отмечалось в первом семестре, изображающей матрицей оператора A по отношению к стандартному базису \mathbf{e} является в точности исходная матрица A , что и позволяет нам эти два объекта отождествить и обозначать одной и той же буквой. В курсе первого семестра мы обычно говорили о изображающей матрице оператора по отношению к *паре* базисов. В этой главе чаще всего мы будем говорить об изображающей матрице по отношению к базису. Это означает, что один и тот же базис используется два раза, как исходный и как конечный. Иными словами, «изображающая матрица по отношению к базису \mathbf{e} » — это просто то же самое, что «изображающая матрица по отношению к паре базисов \mathbf{e}, \mathbf{e} », только короче.

12.1. Обратная матрица и обратный оператор.

Определение 33. Пусть A — квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Предложение 12.1.

$$A^{-1} \text{ — обратная матрица к } A \iff A^{-1}A = I \iff AA^{-1} = I$$

(без доказательства).

Предложение 12.2.

$$\exists A^{-1} \iff \det A \neq 0.$$

Доказательство.

$$A^{-1}A = I \Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det I = 1.$$

С другой точки зрения,

$$\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1/\det(A).$$

Следовательно, детерминант обратной матрицы отличен от нуля.

В обратную сторону: например, из альтернативы Фредгольма: если $\det A \neq 0$, то для любой правой части f существует и единственно решение матричного уравнения

$$Ax = f.$$

Но тогда

$$\forall f \text{ имеем } x = A^{-1}f,$$

ибо $Ax = AA^{-1}f = f$, то есть $AA^{-1} = I$, что и требовалось доказать. \square

Определение 34. Пусть $A : E \mapsto E$ — линейный оператор. Обратным оператором A^{-1} называется линейный оператор из E в E такой, что $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, где I — единичный оператор.

Следствие 12.3. Если A_e — изображающая матрица оператора A относительно базиса e , а A_e^{-1} — изображающая матрица оператора A^{-1} относительно базиса e , то A_e обратна к A_e^{-1} .

12.2. Характеристический полином и спектр квадратной матрицы.

Определение 35. Пусть A — квадратная матрица, λ — комплексная переменная. $\det(A - \lambda I)$ называется характеристическим полиномом матрицы A . Обозначение: $d_A(\lambda)$.

Предложение 12.4. A — матрица $n \times n$. Тогда характеристический полином $d_A(\lambda)$ допускает представление:

$$d_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{Tr } A \lambda^{n-1} + \dots + \det A.$$

Здесь $\text{Tr } A$ — это след матрицы A , т.е. сумма всех матричных элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A .

Определение 36. Спектром $\sigma(A)$ матрицы A называется множество нулей характеристического полинома $d_A(\lambda)$. Каждая точка комплексной плоскости, входящая в это множество, носит название *собственного значения*. Каждому собственному значению $\lambda_j \in \sigma(A)$ ставится в соответствие его *алгебраическая кратность* σ_j , то есть алгебраическая кратность данного корня характеристического полинома.

Из основной теоремы алгебры сразу же следует, что

$$\sum_j \sigma_j = n,$$

где n — размерность матрицы A . Более того, из той же теоремы следует представление характеристического полинома в виде:

$$d_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\sigma_1} (\lambda - \lambda_2)^{\sigma_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\sigma_r},$$

где r — число разных собственных значений матрицы A , $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$.

Теорема 12.5. $\lambda \in \sigma(A) \iff$ матричное уравнение $Ax = \lambda x$ разрешимо нетривиальным образом.

Доказательство. Пусть λ принадлежит спектру A , тогда $\det(A - \lambda I) = 0$, но тогда на основании альтернативы Фредгольма однородное уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ разрешимо нетривиальным образом, но это то же самое, что $Ax = \lambda x$ разрешимо нетривиальным образом. Обратно: то же самое, но в обратную сторону. \square

Определение 37. Пусть A — квадратная матрица, λ_j — ее собственное значение. Геометрической кратностью τ_j собственного значения λ_j называется $\dim \text{Ker}(A - \lambda_j I)$, то есть максимальное число линейно независимых решений уравнения $Ax = \lambda_j x$.

Теорема 12.6. Для любого $\lambda_j \in \sigma(A)$ верно, что его геометрическая кратность не превосходит его алгебраической кратности, т.е.,

$$\forall j \quad \tau_j \leq \sigma_j.$$

Доказательство. Пусть λ_j — собственное значение матрицы A . Тогда размерность ядра $\text{Ker}(A - \lambda_j I)$ — это в точности геометрическая кратность τ_j . Значит, найдется в точности τ_j линейно независимых векторов, удовлетворяющих $Ax = \lambda_j x$. Занумеруем их: $u_1, u_2, \dots, u_{\tau_j}$ и дополним этот набор до базиса \mathbf{f} во всем пространстве. Теперь возьмем оператор A , определенный матрицей A , как объяснено выше, и построим его изображающую матрицу в базисе \mathbf{f} .

Согласно общему правилу построения изображающей матрицы, надо подействовать оператором A на все элементы базиса \mathbf{f} , и разложить получившиеся вектора по нему же. В силу того, что каждый из первых τ_j элементов базиса удовлетворяет по построению уравнению $Au_k = \lambda_j u_k$, $k \leq \tau_j$, изображающая матрица будет иметь структуру

$$A_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Здесь звездочками обозначены неизвестные нам (зависящие от того, каким образом мы построили базис до базиса во всем пространстве) матричные элементы. Иными словами, матрица имеет блочно-диагональную структуру: вдоль диагонали матрицы стоит сперва блок размером $\tau_j \times \tau_j$, являющийся диагональной матрицей, у которой на диагонали стоят числа λ_j , а затем второй блок, размером $(n - \tau_j) \times (n - \tau_j)$, про который мы ничего не знаем. Зато вне указанных двух блоков все матричные элементы $A_{\mathbf{f}}$ равны нулю.

Сосчитаем характеристический полином этой матрицы:

$$\det(A_{\mathbf{f}} - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{\tau_j} P_{n-\tau_j}(\lambda),$$

где $P_{n-\tau_j}(\lambda)$ — полином степени $n - \tau_j$.

С другой точки зрения, как было показано в первом семестре, при смене базиса координаты вектора меняются согласно следующему закону:

$$\vec{x} = B\vec{\tilde{x}},$$

где B — изображающая матрица оператора замены базиса, \vec{x} — вектор-столбец координат вектора x в старом базисе, $\vec{\tilde{x}}$ — вектор-столбец координат вектора x в новом базисе. Очевидно, оператор замены базиса обратим (у него нет ядра!), а значит, и его изображающая матрица B тоже обратима. Итак, получаем:

$$\vec{\tilde{A}}x = B^{-1}\vec{A}x = B^{-1}A\vec{x} = B^{-1}AB\vec{\tilde{x}}$$

Иными словами, матрица $B^{-1}AB$ отображает координаты вектора x в новом базисе в координаты вектора Ax в новом базисе. Значит, согласно определению изображающей матрицы, изображающей матрицей оператора A в базисе \mathbf{f} является именно $B^{-1}AB$, и это именно ее структуру мы установили выше.

Но теперь

$$\det(A - \lambda I) = \det(B^{-1}(A - \lambda I)B) = \det((B^{-1}AB - \lambda I)) = \det(A_{\mathbf{f}} - \lambda I),$$

так что характеристический полином матрицы A совпадает с характеристическим полиномом матрицы A_f . Значит,

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_j - \lambda)^{\tau_j} P_{n-\tau_j}(\lambda),$$

откуда сразу же и следует, что алгебраическая кратность числа λ_j как минимум не меньше, чем τ_j , что и требовалось доказать. □

Определение 38. Пусть λ_j — собственное значение матрицы A . Подпространство $\text{Ker}(A - \lambda_j)$ называется *собственным подпространством* матрицы A , отвечающим собственному значению λ_j . Любой вектор, принадлежащий этому подпространству, называется *собственным вектором* матрицы A , отвечающим собственному значению λ_j . Иными словами, собственные вектора — это решения уравнения $Ax = \lambda_j x$, и размерность собственного подпространства, отвечающего λ_j , в точности совпадает с геометрической кратностью собственного значения λ_j .

Доказательство предыдущей теоремы наводит на мысль дать следующее определение:

Определение 39. Пусть $\tilde{A} = B^{-1}AB$ для пары матриц A, \tilde{A} и третьей матрицы B , имеющей обратную. В этой ситуации говорят, что матрицы A и \tilde{A} *подобны друг другу*.

Теорема 12.7. Если A и \tilde{A} подобны друг другу, то у них совпадают характеристические полиномы, алгебраические и геометрические кратности собственных значений.

Теорема, по существу, доказана в процессе доказательства предыдущей теоремы. Осталось проверить совпадение геометрических кратностей. Но если x — собственный вектор матрицы \tilde{A} , отвечающий собственному значению λ , то

$$\tilde{A}x = \lambda x \iff B^{-1}ABx = \lambda x \iff ABx = \lambda Bx,$$

то есть Bx — собственный вектор матрицы A , отвечающий тому же собственному значению. Обратно, матрица B^{-1} , очевидно, отображает собственные вектора A на собственные вектора \tilde{A} , отвечающие тому же собственному значению. Поэтому собственные подпространства A и \tilde{A} , отвечающие одному собственному числу λ , линейно изоморфны, а следовательно, их размерности совпадают.

Теперь воспользуемся фактом, тоже установленным в процессе доказательства теоремы о неравенстве между алгебраическими и геометрическими кратностями. Именно, нами было доказано, что при смене базиса изображающая матрица оператора меняется на подобную себе: A переходит в $B^{-1}AB$, где B — изображающая матрица оператора смены базиса. Следовательно, для любых двух базисов e и f в пространстве E верно, что изображающая матрица оператора A относительно базиса e подобна изображающей матрице того же оператора относительно базиса f .

Определение 40. Спектром линейного оператора A называется спектр какой-либо из его изображающих матриц. Алгебраической (геометрической) кратностью собственного значения оператора A называется алгебраическая (геометрическая) кратность этого собственного значения для какой-либо из его изображающих матриц. Характеристическим полиномом оператора A называется характеристический полином какой-либо из его изображающих матриц.

Отметим, что собственное подпространство линейного оператора A определено непосредственно, без необходимости строить его изображающую матрицу. Именно, подпространство $\text{Ker}(A - \lambda_j)$ называется *собственным подпространством* оператора A , отвечающим собственному значению λ_j . Любой вектор, принадлежащий этому подпространству, называется *собственным вектором* оператора A , отвечающим собственному значению λ_j . Иными словами, собственные вектора — это решения уравнения $Ax = \lambda_j x$, и размерность собственного подпространства, отвечающего λ_j , в точности совпадает с геометрической кратностью собственного значения λ_j .

С этого момента мне более не надо различать линейные операторы и их изображающие матрицы: я одним и тем же способом научился определять для них характеристические полиномы, спектры, алгебраические и геометрические кратности.

Сравните теперь определение спектра линейного оператора в конечномерном пространстве с определением спектра задачи Штурма-Лиувилля, которое возникло у нас при решении начально-краевых задач для волнового уравнения конечной и бесконечной струн.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Матрица I в \mathbb{C}^2 . Легко видеть, что $d_I(\lambda) = (1 - \lambda)^2$, так что спектр состоит из единственного собственного значения 1 алгебраической кратности 2. Задача $Ix = x$ решается просто любым вектором из пространства, так что геометрическая кратность тоже равна 2, причем каждый вектор из пространства — собственный.

2. Матрица поворота на плоскости:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что характеристический полином $d_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda \cos \phi + 1$. При $\phi = 0$ это матрица из предыдущего примера. При $\phi = \pi$ это матрица $-I$, у нее единственное собственное значение -1 с алгебраической и геометрической кратностями 2. При $\phi = \pi/2$ получаем два собственных значения, $\pm i$, у каждого алгебраическая и геометрическая кратности равны 1. Вообще, если у какого-то оператора собственное число имеет алгебраическую кратность 1, то автоматически и геометрическая его кратность тоже равна 1, ведь нулю она быть равна не может!

Самостоятельно: сосчитать спектр, алгебраические и геометрические кратности для всех остальных значений ϕ



Заметим, что уже у вещественных матриц, как видно в предыдущем примере, спектр запросто может оказаться комплексным (и даже чисто мнимым!). Так что и тут комплексные числа оказываются естественнее, чем вещественные.

3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь, очевидно, характеристический полином равен λ^2 , так что в спектре матрицы есть единственное собственное значение 0, алгебраической кратности 2. Тем не менее, есть единственный собственный вектор, ему отвечающий, это вектор $(1, 0)$. Таким образом, геометрическая кратность этого собственного значения 1, то есть строго меньше алгебраической кратности.

Теперь нам остался последний ингредиент:

Теорема 12.8. Пусть $\lambda_j \neq \lambda_k$ — два собственных значения оператора (или матрицы) A . Тогда отвечающие им собственные подпространства пересекаются лишь тривиальным образом, т. е.

$$\text{Ker}(A - \lambda_j I) \cap \text{Ker}(A - \lambda_k I) = \{0\}.$$

Доказательство — самостоятельно для желающих.



12.3. Собственный базис и диагонализуемость.

Определение 41. Собственным базисом оператора (матрицы) называется базис в пространстве E , составленный исключительно из собственных векторов данного оператора (матрицы), отвечающих всем возможным собственным его (ее) значениям.

Понятно из предыдущей теоремы, что, так как сумма алгебраических кратностей всех собственных значений равна размерности пространства, а геометрические кратности алгебраических не превосходят, единственная возможность собрать достаточное количество собственных векторов на базис во всем пространстве — это потребовать, чтобы все геометрические кратности были равны своим алгебраическим кратностям. В этом случае, в силу предыдущей теоремы, получаем:

$$\sum_j \dim \text{Ker}(A - \lambda_j I) = \sum_j \tau_j = \sum_j \sigma_j = n,$$

так что линейно независимых собственных векторов окажется аккурат n штук, и они тем самым образуют базис в пространстве. Значит, доказали ключевой факт:

Теорема 12.9. Критерием существования собственного базиса является равенство $\sigma_j = \tau_j$ при любом j .

Теперь представим себе, что у оператора A есть собственный базис \mathbf{f} . Запишем изображающую матрицу этого оператора в данном базисе. Но так как $Af_k = \lambda_j f_k$ при всяком $k = 1, \dots, n$ для некоторого $\lambda_j \in \sigma(A)$, эта изображающая матрица окажется чисто диагональной!

Определение 42. Оператор A называется диагонализуемым, если у него существует собственный базис.

Изображающая матрица оператора A в собственном базисе \mathbf{f} , очевидно, примет вид:

$$A_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ занумерованы с учетом их кратности, то есть каждое из них повторяется в точности столько раз, какова его кратность (без разницы, алгебраическая или геометрическая: это все равно, поскольку мы предположили существование собственного базиса!)

Теперь если мы начинаем не с оператора A , а с матрицы A , то мы первым делом строим по ней оператор, как объяснено в самом начале главы. После этого, если получившийся оператор диагонализуем, мы получаем диагональную его изображающую матрицу в собственном базисе. Но, так как исходная матрица тоже является одной из

изображающих матриц того же оператора, мы бесплатно получаем ее подобие диагональной, состоящей из собственных значений, занумерованных с учетом кратности. Таким образом, оказывается естественным отождествить матрицы с операторами, что мы и делаем с самого начала.

Что касается явного вида матрицы B , осуществляющей подобие исходной матрицы диагональной, то ее легко вычислить. В самом деле, как уже отмечалось, это попросту изображающая матрица оператора перехода от исходного базиса \mathbf{e} к собственному базису \mathbf{f} . Правило построения этой матрицы мы знаем: надо взять вектор f_1 и разложить его по исходному (стандартному) базису \mathbf{e} , то есть просто выписать в столбик координаты f_1 . Полученный столбик координат ставится на место первого столбца матрицы B . Далее проводим ту же процедуру со вторым вектором, f_2 , и ставим его координаты на место второго столбца, и продолжаем эту процедуру для всех остальных векторов. Важно не ошибиться с порядком: порядок перебора векторов f_j должен быть в точности тем же, в котором стоят на диагонали диагональной матрицы собственные значения, занумерованные с учетом их кратностей! Покуда это требование соблюдено, будем иметь формулу перехода:

$$A_{\mathbf{f}} = B^{-1}AB,$$

где A — исходная матрица (или изображающая матрица исходного оператора относительно исходного базиса), B — только что построенная матрица оператора смены базиса, и $A_{\mathbf{f}}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений.

Как следствие, получаем следующий факт:

Теорема 12.10 (Лидский).

$$\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j,$$

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Для доказательства теоремы в случае диагонализуемых операторов (матриц), достаточно заметить, что $\operatorname{Tr} A$ также является инвариантом подобия (поскольку инвариантом подобия является характеристический полином, а Tr однозначно этим последним определяется). На самом деле, данная теорема верна в гораздо более широких предположениях (в том числе, и в бесконечномерном случае). Обратите внимание, что в формулировке теоремы надо перемножать и суммировать собственные значения с учетом их кратностей!

Самостоятельно: получите из теоремы Лидского утверждение теоремы Виета, которую вы знаете из школьной программы. Получите обобщение теоремы Виета на случай полиномов более высокого порядка.

Следствие 12.11. $\det A \neq 0 \iff 0 \notin \sigma(A)$

12.4. Приложения к решению систем дифференциальных уравнений. Теперь мы можем вернуться к нашим системам линейных дифференциальных уравнений и посмотреть, как развитая нами наука в этой области работает. Обратите внимание, что развитые нами методы дискретизации и понижения степени, в принципе, не требовали иных предположений, кроме линейности. Другое дело, что при дискретизации в любом случае можно считать, что полученное матричное представление дифференциального уравнения является системой с постоянными коэффициентами. Теперь будем

дополнительно предполагать это. Итак, мы стартуем с системы вида

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= a_1^1 u_1(t) + a_2^1 u_2(t) + \cdots + a_n^1 u_n(t) \\ u_2'(t) &= a_1^2 u_1(t) + a_2^2 u_2(t) + \cdots + a_n^2 u_n(t) \\ &\dots\dots\dots \\ u_n'(t) &= a_1^n u_1(t) + a_2^n u_2(t) + \cdots + a_n^n u_n(t) \end{aligned}$$

Это однородная система; нас будет интересовать построение ее общего решения. Ее мы записываем в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = A \vec{u}(t),$$

где, как обычно, $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$.

В этом пункте мы будем предполагать, что A — «хорошая», то есть диагонализуемая, матрица. Ситуацию, возникающую в случае невозможности диагонализации, рассмотрим позже.

Коль скоро так, найдется матрица B (составленная из столбцов, каждый из которых — координаты собственного вектора) такая, что

$$A_{\mathbf{f}} = B^{-1} A B,$$

причем

$$A_{\mathbf{f}} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Значит,

$$B A_{\mathbf{f}} B^{-1} = A,$$

и подставим это в уравнение, а потом умножим слева и справа на B^{-1}

$$\frac{d}{dt} B^{-1} \vec{u}(t) = A_{\mathbf{f}} B^{-1} \vec{u}(t),$$

где мы поменяли порядок умножения слева на матрицу и d/dt , поскольку, как легко убедиться, от этого ничего не меняется. Введем теперь новый вектор-столбец

$$\vec{v}(t) := B^{-1} \vec{u}(t),$$

и система примет вид

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = A_{\mathbf{f}} \vec{v}(t) \iff \begin{cases} v_1'(t) &= \lambda_1 v_1(t) \\ v_2'(t) &= \lambda_2 v_2(t) \\ \dots &\dots \\ v_n'(t) &= \lambda_n v_n(t) \end{cases}$$

Последнюю систему можно немедленно решить, поскольку это просто набор независимых друг от друга дифференциальных уравнений первого порядка. Каждое из них еще проще, чем уравнение кирпича на пружинке, и потому сразу же пишем решение:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ v_2(t) &= \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ &\dots\dots\dots \\ v_n(t) &= \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Здесь $\vec{\alpha} = \vec{v}(0)$ — свободные постоянные. Таким образом, окончательно

$$\vec{u}(t) = B\vec{v}(t).$$

Если мы хотели бы решить задачу Коши для исходного матричного уравнения, то мы бы добавили к нему условие $\vec{u}(0) = \vec{\beta}$, и тогда, очевидно, $\vec{\alpha} = \vec{v}(0) = B^{-1}\vec{\beta}$.

Полностью решение задачи Коши можно поэтому записать в следующей форме:

$$\vec{u}(t) = B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} B^{-1}\vec{u}(0).$$

Если теперь мы хотим решать *неоднородную* систему, то надо делать все то же самое:

$$\frac{d}{dt}B^{-1}\vec{u}(t) = A_{\mathbf{f}}B^{-1}\vec{u}(t) + B^{-1}\vec{f}(t),$$

откуда для $\vec{v}(t) := B^{-1}\vec{u}(t)$ получаем

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = A_{\mathbf{f}}\vec{v}(t) + \vec{g}(t) \iff \begin{cases} v'_1(t) &= \lambda_1 v_1(t) + g_1(t) \\ v'_2(t) &= \lambda_2 v_2(t) + g_2(t) \\ \dots & \dots \\ v'_n(t) &= \lambda_n v_n(t) + g_n(t), \end{cases}$$

где $\vec{g}(t) := B^{-1}\vec{f}(t)$.

Осталось посмотреть, как решать неоднородное *скалярное* уравнение вида

$$v'(t) = \lambda v(t) + g(t),$$

что заодно закроет нам гештальт по отношению к кирпичу на пружинке: для него мы так и не написали решения неоднородного уравнения, ограничившись описанием его свободных колебаний. Теперь же никто не помешает написать нам решение задачи с вынуждающей внешней силой, для чего нам будет достаточно записать (как выше) уравнение кирпича в матричной форме.

Для решения неоднородного уравнения первого порядка применим *метод вариации свободной постоянной*. Делается это так: возьмем общее решение однородного уравнения $\tilde{v}(t) = \alpha \exp(\lambda t)$ и заставим α саму быть функцией от t (то есть начинаем свободную константу α вариировать, откуда и название метода). Иными словами, будем искать решение нашего уравнения в виде

$$v(t) = \alpha(t)e^{\lambda t},$$

для чего подставим такое $v(t)$ в уравнение. Нас, как обычно в неоднородных задачах, интересует исключительно какое-нибудь одно частное решение, так что если мы таковое нашим методом найдем, то мы и молодцы. Получаем

$$\alpha'(t)e^{\lambda t} + \alpha(t)\lambda e^{\lambda t} = \lambda \alpha(t)e^{\lambda t} + g(t),$$

откуда

$$\alpha'(t)e^{\lambda t} = g(t),$$

что тут же интегрируется:

$$\alpha(t) = \int_0^t g(y)e^{-\lambda y} dy + c,$$

где c — уже свободная постоянная. Нам нужно одно решение, так что пусть $c = 0$, ее не жалко. Итого:

$$v(t) = \left(\int_0^t g(y)e^{-\lambda y} dy \right) e^{\lambda t}.$$

Итак, возвращаясь к нашей системе, мы ее решаем:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \left(\int_0^t g_1(y)e^{-\lambda_1 y} dy \right) e^{\lambda_1 t} \\ v_2(t) &= \left(\int_0^t g_2(y)e^{-\lambda_2 y} dy \right) e^{\lambda_2 t} \\ &\dots\dots\dots \\ v_n(t) &= \left(\int_0^t g_n(y)e^{-\lambda_n y} dy \right) e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

и, так как общее решение неоднородного уравнения, как обычно (и с тем же доказательством!) оказывается суммой частного решения неоднородного с общим решением однородного, имеем:

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) = B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} B^{-1} \vec{\beta} + \\ + \int_0^t B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-y)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-y)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3(t-y)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n(t-y)} \end{pmatrix} B^{-1} \vec{f}(y) dy. \end{aligned}$$

Теперь для того, чтобы удовлетворить начальному условию задачи Коши, достаточно написать:

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) = B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} B^{-1} \vec{u}(0) + \\ + \int_0^t B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-y)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-y)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3(t-y)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n(t-y)} \end{pmatrix} B^{-1} \vec{f}(y) dy, \end{aligned}$$

и все.

12.5. **Функциональное исчисление для матриц и операторов.** Теперь попробуем это дело проинтерпретировать. Ясно, что для $u'(t) = \lambda u(t)$ решение — это $u(t) = u(0)e^{\lambda t}$. Поэтому хочется записать решение задачи $\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = A\vec{u}(t)$ в виде $\vec{u}(t) = \exp(At)\vec{u}(0)$, ну и в ситуации задачи $\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = A_{\mathbf{f}}\vec{v}(t)$ естественно было бы $\vec{v}(t) = \exp(A_{\mathbf{f}}t)\vec{v}(0)$. Сравнивая с теми формулами, что у нас есть, это значит, что мы хотим вот такого:

$$\exp(A_{\mathbf{f}}t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{\mathbf{f}} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

и для диагонализуемой матрицы:

$$\exp(At) = B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Иными словами, мы хотим разумным способом *определить* экспоненту от матрицы и от оператора, покамест предполагая диагонализуемость. Сделаем это:

Определение 43. Пусть A диагонализуется в собственном базисе \mathbf{f} , то есть

$$B^{-1}AB = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Функцией $F(A)$ называется матрица, определенная равенством

$$F(A) := BF(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})B^{-1},$$

где

$$F(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}) := \text{diag}\{F(\lambda_1), \dots, F(\lambda_n)\}.$$

Данное определение *подразумевает*, что функция F должна быть определена на *спектре* матрицы A . Так как спектр, вообще говоря, является конечным множеством в \mathbb{C} , это должна быть функция, определенная в комплексной плоскости. Желательно также, чтобы эта функция была однозначной (иначе, как обычно, возникнут проблемы, например, с многозначностью корня!) Поэтому мы будем здесь считать, что $F(z)$ должна быть комплексно аналитической функцией в некоторой окрестности спектра матрицы A .

Теперь надо остановиться и немного подумать. Определить-то можно что угодно и как угодно, но насколько разумно будет такое определение? Например, возьмем функцию $F(z) = z^m$. Тогда $F(A) = A^m$, и это определено непосредственно для любой квадратной матрицы A . Верно ли, что данное нами выше определение даст то же самое? Проверим:

$$\begin{aligned} F(A) &= BF(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})B^{-1} = B \text{diag}\{\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m\}B^{-1} = \\ &= B \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}B^{-1} \dots B \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}B^{-1} = A^m. \end{aligned}$$

Мы тут просто расписали $A_{\mathbf{f}}^m = A_{\mathbf{f}}B^{-1}BA_{\mathbf{f}}B^{-1}B \dots A_{\mathbf{f}}$, и все получилось. Значит, наше определение дает то, что надо, для степеней, но тогда по линейности и для полиномов. Значит, есть надежда, что и для произвольной функции.

Теперь вернемся к экспоненте от матрицы. Посмотрим, что было бы, если бы мы воспользовались стандартным определением экспоненты:

$$\exp(at) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m t^m}{m!} \Rightarrow \exp(At) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{t^m}{m!} A^m.$$

Очевидно, так как $A^m = B A_{\mathbf{f}}^m B^{-1}$ (как мы только что проверяли), верно:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{t^m}{m!} A^m = B \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=0}^N \frac{t^m}{m!} A_{\mathbf{f}}^m \right) B^{-1} = B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} B^{-1},$$

где мы воспользовались тем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{t^m}{m!} \lambda_j^m = \exp(\lambda_j t) \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Ну а коль скоро так, то имеет смысл дать следующее альтернативное определение.

Определение 44. Для произвольной матрицы (оператора) A , экспонента $\exp(At)$ определяется следующим образом:

$$\exp(At) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{t^m}{m!} A^m.$$

Нами проверено, что это определение операторной (матричной) экспоненты эквивалентно тому, которое было дано выше, для диагонализуемых операторов (матриц) A . На первый взгляд, это определение использовать гораздо сложнее, чем определение экспоненты через диагонализацию, поскольку мы вынуждены вычислять произвольные, сколь угодно большие, степени матрицы.

Это не вполне так, в силу следующего утверждения.

Теорема 12.12 (Тождество Кели). $d_A(A) = 0$ для любого оператора $A : E \mapsto E$. В частности, то же самое верно и для произвольной квадратной матрицы.

Имеется в виду, что мы берем характеристический полином $d_A(\lambda)$ и подставляем в него сам оператор A , по которому он построен, на место переменной λ . Ясно, что это утверждение позволяет сосчитать степень оператора A^n , если мы знаем все меньшие его степени A^m , $m = 0, 1, \dots, n-1$. Значит, для вычисления всех вообще степеней оператора (матрицы) A в n -мерном линейном пространстве достаточно вычислить степени до $n-1$ -ой. Именно этот трюк используется в компьютерных алгоритмах.

На деле, второе определение матричной экспоненты оказывается «хуже» первого, спектрального, по другой причине: при его использовании не видна роль спектра вообще. Эту роль мы сейчас постараемся прояснить.

Во-первых, продифференцируем:

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = \frac{d}{dt} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^N \frac{t^m}{m!} A^m = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \frac{m t^{m-1}}{m!} A^m = \lim_{N \rightarrow \infty} A \sum_{m=0}^{N-1} \frac{t^m}{m!} A^m = A \exp(At).$$

Значит, уже для *произвольного* (не обязательно диагонализуемого) оператора (матрицы) A решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)$$

является $\exp(At)u_0$ с произвольным элементом $u_0 \in E$. На самом деле, мы доказали даже больше: уравнение

$$\frac{d}{dt}U(t) = AU(t),$$

где $U(t)$ — неизвестный оператор, зависящий от t , решается следующим образом: $U(t) = \exp(At)U(0)$. Так что, как видите, «основное» (характеристическое) свойство экспоненты радостным образом переносится со скалярного на операторный случай.

Теперь самостоятельно покажите, используя все разработанные нами методы, что решением матричного уравнения, полученного дискретизацией конечной струны, ★

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{u}(t) = -A\vec{u}(t),$$

окажется

$$\vec{u}(t) = \cos(\sqrt{At})\vec{u}(0) + \sin(\sqrt{At})(\sqrt{A})^{-1}\vec{u}'(0).$$

Здесь учтено, что, как будет объяснено в следующем пункте, A диагонализуема, все собственные числа A положительны. Обратите внимание, что для удобства в правой части уравнения я поставил минус, так что здесь

$$A = \frac{c^2}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

При этом в качестве \sqrt{A} выбирается так называемое главное значение корня, определяемое, как

$$\sqrt{A} = B \operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} B^{-1},$$

где все корни из собственных значений берутся со знаком $+$.

Что касается синуса и косинуса матрицы, то они определены, как обычно, через формулы Эйлера:

$$\cos \sqrt{A}t = \frac{1}{2}(\exp(i\sqrt{A}t) + \exp(-i\sqrt{A}t)); \quad \sin \sqrt{A}t = \frac{1}{2i}(\exp(i\sqrt{A}t) - \exp(-i\sqrt{A}t))$$

Переход к диагональной форме матрицы A , осуществляемый, как обычно, заменой неизвестной вектор-функции по формуле

$$\vec{v}(t) = B^{-1}\vec{u}(t),$$

приводит к решениям

$$v_m(t) = \cos(\sqrt{\lambda_m}t)v_m(0) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \sin(\sqrt{\lambda_m}t)v'_m(0),$$

откуда немедленно видно, что у системы есть чистые колебательные моды, когда каждый «шарик» колеблется с одной и той же частотой, равной $\sqrt{\lambda_m}$. Общее же колебательное

движение всей системы описывается суперпозицией этих чистых колебательных мод. Таким образом, как и в ситуации, с которой мы столкнулись при изучении уравнения конечной струны аналитическими методами, дискретизированное уравнение струны указывает на физический смысл спектра матрицы A : корни ее собственных значений оказываются в точности частотами свободных колебаний системы.

Еще более показательнее в этом смысле разобрать подробно ситуацию N шариков (возможно, различных масс), объединенных в систему набором пружинок различных коэффициентов упругости. При этом, в отличие от дискретизации струны, мы больше не будем предполагать, что пружинки соединяют шарики в линейную цепь (граф-цепочка). Давайте предположим, что у нас есть произвольный граф, который устанавливает, как именно шарики соединены пружинками: если две вершины графа связаны ребром, то отвечающие этим вершинам шарики связаны пружинкой. Самостоятельно создайте компьютерную модель произвольной системы такого типа и визуализируйте ее колебания, возникающие при ее выведении из равновесного состояния. Определите чистые колебательные моды и убедитесь, как они связаны со спектром соответствующей матрицы и ее собственными векторами.

★★—
★★★

12.6. Спектральная теорема для эрмитового оператора. В этом пункте мы опишем один класс матриц (и операторов), которые заведомо являются диагонализуемыми. Больше того, они оказываются взаимно-однозначно связаны с моделями физических систем, в которых энергия сохраняется (консервативные системы). Наконец, процесс диагонализации в этом случае допускает заметное упрощение, а спектр оказывается заведомо вещественным.

Вспомним, что линейные пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n обладают структурой евклидовых пространств. В самом деле, билинейная форма

$$\langle x, y \rangle := \sum_{m=1}^n \xi^m \eta^m$$

в \mathbb{R}^n и полуторалинейная форма

$$\langle x, y \rangle := \sum_{m=1}^n \xi^m \bar{\eta}^m$$

в \mathbb{C}^n , где $\{\xi^m\}_{m=1}^n$ и $\{\eta^m\}_{m=1}^n$ — координаты векторов x, y по отношению к стандартному базису, обладают всеми свойствами скалярного произведения (см. аксиоматическое введение скалярного произведения в конспекте за первый семестр).

Аналогичным образом, всякое линейное пространство конечной размерности можно превратить в евклидово, подходящим образом определив в нем скалярное произведение.

Введем теперь класс эрмитовых матриц.

Определение 45. A эрмитова, если $A = A^*$, где матричные элементы a_{ij}^* матрицы A^* определены следующим образом: $a_{ij}^* := \overline{a_{ji}}$.

Иными словами, операция эрмитова сопряжения $A \mapsto A^*$ есть композиция двух: во-первых, отражения всех элементов матрицы относительно главной диагонали (транспонирование), за которым следует комплексное сопряжение всех матричных элементов. Эрмитовой матрицей называется матрица, для которой эрмитово сопряжение переводит матрицу в себя.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 46. Базис \mathbf{f} в евклидовом пространстве E называется ортонормированным, если любые два его разных элемента ортогональны, и все его элементы нормированы на единицу (то есть имеют норму, или длину, равную единице). Иными словами,

$$\langle f_j, f_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq m \\ 1, & \text{если } j = m. \end{cases}$$

(напоминаю, что норма вектора x в евклидовом пространстве — это $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$).

Определение 47. Оператор A в евклидовом пространстве E называется эрмитовым, если его изображающая матрица в каком-нибудь ортонормированном базисе эрмитова. Эквивалентное определение: A эрмитов тогда и только тогда, когда

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in E.$$

Отметим, что стандартный базис «кочующая единица» в \mathbb{R}^n и \mathbb{C}^n — разумеется, ортонормированный. Так что оператор, построенный стандартным способом (как объяснено в начале главы) по эрмитовой матрице автоматически окажется эрмитовым.

Важные свойства эрмитовых матриц и операторов суммированы в следующей теореме:

Теорема 12.13. Пусть матрица A эрмитова. Тогда:

- (1) Все ее собственные значения вещественны
- (2) Для всякого ее собственного значения алгебраическая кратность совпадает с геометрической (таким образом, она автоматически диагонализуема)
- (3) Если λ_m, λ_j — два различных собственных значения A , то

$$\text{Ker}(A - \lambda_j I) \perp \text{Ker}(A - \lambda_m I),$$

иными словами, ее собственные подпространства, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

Следствие 12.14. Если матрица A эрмитова, то у нее есть ортонормированный собственный базис.

В самом деле: в каждом собственном подпространстве (которое само является евклидовым пространством!) можно выбрать ортонормированный базис, после чего эти базисы объединить, тем самым получив ортонормированный базис во всем пространстве E , что следует из третьего утверждения последней теоремы.

Доказательство теоремы я в рамках настоящего курса опускаю.

Теперь воспользуемся результатом предыдущего пункта. Раз эрмитова матрица диагонализуема, то давайте это сделаем, причем раз у нее есть ортонормированный собственный базис, давайте именно в него и перейдем. То есть наша схема стандартна: по матрице определяем оператор, он, как объяснено выше, тоже эрмитов. Выписываем его изображающую матрицу в его собственном ортонормированном базисе, и получаем:

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} B^{-1}.$$

Так как среди собственных значений могут быть повторяющиеся (напоминая, что они занумерованы с учетом их кратности), договоримся, как именно они занумерованы. Будем считать, что порядок выбран таким образом, что повторяющиеся собственные значения идут всегда подряд, друг за другом, как в последовательности

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, \dots$$

Разложим теперь:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \mu_1 P_1 + \dots + \mu_r P_r,$$

где μ_1, \dots, μ_r — это *разные* собственные значения матрицы A , а P_m — диагональные матрицы, на диагоналях которых стоят либо нули, либо единицы. Например, если у нашей матрицы A есть ровно 2 разных собственных значения, μ_1, μ_2 , с кратностями, соответственно, 1 и 2, то это разложение будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2$$

Легко видеть, что $P_m^2 = P_m$ при любом m , так что оператор, построенный по матрице P_m , является проектором в \mathbb{C}^n согласно теореме о проекторе первого семестра. Также очевидно, что $P_m^* = P_m$, так что этот проектор эрмитов, а следовательно, является ортогональным.

Получается:

$$A = \mu_1 B P_1 B^{-1} + \mu_2 B P_2 B^{-1} + \dots + \mu_r B P_r B^{-1}.$$

Заметим, что каждый из операторов $B P_m B^{-1}$ снова оказывается проектором, ибо

$$(B P_m B^{-1})(B P_m B^{-1}) = B P_m (B^{-1} B) P_m B^{-1} = B P_m^2 B^{-1} = B P_m B^{-1}.$$

На самом деле, верно больше. Именно, справедлива следующая теорема, которую я приведу без доказательства.

Теорема 12.15. *Если A эрмитова матрица, \mathbf{f} — ее ортонормированный собственный базис, B — изображающая матрица оператора смены стандартного базиса на базис \mathbf{f} , а проекторы P_m , $m = 1, \dots, r$ построены так, как описано выше, то:*

- Матрица B обладает следующим свойством: $B^* = B^{-1}$ (это свойство носит имя унитарности)
- Каждый проектор $B P_m B^{-1}$ является ортогональным.

Таким образом, мы получаем следующую

Теорема 12.16 (Спектральная теорема для эрмитовой матрицы). *Всякая эрмитова матрица A допускает разложение*

$$A = \mu_1 \mathcal{P}_1 + \dots + \mu_r \mathcal{P}_r,$$

где μ_j — ее различные собственные значения, а \mathcal{P}_j — ортогональные проекторы на $\text{Ker}(A - \mu_j I)$. Проекторы \mathcal{P}_j называются спектральными проекторами матрицы A .

Доказательство этого факта, по существу, приведено выше. Осталось заметить, что проектор P_j проектирует, очевидно, на подпространство, натянутое на собственные вектора матрицы A , отвечающие ее собственному числу μ_j , то есть на $\text{Ker}(A - \mu_j I)$. Но тогда в силу

$$\mathcal{P}_j = BP_j B^{-1}$$

получаем, что матрица \mathcal{P}_j является изображающей матрицей того же самого оператора: если P_j изображает оператор в базисе \mathbf{f} , то \mathcal{P}_j изображает его в стандартном базисе \mathbf{e} . Из этого следует, что и \mathcal{P}_j также проектирует на подпространство $\text{Ker}(A - \mu_j I)$.

Обратим внимание на то, что результаты предыдущего пункта допускают серьезное упрощение для эрмитовых A . Именно, всюду, где фигурирует B^{-1} , ее теперь можно заменить на B^* . Ясно, что сосчитать эрмитово сопряженную матрицу можно просто в уме, в то время как вычисление обратной матрицы представляет из себя весьма нетривиальную задачу, особенно для матриц большой размерности.

Наше определение функции от матрицы в случае эрмитовой матрицы A теперь допускает следующую переформулировку.

Определение 48. Пусть A — эрмитова матрица, $F(z)$ — комплексно аналитическая функция на некоторой окрестности ее спектра. Тогда

$$F(A) := F(\mu_1)\mathcal{P}_1 + \cdots + F(\mu_r)\mathcal{P}_r.$$

Если теперь мы имеем эрмитову матрицу (например, матрицу A , полученную дискретизацией уравнения конечной струны), то подсчет любой функции от нее сводится к вычислению ее спектра и собственных векторов. В самом деле, пусть у нас есть ее собственный ортонормированный базис и спектр, тогда мы имеем μ_1, \dots, μ_r , а для матриц \mathcal{P}_m используем

$$\mathcal{P}_m = BP_m B^*,$$

где B — как обычно, матрица, составленная из столбцов, являющихся координатами элементов ортонормированного собственного базиса в разложении по стандартному,

$$B = (f_1 | f_2 | \dots | f_n).$$

Покуда разговор шел о спектральном разложении для эрмитовой матрицы A . Мы, правда, использовали операторы, построенные по матрицам, и их изображающие матрицы, но формулировка спектральной теоремы была нами получена все-таки для матриц. Что будет, если мы возьмем произвольный эрмитовый оператор A ? На самом деле, ничего не изменится (кстати, в этом факте зашифрована примерно вся квантовая механика — по крайней мере, матричная, изобретения Гейзенберга, за что ему и выписали нобелевку. Величие его гения очевидно из того, что матричную квантовую механику он придумал, не подозревая о существовании матриц и о хорошо разработанной к тому моменту линейной алгебре — короче, изобрел велосипед).

В самом деле, если A — эрмитов оператор, то в некотором ортонормированном базисе (а на самом деле, в любом ортонормированном базисе) его изображает эрмитова матрица. Дальше — все то же самое, что проделано выше, и получается:

Теорема 12.17 (Спектральная теорема для эрмитового оператора). *Всякий эрмитовый оператор A допускает разложение*

$$A = \mu_1 \mathcal{P}_1 + \cdots + \mu_r \mathcal{P}_r,$$

где μ_j — его различные собственные значения, а \mathcal{P}_j — ортогональные проекторы на $\text{Ker}(A - \mu_j I)$. Проекторы \mathcal{P}_j называются спектральными проекторами оператора A .

Замечание 3. 1. Спектральные проекторы могут быть описаны явно. Именно, если $F \subset E$ — подпространство евклидова пространства, и f_1, f_2, \dots, f_r — ортонормированный базис в F , то ортогональный проектор на F задается формулой

$$Px = \sum_{m=1}^r \langle x, f_m \rangle f_m, \quad x \in E.$$

Поэтому если в $\text{Ker}(A - \lambda_j I)$ выбран ортонормированный базис $f_1, f_2, \dots, f_{\tau_j}$, то

$$\mathcal{P}_j x = \sum_{m=1}^{\tau_j} \langle x, f_m \rangle f_m, \quad x \in E.$$

2. На самом деле, класс матриц (и операторов), для которых верна спектральная теорема, шире, чем класс эрмитовых матриц (и операторов). Ортогональное спектральное разложение будет справедливо для всякой *нормальной* матрицы, т.е. матрицы, удовлетворяющей условию $M^* M = M M^*$ (коммутирующей со своей эрмитово сопряженной). Правда, в этом случае уже не будет гарантировано, что спектр этой матрицы будет вещественным. То же верно и для нормального оператора (определение аналогично).

Далее, спектральная теорема *без* свойства ортогональности для проекторов \mathcal{P}_j верна для произвольной матрицы (и произвольного оператора), допускающих диагонализацию, т.е. для всех матриц и операторов, у которых есть собственный базис. Доказательство этого факта в точности такое же, как приведенное выше.

12.7. Жорданова форма. В этом пункте мы посмотрим, что можно сделать с недиагонализуемыми матрицами и операторами (потому что никто не обещал, что при дискретизации и последующем понижении порядка дифференциального уравнения получится не то, что эрмитова, а даже диагонализуемая матрица). Оказывается, для уже произвольной матрицы существует простая каноническая форма. Эта форма, что неудивительно, получается по все тому же рецепту: надо построить некий специальный базис и поглядеть, как будет выглядеть в нем изображающая матрица. Этим теперь и займемся.

Начнем с примера. Рассмотрим оператор дифференцирования в пространстве полиномов \mathcal{P}_n . Взяв стандартный базис

$$1, x, x^2, \dots, x^n,$$

получаем изображающую матрицу для этого оператора:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Сразу же очевидно, что собственное число в точности одно, $\lambda = 0$, его алгебраическая кратность равна размерности пространства $n + 1$. А вот геометрическая кратность легко считается и равна 1. Так что такой оператор недиагонализуем. Фокус в том, что это, фактически, ровно и есть самый общий случай недиагонализуемого оператора.

Перейдем к построению.

Определение 49. Жорданов блок — это матрица размера $m \times m$ вида

$$a_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ясно, что ее спектр состоит из единственного собственного значения λ алгебраической кратности m . Характеристический полином: $d(\mu) = (\lambda - \mu)^m$.

Теперь

Определение 50. Жорданов ящик $J(\lambda)$ — это блочно-диагональная матрица, у которой вдоль диагонали поставлено несколько жордановых блоков, отвечающих одному и тому же λ (но, возможно, разных размеров), а остальные матричные элементы равны нулю. Например:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что на пересечении *той* строки и *того* столбца в последнем примере стоит жорданов блок размерности 1. Так тоже бывает, мы это число можем и будем считать матрицей размера 1×1 .

Элементарный подсчет показывает: у жорданова ящика спектр состоит из единственного собственного значения λ . Его алгебраическая кратность, разумеется, совпадает с размером жорданова ящика, а геометрическая совпадает с числом жордановых блоков, составляющих ящик.

Определение 51. Жорданова матрица J — это блочно-диагональная матрица, у которой вдоль диагонали выстроено несколько жордановых ящиков (отвечающих *разным* значениям λ), а остальные матричные элементы — нули. К примеру:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

В этом примере жорданова матрица состоит из трех жордановых ящиков. Первый и третий из них состоят каждый из одного жорданова блока, второй же — из двух: одного размерности 3 и второго размерности 1.

Теорема 12.18 (Жордан). Для произвольной матрицы A найдется такая обратимая матрица B и жорданова матрица J , что

$$J = B^{-1}AB.$$

Доказывать я это поленюсь, но за это покажу, как именно строится жорданова форма матрицы на практике. При этом я рассмотрю только простейший случай, когда у исходной матрицы каждое собственное значение имеет геометрическую кратность, равную 1. Это приведет к жордановой форме, у которой каждый жорданов ящик будет состоять в точности из одного жорданова блока. Более общий случай несложно рассмотреть самостоятельно по аналогии.

Итак, пусть спектр A состоит из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, причем их алгебраические кратности равны σ_j , а геометрические равны единицам. Возьмем λ_1 . Если его алгебраическая кратность равна 1, то мы просто возьмем собственный вектор, отвечающий этому собственному числу, и назовем его первым элементом жорданова базиса. Если же алгебраическая кратность $\sigma_1 > 1$, то опять же, в качестве первого элемента жорданова базиса мы выберем собственный вектор u_1 : $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Но теперь собственные вектора у λ_1 закончились, а нам надо набрать еще $\sigma_1 - 1$ векторов для базиса. Поэтому рассмотрим уравнение

$$(A - \lambda_1 I)^{\sigma_1} u = 0.$$

Понятно, что u_1 ему удовлетворяет, но оказывается, у него есть и другие решения. Их-то нам и надо. Рассмотрим сперва

$$(A - \lambda_1 I)^2 u = 0.$$

Так как $(A - \lambda_1 I)^2 u = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_1 I)u = 0$, а решение u_1 по предположению единственно с точностью до умножения на константу, мы видим, что

$$(A - \lambda_1 I)u = cu_1.$$

Это уравнение не жалко поделить на константу c , так что

$$(A - \lambda_1 I)u = u_1 \iff Au = \lambda_1 u + u_1.$$

Найдем решение этого уравнения и обозначим его u_2 . Это решение будет называться *первым присоединенным вектором к собственному вектору u_1* . После этого перейдем к решению уравнения

$$(A - \lambda_1 I)^3 u = 0.$$

Ровно таким же образом, как чуть выше, отсюда будет следовать теперь, что

$$Au = \lambda_1 u + u_2,$$

которое мы решим и решение назовем u_3 , вторым присоединенным вектором. Будем продолжать эту операцию, покуда у нас к собственному вектору u_1 не присоединится ровно $\sigma_1 - 1$ присоединенных. Теоремой Жордана *гарантируется*, что на каждом этапе получающееся уравнение разрешимо, причем каждый раз получается в точности один новый присоединенный вектор. Все они (и собственные, и присоединенные) удовлетворяют уравнению

$$(A - \lambda_1 I)^{\sigma_1} u = 0,$$

причем размерность пространства решений этого уравнения в точности равна σ_1 .

Покончив с λ_1 , мы перейдем к λ_2 и таким же образом препарируем его, ну и так далее. Теперь для λ_1 мы набрали аккурат σ_1 векторов, отвечающих условиям:

$$Au_1 = \lambda_1 u_1; \quad Au_2 = \lambda_1 u_2 + u_1; \quad Au_3 = \lambda_1 u_3 + u_2; \dots$$

Вот в базис, составленный из этих векторов, а дальше из аналогичным образом построенных групп векторов для $\lambda_2, \dots, \lambda_r$ мы и перейдем! При этом очевидно, что изображающая матрица нашего оператора, определенного матрицей A , по отношению к этому новому базису будет как раз жордановой. Не менее очевидно и то, что по дороге мы нашли и матрицу B . Как обычно, она приобретет вид

$$B = (u_1 | u_2 | \dots)$$

Теперь для уже произвольной матрицы A мы знаем ее наиболее простой вид и можем соответственно решить уравнение вида

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = A \vec{u}(t),$$

о котором мы всю дорогу и думали. В ситуации, когда A диагонализуема, мы задачу решили полностью, причем решение выписали явно в терминах собственных значений и собственных векторов матрицы A . В ситуации недиагонализуемой A мы имеем

$$\vec{u}(t) = \exp(At) \vec{u}(0),$$

но теперь уже не имеем красивого выражения для $\exp(At)$. Тем не менее, переведя матрицу в жорданову форму, можно решить и эту задачу. Впрочем, вот это уже лучше поручить компьютеру, благо всю изложенную выше науку ему уже объяснили, и он это отлично умеет.