Атамукас М., Квадратный трехчлен

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

М. С. Атамукас

Квадратным трехчленом называется многочлен второй степени общего вида

$$ax^2+bx+c, \qquad a\neq 0.$$

На вступительных экзаменах по математике задачи, прямо или косвенно связанные с квадратным трехчленом, предлагаются довольно часто. Да это и не удивительно — в школьной программе уделяется много места и времени изучению квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

выяснению свойств квадратичной функции

$$y=ax^2+bx+c.$$

Эта функция встречается и в физике; например, при описании движения материальной точки, брошенной наклонно к горизонту.

Школьники, конечно, хорошо знают все формулы, относящиеся к квадратному трехчлену, умеют они и изобразить график квадратичной функции — параболу. Однако, когда речь идет о решении конкретной задачи, большинство пытается действовать чисто аналитически, привлекая лишь формулы. Между тем очень часто использование геометрических соображений позволяет получить ответ проще и быстрее.

Мы покажем на нескольких примерах, как важно бывает при решении задач мыслить одновременно и на алгебраическом, и на геометрическом языках.

Для того чтобы проверить, насколько хорошо вы знакомы со свойствами квадратного трехчлена, рассмотрим сперва такую задачу (она предлагалась на устных экзаменах в МГУ).

1. *На рисунке* 1 *изображено несколько графиков квадратных трехчленов. Рисунок приблизительный, масштаб не указан. Для каждой из этих парабол определить знаки соответствующих коэффициентов* a, b *и* c.

Возьмем, например, параболу 4; она является графиком некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Так как ветви этой параболы направлены вверх, то коэффициент $a>0$. (Докажите! Многие поступавшие объясняли это так: «В учебнике доказы-

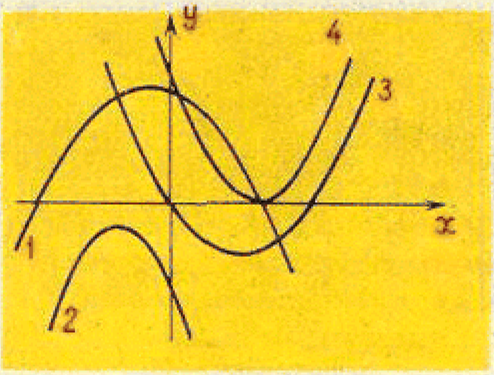

Рис. 1.

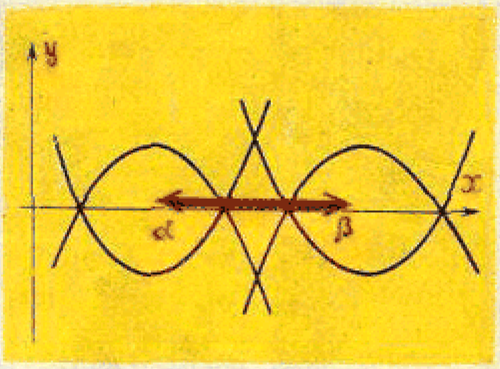

Рис. 2.

вается, что если $a>0$, то парабола направлена вверх». Убедительно ли такое объяснение?). Далее, коэффициент c равен значению функции y в точке $x=0$, то есть $c=f(0)$. Из рисунка видно, что парабола 4 пересекает положительную полуось ординат, а потому $c>0$. Абсцисса вершины параболы равна $-\frac{b}{2a}$; из рисунка ясно, что она положительна. Мы уже знаем, что $a>0$, и, следовательно, $b<0$.

О т в е т: $a>0$, $b<0$, $c>0$.

Остальные случаи, представленные на рисунке 1, читатели могут разобрать самостоятельно.

Во многих задачах необходимо выяснить поведение квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ на заданном промежутке (α, β), описать расположение корней этого трехчлена относительно фиксированной точки $x=\gamma$ оси абсцисс и т. д. В этих задачах геометрический язык делает рассуждения простыми и наглядными (и притом вполне строгими!).

2. *На оси абсцисс указан промежуток $\alpha<x<\beta$. При каких a, b и c уравнение*

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0, \quad b^2-4ac>0$$

имеет на этом промежутке только один корень?

Иными словами, надо выяснить, при каких a, b и c график функции $f(x)=ax^2+bx+c$ пересекает ось абсцисс на промежутке $\alpha<x<\beta$ ровно один раз.

Если пытаться решить этот вопрос аналитически, с помощью формул для корней x_1 и x_2 квадратного трехчлена, то условия, при которых только один корень лежит между числами α и β, записываются весьма громоздко. Геометрический же подход дает возможность получить это условие сразу и в простом виде.

Представим себе, как может вести себя график трехчлена, удовлетворяющего поставленному в задаче условию; очевидно, возможно одно из четырех положений, представленных на рисунке 2. Заметим, далее, что в каждом из этих случаев значения функции $f(x)$ в точках α и β имеют противоположные знаки, то есть

$$f(\alpha)\,f(\beta)<0,$$

или, более подробно,

$$(a\alpha^2+b\alpha+c)\,(a\beta^2+b\beta+c)<0.$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение $ax^2+bx+c=0$ (при $a\neq 0$, $b^2-4ac>0$) имело ровно один корень на интервале (α, β).

Итак графики помогли нам найти это условие. Они же подсказывают, как доказать, что это условие необходимое и достаточное.

Необходимость. Пусть уравнение имеет два корня x_1 и x_2 ($x_1<x_2$), причем один корень лежит внутри интервала (α, β), а другой — вне его. Тогда одно из чисел α, β лежит внутри интервала (x_1, x_2), а другое — вне его. Но в школьном учебнике доказывается, что значения функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ вне интервала (x_1, x_2) между корнями и значения функции внутри этого интервала имеют противоположные знаки. Следовательно, $f(\alpha) f(\beta)<0$.

Достаточность. Пусть числа $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имеют разные знаки. Тогда *) $b^2-4ac>0$, уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня x_1 и x_2, и значения функции внутри интервала (x_1, x_2) и вне его имеют противоположные знаки. Поэтому только одно из чисел α, β лежит внутри интервала (x_1, x_2). Но это означает, в свою очередь, что только одно из чисел x_1, x_2 лежит внутри интервала (α, β).

Понятно, что квадратичная функция

$$y=ax^2+bx+c, \ a\neq 0, \ b^2-4ac=0,$$

имеет лишь один корень $x_0 = -\frac{b}{2a}$, и он лежит на промежутке (α, β), если $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$.

Применим изложенные только что соображения для решения следующей задачи, взятой из практики устных экзаменов.

3. *Доказать, что квадратный трехчлен*

$$f(x) = (x-a)(x-b) + \lambda (x-c)(x-d)$$

имеет действительные корни при любом действительном λ, если известно, что ровно одно из чисел c, d лежит между a и b.

Заметим, что

$$f(c)=(c-a)(c-b), \text{ а } f(d)=(d-a)(d-b).$$

Согласно условию, одно из этих значений положительно, а другое — отрицательно. Следовательно, трехчлен имеет два действительных корня, причем один из них лежит на интервале (a, b), а другой вне его.

Рассматривая графики различных квадратных трехчленов, легко заметить одно важное свойство: максимальные и минимальные значения квадратного трехчлена на отрезке $[\alpha, \beta]$ могут достигаться только в трех следующих точках: в точке $x = -\frac{b}{2a}$, если, конечно, она принадлежит отрезку $[\alpha, \beta]$; в точке α; в точке β (в концах отрезка). Докажем это; будем считать, что $a>0$ (случай $a<0$ разбирается аналогично).

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Воспользовавшись такой записью, нетрудно показать, что при $a>0$ функция $f(x)$ в точке $x = -\frac{b}{2a}$ имеет абсолютный минимум, равный $c-\frac{b^2}{4a}$; на интервале $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ монотонно убывает, а на интервале $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ монотонно возрастает.

---

*) Проверьте самостоятельно, что из $f(\alpha) f(\beta) < 0$ следует $b^2 - 4ac > 0$

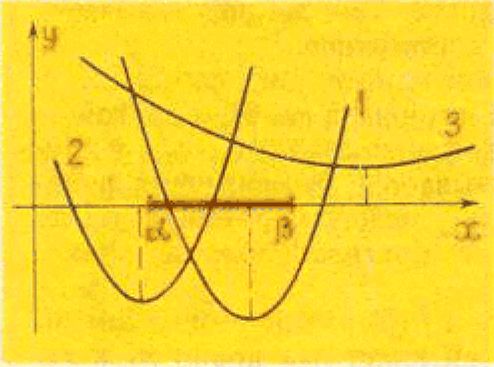

Рис. 3.

Поэтому, если

$$\alpha \leqslant -\frac{b}{2a} \leqslant \beta,$$

то функция $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ принимает наименьшее значение $c - \frac{b^2}{4a}$ в точке $-\frac{b}{2a}$ (см. график *1* на рисунке 3).

Наибольшее значение, в силу монотонности, достигается в одном из концов интервала.

Пусть теперь точка $-\frac{b}{2a}$ находится вне отрезка $[\alpha, \beta]$ (см. графики *2*, *3* на рисунке 3).

Тогда отрезок $[\alpha, \beta]$ принадлежит одному из интервалов монотонности, и, следовательно, минимальное значение принимается в одном из его концов, а максимальное — в другом.

Попытайтесь теперь сформулировать необходимое и достаточное условие, при котором квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня на заданном промежутке $\alpha<x<\beta$.

Замеченное свойство квадратного трехчлена облегчит нам решение следующих задач.

4. (МГУ, мехмат, 1970). *При каких значениях параметра α неравенство*

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \alpha \sin x \cos x \geqslant 0$$

выполняется для всех x?

Преобразуем левую часть неравенства:

$$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + \alpha \sin x \cos x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + \alpha \sin x \cos x =$$
$$= [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x] + \alpha \sin x \cos x =$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{\alpha}{2}\sin 2x.$$

Обозначим $\sin 2x$ через y; очевидно, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, коэффициент при y^2 отрицателен, поэтому на отрезке $[-1; 1]$ минимум квадратного трехчлена $-\frac{3}{4}y^2 + \frac{\alpha}{2}y + 1$ достигается в концах отрезка.

Следовательно, неравенство

$$-\frac{3}{4}y^2 + \frac{\alpha}{2}y + 1 \geqslant 0$$

выполняется на всем отрезке $[-1; 1]$ в том и только в том случае, когда трехчлен неотрицателен в концах отрезка:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}(-1)^2 + \frac{\alpha}{2}(-1) + 1 \geqslant 0, \\ -\frac{3}{4}\cdot 1^2 + \frac{\alpha}{2}\ 1 + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

то есть $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ и $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$.

Ответ: данное неравенство выполняется для всех x при $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

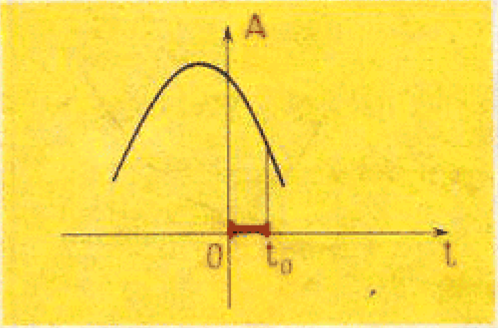

Рис. 4. Минимум при $t=t_0$.

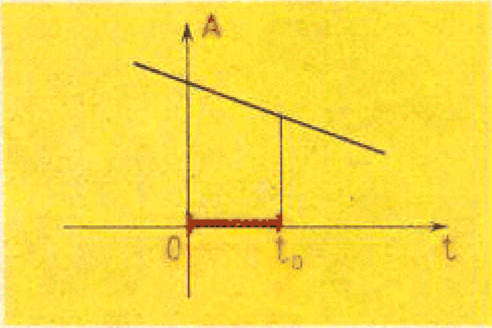

Рис. 5. Минимум при $t=t_0$.

5. (ЛГУ, матмех, 1966). *Ракета должна пройти отрезок, равный H. Она начинает движение с постоянной скоростью v и в любой момент времени может включить дополнительный двигатель, дающий постоянное ускорение a $(a>0)$ и работающий до конца пути. Расход топлива на участке пути с постоянной скоростью пропорционален времени движения, а при включенном дополнительном двигателе — квадрату времени с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно (k_1, $k_2>0$). Какое время ракета должна двигаться с включенным дополнительным двигателем, чтобы общий расход топлива был наименьшим?*

Пусть τ — время движения ракеты с постоянной скоростью, t — время движения с включенным дополнительным двигателем, A — расход топлива. Из уравнений:

$$H=v\tau+vt+\frac{at^2}{2},\qquad A=k_1\tau+k_2t^2$$

находим

$$\tau=\frac{1}{v}\left(H-vt-\frac{at^2}{2}\right),\qquad A=\left(k_2-\frac{ak_1}{2v}\right)t^2-k_1t+\frac{k_1H}{v}. \qquad (*)$$

Заметим, что $0\leqslant t\leqslant t_0$, где t_0 — положительный корень уравнения

$$H=vt+\frac{at^2}{2},\qquad t_0=\frac{-v+\sqrt{v^2+2aH}}{a}.$$

(Это время полета в том случае, если двигатель включен с самого начала.) Нужно найти минимум функции $A=A(t)$ $(*)$, заданной на отрезке $[0,\ t_0]$.

1) $k_2-\frac{ak_1}{2v}<0$. Вершина параболы $A=A(t)$ имеет абсциссу

$$t^*=\frac{k_1}{2\left(k_2-\frac{ak_1}{2v}\right)}<0.$$

Парабола расположена так, как указано на рисунке 4. Минимум при $t=t_0$.

2) $k_2-\frac{ak_1}{2v}=0$; $A=-k_1t+\frac{k_1H}{v}\cdot$ Минимум при $t=t_0$ (рис. 5).

3) $k_2-\frac{ak_1}{2v}>0$. Абсцисса вершины параболы

$$t^*=\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1}>0.$$

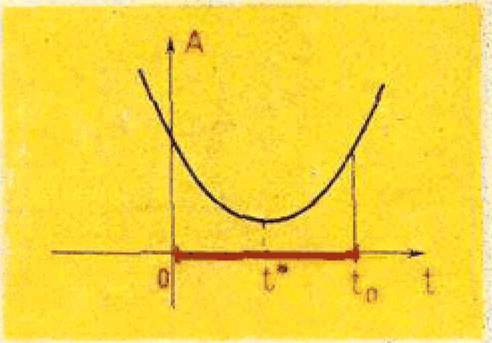

Рис. 6. Минимум при $t=t^*$.

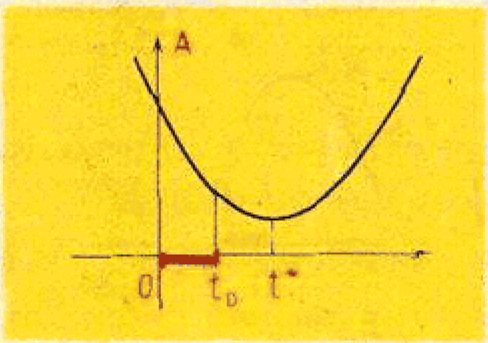

Рис. 7. Минимум при $t=t_0$.

Если $t^* \leqslant t_0$, то минимум при $t=t^*$ (рис. 6).
Если $t^* \geqslant t_0$, то минимум при $t=t_0$ (рис. 7).

Ответ: Если $2vk_2-ak_1>0$ и

$$\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1} \leqslant \frac{-v+\sqrt{v^2+2aH}}{a},$$

то

$$t=\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1}.$$

Если $2vk_2-ak_1 \leqslant 0$ или $2vk_2-ak_1>0$ и

$$\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1} > \frac{-v+\sqrt{v^2+2aH}}{a},$$

то

$$t=\frac{-v+\sqrt{v^2+2aH}}{a}.$$

Упражнения

1. Указать условия, при которых оба корня трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ меньше заданного числа α.

2. Указать условия, при которых данное число α лежит между корнями трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$.

3. (МГУ, отделение структурной лингвистики, 1968). Найти все те значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-2bx-1=0$ действительны и не превосходят по модулю 2.

4. (МГУ, физфак, 1965). Найти все значения a, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ действительны и больше a.

5. (МГУ, отделение биологии, 1969). Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, а его высота равна H. Определить высоту цилиндра, вписанного в этот конус и имеющего наибольшую боковую поверхность.

7. (МГУ, отделение структурной лингвистики, 1969). Указать все корни уравнения $x^2+1=\cos x$.

8. (МГУ, физфак, 1964). Найти все значения m, при которых выражение x^2+mx+m^2+6m будет отрицательно при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $1<x<2$.

9. (МГУ, физфак, 1963). Снаряд вылетает из орудия под углом α к горизонту со скоростью v_0. В самой верхней точке траектории снаряд разрывается на две равные по массе части, причем скорости частей тут же после взрыва горизонтальны и лежат в плоскости траектории. Одна половина снаряда упала на расстоянии S от места выстрела. Определить место падения второй половины, если известно, что она упала дальше первой. Считать, что полет снаряда происходит в безвоздушном пространстве.