16.12.21.

Романчина
Татьяна,
Б05-031.

① Найти в графе количество треугольников за $O(E\sqrt{E})$.

Разобьем вершины на 2 множества:

(1) $\{x \mid deg(x) > \sqrt{E}\}$ и $\{x \mid deg(x) \leq \sqrt{E}\}$ (2)

Сначала перебираем вершины x (1) множества (таких в графе $N = \frac{2E}{deg(x)} \leq \frac{2E}{\sqrt{E}} = 2\sqrt{E}$),

внутри перебираем ребра (y, z) и проверяем, есть ли ребра (x, y), (y, z), (x, z).

Нашли какое-то кол-во треугольников, содержащих хотя бы 1 вершину x ($deg(x) > \sqrt{E}$).

за $O(E\sqrt{E})$.

Затем в цикле перебираем ребра $(y, z) \in E$.

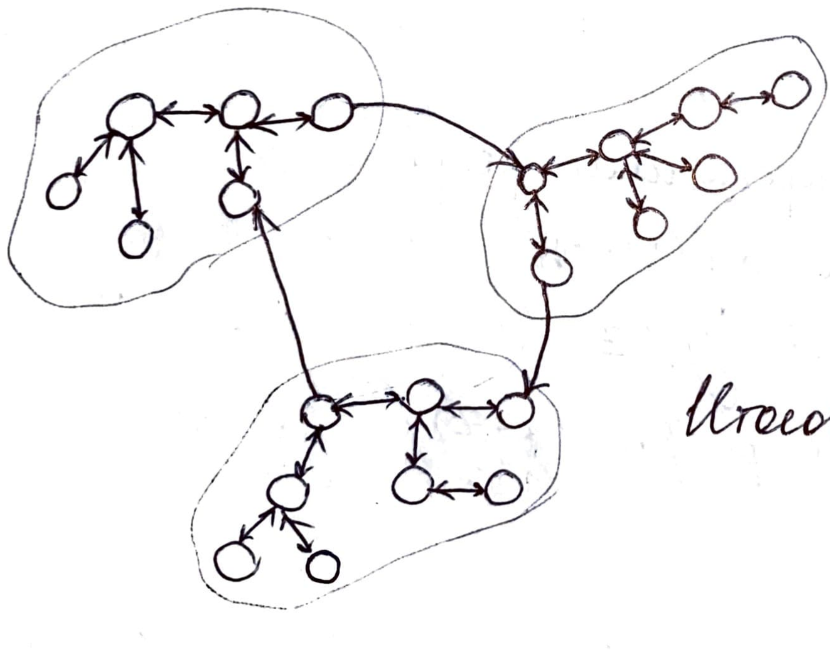
Если $deg(y) \leq \sqrt{E}$ и $deg(z) \leq \sqrt{E}$, то внутри перебираем x-соседей y/z (таких $\leq \sqrt{E}$) и смотрим, есть ли ребро $(x, z)/(x, y)$ за

$O(E\sqrt{E})$.

Итоговая асимптотика: $O(E\sqrt{E}) + O(E\sqrt{E}) = O(E\sqrt{E})$.

② Ориентировать неор. граф так, чтобы он стал сильносвязным за $O(V+E)$ или сказать, что это невозможно.

Сначала, если граф не связен в смысле неор. графа, работаем с каждой компонентой отдельно. Запустим на графе dfs и на ребрах, принадлежащих дереву обхода dfs поставим ориентацию в обе стороны. $O(V+E)$.
Теперь запустим алгоритм Косарайю поиска компонент сильной связности. $O(V+E)$.
Соединим однонаправленными ребрами все компоненты по циклу. $O(V) \leq O(V+E)$.



Теперь граф сильно связен

Итоговая асимптотика: $O(V+E)$

④ Для каждой пары вершин в графе найти $W[a,b]$ - такой минимальный вес, что из a в b есть путь по ребрам веса $\leq W[a,b]$. $O(V^2)$

Наша задача - минимизировать макс. вес ребра в каждом пути от v до u, $v, u \in V$.

Воспользуемся алгоритмом Прима для выделения минимального остовного дерева нашего графа. Все пути в дереве определяются однозначно. Так как на каждой итерации алгоритма Прима мы имеем мн-во вершин T (те, которые мы уже добавили в дерево) и мн-во V (те, которые мы ещё в дерево не добавили), то путь для каждой $t \in T$ до каждой $v \in V$ будет проходить через одно из ребер, соединяющих вершины из T с вершинами из V. По ходу алгоритма мы выбираем из них ребро с min весом, поэтому минимизируем вес ребра в каждом пути. $O(V^2)$.

Далее от каждой вершины построенного MST запускаем dfs (т.к. пути в дереве опр-ны однозначно), в процессе которого обновляем max веса ребра на пути. Пусть $MST = (V', E')$, где $V' = V$, $E' = V - 1$.

$T(V', E') = O(V' + E') = O(V)$ для каждого dfs.

Итого: $V \cdot O(V) = O(V^2)$

Итоговая асимптотика: $O(V^2)$.