

510.14(075)

Б529

№ 4181



Л.С. Берштейн

А.В. Боженюк

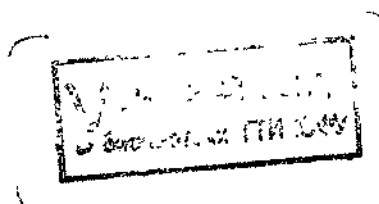
ТЕОРИЯ ГРАФОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Технологический институт
Федерального государственного образовательного учреждения
Высшего профессионального образования
«Южный федеральный университет»
ПРИОРИТЕТНЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРОЕКТ «ОБРАЗОВАНИЕ»

Л.С. Берштейн
А.В. Боженюк

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Таганрог 2007

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, зав.кафедрой математики и информатики Таганрогского института управления и экономики

Карелин В.П.,

доктор технических наук, профессор кафедры информатики Таганрогского государственного педагогического института **Астанин С.В.**

Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Теория графов: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. – 69с.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 080801 «Прикладная информатика (в экономике)», изучающих дисциплину «Основы дискретной математики». В работе изложены основные понятия теории графов. Содержит также контрольные вопросы и задачи по каждому разделу.

Ил. 92. Библиогр.: 3 назв.

© Берштейн Л.С., 2007

© Боженюк А.В., 2007

© Технологический институт

Южного федерального университета, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Основные понятия и определения	4
2. Связанность графов	17
3. Сильно связный граф. Транзитивное замыкание. Разложение на максимальные сильно связные подграфы	28
4. Основные числа теории графов	31
5. Деревья. Двудольные графы	43
6. Плоский граф. Операции над графами	49
7. Транспортные сети	62
Библиографический список	68

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение графа. Задать граф можно, задав два множества – X , U и трехместную высказывательную форму F , указывающую, какую пару элементов $x, y \in X$ соединяет элемент $u \in U$. Эта совокупность обозначается $G = (X, U, F)$, где G – название графа (graph), X – множество вершин, U – множество ребер, $|X| = n$ – число вершин, $|U| = m$ – число ребер, F – трехместная высказывательная форма, называемая инцидентором.

Инцидентор определен на всех таких упорядоченных тройках $\langle x, u, y \rangle$, для которых $x, y \in X$, $u \in U$ и справедливо высказывание:

$$(\forall u \in U)(\exists x, y \in X)\{F(x, u, y) \& (\forall x', y' \in X)\{F(x' u y') \rightarrow (x = x' \& y = y') \vee (x = y' \& y = x')\}\}. \quad (1.1)$$

Выражение (1.1) означает, что любое ребро может соединять только одну пару вершин.

Для каждого ребра $u \in U$ справедливо одно из следующих трех высказываний:

- 1) $(\exists x, y \in X)[x \neq y \& F(x u y) \& \overline{F(y u x)}]$;
- 2) $(\exists x \in X)F(x u x)$;
- 3) $(\exists x, y \in X)[x \neq y \& F(x u y) \& F(y u x)]$.

В соответствии с этими высказываниями множество ребер U разбиваются на три класса: $\bar{U}, \bar{\bar{U}}, \bar{\bar{\bar{U}}}$.

\bar{U} – множество ребер, для которых истинно первое высказывание, т.е. ребра, имеющие направления. Такие ребра называются дугами.

Множество $\bar{\bar{U}}$ соответствует петлям, для которых истинно второе высказывание.

Множество $\bar{\bar{\bar{U}}}$ определяет неориентированные ребра, для них истинно третье высказывание.

Если задать граф в таком виде, получим его теоретико-множественное задание.

Пример 1. Пусть задан граф $G = (X, U, F)$, приведенный на рис. 1.

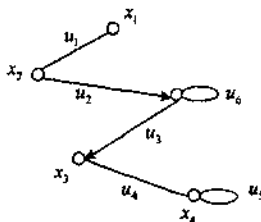


Рис. 1

Здесь множество вершин – $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

множество ребер — $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$,

инцидентор — $F = \{<x_1 u_1 x_2>, <x_2 u_2 x_3>, <x_3 u_3 x_5>, <x_5 u_4 x_3>, <x_3 u_5 x_4>, <x_4 u_6 x_4>\}$,

подмножества ребер — $\bar{U} = \{u_2, u_1\}$; $\bar{U}^0 = \{u_5, u_6\}$; $\bar{U}^1 = \{u_1, u_4\}$.

Граф, содержащий только ребра из множества \bar{U} , называется ориентированным или ор-графом. Граф, содержащий только ребра из множества \bar{U} , называется неориентированным. И те, и другие могут быть как с петлями, так и без петель. Граф также может быть смешанным, т.е. содержать как ребра, так и дуги, и петли.

Одним из способов теоретико-множественного задания графов является его задание с помощью соответствия. При этом граф задается в виде пары: $G = (X, \Gamma)$. Здесь X — множество вершин, а Γ — соответствие, или отображение вершин X в себя. Соответствие Γ задается образами элементов $x \in X$ при этом соответствии.

Пример 2. Граф, приведенный на рис. 1, можно задать как $G = (X, \Gamma)$, где $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ — множество вершин, а $\Gamma(x_1) = \{x_2\}$; $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3\}$; $\Gamma(x_3) = \{x_4\}$; $\Gamma(x_4) = \{x_4, x_3\}$; $\Gamma(x_5) = \{x_3, x_5\}$.

Если теперь построить граф при теоретико-множественном задании в виде графа соответствия $G = (X, \Gamma)$, то каждое неориентированное ребро представится двумя дугами взаимно-обратной ориентации. Пример такого представления показан на рис. 2.

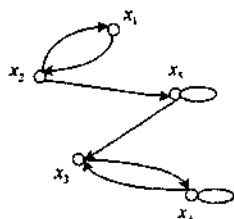


Рис. 2

Граф называется симметрическим, если для любых двух вершин $x_i, x_j \in X$ справедливо $x_i \in \Gamma(x_j) \rightarrow x_j \in \Gamma(x_i)$. Другими словами, если между какой-то парой вершин имеется дуга, то между этой же парой вершин имеется противоположно направленная дуга.

Пример симметрического графа приведен на рис. 3.

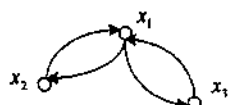


Рис. 3

Любой неориентированный граф при представлении его с помощью соответствия представляется симметрическим графом.

В графах различают две категории понятий – смежности и инцидентности.

Пусть для некоторой тройки элементов $\langle x, y, u \rangle$, в которой $x, y \in X$, $u \in U$, истинно высказывание $F(x, y, u)$. Иными словами, ребро u соединяет вершины x и y . В этом случае вершины x и y называются смежными. Если при вершине имеется петля, то вершина смежна сама с собой. Кроме того, если высказывание $F(x, y, u)$ истинно, то говорят, что вершина $x(y)$ инцидентна ребру u ; в противном случае – не инцидентна. Если для двух ребер u_i и u_j имеется хотя бы одна общая инцидентная им вершина, то такие ребра также называют смежными.

Граф называется конечным, если множество его вершин и ребер конечно.

Если в графе $G = (X, U, F)$ между какой-либо парой вершин может содержаться несколько однотипных ребер, то такой граф, при необходимости, будем выделять под названием мультиграфа. Наибольшее число однотипных ребер, соединяющих какую-либо пару вершин, называют мультичислом мультиграфа, а сами ребра – кратными.

Для графа, приведенного на рис. 4, мультичисло равно 3.

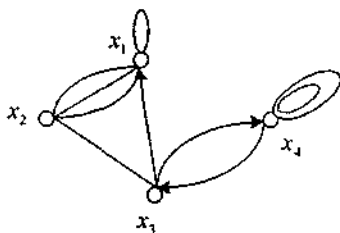


Рис. 4

Если в смешанном мультиграфе убрать все петли, удалить ориентацию с ребер, а полученные кратные ребра стянуть в одно ребро, то полученный граф будет называться скелетом мультиграфа (или простым графом).

Скелет графа, представленного на рис. 4, имеет вид, приведенный на рис. 5.

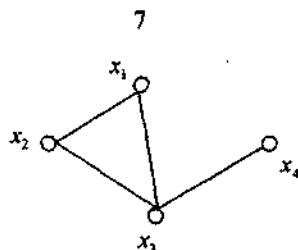


Рис. 5

Простые графы удобно задавать, используя только два множества – вершин и ребер, последнее из которых задано парой вершин, инцидентных данному ребру.

Так, граф, приведенный на рис.5, можно задать как $G=(X,U)$, где множество вершин – $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а множество ребер – $U=\{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5)\}$.

Граф, в котором любая пара вершин смежна, называется полным графом и обозначается G_n (n – число вершин).

Примеры полных графов приведены на рис. 6.

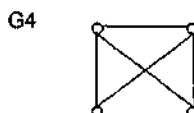


Рис. 6

Если в полном графе есть петли всех вершин, то такой граф называется плотным.

Плотный граф на 5 вершин приведен на рис. 7.

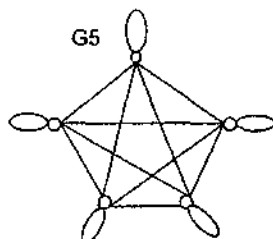


Рис. 7

Если какая-то вершина в графе не инцидентна ни одному ребру, то она называется голой, или изолированной вершиной. Граф, состоящий из голых вершин, называется голым графом, или нуль-графом.

На рис. 8 приведен нуль-граф на 4 вершины.

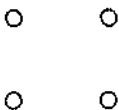


Рис. 8

Граф, не содержащий ни вершин, ни ребер, называется пустым графом. Число ребер, инцидентных вершине $x \in X$ у графа $G=(X, U, F)$, обозначается $\rho(x)$ и называется локальной степенью данной вершины.

Сумма всех локальных степеней графа равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{x \in X} \rho(x) = 2m.$$

Теорема. Число вершин графа с нечетной локальной степенью в конечном графе всегда четно.

Доказательство. Сумма всех локальных степеней графа – четная величина ($2m$). Вычтем из неё также четную величину – сумму вершин графа с четной локальной степенью. Полученная величина также будет четной величиной, и представляет собой сумму степеней вершин графа с нечетной степенью. А сумма нечетных величин четна тогда и только тогда, когда число их четно. Следовательно, теорема доказана.

Если локальные степени всех вершин графа равны величине K , то такой граф называют однородным степени K .

На рис. 9 приведены примеры однородных графов.



Рис. 9

Для ориентированного графа вводят понятия полустепеней исхода и захода. Число дуг, исходящих из данной вершины x , называют полустепенью исхода и обозначают $\rho^-(x)$. Число дуг, заходящих в данную вершину x , называют полустепенью захода и обозначают $\rho^+(x)$.

Степень вершины равна сумме полустепеней исхода и захода данной вершины, т.е. $\rho(x) = \rho^-(x) + \rho^+(x)$. Кроме того, видно, что $\sum_x \rho^-(x) = \sum_x \rho^+(x) = m$.

Из теоремы о степенях можно вывести следующее тривиальное следствие: каждый кубический граф, т.е. граф, степень каждой вершины которого равна 3, имеет четное число вершин.

Определение. Граф $H=(X',U',F)$ называется частью графа $G=(X,U,F)$ и обозначается $H \subseteq G$, если множества $X' \subseteq X$ и $U' \subseteq U$.

Нуль-граф, или голый граф, является частью любого графа с данным числом вершин. Любое единственное ребро – его часть. Сам граф является своей собственной частью.

Выделяют следующие виды частей:

1. Часть $H=(X',U',F)$ называют **подграфом** графа $G=(X,U,F)$, если подмножество ребер $U' \subseteq U$ выбрано так, что справедливо высказывание $(\forall x,y \in X')(\forall u \in U)[F(x,u,y) \rightarrow u \in U']$. Иначе говоря, множество ребер U' состоит из тех и только тех ребер, которые связывают вершины из множества X' .

На рис. 10 представлены примеры различных подграфов:

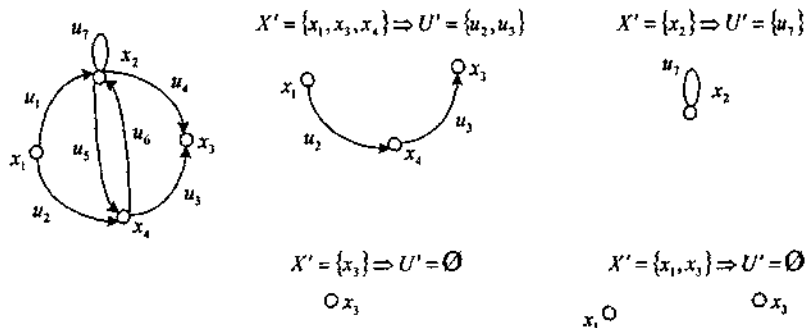


Рис. 10

Подграф, не содержащий ребер, называется пустым подграфом, а множество вершин, порожденное пустым подграфом, называют внутренне устойчивым множеством.

2. Часть $H=(X',U',F)$ графа $G=(X,U,F)$ называют **суграфом**, если $X'=X$ и $U' \subseteq U$. Другими словами, су-граф может быть получен из данного графа при исключении некоторых его ребер.

На рис. 11 показан суграф для графа, приведенного на рис. 10.

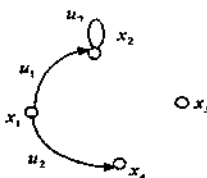
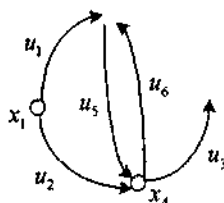


Рис. 11

3. Объект $H = (X', U', F)$ графа $G = (X, U, F)$ называют **куском графа** G , если $X' \subseteq X$ и $U' = U_{xx} \cup U_{xy}$, где ребра из множества U_{xy} связывают вершины графа из множества X' с остальными вершинами графа, а ребра из множества U_{xx} связывают вершины из множества X' между собой.

На рис. 12 показан кусок для графа, приведенного на рис. 10.



$$\begin{aligned} X' &= \{x_1, x_4\} \\ U_{xx} &= \{u_5\} \\ U_{xy} &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_6\} \end{aligned}$$

Рис. 12

Для любой части графа $H = (X', U', F)$ можно найти единственную дополнительную часть \bar{H} , которая содержит ребра, не вошедшие в часть H , и обозначается как $\bar{H} = G \setminus H$, где G – граф, для которого ищется дополнение.

Можно рассматривать дополнение каждого графа до полного графа, построенного на том же множестве вершин. То есть, если дан произвольный граф G (не мультиграф), то его дополнение до полного графа обозначается как \bar{G} .

На рис. 13 приведены исходный граф и его дополнение.

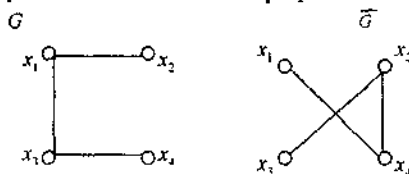


Рис. 13

Теорема Рамсея. Если граф G содержит 6 вершин, то либо сам граф G , либо его дополнение содержит треугольник.

Доказательство. Пусть $x \in X$ – произвольная вершина графа G . Так как эта вершина x смежна с любой оставшейся из 5 вершин либо в графе G , либо в его дополнении \bar{G} , то можно предположить, что некоторые три вершины y, z, p смежны с вершиной x в графе G (в противном случае они смежны с вершиной x в \bar{G}). Если какие-либо 2 вершины из y, z, p смежны между собой, то вместе с вершиной x они образуют треугольник. Если они не смежны, то вершины y, z, p образуют треугольник в графе \bar{G} .

Обобщая теорему Рамсея, естественно поставить вопрос: какое наименьшее целое число $n(k, t)$, для которого каждый граф с n вершинами содержит полный подграф с k вершинами в графе G либо полный подграф с t вершинами в графе \bar{G} .

В теореме Рамсея говорят о числе $b(3, 3)$, т.е. в графе с шестью вершинами есть полный граф на три вершины либо в его дополнении также на три вершины.

Определение. Два графа $G = (X, U, F)$ и $L = (X', U', F)$ называют изоморфными, если между их вершинами и между их ребрами можно установить такие биекции, что $X \leftrightarrow X'$, $U \leftrightarrow U'$ и справедливо высказывание

$$(\forall x, y \in X) \& (\forall x', y' \in X') \& (\forall u \in U) (\forall u' \in U') \{x \leftrightarrow x' \& y \leftrightarrow y' \& u \leftrightarrow u' \rightarrow [F(xuy) \leftrightarrow F'(x'u'y')]\}.$$

Иначе говоря, если ребро $u \in U$ соединяет вершины $x, y \in X$, которым поставлены в соответствие вершины $x', y' \in X'$, то ребро $u' \in U'$, связывающее вершины x' и y' , должно соответствовать ребру u .

Пример. На рис. 14 показаны два изоморфных графа.

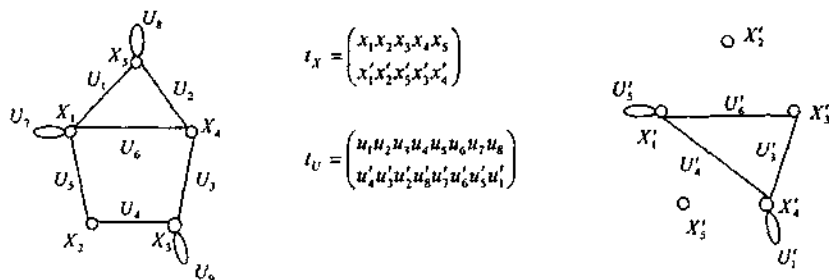


Рис. 14

Нетрудно видеть, что отношение изоморфизма — рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. Поэтому, в дальнейшем, и все преобразования графов будем осуществлять с графов.

Если какой-либо граф $L = (X', U', F)$ изоморфен части графа H , то говорят, что граф L изоморфно вкладывается в граф G (рис. 15).

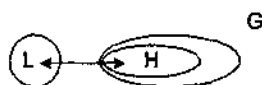


Рис. 15

Графы могут задаваться следующими типами матриц:

- матрицы смежности и соседства вершин;
- матрицы смежности и соседства ребер;
- матрицы инцидентности.

Матрица смежности вершин графа $G=(X,U,F)$ обозначается как $R_x = \|r_{ij}\|_n$ и представляет собой квадратную таблицу, строки и столбцы которой помечены вершинами из множества X , а на пересечении x_i -й строки и x_j -го столбца ставится 1, если вершины x_i и x_j смежные, или ставится число кратных ребер, соединяющих данные вершины (когда речь идёт о мультиграфе).

Вообще говоря, для случая скелета матрица смежности – обычная форма матричного задания бинарного отношения.

Матрица смежности неориентированных графов симметрична относительно главной диагонали.

Сумма единиц по каждой строке или каждому столбцу матрицы дает степень данной вершины.

Для ориентированных графов матрица смежности не симметрична относительно главной диагонали.

Если граф является мультиграфом, то числа в клетках матрицы можно заменить кратностями ребер. Матрица смежности задает граф с точностью до природы его ребер. Нужно отметить, что наоборот: любая квадратная матрица, состоящая из 0 и 1, может быть интерпретирована как граф, т.е. любые результаты на графах могут быть сформулированы как свойства таких матриц.

Пример. Для графа, приведенного на рис. 16, матрица смежности вершин имеет следующий вид:

$$R_x = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

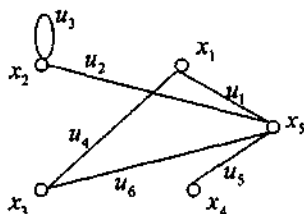


Рис. 16

Матрица соседства вершин отличается от матрицы смежности тем, что в клетках может быть поставлено множество ребер, по которым смежна данная пара вершин.

Аналогично матрице смежности вершин вводится матрица смежности ребер как прямоугольная матрица, строки и столбцы которой помечены названиями ребер. А на их пересечении ставится 1, если данная пара ребер смежна, и 0 – в противном случае.

Для графа, заданного в виде $G = (X, U)$, она обозначается как $R_u = \|r_{ij}\|_{m \times m}$.

Пример. Для графа, приведенного на рис. 16, матрица смежности ребер имеет вид

$$R_u = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Если полученную для графа G матрицу ребер R_u считать матрицей смежности вершин R_x некоторого нового графа, то получим граф, называемый смежностным исходному.

Пример. Для графа, приведенного на рис.16, смежностный граф представлен на рис. 17.

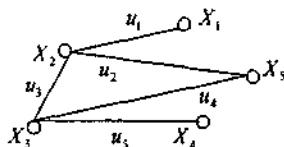


Рис. 17

Смежностный граф можно построить и сразу. Для этого ребра исходного графа примем за вершины смежностного. Две вершины

смежностного графа соединим ребром, если соответствующие ребра исходного графа смежны.

Взаимно однозначным представлением графа является его **матрица инцидентности**: $I = \|a_{ij}\|_{n \times m}$. Она представляет собой таблицу, строки которой помечены вершинами графа, а столбцы – ребрами. На пересечении i -й строки и j -го столбца ставится 1, если вершина i и ребро j инцидентны в графе G , и 0 – в противном случае.

Пример. На рис. 18 приведены граф и его матрица инцидентности.

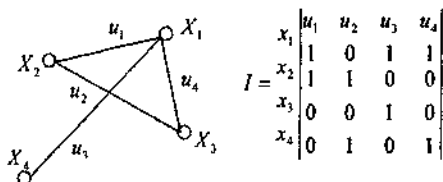


Рис. 18

Матрица инцидентности в каждом столбце имеет не более двух единиц, если нет петель, и сумма единиц в строке соответствует степени вершины (для простого графа).

Матрице инцидентности можно поставить в соответствие граф инцидентности. Он строится следующим образом: вершины исходного графа принимаются за вершины графа инцидентности, и ребра исходного графа также представляются вершинами графа инцидентности. Они соединяются друг с другом, если соответствующая пара «вершина – ребро» инцидентна в исходном графе.

Пример. Для графа, приведенного на рис. 18, граф инцидентности показан на рис. 19.

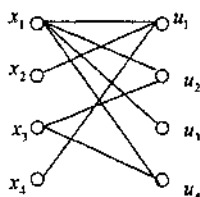


Рис. 19

Контрольные вопросы по теме 1

1. Что такое граф?
2. Какие способы задания графа вы знаете?
3. Какие виды графов вы знаете?
4. Определить понятие смежности и инцидентности в графе.

5. Какие графы называются графом инциденции и смежностным графом?

Задачи по теме 1

1. Нарисовать смешанный граф с числом вершин $n=7$ и числом ребер $m=12$. Задать его в теоретико-множественном виде $G=(X, U, F)$.

2. Построить ориентированный граф с числом вершин $n=6$ и числом ребер $m=11$. Задать его в виде $G=(X, \Gamma)$.

3. Построить произвольный мультиграф. Определить его мультичисло. Построить скелет данного мультиграфа и задать его в виде $G=(X, U)$.

4. Выписать степени всех вершин скелета, построенного в задаче 3. Определить сумму степеней. Выписать некоторые смежные пары вершин, инцидентные пары «вершина-ребро».

5. Построить произвольный кубический граф. Построить однородный граф степени 4.

6. Задать с помощью матриц инцидентности и смежности граф, показанный на рис. 20 (при построении матрицы смежности считать граф неориентированным).

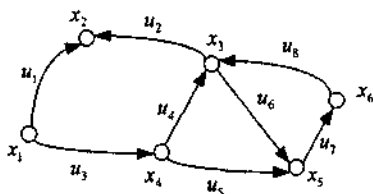


Рис. 20

7. Построить произвольный граф с числом вершин $n=8$ и числом ребер $m=16$. Выделить из него подграф на три вершины, четыре вершины и пять вершин. Выделить произвольный суграф, произвольную часть и кусок графа, содержащий четыре вершины.

8. Построить простой граф с числом вершин $n=5$. Построить для него смежностный граф.

9. Для графа, указанного на рис. 20, построить обратный и дополнительный графы (при построении дополнительного графа считать граф на рис. 20 неориентированным).

10. Доказать, что в полном графе без петель число ребер равно $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число вершин.

11. Доказать, что в простом графе без петель с n вершинами ($n > 2$) существует, по крайней мере, две вершины с одинаковыми степенями.

12. Показать, как по матрицам смежности и инцидентности графа строить аналогичные матрицы для любых частей этого графа.

13. Построить граф с заданным набором степеней вершин. Предложить метод построения таких графов.

14. Применить к матрице смежности, полученной в задаче 8, произвольную подстановку и получить матрицу смежности изоморфного графа. Построить этот граф.

15. Построить все простые графы с числом вершин $n=4$. Выделить классы изоморфизма в построенном множестве графов.

16. Построить матрицу инцидентности I произвольного графа. Рассмотреть произведение матриц $I \cdot I^T$ и $I^T \cdot I$ и выяснить свойства таких графов.

17. Подсчитать число всех подграфов, включая и изоморфные, в графе с n вершинами.

18. Подсчитать число всех суграфов, включая и изоморфные, в графе с m ребрами.

19. Подсчитать число простых графов, включая и изоморфные, которые можно построить на n вершинах.

20. Подсчитать число различных простых графов, включая и изоморфные, которые можно построить, имея заданный набор степеней вершин.

21. Определить число различных простых графов, включая и изоморфные, которые можно построить при заданных n вершинах и m ребрах.

22. Построить граф, изоморфный смежностному. Определить некоторые его свойства относительно исходного графа.

23. Построить граф, изоморфный своему дополнению до полного графа. Определить некоторые свойства таких графов.

24. Построить произвольный правильный многогранник. Для графа, образованного его вершинами и ребрами, построить смежностный граф.

25. Предложить метод построения графов с заданным числом вершин и ребер. Определить соотношения между числом вершин и ребер, при которых невозможно построение не мультиграфа.

26. Предложить метод построения однородных графов, т.е. графов, степени всех вершин которых одинаковы.

2. СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ

Пусть задан граф $G = (X, U, F)$.

Конечная последовательность вида $x_0 u_1 x_1 u_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$ элементов графа G , для которой истинно высказывание $F(x_0 u_1 x_1) \& F(x_1 u_2 x_2) \& \dots \& F(x_{l-1} u_l x_l)$, называют маршрутом из вершины x_0 в вершину x_l .

Каждые соседние два ребра в маршруте имеют общую вершину. Число ребер называется длиной маршрута и обозначается через l .

Если $x_0 = x_l$, то получается циклический маршрут.

Маршрут называется цепью, а циклический маршрут – циклом, если он не содержит повторяющихся ребер. Если в цепи не повторяется ни одна вершина, то получаем простую цепь. Аналогично, если $x_0 = x_l$, то имеем простой цикл.

Простая цепь называется максимальной, если она не является частью какой-либо другой простой цепи. Самая длинная из максимальных простых цепей называется наибольшей.

Для выявления всех маршрутов данной длины можно использовать метод возведения матрицы соседства вершин в степень.

Рассмотрим данный метод на примере. Пусть задан граф, приведенный на рис. 21, с матрицей соседства вершин:

$$R_v = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ v & 0 & t+w \\ 0 & t+w & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

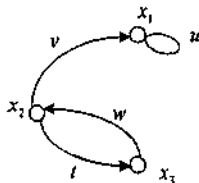


Рис. 21

Возведем данную матрицу в квадрат, получим:

$$R_v^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ v & 0 & t+w \\ 0 & t+w & 0 \end{vmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ v & 0 & t+w \\ 0 & t+w & 0 \end{vmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} u^2 + v^2 & uv & vt + vw \\ vu & v^2 + (t+w)^2 & 0 \\ tv + wv & 0 & t^2 + w^2 + tw + wt \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

На пересечении i -й строки и j -го столбца находятся все маршруты длиной $l=2$ из вершины x_i в вершину x_j . Аналогично для маршрутов длиной $l=3, 4, \dots$ необходимо возвести исходную матрицу в степени $3, 4, \dots$

Пусть дан простой граф $G=(X, U)$. Две вершины $x, y \in X$ называют связанными, если существует маршрут с концами в этих вершинах.

Определение. Граф называется связным, если любая пара вершин связанны.

Каждая вершина считается связанной сама с собой. Если вершина x связана с вершиной y , то и вершина y связана с вершиной x (в простом графе).

Если вершина x связана с вершиной y , а вершина y связана с вершиной z , то вершина x связана с вершиной z .

Таким образом, отношение связности вершин рефлексивно, симметрично, транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности.

На множестве вершин X графа G существует сопряженное с ним разбиение множества X на классы X_i : $X = \bigcup X_i$, причем в каждый класс X_i попадают связанные между собой вершины, а вершины из различных классов – не связаны между собой.

Каждый класс X_i порождает в графе G подграф, называемый компонентой связности.

Таким образом, каждый неориентированный граф единственным образом распадается в объединение своих связанных компонент. Это позволяет сводить большинство заданных графов к случаю связанных графов, т.е. графов, содержащих единственную компоненту связности.

На рис. 22 представлен граф, состоящий из трёх компонент связности.

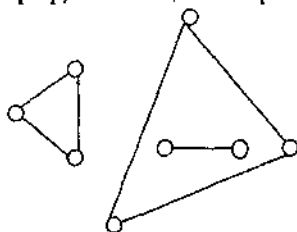


Рис. 22

Теорема. Если в конечном графе ровно две вершины имеют нечетную степень, то они связаны.

Доказательство. Пусть эти вершины (с нечетной степенью) x и y .

Ранее было доказано, что число вершин с нечетной степенью всегда четно. Применим эту теорему к той компоненте связности, к которой принадлежит вершина x . Отсюда следует, что в этой же компоненте

связности должно быть ещё нечётное число вершин с нечётной степенью. Так как кроме вершины u нет других вершин, то приходим к выводу, что вершина u также принадлежит к той же компоненте связности, что и вершина x . Теорема доказана.

Точкой сочленения, или шарниром графа $G=(X,U)$ называется вершина, удаление которой увеличивает число компонент связности графа. Ребро с такими свойствами называется мостом. Если вершина x — точка сочленения, то граф $G \setminus \{x\}$ — несвязный граф.

На рис. 23 показаны шарнир и мост графа.

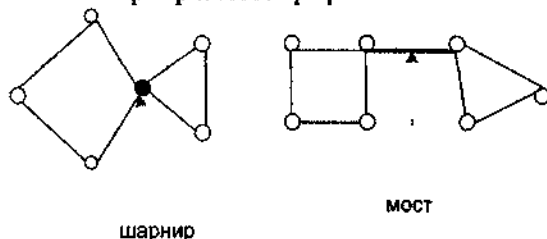


Рис. 23

Граф G называется неразделимым, если он не пустой, связный и не содержит точек сочленения. Максимальный подграф графа называется блоком, если он представляет собой неразделимый подграф. Примеры неразделимого графа и разделимого графа, состоящего из двух блоков, приведены на рис. 24.

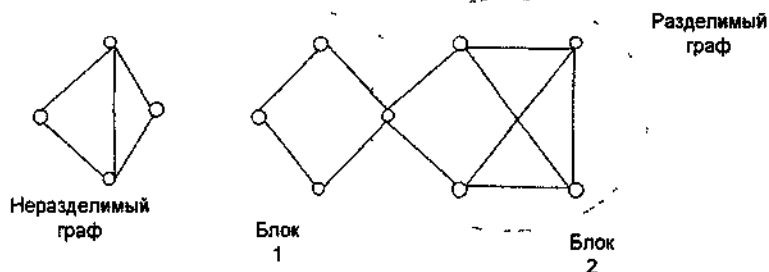


Рис. 24

Каждое ребро графа принадлежит только одному из блоков, также как и каждая вершина, кроме изолированных и точек сочленения. Ребра простого цикла принадлежат только одному блоку.

Теорема. Пусть x — вершина связного графа $G=(X,U)$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) x — шарнир графа G ;

2) существуют вершины $y, z \neq x$ такие, что вершина x принадлежит любой простой цепи, соединяющей вершины (y, z) ;

3) существует такое разбиение множества $X \setminus \{x\}$ на классы X_1, X_2 , что для любых вершин $y \in X_1, z \in X_2$ вершина x принадлежит любой простой цепи из (y, z) .

Доказательство. Покажем, что утверждение 1) влечет за собой утверждение 3). Так как по условию вершина x – точка сочленения, то граф $G \setminus \{x\}$ не связан и имеет, по крайней мере, две компоненты связности.

Образует разбиения X_1 и X_2 следующим образом: в X_1 отнесём вершины, принадлежащие первой компоненте связности, а в X_2 – вершины, принадлежащие другим компонентам связности. Тогда любые две вершины $y \in X_1$ и $z \in X_2$ лежат в разных компонентах связности графа $G \setminus \{x\}$. Отсюда следует, что любая простая цепь в графе G , соединяющая вершины y и z , проходит через точку x .

Утверждение 3) влечет за собой утверждение 2), поскольку утверждение 2) является частным случаем утверждения 3).

Покажем, что утверждение 2) влечет за собой утверждение 1). Если вершина x принадлежит любой простой цепи в графе G , соединяющей вершины y и z , то в графе G нет другой простой цепи, соединяющей эти вершины и не проходящей через вершину x , т.е. граф $G \setminus \{x\}$ не связан и, следовательно, вершина x является точкой сочленения.

Таким образом, мы доказали, что высказывания 1), 2), 3) эквивалентны. Пусть задан граф $G = (X, U)$.

Определение. Расстоянием $l(x, y)$ между вершинами x и y графа G называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей эти вершины. Если вершины x и y не связаны, то полагаем, что $l(x, y) = \infty$.

Введенная функция расстояния удовлетворяет трём аксиомам метрики:

- 1) $(\forall x, y \in X)[l(x, y) \leftrightarrow x = y]$,
- 2) $(\forall x, y \in X)[l(x, y) = l(y, x)]$,
- 3) $(\forall x, y, z \in X)[l(x, y) + l(y, z) \geq l(x, z)]$.

Для определения кратчайшего пути в графе G можно использовать следующий волновой алгоритм: пусть нам надо определить расстояние между вершинами a и b в графе G , тогда

1°. Вершину a помечаем индексом 0.

2°. Все вершины, смежные с вершиной a , помечаем индексом 1.

3°. Вершины, смежные с вершиной, помеченной индексом m , помечаем индексом $(m+1)$.

Если какая-либо вершина должна получить несколько индексов, то выбираем минимальный индекс и т.д., продолжаем процесс до тех пор, пока вершина b не получит свой индекс.

4°. Из вершины b строим путь в вершину a , следуя монотонно убывающим индексам.

На рис. 25 представлен пример, иллюстрирующий работу алгоритма.

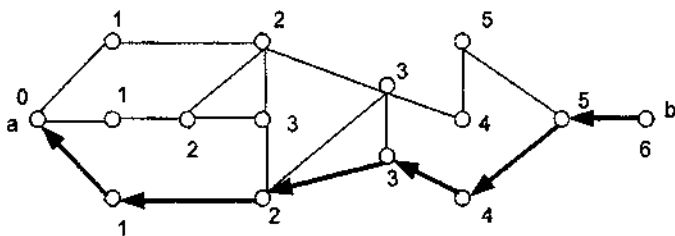


Рис. 25

Выделение кратчайшего пути также используется в задачах, в которых необходимо из множества вариантов, ведущих к конечной цели, выбрать наилучший. Для этого строится граф вариантов, в котором вершины соответствуют вариантам, а ребра – возможностям перехода от одного варианта к другому. Далее в полученном графе находится кратчайший путь из исходного варианта в интересующий нас.

На рис. 26 представлены схема реки с берегами B и C и островами A и D , соединенными между собой мостами, и соответствующий этой схеме граф.

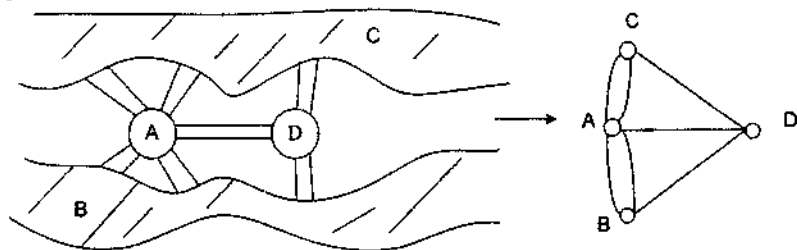


Рис. 26

В полученном графе надо, начиная с некоторой вершины, пройти по всем ребрам, не проходя по ним дважды. То есть, надо построить цикл, содержащий все ребра графа и причем один раз.

Задача Эйлера. В каких случаях в конечном графе можно найти цикл, в котором каждое ребро графа участвует только 1 раз?

Такой цикл называют эйлеровым, а граф, содержащий эйлеров цикл, называют эйлеровым графом.

Теорема. Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда 1) он связан; 2) все его локальные степени четные.

Доказательство. Необходимость. Пусть граф G – эйлеров, тогда условие связности является очевидным. Докажем теперь четность степеней вершин: каждый раз, когда эйлеров цикл «проходит» через какую-то вершину, он должен зайти по одному ребру, а выйти по другому. Следовательно, степень вершины должна быть четной.

Достаточность. Пусть условия 1) и 2) выполняются. Начнем строить цепь P из произвольной вершины x графа G и будем «продолжать» её, насколько это возможно, через новые ребра. Так как в каждой вершине локальная степень – четная, то этот процесс может закончиться только в вершине x . Если полученная цепь P содержит не все ребра графа G , то удалим из него часть, состоящую из ребер цепи P . Граф P и граф G имеют четные локальные степени, следовательно, и в оставшейся части \bar{P} вершины также имеют четную степень.

Так как граф G связан, то в части P должна найтись вершина, например b , инцидентная также и ребру из части \bar{P} .

Из вершины b можно построить новую цепь P' , содержащую только ребра из части \bar{P} , снова такая цепь может закончиться только в вершине b . Тогда из циклов P и P' можно построить новый цикл P_1 , имеющий вид $P_1 = P(x, b) \cup P'(b, b) \cup P(b, x)$. Этот цикл возвращается в вершину x и содержит больше ребер, чем цикл P .

Если цикл P_1 содержит не все ребра графа G , то построение (нового цикла) повторяется до тех пор, пока не будет получен эйлеров цикл. Теорема доказана.

На рис. 27 представлены не эйлеров и эйлеров графы.

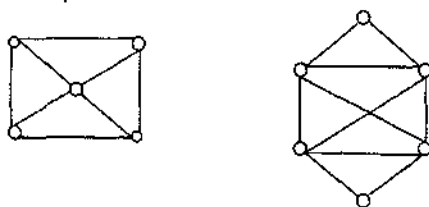


Рис. 27

Аналогичную теорему можно сформулировать для ориентированных графов: ориентированный граф имеет эйлеров цикл, если он не связан, и в каждой вершине полустепень исхода равна полустепени захода. Естественно, что при этом степени четные.

Кроме того, выделяется понятие эйлеровой цепи – это цепь, содержащая все ребра графа. Граф с эйлеровой цепью может иметь пару вершин с нечетной степенью.

Определение. Гамильтоновым циклом называется простой цикл, проходящий через все вершины графа. Гамильтонова цепь – это простая цепь, проходящая по всем вершинам графа.

Теорема. Если граф $G=(X,U,F)$ (не мультиграф) содержит наибольшую максимальную цепь (нет повторяющихся ребер) $x_0, x_1, x_2, \dots, x_l, x_l$ такую, что $\rho(x_0) + \rho(x_l) \geq l+1$ и граф связен, то такой граф содержит гамильтонов цикл.

Доказательство. Требование связности очевидно, так как в противном случае нельзя построить цикл, покрывающий все вершины.

Рассмотрим достаточность приведенного условия. Поскольку цепь из условия теоремы – наибольшая из максимальных цепей, то можно утверждать, что все ребра, выходящие из вершин x_0 и x_l (рис. 28), инцидентны только вершинам этой цепи; так как в противном случае, добавив к этой цепи ребро, инцидентное вершине x_0 или какой-либо вершине, не принадлежащей цепи, можно было бы увеличить длину данной цепи, что противоречит ее определению как “максимальная”.

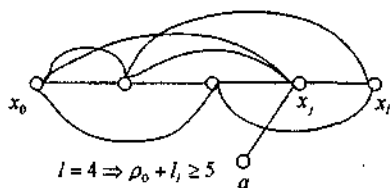


Рис. 28

Исходя из этого, в данной цепи найдется такое ребро (x_i, x_{i+1}) , что вершина x_0 будет смежна с x_{i+1} , а вершина x_l – с x_i , (т.е. имеются ребра (x_0, x_{i+1}) и (x_l, x_i)). В этом случае можно построить цикл следующим образом: надо взять гамильтоновы цепи $P(x_0, x_i) \cup (x_i, x_l) \cup P(x_l, x_{i+1}) \cup (x_{i+1}, x_0)$. Таким образом получим цикл, содержащий все вершины исходной максимальной цепи.

Докажем теперь, что данный цикл является гамильтоновым, т.е. содержит все вершины графа. Предположим, что это не так, т.е. данный цикл содержит не все вершины. Так как граф связен, то в нем найдется ребро, соединяющее вершину (например, a), не вошедшую в этот цикл, с какой-либо вершиной (например, x_i) исходного цикла. Поступим следующим образом: разорвем цикл, удалив ребро цикла, инцидентное

вершине x , слева (или справа) от него и добавим к полученной цепи новое ребро (x, a) , (где a – вершина, не принадлежащая циклу). Тогда получим цепь, длина которой больше исходной цепи на 1, что противоречит определению исходной цепи как наибольшей из максимальных. Данное противоречие и доказывает теорему.

Поскольку данная теорема формулирует только достаточное условие, то может быть предложено значительное число случаев, когда граф содержит гамильтонов цикл, но не удовлетворяет условию теоремы. Кроме того, может быть сформулировано значительное число теорем, содержащее другие достаточные условия.

Установим взаимосвязь между эйлеровыми и гамильтоновыми графами.

Теорема. Если граф $G=(X,U)$ – эйлеров, то смежностный ему граф – эйлеров и гамильтонов.

Доказательство: Поскольку исходный граф эйлеров, то он связан и степени его вершин четные. Так как в смежностном графе ребро $U(x,y)$ представляет собой вершину U , то ее степень будет равна $\rho(U) = \rho(x) + \rho(y) - 2$ и, следовательно, степень каждой вершины в смежностном графе тоже четная величина. Так как связность при переходе к смежностному графу не нарушается, то смежностный граф также является эйлеровым.

Покажем теперь, что он гамильтонов:

Весь исходный эйлеров граф можно задать, записав его в виде эйлерова цикла: $x_0 U_1 x_1 U_2 \dots x_l U_{\rho} x_0$. В этом цикле ни одно ребро не участвует дважды. И между любыми двумя соседними ребрами (в этой последовательности) стоит вершина, посредством которой эти ребра смежны. То есть, при переходе к смежностному графу данный цикл превратится в последовательность, в которой элементы U уже обозначают вершины, и любые два таких соседних элемента являются смежными. При этом ни один из элементов U не участвует в этом цикле дважды, следовательно, в смежностном графе существует гамильтонов цикл.

Пример, иллюстрирующий данное свойство приведен на рис. 29.

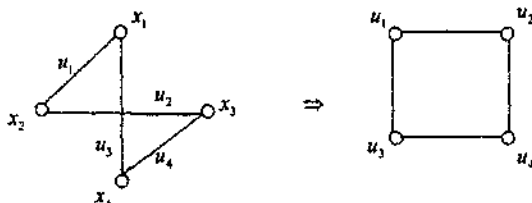


Рис. 29

Контрольные вопросы по теме 2

1. Что такое маршрут, цепь, простая цепь, цикл?
2. Какие вершины называются связанными?
3. Что называется длиной маршрута?
4. Как выявить все маршруты заданной длины?
5. Какая цепь называется максимальной, какая – наибольшей?
6. Дать понятие моста, шарнира (точки сочленения) и блока графа.
7. Дать определение эйлера графа.
8. Дать определение гамильтонова графа.
9. Доказать необходимое и достаточное условия эйлера графа.
10. Доказать утверждение, что если в связном графе $G=(X,U)$ имеется наибольшая простая цепь $Q=x_0u_1x_1u_2...x_{l-1}u_lx_l$, такая, что $l>2$ и $\rho(x_0) + \rho(x_l) \geq l+1$, то в графе G существует гамильтонов цикл.
11. Доказать утверждение, что если в связном графе $G=(X,U)$ с $n \geq 3$ вершинами для любых двух несмежных вершин x и y справедливо выражение $\rho(x) + \rho(y) \geq n$, то в графе G существует гамильтонов цикл.
12. Доказать утверждение, что если в связном графе $G=(X,U)$ с $n \geq 3$ вершинами для любой вершины x справедливо выражение $\rho(x) \geq \frac{n}{2}$, то в графе G существует гамильтонов цикл.

Задачи по теме 2

1. Найти все маршруты длиной 3 в графе с числом вершин $n=4$ и числом ребер $m=6$.
2. Построить граф с числом вершин $n=12$, содержащий три компоненты связности:
 - а) графически;
 - б) непосредственно матрицу смежности;
 - в) непосредственно матрицу инцидентности;
 - г) непосредственно теоретико-множественное задание.
3. Разработать алгоритм выделения компонент связности произвольного графа.
4. Построить граф, состоящий из четырех блоков.
5. Построить граф, имеющий точки сочленения, не инцидентные мосту.
6. Построить такой связный граф, чтобы удаление из него выбранного подграфа привело к образованию не менее трех компонент связности. Выполнить это по матрице смежности и матрице инцидентности.

7. Доказать следующее утверждение: если ребро графа является мостом, то оно не принадлежит ни одному простому циклу.

8. Предложить алгоритм определения кратчайшего пути в графе с весами на ребрах (ребрами различной длины).

9. Решить задачу о «волке, козе и капусте».

10. Имеются 3 вида сосудов: 3-, 5- и 8 - литровые. Каким кратчайшим способом разлить содержимое 8 литрового полного сосуда по 4 литра.

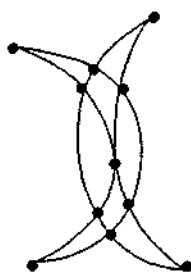
11. Решить предыдущую задачу, минимизируя суммарный объем переливаемой воды.

12. Предложить метод построения нетривиальных эйлеровых графов с заданным числом ребер.

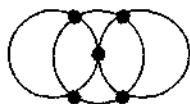
13. Предложить метод построения эйлеровых графов на заданном наборе четных степеней его вершин.

14. Предложить метод построения графов, содержащих эйлеровы цепи с заданным числом ребер.

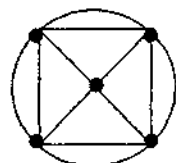
15. Существует ли эйлеров цикл в графах, указанных на рис. 30?



а



б



в

Рис. 30

16. На рис. 31 представлена схема зоопарка. Вершинами обозначены вход, выход и повороты, ребрами – дорожки, вдоль которых расставлены клетки. Найти маршрут, по которому можно провести посетителей, показав всех зверей.

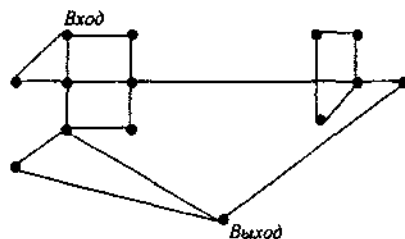


Рис. 31

17. На рис. 32 представлена схема выставки. Ребрами указаны залы и коридоры, вершинами – вход, выход, перекрестки и двери между залами. Где на выставке надо сделать вход и выход, чтобы можно было бы провести экскурсию по всем залам, побывав в них только один раз?

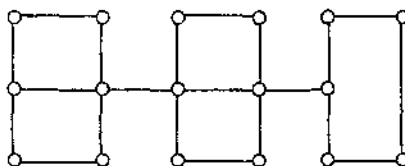
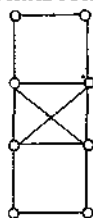
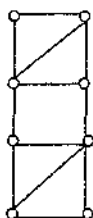


Рис. 32

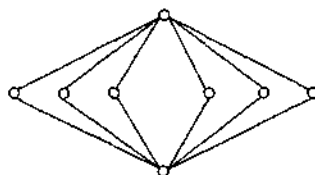
18. На рис. 33 показаны три графа. Какой из них является эйлеровым, какой – гамильтоновым?



а



б



в

Рис. 33

19. Построить граф, содержащий гамильтонов цикл и удовлетворяющий:

- условию вопроса 10;
- условию вопроса 11;
- условию вопроса 12.

20. Доказать, что граф, смежностный эйлеровому:

- эйлеров;
- гамильтонов.

21. Предложить алгоритм для определения существования гамильтонова цикла в произвольном графе.

22. Определить множество полных графов, содержащих эйлеров цикл.
 23. Определить верхнюю оценку числа гамильтоновых циклов в полном графе G .

3. СИЛЬНО СВЯЗНЫЙ ГРАФ. ТРАНЗИТИВНОЕ ЗАМЫКАНИЕ. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МАКСИМАЛЬНЫЕ СИЛЬНО СВЯЗНЫЕ ПОДГРАФЫ

Пусть задан ориентированный граф $G=(X, \Gamma)$. Определим многозначное отображение $\Gamma^2, \Gamma^3, \dots$, по формулам

$$\Gamma^2(x_i) = \Gamma\{\Gamma(x_i)\}, \Gamma^3(x_i) = \Gamma\{\Gamma^2(x_i)\} = \Gamma\{\Gamma\{\Gamma(x_i)\}\}, \dots, \Gamma^n(x_i) = \Gamma\{\Gamma^{n-1}(x_i)\}.$$

А обратное многозначное отображение $\Gamma^{-2}, \Gamma^{-3}, \dots$, определим по формулам

$$\Gamma^{-2}(x_i) = \Gamma^{-1}\{\Gamma^{-1}(x_i)\}, \Gamma^{-3}(x_i) = \Gamma^{-1}\{\Gamma^{-2}(x_i)\} = \Gamma^{-1}\{\Gamma^{-1}\{\Gamma^{-1}(x_i)\}\}, \dots,$$

$$\Gamma^{-n}(x_i) = \Gamma^{-1}\{\Gamma^{-(n-1)}(x_i)\}.$$

Для графа, приведенного на рис. 34, многозначное и обратное многозначное отображения имеют следующий вид:

$$\Gamma(A) = \{B, D\}, \Gamma(B) = \{B, C\}, \Gamma(D) = \{C, E\}, \Gamma(E) = \emptyset, \Gamma^2(A) = \{\Gamma(B), \Gamma(D)\} = \{A, B, C, E\}, \Gamma^2(E) = \emptyset;$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \emptyset, \Gamma^{-1}(B) = \{A, B, C\}, \Gamma^{-1}(E) = \{C, D\}, \Gamma^{-2}(A) = \{A, B, C\}.$$

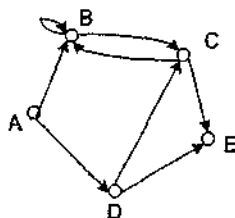


Рис. 34

Очевидно, что $\Gamma^n(x_i)$ и $\Gamma^{-n}(x_i)$ являются соответственно подмножествами тех вершин, в которые можно прийти из x_i , используя пути длиной n , и тех вершин, из которых можно прийти в x_i , используя пути длиной n .

Определение. Транзитивным замыканием $\bar{\Gamma}(x_i)$ называется многозначное отображение, определяемое формулой

$$\bar{\Gamma}(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \dots$$

Если обозначить через $\Gamma^0(x_i) = \{x_i\}$, то получим

$$\bar{\Gamma}(x_i) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma^i(x_i).$$

Другими словами, $\bar{\Gamma}(x_i)$ является подмножеством вершин, в которые можно прийти из x_i по некоторому пути.

Определение. Аналогично, обратным транзитивным замыканием $\bar{\Gamma}^-(x_i)$ называется многозначное отображение, определяемое формулой:

$$\bar{\Gamma}^-(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma^{-i}(x_i).$$

$\bar{\Gamma}^-(x_i)$ определяет множество вершин, из которых можно попасть в вершину x_i по некоторому пути.

Пример. Для графа, приведенного на рис. 34, имеем: $\bar{\Gamma}(A) = \{A, B, C, D, E\} = X$, $\bar{\Gamma}(E) = \emptyset$, $\bar{\Gamma}(B) = \{B, C, E\}$, $\bar{\Gamma}(A) = \emptyset$, $\bar{\Gamma}(B) = \{A, B, C, D\}$, $\bar{\Gamma}(E) = X$.

Определение. Граф $G=(X, \Gamma)$ называется сильно связным, если

$$(\forall x_i \in X) [\bar{\Gamma}(x_i) = X].$$

Иными словами, для любых двух вершин x_i, x_j такого графа существует путь, идущий из вершины x_i в вершину x_j . Граф, показанный на рис. 34, не является сильно связанным, а граф, приведенный на рис. 35 – является.

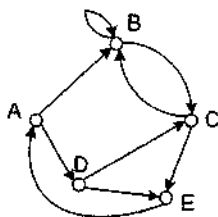


Рис. 35

Легко показать, что условие определения сильной связности эквивалентно условию

$$(\forall x_i \in X) [\bar{\Gamma}^-(x_i) = X].$$

Бинарное отношение «существует путь из вершины x_i в вершину x_j » является отношением нестрогого порядка на множестве вершин X , так как оно транзитивно и рефлексивно. Бинарное отношение «существует путь из вершины x_i в вершину x_j и из вершины x_j в вершину x_i » будет отношением эквивалентности на множестве вершин X , так как оно еще симметрично.

Разложение графа на максимальные сильно связные подграфы

Определение. Подграф G' графа $G=(X, \Gamma)$ называют максимальным сильно связным, если не существует сильно связного графа G'' , строго содержащего G' (т.е. $G' \subset G''$).

Пример. Максимальные сильно связанные подграфы графа, приведенного на рис. 36, обведены пунктиром.

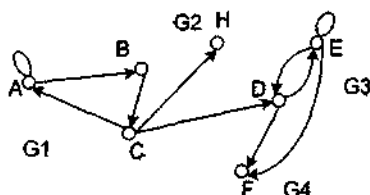


Рис. 36

Фактор-множество X/\mathfrak{N} состоит из классов C_1, C_2, \dots, C_k , каждый из которых есть максимальный сильно связный подграф.

Пример. Для графа, приведенного на рис. 36, видно, что фактор-множество X/\mathfrak{N} состоит из 4-х классов: $C_1 = \{A, B, C\}$, $C_2 = \{H\}$, $C_3 = \{D, E\}$, $C_4 = \{F\}$.

При этом множество классов $\{C_i\}$ упорядочивается отношением R' «существует путь из класса C_i в C_j ». Отношение R' – рефлексивно и транзитивно. Оно также антисимметрично, так как в противном случае классы C_i и C_j следовало бы объединить в один класс, что противоречит их максимальности.

Пример. На рис. 37 показано, как можно упорядочить классы C_1, C_2, C_3, C_4 . Очевидно, что этот порядок не строгий.

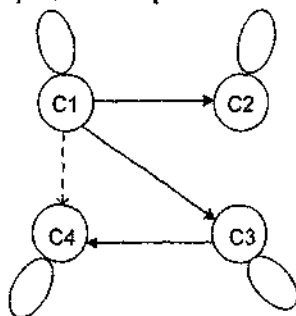


Рис. 37

Метод разложения графа на максимальные сильно связанные подграфы

Если $C(x_i)$ – класс, содержащий вершину x_i , то можно записать, что

$$C(x_i) = \hat{r}(x_i) \cap \hat{r}^-(x_i).$$

Метод состоит в следующем. Берем произвольную вершину x_i и находим для нее $C(x_i) = \hat{r}(x_i) \cap \hat{r}^-(x_i)$. Затем берем вершину $x_j \notin C(x_i)$ и действуем аналогично. Продолжаем процесс до тех пор, пока это возможно. В результате получаем классы C_1, C_2, \dots, C_k .

Контрольные вопросы по теме 3

1. Дать понятие транзитивного замыкания и обратного транзитивного замыкания вершин графа.
2. Дать определение сильно связного графа.

Задачи по теме 3

Для графов, приведенных на рис. 38 и 39, найти максимальные сильно связные подграфы.

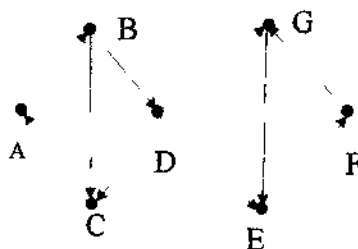


Рис. 38

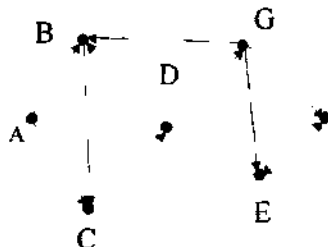


Рис. 39

4. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛА ТЕОРИИ ГРАФОВ

Рассмотрим следующие числа: цикломатическое число, хроматическое число, число внутренней устойчивости, число внешней устойчивости.

Введем два понятия: величина $\gamma(G) = m - n + p$ называется цикломатическим числом, а величина $\chi(G) = n - p$ – рангом графа. Здесь n – число вершин; m – ребер; p – число компонент связности $\Rightarrow \gamma(G) = m - \chi$.

Теорема. В графе $G = (X, U)$ величины $\gamma(G)$ и $\chi(G)$ – положительные числа (≥ 0).

Доказательство Проведем следующее построение. Пусть исходный граф G содержит n голых вершин, тогда имеем:

$$\chi(G) = n - p = n - n = 0;$$

$$\gamma(G) = m - \chi = 0 - 0 = 0.$$

Таким образом, мы показали, что если в графе нет ребер, то его ранг и цикломатическое число равны 0.

Предположим, что в графе появилось одно ребро (u_1). Пример такого случая показан на рис. 40. При этом число компонент связности уменьшится на 1, то есть, величина $\chi = n - (n-1) = 1$, а величина $\gamma = 1 - 1 = 0$.

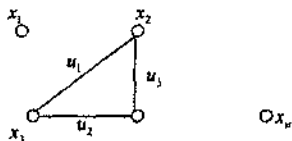


Рис. 40

Пусть теперь к графу «добавляется» еще одно ребро, соединяющее пару вершин, между которыми уже есть маршрут (u_3). При этом число компонент связности не изменится, а цикломатическое число увеличится на 1. То есть, $\chi = 2$, а $\gamma = 3 - 2 = 1$.

Таким образом, мы показали:

1. При увеличении числа ребер ранг и цикломатическое число не убывают, следовательно, теорема доказана.

2. Если ребро добавляется между вершинами, связанными ранее маршрутом, т.е. появляется цикл, то ранг графа не изменяется, а цикломатическое число увеличивается на 1.

Отсюда видно, что цикломатическое число определяет максимальное число независимых циклов в графе G , т.е. таких циклов, каждый из которых содержит хотя бы одно ребро, не входящее ни в один из оставшихся циклов. С другой стороны, цикломатическое число характеризует минимальное число ребер, которые надо удалить из графа, чтобы в нем не было ни одного цикла.

Пример. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 41.

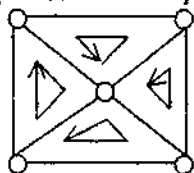


Рис. 41

В нем число вершин $n = 5$, а число ребер $m = 8$, число компонент связности $p = 1$, т.е. цикломатическое число $\gamma(G) = 8 - 5 + 1 = 4$.

Пусть дано натуральное число P . Говорят, что граф G является P -хроматическим, если его вершины раскрасить P различными цветами

таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одним цветом.

Определение. Наименьшее число P , при котором граф G является P -хроматическим, называют хроматическим числом и обозначают $\chi(G)$.

Определение. Хроматическим классом графа G называют натуральное число q , обладающее следующими свойствами:

1. Каждое ребро графа можно окрасить в один из q цветов таким образом, чтобы никакие два смежных ребра не были окрашены одинаково.

2. Это невозможно сделать с помощью $q-1$ цветов.

Примечание. Хроматический класс q совпадает с хроматическим числом χ для графа, смежностного данному.

Теорема Кёнига. Граф G является бихроматическим (т.е. $\chi \geq 2$) в том и только том случае, если он не содержит циклов нечетной длины.

Доказательство. Докажем необходимость. Рассмотрим граф G без циклов нечетной длины. Пусть он связан, в противном случае будем окрашивать каждую компоненту отдельно. Покажем, что он бихроматический. Для этого воспользуемся следующим правилом:

- 1) произвольную вершину A окрасим в синий цвет;
- 2) если вершина уже окрашена в синий цвет, то все вершины смежные с ней, окрасим в красный, а если вершины окрашены в красный, то все вершины, смежные с ней, окрасим в синий.

Если граф G связан, то каждая его вершина окажется окрашенной, причем, никакая вершина $x \in X$ не будет одновременно и синей и красной, так как в противном случае, она входила бы в цикл нечетной длины, что противоречит условию. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Если граф бихроматический, то он не содержит циклов нечетной длины, так как в противном случае вершины, принадлежащие такому циклу, нельзя было бы раскрасить двумя цветами.

Достаточность доказана и, следовательно, теорема Кёнига доказана.

Определение. Рассмотрим граф $G=(X, \Gamma)$. Множество $\psi \in X$ называется внутренне устойчивым, если никакие две вершины из ψ не смежны между собой, т.е. $\Gamma(\psi) \cap \psi = \emptyset$.

Если внутренне устойчивое множество не является частью никакого другого внутреннего множества, то оно называется максимальным. Каждое максимальное внутренне устойчивое множество графа G в графе \bar{G} порождает максимальный полный подграф, называемый кликой.

Условие внутренней устойчивости можно переписать как

$$(\forall x, y \in \psi) (\forall u \in U) [\overline{F(x, u, y)}],$$

или как

$$(\forall x, y \in \psi)(\neg \exists u \in U)[F(x, u, y)].$$

Нетрудно видеть, что множество вершин ψ порождает пустой подграф, не содержащий ребра.

Обозначим через $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$ – семейство всех внутренних устойчивых множеств.

Определение. Величина $\alpha(G) = \max |\psi_i|$ называется числом внутренней устойчивости.

Пример. Для графов, приведенных на рис. 42, максимальные внутренние устойчивые множества выделены пунктиром. А числа внутренней устойчивости равны соответственно 2 и 3.

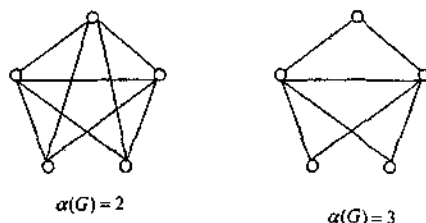


Рис. 42

Метод Магу для отыскания максимальных внутренних устойчивых множеств

Будем рассматривать графы без петель, т.е. вершина с петлей не может принадлежать внутренне устойчивому множеству.

Пусть $G=(X, \Gamma)$, и пусть ψ – некоторое внутренне устойчивое множество, т.е. $\Gamma(\psi) \cap \psi = \emptyset$. С каждой вершиной $x_i \in X$ свяжем булеву переменную $P(x_i)$ и положим:

если $x_i \in X$, то $P(x_i) = 1$,

если $x_i \notin X$, то $P(x_i) = 0$.

Введем еще одну булеву переменную: $\alpha_{ij} = 1$, если $x_j \in \Gamma(x_i)$ и $\alpha_{ij} = 0$, если $x_j \notin \Gamma(x_i)$.

Исходя из определения внутренне устойчивого множества, справедливо следующее утверждение:

$$(\forall x_i, x_j \in X)[(x_i \in \Gamma(x_j) \vee x_j \in \Gamma(x_i)) \rightarrow ((x_i \notin \psi) \vee (x_j \notin \psi))].$$

Для фиксированной пары вершин x_i, x_j , переходя к булевым переменным, получаем: $(\alpha_{ij} \vee \alpha_{ji}) \rightarrow (\bar{P}(x_i) \vee \bar{P}(x_j)) = 1$.

Воспользуемся свойствами оператора импликации ($A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$) и оператора Де'Моргана ($\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$), получаем: $\bar{\alpha}_{ij} \& \bar{\alpha}_{ji} \vee \bar{P}(x_i) \vee \bar{P}(x_j) = 1$.

Используя аналогию между квантором общности и операцией конъюнкции, приведенное выше утверждение перепишем в виде

$$\Phi_{\psi} = \&_{i,j=1}^n (\bar{\alpha}_{ij} \& \bar{\alpha}_{ji} \vee \bar{P}(x_i) \vee \bar{P}(x_j)) = 1.$$

Упростив последнее выражение и учитывая, например, что конъюнкция $\bar{a}_{12} \& \bar{a}_{21}$ получается дважды ($i=1 \& j=2 \vee j=1 \& i=2$), запишем:

$$\Phi_{\psi} = \&_{i,j=1}^n (\bar{\alpha}_{ij} \vee \bar{P}(x_i) \vee \bar{P}(x_j)) = 1.$$

В последнем выражении раскроем скобки и приведем подобные члены, используя правило поглощения ($a \vee a \& b = a$). Рассмотрим только те пары вершин, для которых величина $\bar{\alpha}_{ij} = 0$ (т.е. $\alpha_{ij} = 1$), получим:

$$\Phi_{\psi} = \bigvee_{k=1, \dots, n} (\bar{P}(x_1) \& \bar{P}(x_2) \& \dots \& \bar{P}(x_k)) = 1, \quad i_k \in \overline{1, n}. \quad (4.1)$$

Тогда, для каждого дизъюнктивного члена совокупность всех вершин, соответствующая переменным, которые в нем отсутствуют, дает максимальное внутреннее устойчивое множество графа.

В самом деле, такой член содержит только переменные с отрицанием, и поэтому к вершинам x_i , соответствующих переменным $P(x_i)$, не встречающихся в этом члене выражения, нельзя добавить никакой другой.

Пример. Пусть граф G приведен на рис. 43.

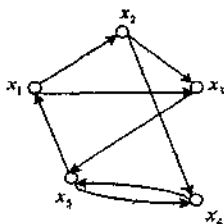


Рис. 43

Его матрица смежности имеет вид

$$R_{\tau} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix}.$$

По матрице смежности запишем выражение (4.1):

$$\Phi_{\psi} = (\bar{p}_1 \vee \bar{p}_2) \& (\bar{p}_1 \vee \bar{p}_3) \& (\bar{p}_2 \vee \bar{p}_3) \& (\bar{p}_2 \vee \bar{p}_4) \& (\bar{p}_3 \vee \bar{p}_5) \& (\bar{p}_4 \vee \bar{p}_5) \& (\bar{p}_5 \vee \bar{p}_1) \& (\bar{p}_5 \vee \bar{p}_4) = 1.$$

Перемножаем попарно выражения, стоящие в скобках, получаем:

$$\Phi_{\Psi} = (\bar{P}_1 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \vee \bar{P}_2 \bar{P}_1 \vee \bar{P}_3 \bar{P}_2) \& (\bar{P}_2 \vee \bar{P}_3 \bar{P}_4) \& (\bar{P}_5 \vee \bar{P}_3 \bar{P}_4) \& (\bar{P}_5 \vee \bar{P}_1) = 1,$$

$$\Phi_{\Psi} = (\bar{P}_1 \bar{P}_2 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \vee \bar{P}_2 \bar{P}_3 \vee \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_4) \& (\bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4) = 1,$$

$$\Phi_{\Psi} = \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \vee \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_4 = 1,$$

$$\Phi_{\Psi} = \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \vee \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_5 = 1.$$

Из последнего выражения следует, что рассматриваемый граф имеет 3 максимальных внутренне устойчивых множества $\Psi_1 = \{x_3, x_4\}$, $\Psi_2 = \{x_2, x_5\}$ и $\Psi_3 = \{x_1, x_4\}$, а степень внутренней устойчивости равна $\alpha(G) = 2$.

Алгоритмический метод определения числа внутренней устойчивости

Данный алгоритм заключается в выделении семейства внутренне устойчивых множеств. Далее определяется множество с наибольшим числом элементов. Алгоритм для выделения семейства внутренне устойчивых множеств работает с матрицей смежности и заключается в следующем:

1°. В главную диагональ матрицы смежности вершин графа вписываются единицы.

2°. Выберем из строки x_i первый элемент $r_{ij} = 0$ и вершины x_i, x_j относим к множеству $\Psi_s = \{x_i, x_j\}$.

3°. Строки x_i и x_j матрицы смежности поэлементно дизъюнктивно складываем, и в строке $x_{ij} = x_i \vee x_j$ определяется первый нулевой элемент $r_{ijk} = 0$, вершину x_k присоединяем к множеству Ψ_s .

4°. Определяем строку (i, j, k) : $x_{ij} \vee x_k = x_{i,j,k}$ и определяем в ней первый элемент, равный 0 и т.д., пока в полученной строке не будет нулевых элементов.

5°. Выбираем в исходной строке x_i следующий элемент x_j' , для которого $r_{ij}' = 0$ и, возвращаясь к началу алгоритма, строим следующее внутренне устойчивое множество.

6°. Подобным образом исследуем все нулевые элементы матрицы смежности.

Примечание. В описанном виде алгоритм наиболее пригоден для работы с неориентированным графом, в противном случае из ориентированного графа надо сделать неориентированный.

Свойство. Число внутренней устойчивости $\alpha(G)$ и хроматическое число $\chi(G)$ графа связаны неравенством: $\alpha(G) \times \chi(G) \geq n$.

Доказательство. Если предположить, что граф раскрашен, то множество вершин графа X можно разбить на $j(G)$ внутренне устойчивых множеств, образованных одинаково окрашенными вершинами и содержащих соответственно n_1, n_2, \dots, n_j элементов. Тогда имеем:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_j \leq \alpha(G) + \alpha(G) + \dots + \alpha(G) \leq \alpha(G) \times v(G).$$

Описанное неравенство может служить основанием для построения алгоритма раскраски вершин. Можно предложить следующий алгоритм:

- Выделяем из графа наибольшее внутренне устойчивое множество и его вершины окрашиваем в первый цвет.

- Затем удаляем их из графа. Из оставшегося подграфа опять выделяем наибольшее внутренне устойчивое множество и окрашиваем его во второй цвет.

- Процесс продолжается, пока все вершины не окрасятся.

Примечание. Данный алгоритм не всегда приводит к минимальной окраске.

Пример. На рис. 44 приведен граф, окрашенный с помощью предложенного алгоритма четырьмя красками. На рис. 45 приведен тот же граф, окрашенный минимальным числом (тремя) красок.

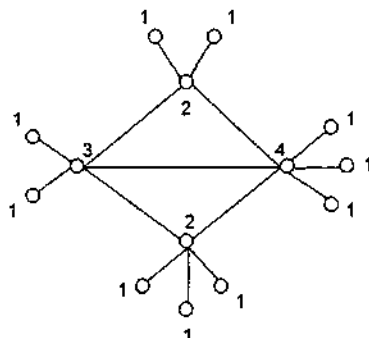


Рис. 44

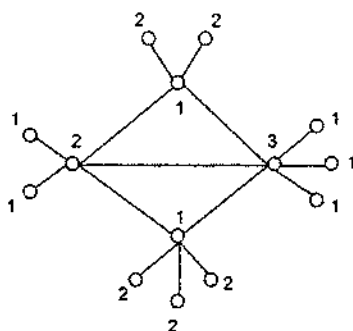


Рис. 45

Определение. Рассмотрим граф $G=(X, \Gamma)$. Говорят, что множество $T \subseteq X$ – **внешне устойчивое**, если для любой вершины $x \notin T$ справедливо $\Gamma(x) \cap T \neq \emptyset$, или иначе, $\Gamma^{-1}(T) \supseteq X \setminus T$.

Иными словами, каждая вершина, не принадлежащая внешне устойчивому множеству, смежна с какой-либо вершиной из T .

Внешне устойчивое множество называется **минимальным**, если никакое его подмножество не обладает свойством внешней устойчивости. Обозначим через $\Phi = \{T_1, T_2, \dots, T_s\}$ – семейство всех внешне устойчивых множеств графа.

Определение. Величина $\beta(G) = \min_{T_i \in \Phi} |T_i|$ называется **числом внешней устойчивости** графа G .

Пример. Для графа, приведенного на рис. 46, минимальным внешне устойчивым множеством является $T_1 = \{x_1, x_2\}$, а число внешней устойчивости $\beta = 2$.

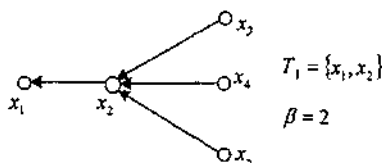


Рис. 46

Пример «Задача о часовых». На рис. 47 приведен план объекта в виде графа, на котором двери – вершины графа, а коридоры с прямой видимостью – ребра графа.

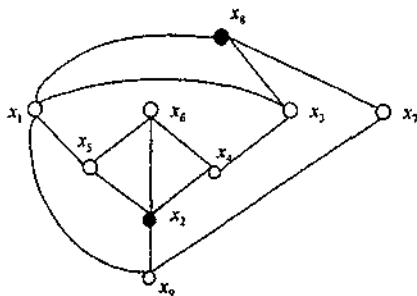


Рис. 47

Какое наименьшее количество часовых необходимо поставить для наблюдения за всеми дверями? (Ответ: двух часовых, так как число внешней устойчивости $\beta(G)=2$).

Метод Магу для нахождения внешне устойчивых множеств

Пусть задан граф $G=(X, \Gamma)$ и T – некоторое внешне устойчивое множество, тогда справедливо выражение

$$(\forall x, \notin T)[T \cap \Gamma(x) \neq \emptyset] \text{ или иначе, } (\forall x, \in X)[(\{x\} \cup \Gamma(x)) \cap T \neq \emptyset].$$

Из последнего условия следует, что такое подмножество T должно содержать вместе с вершиной x , по крайней мере, одну из вершин $\Gamma(x)$. Следовательно, истинно высказывание:

$$(\forall x, \in X)(x, \in T \vee (\exists x, \exists x, \in T \& x, \in \Gamma(x))). \quad (4.2)$$

Введем булевы переменные: $P(x_i) = \begin{cases} 1, x_i \in T \\ 0, x_i \notin T \end{cases}$ и $\alpha_y = \begin{cases} 1, y \in \Gamma(x_i) \\ 0, y \notin \Gamma(x_i) \end{cases}, \alpha_0=1.$

Переходя от кванторной записи высказывания (4.2) к записи через логические операции, получим:

$$\Phi_T = \&(P(x_i) \vee \vee \alpha_y \& P(x_j)) = 1. \quad (4.3)$$

Заметим, что для любой вершины x , справедливо выражение $(P(x_i) \vee \vee \alpha_y \& P(x_j)) = \vee \alpha_y \& P(x_j)$. Отсюда следует, что

$$\Phi_T = \&(\vee \alpha_y \& P(x_j)) = 1. \quad (4.4)$$

Используя правило поглощения $a \vee a \& b = a$, разложим выражение (4.4). Каждый член этого разложения дает минимальное внешне устойчивое подмножество, не содержащее строго никакого другого внешне устойчивого множества. Действительно, такой член не содержит переменных с отрицанием, и поэтому из множества вершин x , соответствующих переменным $P(x_i)$, встречающихся в этом члене, нельзя удалить ни одну.

Если работать с матрицей смежности, то необходимо, фактически, построить дизъюнкцию всех единичных элементов строки x_i . Прodelать это для всех строк и найти их конъюнкцию.

Пример. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 43. Его матрица смежности имеет вид

$$R_r = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Запишем выражение:

$\Phi = (P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3)) \& ((P(x_2) \vee P(x_3)) \& \& (P(x_3) \vee P(x_2)) \& (P(x_4) \vee P(x_5)) \& (P(x_5) \vee P(x_1) \vee P(x_4)) = \dots = P(x_3)P(x_4) \vee P(x_3)P(x_5) \vee P(x_2)P(x_5)$, откуда следует, что рассматриваемый граф имеет 3 внешне устойчивых множества: $T_1 = \{x_3, x_4\}$, $T_2 = \{x_3, x_5\}$, $T_3 = \{x_2, x_5\}$, а число внешней устойчивости равно: $\beta(G)=2$.

Определение. Рассмотрим граф $G=(X, \Gamma)$. Подмножество $N \subseteq X$ называется ядром графа G , если оно одновременно внутренне и внешне устойчивое подмножество, т.е.

$$\begin{cases} (\forall x_i \in N) [N \cap \Gamma(x_i) = \emptyset], \\ (\forall x_i \notin N) [N \cap \Gamma(x_i) \neq \emptyset]. \end{cases}$$

Отсюда следует, что ядро графа содержит всякую вершину x_i , у которой $\Gamma(x_i) = \emptyset$, и не содержит вершин с петлями.

Граф может обладать несколькими ядрами или вообще не иметь ядра.

Метод Магу для отыскания ядер

Положим $P(x_i)=1$, если $x_i \in N$, и рассмотрим уравнения $\Phi_v=1$ и $\Phi_r=1$. Так как эти равенства должны выполняться, то $\Phi_N = \Phi_v \& \Phi_r = 1$.

Пример. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 43. Ранее для него мы получили: $\Phi_v = (\bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \vee \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_5)$ и $\Phi_r = (P_3 P_4 \vee P_3 P_5 \vee P_2 P_5)$. Поэтому $\Phi_N = (\bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 \bar{P}_3 \bar{P}_4 \vee \bar{P}_2 \bar{P}_3 \bar{P}_5) \& (P_3 P_4 \vee P_3 P_5 \vee P_2 P_5) = 1$.

Раскрывая скобки, получим: $\Phi_N = (\bar{P}_1 \bar{P}_2 P_3 P_4 \bar{P}_5 \vee \bar{P}_1 P_2 \bar{P}_3 \bar{P}_4 P_5) = 1$, т.е. рассматриваемый граф содержит два ядра: $N_1 = \{x_3, x_4\}$ и $N_2 = \{x_2, x_5\}$.

Свойства ядер графа

Свойство 1. Ядро N графа G есть максимальное внутренне устойчивое подмножество.

Доказательство. Предположим, что это не так, и ядро графа не максимальное, т.е. $N \subset \Psi$, тогда существуют вершины $x_i \in \Psi$ и $x_i \notin N$. Так как N – ядро графа, т.е. и внешне устойчивое подмножество, то $N \cap \Gamma(x_i) \neq \emptyset \Rightarrow \Psi \cap \Gamma(x_i) \neq \emptyset$. Отсюда следует, что Ψ не является внутренне устойчивым подмножеством, что противоречит условию. Следовательно, $N=\Psi$.

Свойство 2. Если G – ориентированный граф без петель, то любое максимальное внутренне устойчивое подмножество является ядром графа G .

Доказательство. Рассмотрим максимальное внутренне устойчивое подмножество Ψ . Требуется показать, что для произвольной вершины $x, x \in \Psi$ справедливо соотношение $\Psi \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$.

Предположим, что это не так. Тогда множество $\Psi \cup \{x\} = \Psi_1$ – внутренне устойчивое, что противоречит максимальнойности Ψ .

Свойство 3. Пусть задан граф $G = (X, \Gamma)$ без петель. Для того чтобы N было ядром, необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно максимальным внутренне устойчивым и минимальным внешне устойчивым (без доказательства).

Свойство 4. Для ядра N графа $G = (X, \Gamma)$ выполняется неравенство $\beta(G) \leq |N| \leq \alpha(G)$. Это следует из определения ядра графа.

Контрольные вопросы по теме 4

1. Дать определение цикломатическому числу, рангу, хроматическому числу и хроматическому классу графа.
2. Дать определение внутренне устойчивому множеству, числу внутренней устойчивости графа.
3. Доказать теорему Кенинга.
4. Написать в виде булевых уравнений условие внутренней устойчивости (метод Магу).
5. Дать определение внешне устойчивому множеству, числу внешней устойчивости графа.
6. Написать в виде булевых уравнений условие внешней устойчивости (метод Магу).
7. Дать определение ядру графа.

Задачи по теме 4

1. Построить граф $G = (X, U)$ с числом вершин $n = 7$ и числом ребер $m = 12$. Определить для этого графа ранг и цикломатическое число. Выписать какую-либо систему, содержащую максимальное число независимых циклов. Указать ребра, удаление которых приводит к графу без циклов.
2. Предложить метод построения графов с заданным цикломатическим числом.
3. Предложить метод построения эйлеровых и гамильтоновых графов с заданным цикломатическим числом.
4. Определить максимальное число независимых циклов полного графа G .

5. Доказать, что неразделимый граф имеет цикломатическое число, равное единице в том и только том случае, когда он является циклом.

6. Показать, что цикломатическое число любого графа не может быть отрицательным. Привести пример графа, цикломатическое число которого равно 0.

7. Построить произвольный граф $G=(X,U)$ с числом вершин $n=5$ и числом ребер $m=6$. Определить для этого графа хроматическое число и хроматический класс.

8. Предложить метод построения бихроматических графов с заданным числом вершин.

9. Для графа, показанного на рис. 48, выделить семейства внутренне устойчивых множеств, внешне устойчивых множеств, ядер графа и определить число внутренней и внешней устойчивости с помощью метода Магу.

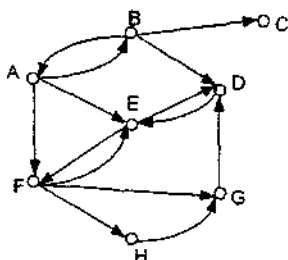


Рис. 48

10. Решить задачу п.7, используя алгоритмический метод выделения внутренне устойчивых множеств.

11. Предложить метод построения графов, содержащих единственное внутренне устойчивое множество с заданным числом элементов.

12. Предложить алгоритм выделения семейства полных подграфов графа.

13. Используя соотношение между хроматическим числом и числом внутренней устойчивости, предложить алгоритм раскраски графа.

14. Предложить алгоритм определения минимальной раскраски графа.

15. Предложить алгоритм определения числа внешней устойчивости по матрице смежности графа.

16. Построить граф, содержащий подмножество множества вершин, одновременно внутренне и внешне устойчивое.

5. ДЕРЕВЬЯ. ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Определение. Связный, неориентированный граф без циклов называется деревом. Оно имеет не менее двух вершин.

Пример. На рис. 49 приведен граф в виде дерева.

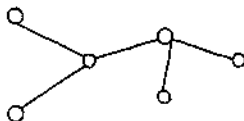


Рис. 49

Теорема 1. Пусть $G = (X, U)$ – граф с числом вершин n . Следующие характеристические свойства дерева равносильны:

- 1) граф G связан и нет циклов;
- 2) граф G не содержит циклов и имеет $m = (n-1)$ ребер;
- 3) граф G связан и имеет $m = (n-1)$ ребер;
- 4) граф G не имеет циклов, но добавление одного ребра между любыми двумя несмежными вершинами приводит к появлению единственного цикла;
- 5) граф G связан, но утрачивает это свойство после удаления любого ребра;
- 6) всякая пара вершин графа G соединена цепью, притом только одной.

Доказательство.

1. Свойство 1 является определением дерева.
2. Свойство 1 влечет за собой свойство 2, так как из свойства 1 следует, что $\nu(G) = m - n + p = 0$, а так как $p = 1$, то $m = n - 1$.
3. Свойство 2 влечет за собой свойство 3, так как если $\nu(G) = 0$ и $m = n - 1$, то $P = \nu(G) - m + n = 1$, т.е. граф G связан.
4. Свойство 3 влечет свойство 4, так как из того, что $p = 1$ и $m = n - 1$ следует, что $\nu(G) = 0$, т.е. граф не содержит циклов. Если добавить ребро между двумя ранее не смежными вершинами, то $\nu(G) = 1$, т.е. появится один цикл.
5. Свойство 4 влечет за собой свойство 5, так как если бы граф G был бы не связан, то у него имелись хотя бы две вершины $x, y \in X$, не соединенные никакой цепью, и такие, что добавление ребра между ними не приводит к циклу. Следовательно, $p = 1$, $\nu(G) = 0$, $m = n - 1$. После удаления одного ребра получаем: $m = n - 2$, $\nu(G) = 0$, следовательно, $p = 2$, т.е. граф становится несвязным.

6. Свойство 5 влечет за собой свойство 6, так как, поскольку граф G связан, то между любыми двумя вершинами $x, y \in X$ существует цепь, но не существует двух цепей.

7. Свойство 6 влечет свойство 1, так как если граф G имеет цикл, то удаление какого-либо ребра, принадлежащего циклу, не нарушает связности графа.

Таким образом, мы показали следующую цепочку: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Всякое дерево имеет по крайней мере две висячие вершины, т.е. вершины, степень которых равна 1.

Доказательство. Доказательство проведем от обратного. Пусть G – дерево без висячих вершин или только с одной висячей вершиной. Выйдя из произвольной вершины (если нет висячих) или из висячей (если одна) и не проходя дважды по одному и тому же ребру, нельзя дважды оказаться в одной вершине, так как граф G не имеет циклов. Прибыв в какую-то вершину по одному ребру, всегда можно покинуть её по другому, так как вершина не висячая. Следовательно, такой путь будет бесконечен, что противоречит конечности графа. Полученное противоречие и доказывает теорему 2.

Теорема 3. Граф $G=(X,U)$ тогда и только тогда содержит суграф, являющийся деревом, когда он связан.

Необходимость. Если граф G не связан, то и все его суграфы не связны и, следовательно, не могут быть деревьями.

Достаточность. Если граф G связан, то выясним, имеется ли в графе G ребро, удаление которого не нарушает связности.

Если таких рёбер нет, то сам граф G является деревом.

Если такое ребро есть, то удалим его, и в полученном графе выясним, имеется ли ребро, удаление которого не нарушает связности. Если такое ребро есть, то удаляем его. Будем действовать аналогичным образом, пока не останутся рёбра, удаление которых не нарушит связности. Оставшийся суграф и будет являться деревом. Теорема 3 доказана.

Пример. На рис. 50 показан исходный связный граф и полученное дерево.



Рис. 50

На основании последней теоремы можно решить следующую задачу. Пусть дан связный граф $G=(X,U)$, причём каждому ребру $u \in U$ приписано число $l(u) \geq 0$, называемое длиной этого ребра. Необходимо найти такой суграф $G'=(X,U')$ графа G , чтобы $\sum_{u \in U'} l(u) = \min$, а сам суграф G' был бы деревом.

Если граф G – полный и длины всех его рёбер различны, то сформированная задача имеет единственное решение ($G'=(X,U')$). Множество U' получается следующим образом:

- в качестве первого ребра $u_1 \in U$ берём ребро с наименьшей стоимостью;
- в качестве второго $u_2 \in U$ – самое короткое из тех рёбер, для которых $u_2 \neq u_1$, и множество $U'=\{u_1, u_2\}$ не содержит циклов;
- в качестве третьего ребра u_3 – самое короткое из тех рёбер, для которых $u_3 \neq u_1$ и $u_3 \neq u_2$, и множество $U'=\{u_1, u_2, u_3\}$ не содержит циклов.

Процесс продолжается до тех пор, пока суграф не станет связным.

Пример. На рис. 51 представлен исходный граф с весами на ребрах и полученный суграф.

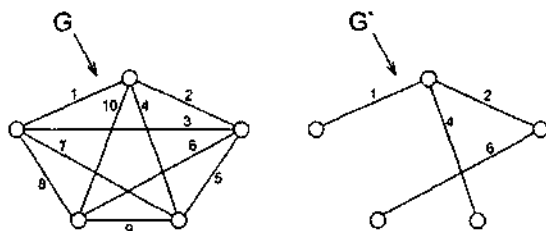


Рис. 51

Минимальная сумма длин ребер равна $\sum l(u_i)=13$.

Определение. Система циклов называется независимой, если каждый цикл этой системы независим от других. Цикл называется независимым, если он содержит хотя бы одно ребро, не принадлежащее какому-либо другому циклу.

Если система независимых циклов состоит из $\gamma(G) = m - n + p$ циклов, то она называется базой независимых циклов.

Рассмотрим алгоритм для построения базы независимых циклов связного графа $G=(X,U)$. Если этот граф не связен, то этот алгоритм применяется отдельно к каждой компоненте связности.

Сначала из графа G выделяется суграф $G'=(X,U')$, являющийся деревом. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$ – рёбра графа G , которые мы удалили, чтобы получить дерево G' .

Добавление к дереву любого из этих рёбер, например u_k , приводит к появлению цикла μ_k , причём единственного.

Таким образом, циклы $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ – независимы, так как каждый из них содержит ребро, не принадлежащее остальным, к тому же количество этих циклов равно $m-n+1=\gamma(G)$. Следовательно, они образуют базу независимых циклов.

Пример. На рис. 52 представлен граф, цикломатическое число которого равно $\gamma = 6 - 5 + 1 = 2$. Удалим ребра u_6, u_4 , тогда не останется ни одного цикла. Восстанавливая их, получаем базу независимых циклов $\mu_1 = u_2 u_1 u_6$ и $\mu_2 = u_2 u_1 u_3 u_4 u_5$.

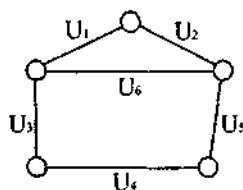


Рис. 52

Если граф не связный и не содержит циклов, то каждая его компонента связности является деревом, а сам граф представляет собой множество деревьев. Пример такого графа приведен на рис. 53.

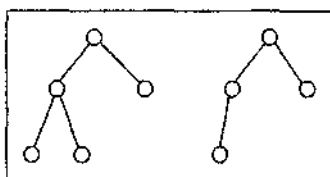


Рис. 53

Двудольные графы

Определение. Двудольным графом называется граф $G=(X,U)$, в котором множество вершин X распадается на два непересекающихся подмножества $X=V \cup V'$, таких что каждое ребро $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ соединяет некоторую вершину $\mathcal{Q} \in V$ с вершиной $\mathcal{Q}' \in V'$. Пример двудольного графа показан на рис. 54.

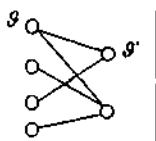


Рис. 54

Для двудольных графов справедливо следующее свойство: если двудольный граф G связан, то каждая вершина $g \in V$ имеет чётное расстояние до другой вершины из того же подмножества V .

Теорема 1. Граф G является двудольным тогда и только тогда, когда все простые циклы в нем имеют четную длину.

Доказательство. Необходимость. Очевидно, что для двудольного графа это условие выполняется, так как цикл представляет собой маршрут между вершинами, лежащими в одной доле.

Достаточность. Предположим, что граф G имеет указанное свойство. Выберем вершину a_0 в некоторой его связной компоненте G_0 . Множество вершин из G_0 распадается на два класса – V и V' , где V состоит из вершин, лежащих от вершины a_0 на четном расстоянии, и V' состоит из вершин, лежащих от вершины a_0 на нечетном расстоянии. Покажем, что никакие две вершины g_1 и g_2 принадлежащие множеству V , не могут быть соединены ребром (g_1, g_2).

Возьмём кратчайшие простые цепи, ведущие из вершины a_0 в вершины g_1 и g_2 : $P(a_0, g_1)$ и $Q(a_0, g_2)$. Они обе имеют четную длину, так как соединяют вершины, лежащие в одном классе V (рис. 55).

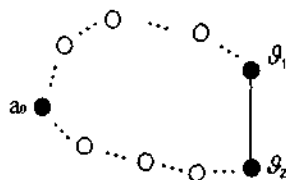


Рис.55

Если бы существовало ребро (g_1, g_2) , то цепь $P(a_0, g_1) \cup (g_1, g_2) \cup Q(g_2, a_0)$ была бы циклом нечетной длины, что противоречит условию, т.е. вершины g_1 и g_2 из одной доли не могут быть соединены ребром, т.е. граф G – двудольный. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Любой граф содержит максимальные двудольные части. Если исходный граф G – связный, то каждая его максимальная двудольная часть – тоже связна и покрывает все исходные части.

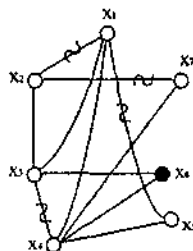


Рис. 56

Доказательство. Докажем теорему методом построения. Пусть дан граф $G=(X,U)$.

1. Выберем произвольную вершину $a_0 \in X$ и представим множество вершин $X = \{a_0\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$, где A_i – состоит из вершин, лежащих от вершины a_0 на расстоянии i .

2. В каждом классе A_i удаляем рёбра, содержащие какие-нибудь две вершины. Тогда из теоремы 1 следует, что оставшаяся часть будет двудольным графом.

Пример. Рассмотрим граф G , приведенный на рис. 56.

В качестве вершины a_0 выберем вершину x_6 . Тогда множество вершин графа можно представить как $X = \{x_6\} \cup \{A_1\} \cup \{A_2\}$, где $A_1 = \{x_3, x_4\}$, $A_2 = \{x_1, x_2, x_5, x_7\}$. Удаляя рёбра в каждом классе, получим двудольный граф, приведенный на рис. 57.

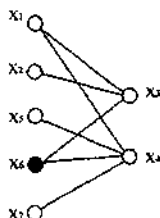


Рис. 57

Контрольные вопросы по теме 5

1. Какой граф называется деревом?

2. Дать определение дерева, остова, кодерва произвольного связного графа.

3. Дать определение двудольного графа.

4. Доказать необходимое и достаточное условия двудольности графа.

Задачи по теме 5

1. Показать, что на шести вершинах существует только шесть неизоморфных деревьев, а на семи вершинах 11. Нарисовать все деревья.

2. Показать, что дерево является двудольным графом.

3. Доказать, что любое висячее ребро (ребро, инцидентное висячей вершине) связного графа содержится в каждом его остове.

4. Доказать, что каждое ребро связного графа является ветвью какого-либо остова этого графа.

5. Доказать, что в дереве каждая вершина, степень которой больше единицы, является точкой сочленения.

6. Доказать, что каждое ребро неразделимого графа G является хордой некоторого кодерва графа G .

7. При каких условиях любые два ребра графа G могут быть хордами некоторого кодерва графа G .

8. В полном 8-вершинном графе с взвешенными ребрами выделить минимальный по весу суграф, являющийся деревом.

9. Предложить метод выделения в произвольном связном графе суграфа, являющегося деревом.

10. Построить дерево, являющееся эйлеровой цепью. Предложить метод построения таких деревьев.

11. Построить лес на 12 вершинах.

12. Доказать, что если граф G является лесом, то любое его ребро является мостом.

13. Может ли дерево быть однородным графом?

14. Рассмотреть метод получения деревьев графа по матрице инцидентий.

15. Доказать, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда для некоторой фиксированной вершины x_0 нет таких ребер $E = (y, z)$, что $d(x_0, y) = d(x_0, z)$.

6. ПЛОСКИЙ ГРАФ. ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

Определение. Граф $G=(X, U, F)$ называется плоским, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы вершинам соответствовали различные точки плоскости, рёбрам – простые дуги и чтобы никакие два ребра не имели общих точек, кроме их границы.

Граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным.

Пример. На рис. 58 представлены плоский и планарный графы:

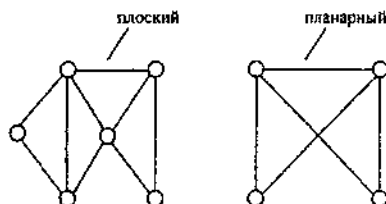


Рис. 58

Определение. Гранью плоского графа G называется область плоскости, ограниченная рёбрами и не содержащая ни вершин, ни рёбер.

Пример. На рис. 59 представлен плоский граф с тремя конечными гранями (r,s,t) и одной бесконечной (l) .

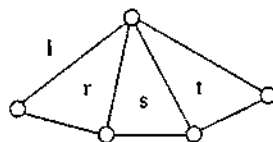


Рис. 59

Нетрудно видеть, что края граней образуют цикл, состоящий из рёбер, ограничивающих саму грань. Две грани смежные, если они имеют общее ребро. У всякого плоского графа имеется единственная неограниченная грань, называемая бесконечной.

Теорема. В плоском графе края различных конечных граней образуют базу независимых циклов.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Теорема очевидна, когда граф G имеет одну или две конечные грани. Пример такого случая представлен на рис. 60.

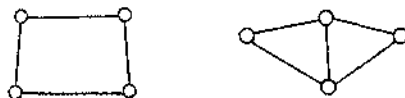


Рис. 60

Предположим, что теорема справедлива для всех плоских графов с числом конечных граней $(f-1)$, и докажем, что она справедлива для (f) конечных граней.

Удалим из графа G некоторое невисячее ребро $u \in U$. Получим граф G' , имеющий $(f-1)$ грань, края которых по предположению индукции образуют базу независимых циклов. Восстановив ребро $u \in U$, получим новую конечную грань, край которой является циклом, независимым от других циклов, так как содержит ребро, не принадлежащее ни одному из них. Так как добавление одного ребра не может увеличить цикломатическое число больше чем на единицу, то конечные грани графа G определяют базу независимых циклов. Теорема доказана.

Следствие 1. Если связный плоский граф имеет n вершин, m рёбер и f граней, то справедлива формула Эйлера: $n-m+f=2$.

Доказательство. Из доказанной выше теоремы следует, что число конечных граней равно цикломатическому числу $\gamma(G)=m-n+1$. Поэтому, число всех граней $f=\gamma(G)+1=m-n+2$. Формула Эйлера доказана.

Следствие 2. В любом плоском графе (не мультиграфе) хотя бы одна вершина $x \in X$ имеет локальную степень $\rho(x) \leq 5$.

Доказательство. В каждом графе любая грань ограничена хотя бы тремя рёбрами. Построим вспомогательный граф инцидентности грани — рёбра (рис. 61), у которого каждая грань представлена вершиной и каждое ребро представлено вершиной, и соответствующие вершины соединены ребром, если в исходном плоском графе соответствующее ребро ограничивает соответствующую грань.

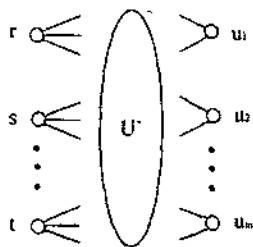


Рис. 61

В построенном вспомогательном графе, если смотреть со стороны вершин u_1, u_2, \dots, u_m , число рёбер U' будет меньше или равно $2m$. Если смотреть со стороны вершин r, s, t , то число рёбер U' должно быть больше или равно $3f$ (каждая грань ограничена минимум тремя рёбрами). Откуда получаем неравенство $3f \leq U' \leq 2m$. Отсюда следует, что

$$f \leq \frac{2m}{3}. \quad (6.1)$$

Построим теперь для исходного плоского графа граф инцидентности вершины-рёбра (рис. 62).

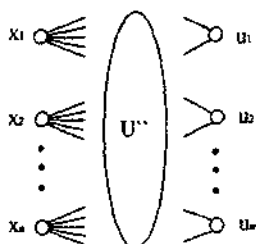


Рис. 62

Предположим, в исходном графе каждая вершина была бы инцидентна не менее чем шести рёбрам, тогда мы бы имели неравенство $6n \leq U'' \leq 2m$. Отсюда следует, что

$$n \leq \frac{2m}{6} = \frac{m}{3}. \quad (6.2)$$

Подставим значения (6.1) и (6.2) в формулу Эйлера, получим:

$$2 = n - m + f \leq \frac{m}{3} - m + \frac{2}{3}m = 0.$$

Следовательно, $2 \leq 0$, что невозможно. Таким образом, наше предположение неверно, что и доказывает следствие 2.

Пример 1. Докажем с помощью формулы Эйлера, что граф G_{33} , рассматриваемый в задаче о трех городах и трех базах снабжения, не может быть плоским (рис. 63).

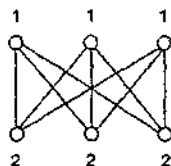


Рис. 63

Доказательство проведем от обратного. Пусть граф G_{33} – плоский, тогда по формуле Эйлера определим число граней: $f = 2 + m - n = 2 - 6 + 9 = 5$.

Нетрудно видеть, что граф G_{33} бихроматический, т.е. его можно раскрасить двумя цветами. Поэтому этот граф не содержит циклов нечетной длины. Следовательно, край каждой грани в таком графе содержит не менее четырех рёбер. Образует вспомогательный граф инцидентности грани-рёбра, представленный на рис. 64.

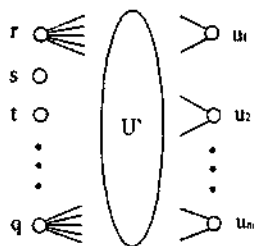


Рис. 64

Если смотреть на рёбра со стороны дуг, то имеем неравенство

$$U' \leq 2m = 18.$$

Если смотреть на рёбра со стороны граней, то имеем неравенство

$$U' \geq 4 \cdot f = 20,$$

откуда следует неравенство $18 \geq 20$. Получили противоречие. Следовательно, формула Эйлера неверна для данного графа. То есть граф G_{33} не является плоским.

Пример 2. Докажем, что полный граф из 5 вершин (G_5) не является плоским. Пример такого графа приведен на рис. 65.

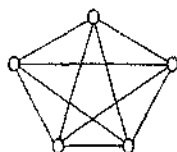


Рис. 65

Доказательство также проведем от обратного. Предположим, что граф G_5 – плоский. Тогда по формуле Эйлера подсчитаем число граней:

$$f = 2 - n + m = 2 - 5 + 10 = 7.$$

Каждая грань ограничивается не менее чем тремя рёбрами. Опять образуем вспомогательный граф инцидентности грани-рёбра и подсчитаем в нем число рёбер. Получаем, что, с одной стороны, их $2m$, а

другой – больше или равно $3f$. Следовательно, справедливо неравенство $2t \geq 3f$, т.е. $20 \geq 21$. Данное противоречие и доказывает, что наше предположение неверно, т.е. граф G_5 не является плоским.

Примечание. Графы G_{33} и G_5 позволяют порождать бесконечное семейство неплоских графов. Для этого достаточно помещать на их рёбра новые вершины и получать новые неплоские графы.

Теорема. Всякий плоский граф является 5-хроматическим, т.е. может быть раскрашен пятью красками.

Доказательство. Теорема очевидна для плоских графов с $n=1,2,3,4,5$ вершинами. Докажем теорему по индукции. Предположим, что она верна для графов с $(n-1)$ вершинами, и докажем, что она справедлива для графов с n вершинами.

В силу следствия 2, в графе G имеется вершина $x \in X$, смежная с 0, 1, 2, 3, 4 или 5 вершинами. Подграф, полученный из графа G удалением этой вершины $x \in X$, является по предположению 5-хроматическим (так как в нём $(n-1)$ вершина). Раскрасим его пятью цветами – красным (κ), желтым (ж), зеленым (з), синим (с) и фиолетовым (ф). Тогда вершину x можно всегда раскрасить одной из пяти красок, кроме одного случая – когда она смежна с пятью вершинами, окрашенными в различные пять цветов. Пример такого случая показан на рисунке 66.

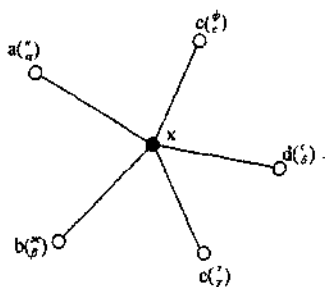


Рис. 66

Обозначим через $G^{\kappa \text{ з}}$ подграф, порождённый вершинами, окрашенными в цвета κ и з .

Тогда возможны два случая:

1. Если вершины a и c принадлежат различным компонентам связности графа G^{k-3} . Пример такого случая приведен на рис. 67.

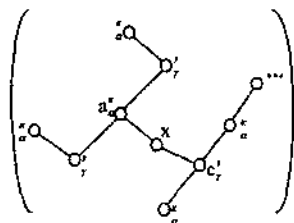


Рис. 67

Тогда в компоненте, содержащей вершину a , перекрасим вершины: окрашенные в красный цвет перекрасим в зеленый, а окрашенные в зеленый цвет перекрасим в красный.

В этом случае мы получим, что вершина x смежная с пятью вершинами, окрашенными в четыре цвета. Следовательно, ее можно окрасить в освободившийся красный цвет.

2. Если вершины a и c принадлежат одной компоненте связности подграфа G^{k-3} , то в подграфе G^{k-3} вершины b и d нельзя соединить цепью, т.е. они принадлежат разным компонентам связности.

Переставим цвета в той компоненте связности подграфа G^{k-3} , которой принадлежит вершина b . Вершина b окрасится в синий цвет. Следовательно, мы можем окрасить вершину x в желтый цвет. Теорема доказана.

Примечание. Существует гипотеза о том, что любой плоский граф можно окрасить в четыре цвета.

Операции над графами

Пусть $G_1=(X_1, \Gamma_1)$ и $G_2=(X_2, \Gamma_2)$ – произвольные ориентированные графы. Основными теоретико-множественными операциями являются:

1. **Объединение.** Объединением графов G_1 и G_2 называется граф, обозначаемый $G_1 \cup G_2$ и определяемый как $G_1 \cup G_2=(X_1 \cup X_2, \Gamma \cup)$, где $\Gamma \cup$ – отображение множества $X_1 \cup X_2$ в себя. Причем

$$(\forall x \in X_1 \cup X_2)[\Gamma \cup(x)=\Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)].$$

Пример. Для графов G_1 и G_2 , представленных на рис. 68, их объединение приведено на рис. 69.

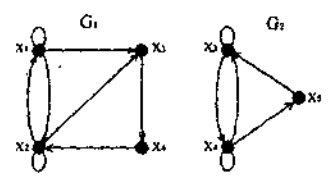


Рис. 68

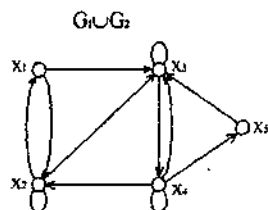


Рис. 69

2. Пересечение. Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф, обозначаемый $G_1 \cap G_2$ и определяемый как $G_1 \cap G_2 = (X_1 \cap X_2, \Gamma_\cap)$, где Γ_\cap — отображение множества $X_1 \cap X_2$ в себя. При этом

$$(\forall x \in X_1 \cap X_2) [\Gamma_\cap(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)].$$

Пример. Для графов G_1 и G_2 , представленных на рис. 68, их пересечение приведено на рис. 70.

 $G_1 \cap G_2$ 

Рис. 70

3. Дополнение. Дополнением графа G_1 называется граф $\bar{G}_1 = (X_1, \bar{\Gamma}_1)$, где $\bar{\Gamma}_1$ — отображение множества X_1 в себя, определяемое как $\bar{\Gamma}_1 = X \setminus \Gamma_1$. Иными словами:

$$(\forall x \in X_1) [\bar{\Gamma}_1(x) = X \setminus \Gamma_1(x)].$$

Пример. Для графа G_2 , представленного на рис. 68, его дополнение приведено на рис. 71.

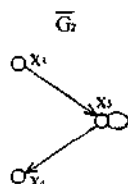


Рис. 71

4. Разность. Разностью графов G_1 и G_2 называется граф, обозначаемый G_1 / G_2 и определяемый как $G_1 / G_2 = (X_1 / X_2, \Gamma_1)$, где Γ_1 – отображение множества X_1 / X_2 в себя. Причем

$$(\forall x \in X_1 / X_2) [\Gamma_1(x) = \Gamma_1(x) \cap \bar{\Gamma}_2(x)].$$

Пример. Для графов G_1 и G_2 , представленных на рис. 68, их разность приведена на рис. 72.



Рис. 72

5. Симметрическая разность. Симметрической разностью графов G_1 и G_2 называется граф, обозначаемый $G_1 \oplus G_2$ и определяемый как $G_1 \oplus G_2 = (X_1 \oplus X_2, \Gamma_{\oplus})$, где Γ_{\oplus} – отображение множества $X_1 \oplus X_2$ в себя. Причём $(\forall x \in X_1 \oplus X_2) [\Gamma_{\oplus}(x) = (\Gamma_1(x) \cap \bar{\Gamma}_2(x)) \cup (\bar{\Gamma}_1(x) \cap \Gamma_2(x))]$.

Пример. Для графов G_1 и G_2 , представленных на рис. 68, их симметрическая разность приведена на рис. 73.

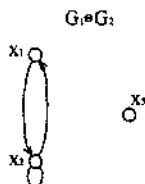


Рис. 73

6. Инверсия. Инверсией графа G_I называется граф $G_I^{-1} = (X_I, \Gamma_I^{-1})$, где Γ_I^{-1} есть отображение множества X_I в себя. Причём

$$(\forall x_I, x_2 \in X_I) [x_2 \in \Gamma_I(x_I) \leftrightarrow x_I \in \Gamma_I^{-1}(x_2)].$$

Пример. Для графа G_I , представленного на рис. 68, его инверсия приведена на рис. 74.

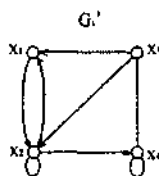


Рис. 74

7. Композиция. Композицией графов G_I и G_2 называется граф, обозначаемый $G_I \circ G_2$ и определяемый как $G_I \circ G_2 = (X_I \cup X_2, \Gamma_0)$, где Γ_0 — отображение множества $(X_I \cup X_2)$ в себя. Причём $\Gamma_0 = \Gamma_I \circ \Gamma_2$. Иными словами, $x_3 \in \Gamma_0(x_I) \leftrightarrow (\exists x_2 \in X) [x_3 \in \Gamma_2(x_2) \& x_2 \in \Gamma_I(x_I)]$.

Пример. Для графов G_I и G_2 , представленных на рис. 68, их композиция приведена на рис. 75.

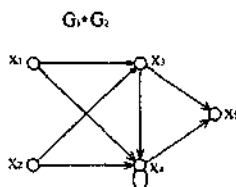


Рис. 75

Рассмотрим теперь две операции над графами, основанные на декартовом произведении множеств.

8. Произведение. Произведением графов G_I и G_2 называется граф, обозначаемый $G = G_I \times G_2 = (Z, \Gamma)$, где множество вершин Z определяется прямым произведением $Z = X_I \times X_2$, а отображение Γ определяется как $\Gamma(z) = \Gamma(x, y) = \Gamma_I(x) \times \Gamma_2(y)$, где $x \in X_I, y \in X_2, z \in Z$.

Пример. Пусть графы G_I и G_2 приведены на рис. 76.

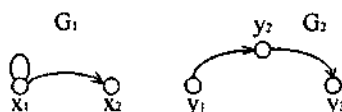


Рис. 77.

Здесь $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_1(x_1) = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_1(x_2) = \emptyset$, $X_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$, $\Gamma_2(y_1) = \{y_2\}$, $\Gamma_2(y_2) = \{y_3\}$, $\Gamma_2(y_3) = \emptyset$. Граф произведения приведен на рис. 77.

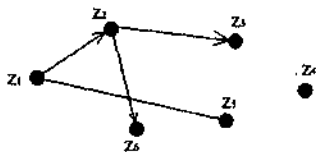


Рис. 77

Здесь $G = (Z, \Gamma)$, $Z = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$, $\Gamma(z_1) = \Gamma(x_1, y_1) = \Gamma_1(x_1) \times \Gamma_2(y_1) = \{(x_1, y_2), (x_2, y_2)\} = \{z_2, z_5\}$, $\Gamma(z_2) = \Gamma_1(x_1) \times \Gamma_2(y_2) = \{(x_1, y_3), (x_2, y_3)\} = \{z_3, z_6\}$, $\Gamma(z_3) = \emptyset$, $\Gamma(z_4) = \emptyset$, $\Gamma(z_5) = \emptyset$, $\Gamma(z_6) = \emptyset$.

Произведение графов удобно получать, используя матрицы смежности вершин. Если R_1 – матрица смежности вершин графа G_1 , а R_2 – матрица смежности вершин графа G_2 , то матрица смежности вершин графа произведения G , обозначаемая R , получается следующим образом: $R = R_1 \times R_2$. Здесь знаком « \times » обозначается прямое произведение, заключающееся в том, что элемент первой матрицы целиком множится на вторую матрицу. На рис. 78 приведены матрицы смежности вершин исходных графов и матрица смежности вершин графа произведения.

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix} \\ R_2 &= \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{matrix} \right\} \Rightarrow R = \begin{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \end{matrix} \\ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{matrix} \end{matrix}$$

Рис. 78

9. Суммирование. Суммированием графов G_1 и G_2 называется граф, обозначаемый $G = G_1 \oplus G_2 = (Z, \Gamma)$, где множество вершин Z определяется прямым произведением $Z = X_1 \times X_2$, а отображение Γ определяется как $\Gamma(z) = \Gamma(x, y) = \Gamma_1(x) \oplus \Gamma_2(y) = \{\Gamma_1(x) \times \{y\}\} \cup \{\{x\} \times \Gamma_2(y)\}$, где $x \in X_1$, $y \in X_2$, $z \in Z$.

Пример. Пусть графы G_1 и G_2 приведены на рис. 76. Граф произведения приведен на рис. 79.

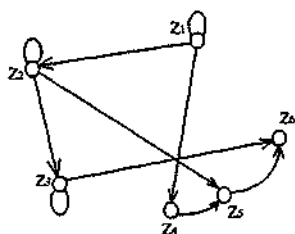


Рис. 79

Здесь $G = (Z, \Gamma)$, $\Gamma(z_1) = \Gamma_1(x_1) \oplus \Gamma_2(y_1) = \Gamma_1(x_1) \times \{y_1\} \cup \{x_1\} \times \Gamma_2(y_1) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2)\} = \{z_1, z_2, z_4\}$; $\Gamma(z_2) = \Gamma_1(x_1) \oplus \Gamma_2(y_2) = \Gamma_1(x_1) \times \{y_2\} \cup \{x_1\} \times \Gamma_2(y_2) = \{(x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_1, y_3)\} = \{z_2, z_3, z_5\}$; $\Gamma(z_3) = \Gamma_1(x_1) \oplus \Gamma_2(y_3) = \{(x_1, y_3), (x_2, y_3)\} = \{z_3, z_6\}$; $\Gamma(z_4) = \Gamma_1(x_2) \oplus \Gamma_2(y_1) = \{(x_2, y_2)\} = \{z_5\}$; $\Gamma(z_5) = \Gamma_1(x_2) \oplus \Gamma_2(y_2) = \{(x_2, y_3)\} = \{z_6\}$; $\Gamma(z_6) = \Gamma_1(x_2) \oplus \Gamma_2(y_3) = \emptyset$.

Сумму графов, так же как и произведение, удобно получать, используя матрицы смежности вершин графов. Если R_1 – матрица смежности вершин графа G_1 , а R_2 – матрица смежности вершин графа G_2 , то матрица смежности вершин графа суммы G , обозначаемая R , получается следующим образом: $R = (R_1 \times E_2) \cup (E_1 \times R_2)$, где E_1 и E_2 – единичные матрицы такого же порядка, как и матрицы смежности R_1 и R_2 . Здесь операция \times соответствует прямому произведению, а операция \cup – объединению, при котором над одноименными элементами матриц выполняется логическая операция «дизъюнкция». На рис. 80 приведены матрицы смежности вершин исходных графов, единичные матрицы и матрица смежности вершин графа суммы.

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad E_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 R_1 * E_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad E_1 * R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \\
 R_1 * E_2 \cup E_1 * R_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 80

Контрольные вопросы по теме 6

1. Какой граф называется плоским?
2. Доказать формулу Эйлера.
3. Доказать, что граф G_{33} не является плоским.
4. Доказать, что граф G_{44} не является плоским.
5. Доказать, что граф G_5 не является плоским.
6. Доказать, что граф G_6 не является плоским.
7. Определить операцию произведения двух графов.
8. Определить операцию сложения двух графов.

Задачи по теме 6

1. Построить произвольные ориентированные графы G_1 и G_2 и определить для них в теоретико-множественном и матричном виде графы $G_1 \times G_2$ и $G_1 + G_2$.
2. Построить произвольные неориентированные графы G_1 и G_2 и определить для них в теоретико-множественном и матричном виде графы $G_1 \times G_2$ и $G_1 + G_2$.
3. Предложить метод выполнения указанных операций над матрицами инцидентности графов G_1 и G_2 .
4. Рассмотреть указанные операции для неориентированных мультиграфов.
5. Построить произвольные графы G_1 и G_2 и определить графы $G_1 + G_2$ и $G_2 + G_1$. Установить изоморфизм между полученными графами.
6. Построить произвольные графы G_1 и G_2 . Определить графы $G_1 \times G_2$ и $G_2 \times G_1$. Установить изоморфизм между полученными графами.
7. Построить произвольные ориентированные графы G_1 и G_2 . Определить граф $G_1 \times G_2$, и в полученном графе найти число внутренней устойчивости.
8. Построить произвольные неориентированные графы G_1 и G_2 . Определить граф $G_1 + G_2$, и в полученном графе найти число внутренней устойчивости.
9. Доказать или опровергнуть, что если графы G_1 и G_2 – деревья, то графы $G_1 \times G_2$ и $G_1 + G_2$ также являются деревьями.
10. Доказать или опровергнуть, что если графы G_1 и G_2 – эйлеровы, то графы $G_1 \times G_2$ и $G_1 + G_2$ также являются эйлеровыми.
11. Доказать или опровергнуть, что если графы G_1 и G_2 – гамильтоновы, то графы $G_1 \times G_2$ и $G_1 + G_2$ также являются гамильтоновыми.

12. Доказать или опровергнуть, что если графы G_1 и G_2 – связные, то графы $G_1 \times G_2$ и $G_1 + G_2$ также являются связными.

13. Доказать, что операции умножения и суммирования графов ассоциативны и транзитивны.

7. ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ

Пусть $G = (X, \Gamma)$ – граф без петель, для которого выполняются условия:

- 1) $(\exists ! x_0 \in X)(\Gamma^{-1}(x_0) = \emptyset)$;
- 2) $(\exists ! x_n \in X)(\Gamma(x_n) = \emptyset)$;
- 3) каждой дуге $u \in U$ транспортной сети приписано значение $c(u) \geq 0$.

Определение. Граф G , для которого выполняются условия 1–3, называется транспортной сетью.

Вершина x_0 называется начальной вершиной транспортной сети (входом); x_n – конечной вершиной транспортной сети (выходом); $c(u)$ – пропускной способностью дуги.

На рис. 81 приведен пример транспортной сети.

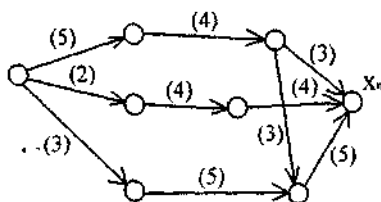


Рис. 81

Определение. Функцию $\varphi(u)$, определённую на множестве рёбер U , называют потоком в транспортной сети, если удовлетворяются следующие условия:

- 1) $(\forall u \in U)[\varphi(u) \geq 0]$;
- 2) $(\forall x_i \neq x_0 \& \neq x_n)[\sum_{u \in U_i^-} \varphi(u) = \sum_{u \in U_i^+} \varphi(u)]$,

где U_i^- – множество дуг, заходящих в вершину x_i , а U_i^+ – множество дуг, исходящих из вершины x_i ;

- 3) $(\forall u \in U)[\varphi(u) \leq c(u)]$.

Поток можно рассматривать как количество вещества, протекающего по дуге.

Из введённых определений транспортной сети и потока следует, что величины $\varphi(x_0) = \sum_{u \in U_i^-} \varphi(u)$ и $\varphi(x_n) = \sum_{u \in U_i^+} \varphi(u)$ равны, т.е. $\varphi(x_0) = \varphi(x_n)$.

Определение. Для подмножества вершин $A \subseteq X$, такого что $x_0 \notin A$, $x_n \in A$, разрезом сети $G=(X, \Gamma)$ называется множество дуг U_A^- , заходящих (извне) в вершины множества A .

Число $C(U_A^-) = \sum_{u \in U_A^-} C(u)$ называется пропускной способностью разреза A .

Так как каждая частица «вещества», движущегося по сети от вершины x_0 к вершине x_n , пройдёт по крайней мере однажды по какой-нибудь дуге, принадлежащей разрезу, то какой бы ни был поток $\varphi(x_n)$ и какой бы ни был разрез U_A^- , можно записать, что $\varphi(x_n) \leq C(U_A^-)$.

На рис. 82 показан пример, иллюстрирующий это неравенство.



Рис. 82

Дуга $u \in U$ называется насыщенной, если $\varphi(u) = C(u)$, т.е. поток, проходящий через дугу, равен пропускной способности дуги.

Сформулируем теперь задачу о потоке: требуется определить такую функцию $\varphi(u)$ для каждой дуги $u \in U$, чтобы величина $\varphi(x_n)$ (поток на выходе) принимала бы максимальное значение.

Для решения этой задачи рассмотрим три теоремы.

Теорема 1. Пусть $\mu = (x_0, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, x_n)$ – путь, соединяющий вход x_0 с выходом x_n . Если все дуги этого пути не насыщенные, то можно увеличить поток φ , не нарушая условия 2 в определении потока.

Действительно, рассмотрим разности $\delta(u) = C(u) - \varphi(u) > 0$ для любого ребра $u \in U_\mu$. Здесь U_μ – множество дуг данной цепи. Выберем среди них наименьшее: $\delta^* = \min\{\delta(u)\}$. Увеличивая на δ^* поток в каждой дуге, что не нарушает соотношения, определяющего поток, мы придём к потоку $\varphi + \delta^*$.

Пример. Рассмотрим путь, приведенный на рис. 83.

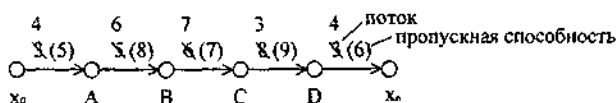


Рис. 83

Находя значение $\delta^* = 7 - 6 = 1$, приходим к выводу, что поток можно увеличить на 1.

Пусть $L = (x_0, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{ji}, x_n)$ – цепь, соединяющая вершины x_0 и x_n . Предположим, что она не является путём, т.е. содержит противоположно ориентированные дуги. Если ориентация дуги совпадает с направлением от вершины x_0 к вершине x_n , то будем обозначать её \bar{u} , в противном случае – \tilde{u} . Таким образом, все ребра цепи разобьются на два подмножества: \bar{U} и \tilde{U} .

Для всех ребер из подмножества \bar{U} определим значения $\delta(\bar{u}) = C(\bar{u}) - \phi(\bar{u})$ и $\delta^* = \min\{\delta(\bar{u})\}$. Для всех ребер из подмножества \tilde{U} определим значение $\phi^* = \min\{\phi(\tilde{u})\}$. Далее найдем величину $\varepsilon^* = \min\{\delta^*, \phi^*\}$.

Теорема 2. Если $\varepsilon^* > 0$, то, увеличивая на ε^* поток в каждой дуге \bar{U} и уменьшая на ε^* поток в каждой дуге \tilde{U} , мы увеличим поток в цепи на величину ε^* . Цепь, для которой величина $\varepsilon^* = 0$, называется насыщенной цепью.

Пример. Рассмотрим цепь, приведенную на рис. 84.

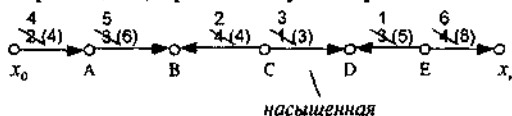


Рис. 84

Найдя значения $\delta^* = \min\{2, 3, 2, 4\} = 2$, $\phi^* = \min\{4, 3\} = 3$ и $\varepsilon^* = 2$, приходим к выводу, что поток можно увеличить на 2.

Определение. Поток в транспортной сети называется полным, если любой путь, соединяющий вершины x_0 и x_n , содержит по крайней мере одну насыщенную дугу. Иначе говоря, нельзя увеличить поток в транспортной сети, рассматривая только пути. Иногда это можно сделать, рассматривая цепи, идущие от вершины x_0 к вершине x_n .

Теорема 3. Если не существует цепи от вершины x_0 к вершине x_n с величиной $\varepsilon^* > 0$, то поток транспортной сети ϕ нельзя больше увеличивать, т.е. он максимален.

Доказательство. Исключим из транспортной сети все дуги, для которых $\delta(\bar{u}) = 0$ или $\phi(\tilde{u}) = 0$. Получим по крайней мере два не связанных между собой подграфа, в противном случае существовала бы по

крайней мере одна не насыщенная цепь, соединяющая вершину x_0 с вершиной x_n .

Множество вершин того подграфа, который содержит вершину x_n , обозначим через A . Очевидно, что A определяет разрез U_A^- и величину

$$\phi_{x_n}^0 = \sum_{u \in U_A^-} \phi(u) = \sum_{u \in U_A^-} C(u) = C(U_A^-).$$

Отсюда и из того, что общее количество вещества, входящего в разрез A , не превосходит величины $C(U_A^-)$, заключаем, что все дуги, принадлежащие разрезу, — насыщенные, и значит величина $\phi_{x_n}^0$ равна максимальному потоку. Из теорем 1, 2 и 3 вытекает основная теорема.

Теорема 4 (теорема Форда–Фалкерсона). Для заданной транспортной сети максимальное значение потока равно минимальной пропускной способности разреза, т.е., $\max \phi_{x_n} = \min C(U_A^-)$, для всех A , для которых вершина $x_0 \notin A$, а вершина $x_n \in A$.

Из рассмотренных теорем вытекает алгоритм Форда–Фалкерсона, применимый к любой транспортной сети.

1⁰. Отыскание какого-нибудь потока транспортной сети. Строим некоторый поток ϕ , удовлетворяющий определению потока (например, нулевой).

2⁰. Отыскание полного потока. Если поток ϕ неполный, то в сети существует путь от вершины x_0 к вершине x_n , все дуги которого не насыщены. Отыскиваем такой путь в суграфе, образованном ненасыщенными дугами. Увеличиваем поток через дуги этого пути до насыщения хотя бы одной из них. Получаем новый поток ϕ' . Если поток ϕ' не является полным, то операция повторяется. Таким образом, поток, не являющийся полным, всегда может быть увеличен до полного.

3⁰. Отыскание максимального потока. Производится с помощью приёма, основанного на теореме 2.

3.1⁰. Помечаем вершину x_0 через \oplus .

3.2⁰. Если вершина x_i — помеченная вершина, то помечаем через $\{+x_i\}$ все не помеченные вершины x , для которых дуги (x_i, x) — не насыщены. А символом $[-x_i]$ — помечаем все не помеченные вершины x_i , для которых поток $\phi(x, x_i) > 0$.

Если таким образом удастся пометить выход x_n , то это означает, что существует цепь, идущая из вершины x_0 к вершине x_n , все вершины которой помечены. Тогда в соответствии с теоремой 2 вычисляем значение $\varepsilon^* > 0$ и увеличиваем поток ϕ транспортной сети на величину ε^* . Процедура заканчивается, когда не удаётся пометить конечную вершину

x_n . При этом в соответствии с теоремой 3 поток в цепи будет максимальным.

Пример. Рассмотрим транспортную сеть, приведенную на рис. 85.

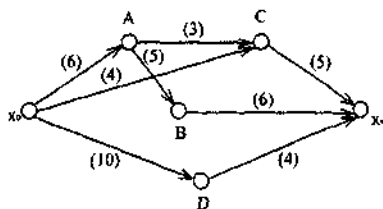


Рис. 85

Над дугами в скобках указаны пропускные способности дуг. Вначале найдем полный поток транспортной сети. Для этого находим все ненасыщенные пути и увеличиваем их поток:

- 1) путь (x_0ACx_n) на величину 3;
- 2) путь (x_0ABx_n) на величину 3;
- 3) путь (x_0Cx_n) на величину 2;
- 4) путь (x_0Dx_n) на величину 4.

Транспортная сеть примет вид, приведенный на рис. 86.

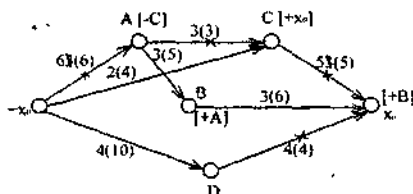


Рис. 86

Таким образом, полный поток $\varphi_{\text{полн}} = 3+3+2+4 = 12$.

Найдем теперь максимальный поток. Для этого, пометив вершину x_0 через +, попытаемся пометить вершину x_n . В результате описанного выше алгоритма приходим к следующей цепочке помеченных вершин, показанных на рис. 87.

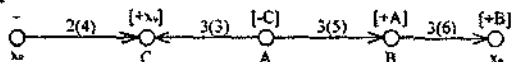


Рис. 87

Для нее вычисляем значение $\epsilon^*=2$. Отсюда находим максимальный поток: $\Phi_{\max} = \Phi_{\text{подл}} + \epsilon^* = 12 + 2 = 14$. Далее находим разрез с минимальной пропускной способностью: $A = \{x_m, B\}$, $C(A) = 14$ (рис. 88).

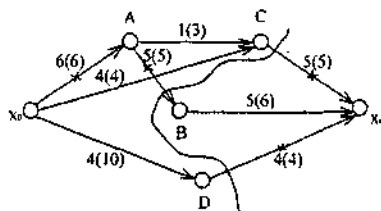


Рис. 88

Контрольные вопросы по теме 7

1. Дать определение транспортной сети.
2. Дать определение потока.
3. Дать определение разреза и пропускной способности сети.
4. Дать определение полного потока сети.
5. Сформулировать задачу о максимальном потоке сети.
6. Сформулировать теорему Форда – Фалкерсона о связи максимального потока сети с минимальным ее разрезом.

Задачи по теме 7

1. Найти пропускные способности разрезом, определяемых множествами $\{D, E, F, M, I\}$, $\{B, G, E, I, J\}$, $\{C, E, H, I\}$, для транспортной сети, граф которой приведен на рис. 89.

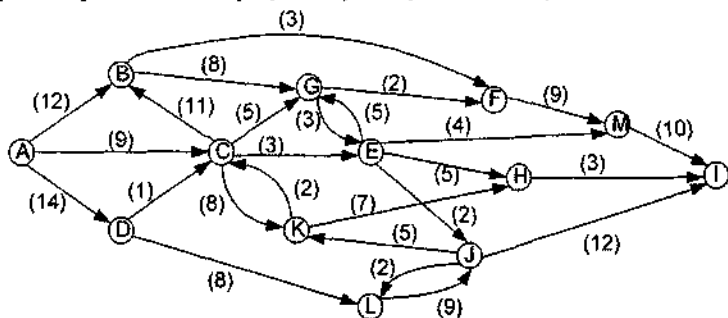


Рис. 89

2. Отыскать максимальный поток для транспортной сети из задачи 1.

3. Отыскать максимальные потоки в транспортных сетях, графы которых показаны на рис. 90–92.

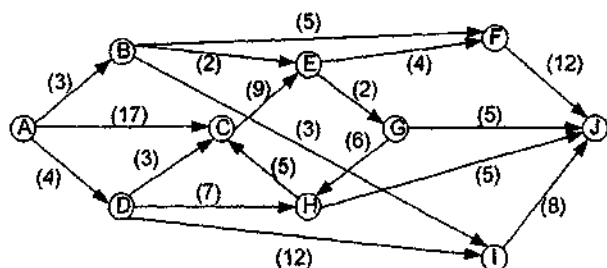


Рис. 90

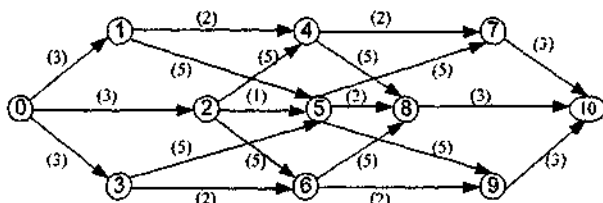


Рис. 91

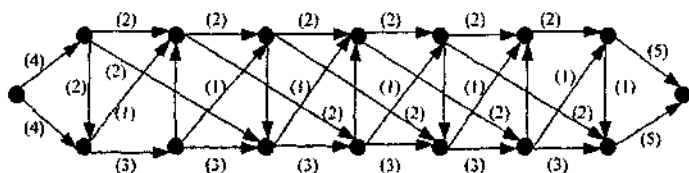


Рис. 92

Библиографический список

1. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1979. – 479 с.
2. Кристофидес Н. Теория графов (алгоритмический подход). – М.: Мир, 1979. – 424 с.
3. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

**Берштейн Леонид Самойлович
Боженюк Александр Витальевич**

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ответственный за выпуск Боженюк А.В.

Редактор Проценко И.А.

Корректор Селезнева Н.И.

ЛР № 020565 от 23 июня 1997г. Подписано к печати 15.12.2007

Формат 60×84^{1/16} Бумага офсетная.

Офсетная печать. Усл. п. л. – 4,3. Уч.-изд. л. – 4,0.

Заказ №482. Тираж 300 экз.

«С»

Издательство Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17 А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Технологического института Южного федерального
университета
ГСП 17 А, Таганрог, 28, Энгельса, 1