Київський національний університет ім.Тараса Шевченка

Чолій В.Я.

512 вправ з програмування

Збірник вправ
для студентів фізичного факультету

Редакційно-видавничий центр
"Київський університет"
Київ, 2007

Чолій В.Я. 512 вправ з програмування. Збірник вправ для студентів фізичного факультету.- К.: РВЦ "Київський університет", 2007.- xxx с.

Рецензенти:
В.М.Івченко, д-р. фіз.-мат. наук, проф.
Ю.В.Бойко, зав.обчислювальним центром університету

Затверджено Вченою радою фізичного факультету 17 вересня 2007 р.

ISBN 000-000-000-0

Зміст

Вступ.

Цей методичний посібник представляє собою збірник задач та вправ з програмування для студентів фізичного факультету. Її основна мета - зібрати вправи, які можуть виконуватися тими, хто має бажання засвоїти програмування але поки ще не має великого досвіду. Особливу увагу автор звертає на те, що це вправи, це навіть не задачі з програмування, це, так би мовити, перші спроби.

На наступних етапах вивчення комп'ютерів і технологій, що з ними пов'язані, будуть зустрічатися значно складніші завдання, однак перші кроки не повинні бути аж занадто важкими. От і пропонується збірка нескладних задач для початкових кроків. Далі потрібно взятися за більш складні задачі; познайомитися з серйозними книгами, наприклад [8], [5], [6], [10] і знати головне правило: вивчити програмування можна лише постійно пишучи програми.

Більшість вправ запозичено з книжок, наведених у списку літератури: [1], [2], [3], [4], [7], [9], [11].

Автор виражає вдячність асистенту кафедри астрономії та фізики космосу фізичного факультету В.М.Решетніку за корисні зауваження та продуктивні дискусії, які допомогли зробити текст кращим.

1. Числа

1. Знайти всі трійки цілих чисел a, b, c, що не перевищують n і задовільняють рівняння $a^2 + b^2 = c^2$.

2. Трикутником Паскаля називають конструкцію, у якій перший стовбчик містить тільки одиниці, а всі решта елементи рівні сумі двох, що стоять у попередньомі рядку над і зліва. Побудувати перші n рядків трикутника Паскаля.

3. Решетом Ератосфена називається процедура, при якій на листку паперу записують послідовні числа від 2 до n. Залишивши число 2, далі викреслюють кожне друге. Переходять до наступного не викресленого числа. Це 3. Його залишають, а викреслюють кожне третє. Діють так до тих пір, поки не доберуться до кінця послідовності.

4. У іншому решеті пишуть всі непарні числа від 3 до n. Далі виклеслюють кожне третє, і стискають отриману послідовність. Наступне число 7. Тепер викреслюють кожне сьоме. І так до кінця послідовності.

5. Знайти всі прості числа в інтервалі від 2 до n, перевіряючи подільність.

6. Розкласти число на добуток простих множників. Відповідь подати у вигляді переліку знайдених множників, наприклад $250 = 2, 5, 5, 5$.

7. Між n та $2n$ знайти всі пари простих чисел, різниця між якими рівна 2.

8. Знайти четвірки простих чисел, що належать до одного десятка, наприклад, $11, 13, 17, 19$

9. Дружніми числами називають такі числа, сума дільників одного з яких рівна сумі всіх дільників другого, без врахування самого числа. Знайти всі пари таких чисел у вказаному діапазоні.

10. Перевірити гіпотезу Гольдбаха, згідно з якою будь-яке парне число можна подати як суму двох простих чисел.

11. Знайти натуральне число до 10000 з найбільшою сумою дільників.

12. Знайти суму цифр заданого числа.

13. Скільки цифр у заданому числі.

14. Записати задане число у зворотньому порядку, "задом наперед".

15. Переставити першу цифру числа в кінець.

16. Паліндромами називають числа, які однаково читаються як у прямому, так і у зворотньому порядку, наприклад 4884. Знайти всі паліндроми першої сотні, які при піднесенні до квадрата теж дають паліндром.
17. Візьмемо число. Якщо воно не паліндром (див.№16), перепишемо його у зворотньому порядку і додамо до початкового. Будемо повторювати цю процедуру доти, поки не утвориться паліндром. Визначити за скільки кроків це станеться.
18. З десяткового запису числа викинути задану цифру. Наприклад, 9565597 перетвориться у 9697, якщо викидати п'ятірку.
19. Щоб знайти найбільший спільний дільник (НСД) двох додатніх чисел $m > n$ користуються алгоритмом Евкліда, згідно з яким якщо r є остача від ділення m на n, то НСД$(m, n) =$ НСД(n, r). Крім цього НСД$(k, 0) = k$.
20. Знайти найменше спільне кратне двох чисел. Скористайтесь алгоритмом Евкліда (див.№19).
22. Нехай у нас є по одній гирі 10-ти різних мас a_i. Скількома способами і як можна представити задану вагу цими гирками.
23. Нехай у нас є багато гирьок кожної з 10-ти різних мас a_i. Скількома способами і як можна представити задану вагу цими гирками.
23. Якою найменшою кількістю сучасних монет можна виплатити задану суму копійок?
24. Знайти хоча б один цілочисельний розв'язок рівняння $p^2 + q^3 + r^4 + s^5 + t^6 + u^7 + v^8 + w^9 = x^{10}$.
25. Чи можна представити задане число сумою чи різницею квадратів двох інших чисел.
26. Чи можна представити задане число сумою квадратів трьох інших чисел.
27. Подати задане число сумою чотирьох квадратів (теорема Лагранжа).
28. Надрукувати всі нескоротні дроби для заданого знаменника.
29. Написати функції для додавання, віднімання, множення і ділення чисел, записаних у вигляді дробів.
30. Знайти числа Армстронга, тобто такі n-цифрові числа, які рівні сумі n-х степенів своїх цифр.
31. Отримати всі чотирицифрові числа, у запису яких немає однакових цифр. Скільки таких чисел?
32. Отримати всі чотирицифрові числа, у запису яких не більше двох однакових цифр. Скільки таких чисел?

2. Знову числа

У деяких задачах цього розділу пропонується знайти число з дуже великою кількістю значущих цифр. Для цього його слід подати у вигляді масива, кожен елемент якого містить одну цифру.

1. Знайти 2^{200}.

2. Знайти 2^{-200}.

3. Знайти 100! Скількома нулями закінчується це число?

4. Винахідник шахмат попросив у падишаха одне рисове зерно за першу клітинку дошки, і удвічі більше від попередньої за кожну наступну. Скільки всього зерен рису мав віддати падишах?

5. Знайти тисячу знаків числа $\sqrt{2}$ користуючись розкладом у ряд:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1!} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3} \cdot \frac{1}{3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{1}{4!} + \cdots .$$

6. Знайти тисячу знаків числа e користуючись розкладом у ряд:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

7. Знайти двадцять знаків числа $\ln 2$ користуючись розкладом у ряд:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

8. Знайти двадцять знаків числа $\arctan 1$ користуючись розкладом у ряд:

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

9. Знайти тисячу знаків числа π користуючись формулою [11]:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

10. Знайти тисячу знаків числа π користуючись формулою [11]:

$$\frac{\pi}{4} = 8 \arctan \frac{1}{10} - 4 \arctan \frac{1}{515} - \arctan \frac{1}{239}.$$

11. Знайти тисячу знаків числа π користуючись формулою [11]:

$$\frac{\pi}{4} = 3\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{20} + \arctan\frac{1}{1985}.$$

12. Представити задане число у двійковій системі числення.
13. Скільки одиниць у двійковому записі заданого числа.
14. Представити задане число у шістнядцятковій системі числення.
15. Знайти хоча б одне число, яке є паліндромом як у десятковій, так і у двійковій системі (див.№16 розділу Числа).
16. Записати число $n \leq 2000$ римськими цифрами. Коротко, M=1000, D=500, C=100, L=50, X=10, V=5, I=1. Інверсія у порядку знаків означає віднімання, так VI=6, IV=4.
17. Перетворити запис числа римськими цифрами у десяткове число.
18. Ланцюжковим дробом називається вираз

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{...}}}.$$

Вони можуть бути скінченими, або нескінченими. Для скорочення запису пишуть $[a_1, a_2, ...]$. Для отримання ланцюжкового представлення раціонального числа $s/t < 1$ користуються співвідношенням:

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{t/s} = \frac{1}{a + r/s},$$

де $t = as + r$, тобто r є остачею від ділення s на t. Подати число у вигляді ланцюжкового пердставлення. Якщо виходить нескінчений ланцюжок, слід зупинитися після 10-ти ітерацій.
19. Знайти

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{101 + \frac{1}{103}}}}}$$

20. Знайти

$$\cfrac{x}{x^2 + \cfrac{2}{x^2 + \cfrac{4}{... + \cfrac{128}{x^2 + \frac{256}{x^2}}}}}$$

21. За заданими координатами вершин трикутника та деякої точки, визначити, чи знаходиться точка всередині трикутника (плоска задача).
22. Задано три числа. Виясниmи, чи можна побудувати трикутник з такими сторонами. Якщо так, знайти кути трикутника.
23. Знайти розв'язки квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.
24. Знайти розв'язки кубічного рівняння з дійсними коефіцієнтами $y^3 + py + q = 0$ методом Кардано. Для цього спочатку знаходять дискримінант

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

а потім

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \qquad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}.$$

Коренями є

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3},$$

але лише коли $AB = -y/3$.
25. Розв'язки рівняння четвертого степеня $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ такі:

$$y_1 = (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2, \quad y_2 = (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2,$$

$$y_3 = (-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2, \quad y_4 = (-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2,$$

причому z_1, z_2, z_3 це корені кубічного рівняння $z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$ (див.попередню задачу). Знаки коренів вибираються так, щоб виконувалось співвідношення: $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -q$.
26. Скільки цифр у числі n!
27. Помножте одне число на друге, користуючись лише додаванням, подвоєнням і діленням навпіл.
28. Розкласти число на суму чисел Фібоначчі. Це такі числа, з яких кожне наступне рівне сумі двох попередніх, а перші два - одиниці.
29. Обчислити значення виразу $(n + m)!/(n!m!)$.
30. Написати функції для основних операцій з комплексними числами.
31. Написати фукції для основних операцій з трьохвимірними векторами.
32. З якою частотою зустрічаються різні цифри у першій тисячі цифр числа e після коми (див.№6).

3. Рядочки

Рядочком вважається послідовність довільних символів, що закінчується пустим символом. Пробіл, як звичайно, використовується для розбиття рядочка на слова.

1. Перевірити, чи є даний рядочок правильно записаним цілим числом. Знайти це число.

2. Перевірити, чи є даний рядочок правильно записаним дійсним числом, можливо у науковій формі запису, наприклад, $+1.376400E-18$. Знайти це число.

3. Перевірити, чи є даний рядочок правильним іменем ідентифікатора з точки зору мови С.

4. Згенеруйте рядочок, довжиною 256 символів, що складається з випадкової послідовності дужок різних видів: круглих, квадратних та фігурних. Далі проаналізуйте рядок, і якщо в ньому ліва та права дужки одного виду йдуть поряд - викиньте їх з рядочка. Повторюйте процедуру, поки це можливо.

5. Записати число $n \leq 1000$ словами.

6. Вважаємо, що задане число $n \leq 1000$ є ціною товару у копійках. Записати ціну словами: стільки-то гривень і стільки-то копійок.

7. Вияснити, чи можна один з рядочків скласти переставляючи символи другого.

8. Циклічно зсунути рядок на одну позицію вправо

9. Порівняти два рядочки ігноруючи пробіли.

10. Циклічно зсунути рядок на одну позицію вліво.

11. Розбити рядочок на дві частини після n-го символа і поміняти частини місцями. Забороняється використовувати додаткову пам'ять.

12. У рядочку залишити лише по одному з кожного символа, що можна в ньому знайти.

13. Запакувати рядок таким методом: якщо підряд ідуть одинакові символи, наприклад аааа, цей шматок замінюється на а(4), у іншому випадку нічого не змінюється.

14. Записати усі слова заданого рядочка задом наперед.

15. Записати всі слова заданого рядочка з великої літери.
16. Відсортувати слова заданого рядочка по довжині.
17. Написати функцію `strnextc` яка шукає у рядочку перший символ серед тих, що є серед символів, заданих іншим рядочком і повертає вказівник на нього.
18. Написати функцію `strspnp` яка шукає у рядочку перший символ серед тих, яких немає серед символів, заданих іншим рядочком і повертає вказівник на нього або NULL, якщо такого символа знайти не вдалося.
19. Написати функцію `strcat` яка приєднує другий рядок до першого.
20. Написати функцію `strchr` яка шукає знайти вказаний символ у рядочку і повертає вказівник на нього або NULL, якщо такого символа знайти не вдалося.
21. Написати функцію `strlwr` яка переписує рядок малими літерами.
22. Написати функцію `stricmp` яка порівнює два рядочки, ігноруючи регістр. Результат функції див №25.
23. Написати функцію `strcpy` яка копіює рядочок у інший рядочок.
24. Написати функцію `strlen` яка шукає довжину рядочка.
25. Написати функцію `strcmp` яка порівнює два рядочки. Функція повертає 0, якщо рядочки однакові, -1, якщо перший стоїть у алфавітному порядку раніше другого, 1 - у всіх інших випадках.
26. Написати функцію `strupr` яка робить всі букви великими.
27. Написати функцію `strchg` яка міняє регістр букв на протилежний.
28. Написати функцію `strrev` яка повертає рядочок задом наперед.
29. Написати функцію `strset` яка замінює всі входження одного символа у рядочку на інший символ.
30. Написати функцію `strstr` яка дозволяє знайти вказаний рядок усередині рядка.
31. Написати функцію `strlst` яка шукає останнє входження символа у рядок.
32. Написати функцію `strquot` яка одягає рядочок лапками. Передаючи рядок цій функції потрібно потурбуватися, щоб було досить дотаткового місця у тій ділянці пам'яті, куди покладено рядок.

4. Тексти

Тексти вважаються заданими у вигляді файлів, наприклад, довільна частина електронної версії книги. Розмір такої частині має бути не меншим, ніж 10кБ. Мова тексту довільна. Словом називається частина тексту, що міститься між двома пробілами. Якщо в кінці слова є знак, наприклад, крапка, кома, тощо, цей знак не вважається частиною слова, за виключенням тих випадків, коли крапка є частиною числа. Вважаємо також, що після таких знаків обов'язково йде пробіл.

1. Вияснити, скільки у даному тексті пробілів, крапок, ком.

2. Вияснити, з якою частотою у тексті зустрічаються різні букви.

3. Скільки у тексті слів.

4. Скільки у тексті голосних та приголосних букв.

5. З якою частотою у даному тексті зустрічаються слова всіх можливих довжин.

6. Відредагувати текст так, щоб у ньому ніде не зустрічалося два пробіли підряд. Абзаци слід зберегти як три пробіли підряд.

7. Відредагувати текст так, щоб у ньому завжди між словами було по два пробіли. Абзаци слід зберегти як три пробіли підряд.

8. Задано текст і натуральне число $n > 50$. Відредагувати текст так, щоб ширина тексту складала n символів. Абзаци слід зберегти як три пробіли підряд. Це робиться шляхом додавання пробілів між словами так, щоб остання буква останнього слова у рядочку була n-ю у стовбчику.

9. Для розбиття слів на склади існують такі правила: 1) дві голосні букви можна розбити, якщо перед першою стоїть приголосна, а після другої є хоча б одна буква; 2) дві приголосні букви можна розбити, якщо перед першою стоїть голосна, а після другої і до кінця слова є хоча б одна голосна; 3) якщо не виходить, то слово розбивається так, щоб перша частина містила більше, ніж одну букву і закінчувалась на голосну. Розбийте слова тексту на склади.

10. У тексті замінимо кожну з букв та ту, що в алфавіті йде наступною. Таким чином текст буде зашифровано. Напишіть функції для шифрування та дешифрування тексту.

11. Складемо таблицю, у якій будь-якому символу поставимо у відповідність якийсь інший. У тексті замінимо кожну з букв та ту, що стоїть напроти у таблиці. Напишіть функції для шифрування та дешифрування тексту. Таблицю придумайте самостійно.

12. Запишемо послідовно букви тексту у матрицю, розміру $n \times n$ по рядочках, а прочитаємо по стовпчиках. Напишіть функції для шифрування та дешифрування тексту.

13. Стеганографія це метод ховання інформації у тексті. Деякий символ, що має двійкове представлення у вигляді вісьмох бітів подаємо пробілами між вісьмома послідовними словами тексту. Так, якщо у представленні символа перший біт 0, залишаємо один пробіл між першим та другим словами тексту, якщо ж наступний біт 1, то між двома наступними словами вставляємо два пробіли. Зашифруйте фразу у тексті і потім розшифруйте її. Скористайтеся стандартною таблицею символів ASCII для отримання двійкових представлень.

14. Гарантується, що текст містить лише числа. Знайти суму усіх чисел, що зустрічаються у тексті.

15. Гарантується, що текст містить лише числа. Побудувати два інших тексти, в одному з них будуть лише додатні, а у другому - лише від'ємні числа з заданого тексту.

16. Переписати текст так, щоб усі слова були записані задом наперед.

17. З двох текстів утворити третій, шляхом перемішування слів: перше слово з першого тексту, друге - з другого, третє - з першого і т.д.

18. Знайти найдовше слово в тексті.

19. Знайти всі однобуквенні слова в тексті і вияснити скільки разів кожне з них зустрічається.

20. Гарантується, що слова тексту не довші, ніж 8 символів. Відредагувати текст так, щоб у ньому було 5 стовбчиків по 10 символів.

21. Аналогічно до попередньої задачі, яле слова слід розкласти у стовбчики зверху вниз. Спочатку перші сто слів, потім наступні сто і т.д.

22. Сторінки з Інтернету містять всередині теги, це слова, оточені знаками <>, наприклад <html>. Деякі теги можуть мати параметри, наприклад <iframe host=...>. Усі відкриті теги мають закриватися: </html>. Підрахувати, скільки різних тегів зустрічається у файлі і по скільки разів.

23. Як і у попередній задачі, але тепер записати усі початкові теги всередині файла з великої літери, тобто не <html>, а <Html> і т.д.

24. Як і в задачі №22. Вияснити, чи є в тексті (файлі) тег <iframe ...> а також

скласти список таких тегів.
25. Як і у попередній задачі, але тепер тег <iframe ...> містить параметр host. Знайти всі такі місця і замінити вміст host="..."на host="127.0.0.1".
26. Як і в задачі №22, але треба знайти всі теги <a href="...» і скласти їх список.
27. Побудувати текст, що складається з 32 прізвищ, імен, по-батькові (це студенти) з оцінками за чотири екзамени. Знайти середню оцінку по кожному предмету і середню оцінку кожного студента. Прізвище, ім'я - не довші 8 символів, по-батькові - не довші 12-ти. Це випадково побудовані рядочки. Оцінки по предметах: 1-5, теж випадкові числа. Спочатку слід написати програму для побудови файла, а потім - програму для його обробки.
28. Текст є програмою на C. Переконатися, що в ній є директиви #include, надрукувати їх усіх. Переконатись, що в програмі є функція main.
29. Дано текст, у кожному рядочку якого записано параметри прямих ліній $y = kx + b$: k, b. Побудувати текст, у якому будуть знаходитись координати точок перетинів всіх цих ліній.
30. Дано текст, у кожному рядочку якого записано координати центра та радіус кола. Побудувати текст, у якому будуть знаходитись координати точок перетинів всіх цих кіл.
31. Дано текст, у кожному рядочку якого записано координати точки, що є вершиною ламаної лінії. Вияснити, ча має ламана самоперетини.
32. Дано текст, у кожному рядочку якого записано координати точки, що є вершиною замкнутого многокутника. Знайти його площу.

5. Сортування та пошук

1. Знайти найменший елемент у масиві методом повного перебору усіх елементів.

2. Знайти місце найменшого елемента у масиві методом повного перебору усіх елементів.

3. Дано відсортований у порядку зростання елементів масив. Вставити у цей масив новий елемент, не порушуючи сортування.

4. Знайти у відсортованому у порядку зростання елементів масиві місце для нового заданого елемента.

5. Сортування вибором. Знайдемо елемент масива, що має найменше значення, переставимо його з першим елементом. Повторимо процедуру, почавши шукати найменше значення з другого елемента масива і обмінюючи результат з другим елементом. Відсортувати масив цим методом (у порядку зростання елементів).

6. Аналогічно до завдання №5 але у порядку зменшення елементів.

7. Сортування обмінами, чи бульбашкове сортування. Послідовно переглядаючи весь масив знайдемо такий елемент a_i, що $a_i > a_{i+1}$. Переставимо місцями a_i та a_{i+1}. Продовжимо перегляд масива, поки не дійдемо до його кінця. Останній елемент уже відсортований. Повторимо процес з початку, але закінчимо його за один елемент до кінця. Відсортувати масив цим методом у порядку зростання елементів.

8. Аналогічно до завдання №7 але у порядку зменшення елементів.

9. Шейкерне сортування пряцює так, як і бульбашкове (№7), але перший прохід роблять від початку до кінця, а наступний у протилежному напрямку.

10. Сортування простими вставками. Починаємо процес з двох перших елементів. Відсортуємо їх. Беремо третій елемент і вставляємо його у правильне місце у вже відсотований шматок масива (перші два елементи). Так вдається відсортувати три перших елементи. n-й елемент вставляємо у вже відсортовану частину масива, що складається з $n-1$ перших елементів. Відсортувати масив цим методом (у порядку зростання елементів).

11. Аналогічно до завдання №10 але у порядку зменшення елементів.

12. Аналогічно до завдання №10, але для з використанням бінарної вставки (див.№30).

13. У заданому масиві деякі елементи можуть повторюватися. Відсортувати масив у порядку зростання елементів і викинути з нього всі дублікати елементів.

14. Алгоритм фон-Неймана. Спочатку вважається, що масив є сукупністю частин, по одному елементу у кожній. Укрупнюємо частини, зливаючи по дві сусідні і підтримуючи у кожній укрупненій частині порядок. Робимо так доти, поки не злиємо воєдино весь масив.

15. Виділимо перший елемент масива. Реорганізувати масив так, щоб спочатку йшли всі його елементи, менші за виділений перший, потім він сам, а тоді всі інші елементи, тобто більші, ніж виділений перший.

16. Швидке сортування. Назвемо кроком перебудову масива, що пояснена у №15. Зробимо крок до всього масива, а далі будемо повторювати кроки до всіх менших несортованих шматків. Так, якщо в результаті кроку перший виділений елемент зайняв 15-ту позицію, то далі проводим кроки до частини масива з 1-го до 14-го елемента і до частини масива з 16-го по n-й елемент. Відсортувати масив цим методом (у порядку зростання елементів).

17. Аналогічно до завдання №16 але у порядку зменшення елементів.

18. Аналогічно до завдання №16 але на останньому етапі, коли елементів залишається два, чи три, сортуйте просто порівнюючи елементи.

19. Щоб знайти k-й по величині елемент масива користуються таким способом. Спочатку знаходять місце p першого елемента масива, методом, вказаним у №15. Якщо $p = k$, то все знайдено. Якщо $p < k$, то продовжують пошуки $k - p$-го елемента у першій частині масива, у іншому вападку шукають $p - k$-й елемент у другій частині масива.

20. Нехай масив містить результати змагань, наприклад у бігу. Знайти команду бігунів (5 осіб), що показали найкращі результати. Надрукувати їх номери та середній результат.

21. Знайти одночасно найменше та найбільше значення у масиві.

22. Злити два масиви, сортовані по зростанню, у один, відкидаючи повторення елементів.

23. Нехай задано два масиви. Перший сортований по зростанню, другий по спаданню. Злити їх у один, сортований по зростанню, відкидаючи повторення елементів.

24. Знайти перетин двох масивів, тобто скласти такий масив, у якому будуть лише такі елементи, що присутні у обох масивах. Масиви сортовані по зростанню.

25. Знайти об'єднання двох масивів, тобто скласти такий масив, у якому будуть елементи, що присутні хоча б одному з них. Масиви сортовані по зростанню.

26. Знайти різницю двох масивів, тобто скласти такий масив, у якому будуть такі елементи першого масива, що не входять у другий. Масиви сортовані по зростанню.

27. Знайти перетин двох масивів, тобто скласти такий масив, у якому будуть лише такі елементи, що присутні у обох масивах. Масиви не сортовані.

28. Знайти об'єднання двох масивів, тобто скласти такий масив, у якому будуть елементи, що присутні хоча б одному з них. Масиви не сортовані.

29. Знайти різницю двох масивів, тобто скласти такий масив, у якому будуть такі елементи першого масива, що не входять у другий. Масиви не сортовані.

30. Знайти у відсортованому у порядку зростання елементів масиві місце для нового елемента користуючись методом бінарної вставки. Тобто, спочатку вияснити, у якій половині масива має бути місце для нового елемента, потім таким самим методом проаналізувати знайдену половину і так, поки не отримаємо послідовність одиничної довжини, що і буде розв'язком.

31. Довільним способом відсортувати пару масивів у порядку зростання, роблячи з другим масивом все те ж, що і з першим.

32. Знайти одночасно другий найбільший та другий найменший елементи масива.

6. Послідовності

1. Вияснити чи задана послідовність періодична, і знайти її період.

2. Задано два простих числа p і q. При діленні чисел утворюється десятковий дріб, у записі якого спочатку йде неперіодична частина, яка переходить у періодичну, або закінчується. Знайти ці дві частини запису десяткового дробу.

3. Згенерувати номери щасливих білетів, тобто таких шестизначних чисел, сума перших трьох цифр яких рівна сумі четвертої-шостої цифри.

4. Візьмемо число. Якщо воно парне, розділимо його на два, якщо непарне - домножимо на три і додамо одиницю. Будемо повторювати цю процедуру до тих пір, поки не утвориться одиниця. Визначити довжину утвореної послідовності.

5. Якщо взяти усі числа, що діляться лише на 2,3 та 5, то отримаємо послідовність Хеммінга. Знайти n-й член послідовності і ще десять, що за ним.

6. Послідовність двійкових цифр складається лише з 0 та 1. Нехай частину послідовності вже побудовано. Тепер у кінець послідовності дописують її копію, а після цього знову копію, але з заміною всіх цифр на протилежні. Визначити n-й член послідовності.

7. Початковий елемент послідовності - довільне натуральне число, кратне трьом. Наступний елемент є сумою кубів цифр попереднього елемента. Знайти межу, до якої прямує така послідовність.

8. Початковий елемент послідовності - довільне чотирицифрове натуральне число, у якого не всі цифри рівні між собою. Щоб отримати наступний член послідовності, візьмемо цифри числа, розташуємо їх у порядку спадання і від такого числа віднімемо число, утворене цими ж цифрами, розташованими у порядку зростання. Наприклад, 7815, (8751-1578=7173). Повторюємо процедуру. Знайти межу, до якої прямує така послідовність.

9. Послідовність Полларда для числа n будується так: перший член рівен 2, а кожен наступний рівен остачі від ділення елемента в квадраті мінус одиниця на n. Визначити період послідовності.

10. Задано послідовність n випадкових чисел, кожне з яких лежить у інтервалі від $-n$ до n. Вияснити яка з підпослідовностей і якої довжини має найбільшу суму.

11. Знайти для заданого n: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{n}{n-1}$.

12. Знайти для заданого n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{[\lg k]}}{k}.$$

13. Знайти для заданого n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\text{кількість цифр}(k)}{k^2}.$$

14. Знайти для заданих n, x: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}x^k$.

15. Знайти для заданих n, x: $\sum\limits_{s=0}^{10}\frac{1}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}$.

16. Знайти для заданого n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{k!}.$$

17. Числами Бернуллі називають

$$B_n = \frac{(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\left[1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots\right].$$

18. Числами Ейлера називають

$$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left[1-\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\frac{1}{7^{2n}}+\cdots\right].$$

19. Нехай задано q, r, b, c, d. Знайти x_n, якщо

$$x_0 = c,\ x_1 = d,\ x_k = qx_{k-1} + rx_{k-2} + b.$$

20. Знайти u_k, якщо $u_1 = u_2 = 0,\ v_1 = v_2 = 1$,

$$u_i = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}v_{i-1} - u_{i-2}}{1 + u_{i-1}^2 + v_{i-1}^2},\ v_i = \frac{u_{i-1} - v_{i-1}}{|u_{i-2} + v_{i-1}| + 2}.$$

21. Нехай $a_0 = a_1 = 1,\ a_i = a_{i-1} + \frac{a_{i-1}}{2^{i-1}}$. Знайти добуток перших n елементів.

22. Знайти $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ якщо

$$a_1 = b_1 = 1,\ a_k = (\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{a_{k-1}}/2)/2,\ b_k = 2a_{k-1}^2 + b_{k-1}.$$

23. Нехай

$$x_1 = y_1 = 1,\ x_i = x_{i-1}/3,\ y_i = x_{i-1} + y_{i-1}.$$

Знайти $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+|y_i|}$.

24. Нехай

$$a_1 = b_1 = 1,\ a_k = 3b_{k-1} + 2a_{k-1},\ b_k = 2a_{k-1} + b_{k-1}.$$

Знайти $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(1+a_k^2+b_k^2)k!}$.

25. Нехай задано натуральні числа u, v та

$$a_1 = u,\ b_1 = v,\ a_k = 2b_{k-1} + a_{k-1},\ b_k = 2a_{k-1}^2 + b_{k-1}.$$

Знайти $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_n b_n}{(k+1)!}$.

26. Знайти $\sum\limits_{i=1}^{100} \frac{x_i}{2^i}$ якщо перші три члени послідовності рівні одиницям а далі

$$x_i = x_{i-1} + x_{i-3}.$$

27. Знайти границю, до якої прямує послідовність для заданих a, x

$$y_0 = a, \quad y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1} + \frac{x}{y_{i-1}}\right).$$

28. Знайти границю, до якої прямує послідовність

$$x_0 = 1, \quad x_k = \frac{2 - x_{k-1}^2}{5}.$$

29. Знайти границю, до якої прямує послідовність

$$y_0 = 0, \quad y_k = \frac{y_{k-1} + 1}{y_{k-1} + 2}.$$

30. Знайти з точністю 10^{-8} : $\quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i(i+1)(i+2)}$

31. Знайти з точністю 10^{-8}:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1}}.$$

32. Знайти з точністю 10^{-8}:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k}.$$

7. Многочлени та ряди

У задачах цього розділу вважається, що многочлен $P(x) = \sum\limits_{0}^{i=n} p_i x^i$ заданий своїми коефіцієнтами p_i і вони розміщені у масиві так, що p_i знаходиться у i-му елементі масива. Вирази для $B_n(x)$ та $E_n(x)$ можна знайти у розділі Послідовності.

1. Маючи $P(x)$ знайти $P^2(x)$.
2. Маючи $P(x)$ знайти $P(x) - P(x-1)$.
3. Маючи $P(x)$ знайти $P'(x)$ а також $P'(1),\ P'(2),\ P'(3)$.
4. Маючи $P(x)$ знайти $P''(x)$ а також $P''(1),\ P''(2),\ P''(3)$.
5. Маючи $P(x)$ знайти $\int\limits_0^x P(t)dt$.
6. Знайти коефіцієнти многочлена $(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n)$ при заданих a_i.
7. Задано дійсні числа a_i та b_i. Побудувати многочлен

$$(x^2 + a_0x + b_0)(x^2 + a_1x + b_1)\ldots(x^2 + a_nx + b_n).$$

8. Помножити многочлен $P(x)$ на $Q(x)$.
9. Розділити многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ за схемою Горнера, вважаючи, що порядок $P(x)$ більший, ніж $Q(x)$.
10. Знайти похідну від $(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n)$ при заданих a_i.
11. Послідовність многочленів Чебишева $T_i(x)$ будується так:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

12. Послідовність зміщених многочленів Чебишева $T_i^*(x)$ будується так:

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1, \quad T_{n+1}^*(x) = 2(2x-1)T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x).$$

13. Виконати наближене обчислення функції e^x на відрізку $0 \le x \le 1$ за допомогою виразу:

$$e^x = \sum_{n=0}^{8} A_n T_n^*(x),$$

де сталі A_n приймають значення

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1.753387654, \quad A_1 = 0.850391654, \quad A_2 = 0.105208694,\\
&A_3 = 0.008722105, \quad A_4 = 0.000543437, \quad A_5 = 0.000027115,\\
&A_6 = 0.000001128, \quad A_7 = 0.000000040, \quad A_8 = 0.000000001.
\end{aligned}$$

14. Послідовність многочленів Ерміта $H_i(x)$ будується так:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

15. Записати $\sin x$ та $\cos x$ у вигляді многочленів, розклавши їх у ряд з точністю до x^{20}. Переконатися, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
16. Записати $\operatorname{sh} x$ та $\operatorname{ch} x$ у вигляді многочленів, розклавши їх у ряд з точністю до x^{20}. Переконатися, що $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
17. Многочлени Бернуллі будуються за правилом:

$$B_k^{n+1} = \frac{k!}{n!}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\right), \quad (n > k).$$

Отримати вираз для B_k^n.
18. Послідовність многочленів $G_i(x)$ будується так:

$$G_0(x) = 1, \quad G_1(x) = x - 1, \quad G_n(x) = (x - 2n + 1)G_{n-1}(x) - (n-1)^2 G_{n-2}(x).$$

19. Послідовність многочленів $L_i(x)$ будується так:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_n(x) = xL_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2}{2n - 3(2n-1)} L_{n-2}(x).$$

20. Послідовність многочленів Лежандра $P_i(x)$ будується так:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x).$$

21. Послідовність многочленів Лагера $L_i(x)$ будується так:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x).$$

22. Дано числа a_i, попарно не рівні. Побудувати многочлен $\omega_i(x)$ ступеня n такий, що $\omega_i(a_i) = 1$ і $\omega_i(a_j) = 0, j \neq i$. Для цього скористатись виразом

$$\omega_i(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

23. Побудувати многочлен $F(x)$, такий, що в заданих точках x_i він приймає значення b_i. Для цього можна скористатися виразом

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \omega_i(x),$$

многочлен $\omega(x)$ знаходиться так, як сказано у попередній задачі.
24. Маючи $P(x)$ знайти $P^4(x)$.
25. Виходячи з

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots.$$

Записати ряд до x^{20} і переконатися, що $(\sqrt{1+x})^2 - x = 1$.
26. Виходячи з того, що

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \operatorname{cosec} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n},$$

записати ряд до x^{20} і переконатися, що $\sin x \cdot x \operatorname{cosec} x = x$.
27. Виходячи з того, що

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sec x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} E_n x^{2n},$$

записати ряд до x^{20} і переконатися, що $\cos x \cdot \sec x = 1$.
28. Виходячи з того, що

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad x \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_n x^{2n},$$

записати ряд до x^{20} і переконатися, що $\tan x \cdot x \operatorname{ctg} x = x$.
29. Виходячи з того, що

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad x \operatorname{cth} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-)^{n+1} 2^{2n}}{(2n)!} B_n x^{2n},$$

записати ряд до x^{20} і переконатися, що $\tanh x \cdot x \operatorname{cth} x = x$.
30. Переконатися, що $\cos x \tan x = \sin x$ так, як це зроблено у попередніх вправах.
31. Переконатися, що $\operatorname{ch} x \tanh x = \operatorname{sh} x$ так, як це зроблено у попередніх вправах.
32. Виходячи з того, що

$$A = \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}, \quad e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

записати ряд до x^{20} і переконатися, що $A(e^x - 1) = x$.

8. Рекурсія

Всі завдання цього розділу повинні реалізовуватися через рекурсивні функції. У більшості випадків слід обчислити значення функції.

1. Знайдіть факторіал числа n.

2. Числа Фібоначчі мають ту властивість, що кожне з них рівне сумі двох попередніх, а перші два рівні одиниця. Знайти n-е число Фібоначчі і порівняти результат з формулою:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3. Знайдіть НСД двох чисел (див №19 розділу Числа).

4. Функція $f(n)$ задається так:

$$f(n) = \begin{cases} n, & 0 \le n \le 9 \\ g(n)f(n-1-g(n)) + n, & n > 9 \end{cases},$$

а $g(n)$ - остача від ділення на 10.

5. Функція Аккермана для натуральних n, x, y більших нуля визначається так:

$$A(n,x,y) = \begin{cases} x+1, & n = 0 \\ x, & n = 1, y = 0 \\ 0, & n = 2, y = 0 \\ 1, & n = 3, y = 0 \\ 2, & n \ge 4, y = 0 \\ A(n-1, A(n,x,y-1), x), & n \ne 0, y \ne 0 \end{cases}$$

6. Виконати завдання №4 розділу Сортування та пошук.

7. Написати програму, яка відгадає задумане число в інтервалі $[0, n-1]$ за n питань типу "Ваше число менше такого-то"?

8. Виконати завдання №5 розділу Сортування та пошук.

9. Функція $Q(m,n)$, що задає кількість розбиттів цілого числа n на доданки, які не більші, ніж m задається співвідношеннями: [7]

$$Q(m,1) = 1, \quad Q(1,n) = 1, \quad Q(m,n) = Q(m,m), \text{для } m < n,$$

$$Q(m,m) = 1 + Q(m, m-1), \quad Q(m,n) = Q(m, n-1) + Q(m-n, n).$$

10. Виконати завдання №16 розділу Сортування та пошук.

11. Функція, отримавши послідовність цифр та букв (слово) повертає значення "правда"якщо: 1) слово складається лише з однієї букви; 2) якщо слово можна представити як інше слово, за яким йде буква, або цифра. У інших випадках повертається "неправда".

12. Виконати завдання №18 розділу Сортування та пошук.

13. Згідно з легендою у жреців храму Брахми є мідна платформа з трьома стержнями. Спочатку на першому стержні було 64 диски, які утворювали пірамідку: верхній диск трохи менший за той, що під ним і т.д. Дозволяється перекладати один диск за раз, не можна ставити більший диск на менший і треба переставити усю пірамідку з першого стержня на третій. Кажуть, що коли жерці переставлять усі диски, настане кінець світу. Як це зробити для n дисків?

14. Виконати завдання №6 розділу Послідовності.

15. Знайти всі перестановки заданого числа об'єктів.

16. Знайти коефіцієнти полінома $(x+1)^n$.

17. Виконати завдання №19 розділу Сортування та пошук.

18. Елемент $E(n,m)$ трикутника Паскаля, що стоїть у n-му рядочку та m-у стовпчику рекурсивно можна знайти так:

$$\begin{cases} E(0,x) = E(x,0) = 1, \\ E(n,m) = E(n-1,m) + E(n-1,m-1) \end{cases}$$

19. Функція $Rem(a,b,c)$, що обчислює остачу від ділення a^b на c задається так [9]:

$$Rem(a,b,c) = \begin{cases} Rem(a*a, b/2, c), & a < c, b > 2, b - \text{парне} \\ Mod(a * Rem(a*a,(b-1)/2,c),c), & a < c, b \geq 3, \text{непарне} \\ a, & a < c, b = 1 \\ Rem(Mod(a,c),b,c), & a \geq c \end{cases}$$

20. Обчислити значення функції $f(n,m)$:

$$\begin{cases} f(0,0) = 1, \\ f(n,r) = \sum_{i=0}^{k-1} f(n-1, r-i), \text{якщо } n > 0, 0 \leq r < n(k-1)+1, \\ \text{нуль при всіх інших значеннях аргументів} \end{cases}$$

21. Обчислити значення функції:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \text{остачі від ділення на 10} & \text{якщо ця остача не рівна 0} \\ F(n/10) & \text{інші випадки} \end{cases}$$

22. Представити задане число римськими цифрами.
23. Знайти суму членів випадкового масива, довжиною 2^n, виходячи з того, що сума всіх елементів є сумою сум половинок масива.
24. Знайти x^n.
25. Розкласти число на прості множники.
26. Виконати вправу №17 розділу Числа.
27. Візьмемо тоненьку смужку паперу і поклавши її на стіл, притримаємо лівий кінець. Далі зігнемо смужку посередині так, щоб правий кінець виявився зверху над лівим. Будемо повторювати цю процедуру n разів. Зрозуміло, що тепер смужка покрита лініями згинів. Написати функцію, яка покаже напрямки усіх згинів від лівого краю смужечки.
28. Візьмемо одиничний інтервал. Нанесемо на ньому випадкову точку. Нехай координата цієї точки р. Далі на кожній з утворених двох частин одиничного інтервалу поставимо нові точки, координати яких відносяться до довжини відрізка, на який точки ставляться у пропорції 1 до р. Повторимо процедуру n разів. Написати функцію, яка перерахує усі такі точки по порядку збільшення їх координати.
29. Аналогічно до №28, але перераховувати треба у порядку зменшення координати.
30. Щоб отримати килим Серпінського візьмемо одиничний квадрат. Розділимо його на 9 одинакових квадратів поділивши сторони на три рівних частини і з'єднавши протилежні точки. Тепер виріжемо центральний квадрат. З кожним з вісьми квадратів, що залишилися, проробимо те саме. Повторимо процедуру n разів. Чому рівна площа та периметр фігури, що утворилася?
31. Розв'зати завдання №32 розділу Послідовності.
32. Знайти суму всіх доданків, більших по модулю, ніж 10^{-8} і таких, що $a_n = 1$, а кожен наступний a_n у n разів менший від попереднього. Що в Вас вийшло?

9. Матриці

1. Задано квадратну матрицю порядку n. Обнулити всі елементи, сума індексів яких є парним числом.
2. Задано квадратну матрицю A порядку n. Побудувати нову матрицю B таку, щоб перший стовпчик матриці B був рівен останньому стовпчику матриці A, другий - передостанньому і т.д.
3. Задано квадратну матрицю A порядку n. Побудувати нову матрицю B таку, щоб перший рядок матриці B був рівен останньому стовпчику матриці A, другий - передостанньому і т.д.
4. Задано квадратну матрицю A порядку n. Побудувати нову матрицю B таку, щоб кожен її елемент був рівен найбільшому з елементів матриці A, що знаходяться в тому ж рядочку і в тому ж стовпчику, що і шуканий елемент.
5. Задано квадратну матрицю A порядку n. Побудувати нову матрицю B таку, щоб кожен її елемент був рівен найбільшому з елементів матриці A, що знаходяться не в тому ж рядочку і не в тому ж стовпчику, що і шуканий елемент.
6. Задано квадратну матрицю A порядку n. Побудувати нову матрицю B таку, щоб кожен її елемент був рівен сумі всіх елементів матриці A, що знаходяться справа і вище ніж шуканий елемент.
7. Побудувати матрицю, транспоновану до заданої.
8. Побудувати матрицю, всі елементи якої під головною діагоналлю рівні нулю.
9. Побудувати матрицю, всі елементи якої над головною діагоналлю і під бічною діагоналлю рівні нулю, а всі решта - одиниці.
10. Знайти найбільший за модулем елемент заданої матриці.
11. Заповнити квадратну матрицю так, щоб по головній діагоналі стояли одиниці, під та над діагоналлю двійки, наступні лінії містили 4, 8, 16 і т.д.
12. Заповнити квадратну матрицю послідовними цілими числами по спіралі.
13. Заповнити квадратну матрицю послідовними цілими числами змійкою справа наліво до кінця рядочка, наступний рядок зліва направо і т.д.
14. Заповнити квадратну матрицю послідовними цілими числами змійкою

зверху вниз до кінця стовпчика, наступний стовпчик знизу вверх і т.д.

15. Знайти найбільший елемент серед елементів матриці, розташованих над головною діагоналлю і над бічною діагоналлю.

16. Знайти найбільший елемент серед елементів матриці, розташованих над головною діагоналлю і під бічною діагоналлю.

17. Дано квадратну матрицю порадку $2n$. Переставити її блоки розміру $n \times n$ за годинниковою стрілкою без обертання.

18. Повернути квадратну матрицю на 90^o за годинниковою стрілкою.

19. Створити квадратну матрицю порядку n, елементи якої - випадкові числа 0,1,2,3. Визначити, скільки у матриці квадратиків 2×2, всі елементи яких різні.

20. У заданій матриці рівно два найменші елементи. Знайти їх індекси.

21. Побудувати матрицю Гільберта порядку n: $a_{ij} = 1/(i + j - 1)$.

22. Отримати матрицю порядку n, у якій на будь-якій лінії, паралельній головній діагоналі розташовані одинакові числа.

23. Перемножити матрицю на вектор.

24. Перемножити матрицю на матрицю.

25. Додати дві матриці одинакового розміру.

26. Занести у квадратну матрицю порядку 10 таблицю множення десяткової системи числення.

27. Занести у квадратну матрицю порядку 16 таблицю множення шістнадцяткової системи числення.

28. Отримати матрицю шляхом викреслювання з даної матриці n-го рядочка та m-го стовбчика.

29. Переставити місцями n-й та m-й рядочки матриці.

30. Переставити місцями n-й та m-й стовбчики матриці.

31. Зеркально відобразити матрицю відносно бічної діагоналі.

32. Поділити елементи матриці кожного рядочка на діагональний елемент, що стоїть у цьому ж рядочку.

10. Спеціальні функції

1. Інтегральна показникова функція $E_n(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt$ обчислюється за рекурентним співвідношенням

$$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n}\left[e^{-x} - xE_n(x)\right], n = 1, 2, 3, \ldots,$$

при

$$E_0(x) = \frac{\exp(-x)}{x},$$

$$E_1(x) = -\gamma - \ln(x) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{ii!}.$$

Де $\gamma = 0.57721156646$ - стала Ейлера.

2. Інтегральна показникова функція $E_i(x) = -vp \int\limits_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt, x > 0$ обчислюється розвиттям у ряд

$$E_i(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{ii!}.$$

3. Функція $\alpha_n(x) = \int\limits_1^{\infty} t^n \exp(-xt) dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ обчислюється за рекурентним співвідношенням

$$\alpha_n(x) = \left[\exp(-x) + n\alpha_{n-1}(x)\right]/x$$

при $\alpha_0(x) = \exp(-x)/x$.

4. Функція $\beta_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^n \exp(-xt) dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ обчислюється за рекурентним співвідношенням

$$\beta_n(x) = \left[(-1)^n \exp(x) - \exp(-x) + n\beta_{n-1}(x)\right]/x$$

при $\beta_0(x) = \left(\exp(x) - \exp(-x)\right)/x$.

5. Значення інтегрального косинуса

$$Ci(x) = \gamma + \ln(x) + \int\limits_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt$$

обчислюється розвиттям у ряд

$$Ci(x) = \gamma + ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}.$$

6. Значення інтегрального синуса

$$Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

обчислюється розвиттям у ряд

$$Si(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

7. Гамма-функція $\Gamma(x)$ може бути обчислена за таким алгоритмом. Для заданого x знаходимо $A = x - 1,\ Z = A - 64$. Якщо виявиться, що $Z \geq 0$, то обчислюємо $B = |floor(Z - 1)|$ і покладемо $C = A,\ A = A + B,\ D = 1$. Далі проводимо ітерації $C_i = c_{i-1} + 1,\ D_i = D_{i-1}/C_i,\ i = 1, \ldots, B$ з метою знаходження $D = D_B$. Підставляємо отримане значення у формулу Стірлінга

$$\Gamma = \left(\frac{A}{e}\right)^A \exp(\frac{1}{12A}) D \sqrt{2\pi A}.$$

Якщо ж $Z < 0$, то знаходити D не потрібно, просто покладемо $D = 1$ і зразу використовуємо формулу Стірлінга. При $x < -10$ значення $\Gamma(x)$ менші, ніж 10^{-99} і для переважної більшості використань, значення просто рівне нулю.

8. Гамма-функцію $\Gamma(x)$ можна обчислити і іншим способом. Для цього з величини $B = |x|$ послідовно віднімаємо по одиниці доти, поки результат не попаде у інтервал $[0, 1[$. Одночасно будуємо добуток $D = B(B-1)(B-2)\ldots(B-K)$, де, очевидно, K - кількість віднімань, або ціла частина самого B. Якщо $x > 0$, то $\Gamma(x) = DF/x$, а $Y = B - K$ (дробова частина B),

$$F = (((((((0.035868343Y - 0.193527818)Y + 0.482199394)Y - 0.756704078)Y$$

$$+0.918206857)Y - 0.897056937)Y + 0.988205891)Y - 0.577191652)Y + 1.$$

Якщо $x < 0$, обчислення ведемо для $|x|$, а далі

$$\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \frac{1}{DF}.$$

9. Функції Бесселя порядку ν є розв'язками диференційного рівняння другого порядку

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\omega = 0.$$

Порядок функції ν може приймати практично довільні значення: як цілі, так і дробові, як позитивні, так і негативні. Аналогічно знаходяться модифіковані функції Бесселя: вони є розв'язками трохи іншого диференційного рівняння:

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx} + \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)\omega = 0.$$

Функція Бесселя $J_\nu(x)$ та модифікована функція Бесселя $I_\nu(x)$ першого роду для цілочисленного значення ν знаходяться з рекурентних співвідношень

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^i}{i!(i+\nu)!},$$

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x^2/4)^i}{i!(i+\nu)!}.$$

Ці вирази відрізняються лише знаком чисельника у сумі.

10. Функція Бесселя $J_\nu(x)$ та модифікована функція Бесселя $I_\nu(x)$ першого роду для дробового значення ν знаходяться з рекурентних співвідношень

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^i}{i!\Gamma(\nu+i+1)},$$

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x^2/4)^i}{i!\Gamma(\nu+i+1)}.$$

Ці вирази відрізняються лише знаком чисельника у сумі.

11. Функції Бесселя другого роду Y_ν та K_ν обчислюються за співвідношеннями

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Обидва вирази мають смисл лише для дробових значень параметра ν.

12. Функції Бесселя третього роду $H_\nu^{1,2}$ обчислюються за співвідношенням

$$H_\nu^{1,2}(x) = J_\nu(x) \pm iY_\nu(x).$$

13. Оцінити значення функцій Бесселя другого роду (№ 12) знайшовши їх значення для $\nu \pm \epsilon$, де ϵ невелике дробове число, і утворивши з отриманих значень середнє арифметичне.

14. Частковими розв'язками диференційного рівняння

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{2}{x}\frac{d\omega}{dt} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]\omega = 0,$$

при цілих значеннях $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, є сферичні функції Бесселя першого

$$j_n(X) = \sqrt{\pi/(2x)}J_{n+1/2}(x),$$

другого

$$y_n(X) = \sqrt{\pi/(2x)}Y_{n+1/2}(x),$$

та третього роду

$$h_n(X) = \sqrt{\pi/(2x)}H_{n+1/2}(x).$$

Виявляється, що для обчислення значень досить знати, що $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

15. Функції Ері $A_i(x)$ та $B_i(x)$ є розв'язками диференційного рівняння

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} - x\omega = 0.$$

для заданого значення параметра x.

Для знаходження значень функцій використовують степеневі ряди:

$$A_i(x) = c_1 f(x) - c_2 g(x),$$

$$B_i(x) = \sqrt{3}(c_1 f(x) + c_2 g(x)),$$

при цьому

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots,$$

$$g(x) = x(1 + \frac{2}{4!}x^3 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^6 + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^9 + \ldots),$$

а сталі рівні $c_1 = 0.355028054,\ c_2 = 0.258819404$.

16. Інтеграли Френеля це інтегральні функції виду

$$C(x) = \int\limits_0^x \cos(\pi t^2/2)dt, \quad S(x) = \int\limits_0^x \sin(\pi t^2/2)dt.$$

Для їх знаходження при $x < \pi$ користуються рекурентними співвідношеннями:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\pi/2)^{2n}}{(2n)!(4n+1)}x^{4n+1},$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}.$$

17. Повні еліптичні інтеграли першого $K(m)$ та другого $E(m)$ роду визначаються так:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m\sin^2\theta)^{-1/2} d\theta,$$

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} (1 - m\sin^2\theta)^{1/2} d\theta.$$

Для обчислення значень повних еліптичних інтегралів $K(m)$ та $E(m)$ користуються розвиттями у ряди:

$$K(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 m^2 + \cdots\right],$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{m}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{m^3}{5} + \cdots\right].$$

18. Для обчислення значень повних еліптичних інтегралів $K(m)$ та $E(m)$ користуються також поліноміальними апроксимаціями:

$$K(m) = (((a_4 m + a_3)m + a_2)m + a_1)m + a_0 +$$

$$+ \ln(1/m)((((b_4 m + b_3)m + b_2)m + b_1)m + b_0),$$

$$E(m) = (((c_4 m + c_3)m + c_2)m + c_1)m + 1 + m\ln(1/m)(((d_4 m + d_3)m + d_2)m + d_1)m.$$

Коефіцієнти цих виразів мають такий вигляд:

$a_0 = 1.38629436112$	$a_1 = 0.09666344259$	$a_2 = 0.03590092383$
$a_3 = 0.03742563713$	$a_4 = 0.01451196212$	
$b_0 = 0.5$	$b_1 = 0.12498593597$	$b_2 = 0.06880248576$
$b_3 = 0.03328355346$	$b_4 = 0.00441787012$	
$c_1 = 0.44325141463$	$c_2 = 0.06260601220$	$c_3 = 0.04757383546$
$c_4 = 0.01736506410$		
$d_1 = 0.24998368310$	$d_2 = 0.09200180037$	$d_3 = 0.04069697526$
$d_4 = 0.00526449639$		

19. Функціями Струве $H_\nu(x)$ називають один із доданків загального розв'язку диференційного рівняння

$$x^2 \frac{d^2\omega}{dx^2} + x\frac{d\omega}{dx} + (x^2 - \nu^2)\omega = \frac{4(x/2)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)}.$$

Для обчислення значень цієї функції, а також модифікованої функції Струве $L_\nu(x) = -i\exp(-\nu\pi/2)H_\nu(ix)$ використовують розвиття у ряд:

$$H_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{(x/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+3/2)}\left[1 \mp \frac{x^2}{3\cdot(2\nu+3)} + \frac{x^4}{3\cdot 5\cdot(2\nu+3)\cdot(2\nu+5)} \mp \cdots\right].$$

У цьому виразі для знаходження функцій Струве вибираємо верхні знаки доданків, а для модифікованої - нижні.

20. Гіпергеометричні функції $F(a,b,c,x)$ є частковими розв'язками дифернційного рівняння

$$x(1-x)\frac{d^2\omega}{dx^2} + (c-(a+b+1)x)\frac{d\omega}{dx} - ab\omega = 0.$$

Значення їх знаходять за допомогою такого ряду

$$F(a,b,c,x) = 1 + \sum_{i=0}^{N}\left[\prod_{j=0}^{j-1}\frac{(a+j)(b+j)}{(1+j)(c+j)}x\right].$$

21. Вироджені гіпергеометричні функції $F(a,b,x)$ є розв'язками диференційного рівняння Куммера:

$$x\frac{d^2\omega}{dx^2} + (b-x)\frac{d\omega}{dx} - a\omega = 0,$$

а їх значення обчислюються за допомогою ряду:

$$F(a,b,x) = 1 + \sum_{i=0}^{N}\left[\prod_{j=0}^{j-1}\frac{(a+j)}{(1+j)(b+j)}x\right].$$

22. Дилогарифм це інтегральна функція, що задається виразом:

$$f(x) = -\int_1^x \frac{\ln t}{t-1}dt.$$

Значення цієї функції можна знаходити шляхом підсумовування ряду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{(x-1)^i}{i^2},\ 0 \le x \le 2.$$

23. Функції Кельвіна $ber_\nu(x),\ bei_\nu(x)$ є розв'язками рівняння

$$x^2\frac{d^2\omega}{dx^2} + x\frac{d\omega}{dx} - (ix^2+\nu^2)\omega = 0,$$

якщо цей розв'язок записати у вигляді $\omega = ber_\nu(x) + ibei_\nu(x)$. Значення цих функцій знаходять підсумовуючи ряди:

$$ber_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi(3\nu/4 + k/2))}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k,$$

$$bei_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi(3\nu/4 + k/2))}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^k.$$

24. Для математичної статистики надзвичайно важливу роль відіграє інтеграл імовірності:

$$erf(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x exp(-t^2)dt,$$

значення якого можна знайти підсумовуючи ряд

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

25. Значення інтеграла імовірності можна також обчислити, користуючись поліноміальною апроксимацією

$$erf(x) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) \cdot exp(-x^2),$$

де коефіцієнти приймають значення

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0.254829592 & a_2 = -0.284496736 & a_3 = 1.421413741 \\ a_4 = -1.453152027 & a_5 = 1.061405429 & \end{array}$$

а $t = 1/(1 + px)$ і ще один коефіцієнт $p = 0.3275911$.

26. Для обчислення властивостей розподілу Гауса важливе значення має функція

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt,$$

значення якої можна отримати підсумовуючи ряд

$$P(x) = \frac{1}{2} + Z(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n+1)}.$$

Тут використано ще одну функцію, що має відношення до розподілу Гауса:

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

27. Значення функції $P(x)$ можна також обчислювати за поліноміальним наближенням:

$$P(x) = 1 - Z(x)(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5)$$

де коефіцієнти приймають значення

$$\begin{array}{lll} b_1 = 0.31938153 & b_2 = -0.356563782 & b_3 = 1.781477937 \\ b_4 = -1.821255978 & b_5 = 1.330274429 & \end{array}$$

а t знаходиться так само, як у вправі 26.

28. Розподіл χ^2 з ν ступенями вільності має функцію розподілу

$$P(x,\nu) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int\limits_0^x t^{\nu/2-1} \exp(-t/2) dt,$$

де $x = \chi^2$. Для обчислення значень $P(x,\nu)$ знаходять суму ряду

$$P(x,\nu) = \frac{2x}{\nu} \frac{x^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)\exp(\nu/2)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(\nu+2)(\nu+2)\ldots(\nu+2k)} \right].$$

29. Розподіл Стьюдента, або t-розподіл з ν ступенями вільності характеризується функцією розподілу

$$t(x,\nu) = \int\limits_{-t}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\nu/2)} dt,$$

для знаходження значень якої підсумовуємо ряди. Для парних значень ν:

$$I(x,\nu) = \sin\theta \left[1 + \frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos^4\theta + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(\nu-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(\nu-2)}\cos^{\nu-2}\theta \right].$$

Розподіл Стьюдента для непарних значень ν, крім $\nu = 1$, для якого $I(x,\nu) = 20/\pi$ знаходимо підсумовуючи ряд:

$$I(x,\nu) = \frac{20}{\pi} + \frac{2}{\pi}\cos\theta\sin\theta \left[1 + \frac{2}{3}\cos^2\theta + \ldots + \frac{2\cdot 4\cdot(\nu-3)}{1\cdot 3\ldots(\nu-2)}\cos^{\nu-3}\theta \right].$$

У всіх цих формулах $\theta = arctgx/\sqrt{\nu}$.

30. F-розподіл з ν_1 ν_2 ступенями вільності характеризується функцією розподілу

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right) y^{\nu_1/2-1}(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2}}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}y\right)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} dy.$$

При цілих значеннях ν_1 обчислення проводимо шляхом підсумовування ряду

$$Q(x) = t^{\nu_2/2}(1 + \frac{\nu_2}{2}(1-t) + \frac{\nu_2(\nu_2+2)}{2\cdot 4}(1-t)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{\nu_2(\nu_2+2)\ldots(\nu_2+\nu_1-4)}{2\cdot 4\ldots(\nu_1-2)}(1-t)^{(\nu_1-2)/2}).$$

31. F-розподіл з ν_1 ν_2 ступенями вільності при цілих значеннях ν_2 обчислення проводимо шляхом підсумовування дещо іншого ряду:

$$Q(x) = 1 - (1-t)^{\nu_1/2}(1 + \frac{\nu_1}{2}t + \frac{\nu_1(\nu_1+2)}{2\cdot 4}t^2 + \ldots +$$

$$+\frac{\nu_1(\nu_1+2)\ldots(\nu_1+\nu_2-4)}{2\cdot 4\ldots(\nu_2-2)}t^{(\nu_2-2)/2}).$$

У випадку, коли обидва значення ν_1 та ν_2 цілі числа, то для обчислень у №30 та №31 вибирають ту формулу, яка відповідає меншому ν.

32. Інтеграли Френеля (див.№16) можна знаходити і так:

$$C(x) = J_{1/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{5/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{9/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + \cdots$$

$$S(x) = J_{3/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{7/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + J_{11/2}\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + \cdots$$

11. Різні вправи

1. У кожну з дев'яти клітинок квадрата 3×3 розставити числа 1,2,3 так, щоб суми чисел у кожному горизонтальному рядку, у кожному вертикальному рядку та на будь-якій з діагоналей була рівна 6.
2. У кожну з дев'яти клітинок квадрата 3×3 розставити числа 1,2,...,9 так, щоб суми чисел у кожному горизонтальному рядку, у кожному вертикальному рядку та на будь-якій з діагоналей були рівні.
3. У кожну з шістнадцяти клітинок квадрата 4×4 розставити числа 1,2,...,16 так, щоб суми чисел у кожному горизонтальному рядку, у кожному вертикальному рядку та на будь-якій з діагоналей були рівні.
4. Написати програму, яка зможе відгадати задумане число від 0 до 7 включно за три спроби.
5. Написати програму, яка зможе відгадати задумане число від 0 до 15 включно за чотири спроби.
6. Програма, "задумує"чотиризначне число з різними цифрами. Треба відгадати це число. На кожному кроці ми задаємо програмі чотирицифрове число, а програма відповідає скільки цифр числа відгадано і скільки з них стоять на правильному місця. Приклад, якщо програма "задумала"1294, а ми даємо їй 1423, то відгадано 3 цифри (1,2,4) і одна на своєму місці (1).
7. Скласти програму, яка буде перевіряти, чи вмієте ви переводити цілі числа у двійкову систему числення та назад.
8. Написати програму для гри в хрестики-нулики.
9. На шахматній дошці стоять два ферзі різного кольору. Перечислити допустимі ходи білого ферзя.
10. На шахматній дошці стоїть білий король, а у чорних - король, кінь і слон. Охарактеризувати стан білого короля: мат, шах, пат, нічого страшного.
11. Розкласти на шахматній дошці вісім ферзів так, щоб жоден з них не загрожував іншому.
12. Розкласти на шахматній дошці п'ять ферзів так, щоб всі клітинки дошки були під загрозою.
13. Розкласти на шахматній дошці дванадцять коней так, щоб всі клітинки

дошки були під загрозою.

14. Розкласти на шахматній дошці вісім слонів так, щоб всі клітинки дошки були під загрозою.

15. Відновити приклад з арифметики у якому кожній букві відповідає якась цифра: SEND + MORE = MONEY.

16. Відновити приклад з арифметики у якому кожній букві відповідає якась цифра: ABCDE * 9 = FGHIJ.

17. Вибрати з комплекту доміно сім довільних кісток і скласти з них усі можливі правильні ланцюжки.

18. На полі 10 на 10 розставити кораблі для гри у морський бій.

19. Задача Джозефуса. У коло стає n осіб, кожна з яких знає свій номер. Далі, починаючи з першого відраховують m осіб і виключають її з кола. Продовжують рахувати з наступної особи знову до m. Так продовжують поки не залишиться хтось один. Визначити номер цієї останньої особи.

20. Жук починає блукання з центра квадрата стороною 25 см і кожну секунду просувається на 1 см у довільному напрямку. На яку середню відстань від центра відповзає жук за n секунд.

21. В коло радіуса 1 вписати n кіл, кожне з яких дотикається щонайменше до трьох і визначити, яку частину площі великого кола закривають вписані.

22. Є n стержнів, на які нанизують колечка, з написаними на них послідовними цілими числами. Дозволяється класти одне кільце на друге лише тоді, коли сума чисел на цих двох кільцях є квадратом якогось числа. Виявнити як довго і в якій послідовності це можна робити.

23. Знайти прості числа, що залишаються простими, незалежно від перестановки цифр, з яких вони складаються. Наприклад, 113, 131, 311.

24. Задане дійсне число розбити на три числа a, b, c так, щоб добуток $a \cdot b \cdot c$ був рівен сумі $a + b + c$. Наприклад $1.25 + 1.60 + 2.85 = 1.25 \cdot 1.60 \cdot 2.85$.

25. Знайти майже прості числа, тобто такі, що діляться лише на одне просте число.

26. Позначимо суму квадратів цифр числа S_0 через S_1, суму квадратів S_1 через S_2 і т.д. Може статися, що в послідовності з'являється 1. Знайти такі числа.

27. Ознака подільності на 11: знайти суму цифр, що стоять на парних місцях і відняти від неї суму цифр, що стоять на непарних. Якщо ця різниця ділиться на 11, то і число ділиться на 11.

28. Простір розбито на кубики зі стороною $x < 1$. У одній з вершин лежить центр сфери радіуса 1. Побудувати залежність кількості кубиків, що повністю

лежать усередині сфери від x.
29. Якою буде 200-а цифра, якщо підряд записати необхідну кількість чисел Фібоначчі?
30. Якою буде 200-а цифра, якщо підряд записати числа 1,2,...
31. Задано непросте число $N: \ 1 \leq N \leq 1000000$. Знайти таке найменше число, добуток цифр якого рівен N.
32. Дано ab і $a + b$. Знайти $a^n + b^n$.

12. Астрономія

Якщо не сказано інше, то розглядається григоріанський календар (новий стиль). Дати задаються трійками d, m, y: день, місяць, рік. Функція взяття цілої частини числа позначається квадратними дужками, а дробової - фігурними. Таблиця, наведена у кінці розділу може служити для тестування програм. Матриці P, Q, R, що використовуються далі мають такий вигляд:

$$P(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad Q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Скільки у даному році днів?
2. Перевірити правильність трійки і знайти трійку для наступного дня.
3. Перевірити правильність трійки і знайти трійку для попереднього дня.
4. Маючи трійку знайти дату за старим стилем, яка відрізняється на 13 у бік зменшення.
5. Знайти номер дня від початку року.
6. Знайти день тижня (неділя - 0, понеділок - 1,..., субота - 6) за правилом:

$$n = [2.6m - 0.2] + d + x + [x/4] + [z/4] - 2z$$

де x - дві молодші цифри року, z - дві старші цифри року; день тижня визначається як остача від ділення n на 7: 0 - неділя, 1 - понедалок ... Січень та лютий вважаються 13-м та 14-м місяцями попереднього року.
7. Скільки п'ятниць, що припадають на 13-е число у двадцять першому столітті (див №6).
8. Чи правда, що 13-е число у двадцятому столітті найчастіше припадало на п'ятницю (див №6).
9. Надрукувати табель-календар на вказаний рік (див №6).

10. Скільки разів у двадцять першому столітті навчальний рік не розпочнеться першого вересня через вихідні суботу та неділю (див №6).

11. Знайти юліанську дату для вказаної календарної дати. Для цього знаходимо $A = [y/100], B = 2 - [y/100] + [[y/100]/4]$, а після цього юліанську дату:

$$JD = B + [365.25y] + [30.6001 * m] + d + 1720994.5.$$

Як і раніше, січень та лютий вважаються 13-м та 14-м місяцями попереднього року. Якщо час відповідає календарній даті до 15 жовтня 1852 року, то $B = 0$.

12. Знайти календарну дату за заданою юліанською. Для цього додаємо 0.5 до юліанської дати і покладемо

$$I = [JD + 0.5], \quad F = \{JD + 0.5\}.$$

Якщо $I > 2299160$, знайдемо

$$A = \frac{I - 1867216.25}{36524.25},$$

якщо ні то $A = I$. Далі послідовно знаходимо

$$C = 1524 + I + 1 + A - [A/4], \quad D = \left[\frac{C - 122.1}{365.25}\right], \quad E = [365.25D],$$

$$G = \left[\frac{C - E}{30.6001}\right], \quad F = [30.6001G].$$

Результат: $d = [C - E + F]$, $m = G - 1$, $y = D - 4715$. Січень та лютий розглядаються як 13-14-й місяці попереднього року.

13. День тижня можна визначити за юліанською датою, це просто остача від ділення юліанської дати на 7. 0 - неділя, 1 - понеділок і т.д. (Див.№11).

14. Знайи момент весняного рівнодення можна за формулою:

$$JD = 1721139.2855 + 365.2421376y + 0.0679190y^2 - 0.0027879y^3.$$

Тут y - номер року, ціле число, поділений на 100.

15. Три точки на сфері лежать на одній лінії (великому колі), якщо

$$\tan\delta_1 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \tan\delta_2 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \tan\delta_3 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

16. Алгоритм обчислення дати Пасхи за григоріанським календарем:

$$
\begin{array}{ll}
a = y\%19 & \\
b = y/100 & c = y\%100 \\
d = b/4 & e = b\%4 \\
f = (b+8)/25 & g = (b-f+1)/3 \\
h = (19a+b-d-g+15)\%30 & \\
j = c/4 & k = c\%4 \\
l = (32+2e+2j-h-k)\%7 & \\
m = (a+11h+22l)/451 & \\
\text{місяць} = (h+l-7m+114)/31 & \\
\text{день} = (h+l-7m+114)\%31+1 &
\end{array}
$$

Знак ділення означає ділення націло, тобто з відкиданням дробової частини. Знак процента означає остачу від ділення.

17. Перевести задане число радіанів у градуси, хвилини, секунди і навпаки.

18. Перевести задане число градусів, хвилин і секунд у години, хвилини та секунди часу і навпаки.

19. Знайти місцевий зоряний час S маючи покази годинника LT. Для цього спочатку знаходимо юліанську дату на день спостереження (№11). Після цього знаходимо зоряний час на Грінвічі опівночі:

$$S_0 = 24110.54841 + 8640184.812866T + 0.093104T^2.$$

У цій формулі всі сталі задано у секундах, а $T = \dfrac{JD - 2451545}{36525}$.

Щоб знайти зоряний час на момент, вказаний годинником, додамо поправку

$$S = S_0 + (LT - N)\frac{366.2425}{365.2425} + \lambda,$$

де λ -довгота місця, а N - номер годинного пояса.

20. Для переходу від горизонтальної системи координат до першої екваторіальної користуються формулою

$$\vec{r}_1 = Q(-(90^o - \varphi)) \cdot \vec{r}_g,$$

де $\vec{r}_1$ - вектор прямокутних координат у першій екваторіальній системі, $\vec{r}_g$ - вектор прямокутних координат у горизонтальній системі:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos(-t)\cos\delta \\ \sin(-t)\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_g = \begin{pmatrix} \cos(-A)\cos h \\ \sin(-A)\cos h \\ \sin h \end{pmatrix}.$$

21. Для переходу від першої екваторіальної системи координат до другої екваторіальної користуються формулою

$$\vec{r}_2 = R(-s) \cdot \vec{r}_1,$$

де $\vec{r}_1$ - див.№20, а $\vec{r}_2$ - вектор прямокутних координат у другій екваторіальній системі координат:

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\alpha\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

22. Для переходу від другої екваторіальної системи координат до екліптичної користуються формулою

$$\vec{r}_e = P(\epsilon) \cdot \vec{r}_2,$$

де $\vec{r}_2$ див.№21, а $\vec{r}_e$ - вектор прямокутних координат у екліптичній системі координат:

$$\vec{r}_e = \begin{pmatrix} \cos\lambda\cos\beta \\ \sin\lambda\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

У цьому завданні також потрібно знати нахил екватора до екліптики, що визначається за формулою:

$$\epsilon = 84381.448 - 46.8150T - 0.00059T^2.$$

Тут всі величини задано у секундах.

23. Написати функцію для переходу між сплюснутими сферичними географічними координатами довготою, широтою та висотою L, B, h та прямокутними x, y, z якщо

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h)\cos B\cos L \\ (N+h)\cos B\sin L \\ (N+h-Ne^2)\sin B \end{pmatrix}.$$

Де R - радіус Землі, 6378 км, $e = 1/273$ - ексцентриситет меридіанного еліпса, а $N = R/\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$ - радіус кривини, перпендикулярно до меридіана. При зворотньому переході вводять функцію

$$\tan\theta = \frac{z}{R}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}},$$

і тоді

$$\tan B = \frac{z + \dfrac{R^2e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2\theta}{R(1-a^2\cos^2\theta)}.$$

24. Знайти прямокутні орбітальні координати тіла, якщо a, e, v задані:

$$\vec{r}_o = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}.$$

25. Для переходу від орбітальної системи координат до другої екваторіальної користуються формулою

$$\vec{r}_2 = R(-\Omega)\cdot P(-i)\cdot R(-\omega)\vec{r}_o.$$

26. Рівнянням Кеплера для еліпса називається вираз

$$E - e\sin E = M.$$

Знайти E для заданих e, M методом ітерацій.
27. Щоб знайти v (див.№24) на заданий момент часу T користуються таким виразом:

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}.$$

У свою чергу E знаходиться з рівняння Кеплера (див.№26), куди підставляється $M = n(T - T_0)$. Для планет Сонячної системи необхідні величини наведені у таблиці у кінці розділу.
28. Рівнянням Кеплера для гіперболи називається вираз

$$e\,\mathrm{ch}\,F - F = M.$$

Знайти F для заданих e, M методом ітерацій.
29. Для переходу від другої екваторіальної системи координат до до системи GSE (геоцентрична сонячна екліптична) користуються формулою:

$$\vec{r}_{GSE} = R(\lambda_\odot)P(\epsilon)\cdot\vec{r}_2,$$

де $\vec{r}_2$ див.№21, а $\vec{r}_{GSE}$ - вектор прямокутних координат у GSE.
У цьому завданні також потрібно знати екліптичну довготу Сонця:

$$\lambda_\odot = \Lambda + (1.915 - 0.0048T)\sin M + 0.020\cos M,$$

$$\Lambda = 280.460 + 36000.772T, \quad M = 357.528 + 35999.050T.$$

Тут всі величини задано у градусах. Інші невідомі див. у №19 та №22.
30. Для переходу від географічних координат $\vec{r}_{GEO}$ до геомагнітних $\vec{r}_{MAG}$ користуються формулою:

$$\vec{r}_{MAG} = Q(\varphi - 90^o)R(\lambda)\cdot\vec{r}_{GEO},$$

де φ, λ - координати магнітного поля Землі, які за моделлю IGRF такі:

$$\varphi = 78.8 + 0.04283 \cdot \frac{JD - 2446066}{36525},$$

$$\lambda = 289.1 - 0.01413 \cdot \frac{JD - 2446066}{36525}.$$

31. Для будь-якого сферичного трикутника, якщо сторони позначено маленькими буквами, а протилежні їм кути - тими ж, але великими буквами:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\sin a \sin C = \sin c \sin A,$$

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos A.$$

За заданими кутами сферичного трикутника знайти його кути.

32. Аналогічно до попередньої задачі, але за заданими кутами сферичного трикутника знайти його сторони.

Елементи орбіт планет

Планета	a, а.о.	e	i, град.	ω, град.	Ω, град.
Меркурій	0.3870986	0.20561421	7.002881	28.753753	47.145944
Венера	0.7233316	0.00682069	3.393631	54.384186	75.779647
Марс	1.5236883	0.09331290	1.850333	285.431761	48,786442
Юпітер	5.202561	0.04833475	1.308736	273.277558	99.443414
Сатурн	9.554747	0.05589232	2.492519	338.307800	112.790414
Уран	19.21814	0.0463444	0.772464	98.071581	73.477111
Нептун	30.10957	0.00899704	1.779242	276.045975	130.681389

13. Статистика

Спектр періодичного сигналу це набір амплітуд A_n та фаз ϕ_n, що відповідають частотам $\omega = n\omega_1$. Його можна подати як залежність амплітуди від номера n. Якщо період сигналу розбити на N частин, розміром Δt і кожному шматочку дати номер i, то

$$a_n = \frac{2}{N\Delta t}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos\left(\frac{2\pi n i}{N}\right)\Delta t; \quad b_n = \frac{2}{N\Delta t}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin\left(\frac{2\pi n i}{N}\right)\Delta t,$$

а сам спектр

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \phi_n = arctan(b_n/a_n).$$

Метод найменших квадратів використовують для апроксимації експериментальних даних. Якщо апроксимувати дані прямою лінією $y = M + Kx$, то для цього потрібно розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\sum_i y_i x_i = M\sum_i x_i + K\sum_i x_i x_i$$

$$\sum_i y_i = M\sum_i 1 + K\sum_i x_i.$$

Побудова такої системи рівнянь досить проста: рівнянь стільки, скільки невідомих; n-е рівняння представляє собою суму самих рівнянь, домножених на коефіцієнт при n-му невідомому.

Вважаємо, що випадкові числа, про яких нічого іншого не сказано розподілені рівномірно на інтервалі $[0, 1]$.

1. Змоделюйте кидання кубика. Виясніть з якою частотою випала кожна з граней.

2. Змоделюйте кидання пари кубиків. Виясніть з якою частотою випадає кожна з можливих комбінацій.

3. Згенеруйте велику кількість випадкових точок у квадраті, протилежні вершини якого знаходяться у початку координат і у точці $(1, 1)$. Виясніть, яка частина від загального числа точок попала усередину круга $(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 < 0.25$.

4. Згенеруйте велику кількість випадкових точок у кубі, протилежні вершини якого знаходяться у початку координат і у точці $(1, 1, 1)$. Виясніть, яка частина від загального числа точок попала усередину кулі $(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2<0.25$.

5. Побудуйте послідовність, кожний елемент якої є сумою 12-ти послідовних випадкових чисел. Знайдіть частоти попадання результуючих чисел у інтервали, шириною 1/2.

6. Побудуйте послідовність, у якій 0 випадає з частотою 1/4, а 1 - з частотою 3/4.

7. Побудуйте послідовність, у якій 0 випадає з частотою 1/8, 1 - з частотою 1/2, а двійка у всіх інших випадках.

8. Змоделюйте кидання монети. Виясніть, як часто виникає ситуація "орел-решка"та "решка-решка-орел".

9. Метод генерації. Беремо чотирицифрове число. Далі підносимо його до квадрату і відкидаємо перші дві та останні дві цифри. Отримане число вважається випадковим.

10. Лінійний конгруентний метод генерації. Виберемо 1) велике число $m=2^k$, 2) число $a: \quad \sqrt{m}<a<m-\sqrt{m}$ таке, що при його діленні на 8 отримуємо 5, 3) непарне c, таке, що $c/m\approx 0.211$, 4) довільне s_0 в інтервалі $[0,m-1]$. Далі будуємо s_n як остачу від ділення $as_{n-1}+c$ на m і випадкове число $r_n=(s_n+1)/(m+1)$.

11. Нормально розподілені випадкові числа з нульовим середнім і одиничною дисперсією можна знайти так:

$$z_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{n/12}},$$

де x_i - послідовні випадкові числа.

12. Якщо x випадкові числа, то $y=-\dfrac{\ln(1-x)}{\lambda}$ розподілені експоненціально по закону $F(x)=\lambda\exp(-\lambda x)$

13. Полярний метод генерації. З двох випадкових чисел u_1,u_2 обчислюють два випадкові числа, що мають нормальний розподіл з нульовим середнім та одиничною дисперсією n_1,n_2:

$$n_1=v_1\sqrt{-2\ln S/S},\quad n_2=v_2\sqrt{-2\ln S/S},$$

де $S=v_1^2+v_2^2,\quad v_i=2u_i-1$.

14. Отримати всі перестановки чисел 1,2,...,6.

15. Отримати всі перестановки чисел 1,2,...,6 за умови, що жодне з них не повторюється.

16. Отримати всі можливі вибірки чотирьох елементів з десяти заданих.
17. Коваріаційна функція двох послідовностей x_k, y_k довжини n задається формулою:

$$\gamma(k) = \sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

де $\bar{x}$, $\bar{y}$ середні значення послідовностей. Побудуйте таблицю коваріацій. Автоковаріаційною називається функція коваріації послідовності з собою.
18. Корреляційна функція двох послідовностей x_k, y_k довжини n визначається так:

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-k} (y_i - \bar{y})^2}},$$

де $\gamma(k), \bar{x}$ див попередню задачу. Побудуйте таблицю корреляцій. Автокорреляційною називається функція корреляції послідовності з собою.
19. Початковими моментами масива чи послідовності довжиною N значень називають величину

$$m_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^k.$$

Центральні моменти утворюються з початкових так:

$$M_k(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_1(x))^k.$$

Знайти початкові та центральні моменти для заданої послідовності.
20. Дисперсією D називається другий центральний момент (див.№19). Незміщена дисперсія D_0, коефіцієнт асиметрії A та коефіцієнт ексцесу E задаються виразами:

$$D_0 = M_2 \frac{N}{N-1}, \quad A = \frac{M_3}{M_2^{3/2}}, \quad E = \frac{M_4}{M_2^2}.$$

Знайти вказані величини для заданої послідовності.
21. Для оцінки того, чи можна вважати величини нормально розподіленими, знаходять допоміжні параметри:

$$U_3 = \sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}}, \quad U_4 = \sqrt{\frac{24(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}.$$

Якщо $xA < U_3$, і $xE < U_4$, то розподіл можна вважати нормальним. Тут x може приймати значення $2 \div 3$.

22. Знайдіть спектр синусоподібного сигналу після того, як він пройшов через ідеальний випрямляч.
23. Знайдіть спектр періодичних сигналів, що складаються з прямокутних імпульсів тривалістю 4 мкс і відстанню між початками послідовних імпульсів - 16 мкс. Висота імпульса - 1.
24. Знайдіть спектр пилоподібного сигналу (сталу, основний тон і вісім гармонік), один період якого має вигляд двох рівносторонніх трикутників, що дотикаються вершинами, перший - додатній, наступний-від'ємний.
25. Знайдіть спектр пилоподібного сигналу (сталу, основний тон і вісім гармонік), один період якого має вигляд: $U = 0.5t$, а після цього різкий спад до нуля.
26. Згладжуванням послідовності називається процедура, при якій кожна з точок замінюється на лінійну комбінацію кількох сусідніх. Наприклад, для згладжування за трьома точками користуються виразами:

$$\begin{array}{ll} y_0 \prec (5y_0 + 2y_1 - y_2)/6 & \text{перша точка} \\ y_i \prec (y_{i-1} + y_i + y_{i+1})/3 & \text{всі інші точки} \\ y_n \prec (5y_n + y_{n-1} - y_{n-2})/6 & \text{остання точка} \end{array}$$

Побудуйте випадкову послідовність довжиною 100-200 точок, знайдіть дисперсію послідовності (№20), проведіть згладжування, знову знайдіть дисперсію і порівняйте.
27. Те ж, що у попередній задачі, але згладжувати будемо по п'яти точках:

$$\begin{array}{ll} y_0 \prec (3y_0 + 2y_1 + y_2 - y_4)/5 & \text{перша точка} \\ y_1 \prec (4y_0 + 3y_1 + 2y_2 + y_3)/10 & \text{друга точка} \\ y_i \prec (y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2})/5 & \text{всі інші точки} \\ y_{n-1} \prec (y_{n-3} + 2y_{n-2} + 3y_{n-1} + 4y_n)/10 & \text{передостання точка} \\ y_n \prec (3y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} - y_{n-4})/6 & \text{остання точка} \end{array}$$

28. На досліді для деякого сорту скла отримано таку залежність показника заломлення від довжини хвилі:

довжина, мкм	0.22	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
показник	1.50	1.31	1.23	1.20	1.17	1.16	1.15

Приймаючи, що залежність показника заломлення від довжини хвилі відома:

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}},$$

де ω - частота випромінювання, всі інші символи позначають різні сталі, методом найменших квадратів розширити залежність до інтервалу 0.1 - 1.0 мкм і знайти частоту резонансу ω_0.

29. У лабораторній роботі перевіряють закон Стефана-Больцмана $E = \sigma T^n$ аналізуючи пірометром температуру нитки лампи розжарення а за допомогою амперметра та вольтметра визначають її потужність. Площа, що випромінює рівна 1 квадратному сантиметру. Отримані значення наведені у таблиці. Методом найменших квадратів знайти параметри σ, n.

темп., С	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700
потуж., Вт	11	17	23	35	47	61	82	105	130	170	210

30. Джерело струму досліджують шляхом під'єднання до нього різних опорів і вимірювання сили струму та напруги на клемах. Методом найменших квадратів опрацюйте дані, наведені у табл. і знайдіть електрорушійну силу, струм короткого замикання та внутрішній опір джерела.

струм	0.06	0.11	0.13	0.16	0.22	0.23	0.26	0.29	0.38	0.40
напруга	4.8	4.8	4.4	4.1	4.0	3.3	3.6	3.2	3.0	2.0

31. На досліді отримали експериментальну залежність в'язкості гліцерину в сантипуазах від температури у градусах Цельсія:

температура	-42	-20	0	20	30
в'язкість	$6.71 \cdot 10^6$	$1.34 \cdot 10^5$	$1.21 \cdot 10^4$	$1.49 \cdot 10^3$	$6.26 \cdot 10^2$

Методом найменших квадратів знайдіть найкращу аналітичну залежність для в'язкості гліцерину від температури.

32. На досліді отримали експериментальну залежність тиску насиченої водяної пари у гектопаскалях від температури:

температура	-5	0	5	10	15	20	25
тиск	3.96	6.02	8.61	12.10	16.80	23.00	31.30

Методом найменших квадратів знайдіть найкращу аналітичну залежність для тиску насиченої водяної пари від температури.

14. Фізика

1. Побудуйте таблицю прямокутних координат тіла, масою m, кинутого під кутом α до горизонту з швидкістю v з інтервалом 1 секунда до моменту падіння на горизонтальну поверхню.
2. Побудуйте таблицю прямокутних координат тіла, масою m, кинутого під кутом α до горизонту з швидкістю v з інтервалом 1 секунда до моменту падіння на горизонтальну поверхню за умови, що на тіло діє сила опору повітря у вигляді $F = Av$. Коефіцієнт $A = 0.1$Нс/м.
3. Тіло масою $m = 70$ кг падає у повітрі з великої висоти. Сила опору повітря задається виразом $F = Av + Bv^2$, і у нашому випадку ці параметри рівні $A = 5$Нс/м, $B = 10^{-2}Hc^3/$м^3. Побудувати таблицю залежності відстані від точки, де почалося падіння та швидкості в залежності від часу з інтервалом 1 секунда.
4. На столі лежить ланцюжок загальною довжиною l, частина якого, довжиною m звішується зі стола. Коефіцієнт тертя k, маса ланцюжка m. Знайти залежність швидкості зісковзування та довжини звішеної частини від часу з інтервалом 1 секунда до моменту повного зсування ланцюжка зі стола.
5. Побудуйте таблицю прямокутних координат метеорита масою 1 тонна, що влітає в атмосферу планети радіусом $R = 1.74 \cdot 10^6$м, масою $m = 7.3 \cdot 10^{22}$кг. Товщина атмосфери $h = 1.26 \cdot 10^6$м, сила тертя $F = Av$ причому $A/m = 5 \cdot 10^{-4}c^{-1}$. Вважати, що відстань до метеорита $a = 10^7$м, прицільна відстань $p = 3.5 \cdot 10^6$м, швидкість $v = 1700$м/с.
6. Побудуйте таблицю залежності від часу кута відхилення від вертикалі дерев'яного стовпа висотою 10 м. Початковий кут 1 градус.
7. Побудуйте таблицю прямокутних координат тіла, масою m, кинутого під кутом α до горизонту з швидкістю v з інтервалом 1 секунда до моменту падіння на горизонтальну поверхню.
8. До металевого циліндра, радіусом 20 см, що лежить на боку, у верхній точці прикріплено нитку довжиною 1 м з точковим вантажем на кінці. Нитку приведено у горизонтальне положення і відпущено. Знайти період коливань і траєкторію вантажу.

9. Побудуйте таблицю координат точок, що належать силовій лінії між двома однойменними зарядами 10^{-8} Кл, що знаходяться на відстані 0.2 м. Побудуйте кілька таких ліній для різних кутів між точкою виходу лінії і прямою, що з'єднує заряди.

10. Послідовно сполучені два опори: металевий та напівпровідниковий. Температурні залежності опорів такі:

$$R_{\text{мет}} = R_{m0}\alpha T; \qquad R_{\text{нап}} = R_{s0}\exp\frac{W}{kT},$$

де $R_{m0} = 125$Ом, $R_{s0} = 5.86 \cdot 10^{-2}$Ом, $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}K^{-1}$, $W = 4.8 \cdot 10^{-20}$Дж, $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$Дж/К. Знайти при якій температурі загальний опір буде найменшим.

11. Ті ж дані, що у задачі 10, але опори сполучені паралельно, а знайти треба температуру, при якій загальний опір найбільший.

12. Прозора пластинка складається з m шарів, показник заломлення кожного з яких рівен

$$n_i = 1 + 0.01i$$

де i - номер шару. Промінь входить у пластинку під кутом α до вертикалі. Знайти кут, під яких промінь виходить з пластинки.

13. Прозора пластинка складається з непарної кількості m шарів, показник заломлення кожного з яких рівен

$$n_i = 1 + 0.01(i - m/2)^2$$

де i - номер шару. Промінь входить у пластинку під кутом α до вертикалі. Знайти кут, під яким промінь виходить з пластинки.

14. За умови задачі №13 вияснити, на який найбільший кут від вертикалі відхиляється промінь.

15. Промінь світла викривляється у світловоді тому, що показник заломлення змінюється від його центра до краю за законом $n = n_0 - gz$. Тут $n = 1.5, g = 0.5$мм$^{-1}$. У точці, де показник заломлення рівен 1, відбувається зеркальне відбивання променя. Знайти відстань від точки входу до точки, у якій промінь перетинає вісь світловода, якщо промінь входить під кутом θ.

16. Задача аналогічна №15, але $n = n_0 - az^2$, $a = 0.68$мм$^{-1}$.

17. Два когерентних точкових джерела, що знаходяться на відстані 0.1 мм випромінюють на $\lambda = 0.6$ мкм. Розрахувати інтерференційну картину на екрані на відстані 1 м.

18. Розрахуйте розподіл інтенсивності по екрану, що знаходиться на відстані 4 м від щілини шириною 0.1 мм при довжині хвилі $\lambda = 0.55$мкм.

19. Розрахуйте розподіл інтенсивності по екрану, що знаходиться на відстані 4 м від дифракційної решітки зі штрихами 0.1 мм, відстанню між штрихами 0.3 мм, довжині хвилі $\lambda = 0.55$ мкм і порядку інтерференції 5.
20. З точністю до 0.1 нм знайдіть довжини хвиль восьми ліній у кожній з п'яти основних серій атома водню.
21. Маємо циліндричну посудину площею перерізу S у яку налито води до висоти H. У дні посудини є маленькій отвір перерізом s, через який, звичайно, витікає вода. Побудувати таблицю залежності висоти рівня води у посудині від часу.
22. Побудуйте таблицю залежності частоти звуку гудка електрички від часу, якщо нерухома електричка видає сигнал з частотою ν, зараз вона рухається зі швидкістю V і в нульовий момент часу знаходиться найближче до нас.
23. Будемо вважати, що інтенсивність радіоактивного випромінювання пропорційна кількості радіоактивної речовини, в той час, як енергія квантів випромінювання залежить лише від сорту речовини. У початковий момент маємо 1 г речовини А, що розпадається з періодом піврозпаду 1 рік. При цьому утворюється ще одна речовина, що розпадається з періодом напіврозпаду 10 років, але енергія кожного з квантів утричі більша. Скласти таблицю залежності інтенсивності енергії радіоактивного випромінювання від часу на протязі 100 років.
24. Нескінчена похила площина розташована під кутом α до горизонту. На площину під кутом β до вертикалі зі швидкістю v падає абсолютно пружний м'яч, який відскакує і починає підійматися вверх по площині. Знайти координату n-ї точки відскоку і його час.
25. Ітерації відображення $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ є однією з найвідоміших нелінійних систем. Починаємо з довільного $x_0 \in [0, 1]$, і проводимо ітерації, щоб знайти поведінку x_n при великих n. Проаналізуйте поведінку x_n в залежності від $\lambda \in [0, 5]$.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.

15. Структури даних

Стеком називається структура, для якої допускається вставка і виключення елементів лише з одного кінця (вершини). Приклад: купка книжок на столі. У стеку хто першим прийшов, той останнім пішов).

Чергою називається структура, для якої можливо додавати та виключати елементи з обох її кінців. Як правило, об'єкти додаються з одного кінця (хвіст), а відкидаються - з другого (голова). Прикладом може бути черга у магазині до каси. Тепер хто першим прийшов, той першим пішов. Більш складна структура - двонаправлена черга, коли додавання і відкидання дозволяються з обох боків.

Зв'язаним списком вважається структура, кожний елемент якої знає лише свого попередника і/або свого наступника. Відомо також, хто перший у списку (голова).

Деревом називається структура, у якої є корінь, гілки та листочки, як у справжньому дереві. Елементи дерева знають хто їх батько, а також можуть мати синів. Найвідоміший випадок - бінарне дерево, коли синів щонайбільше двоє. Для роботи з деревами ідеально підходять рекурсивні функції.

1. Перевернути слово задом наперед, використовуючи стек: складаємо букви по одній у стек, а потім виймаємо зі стека і друкуємо по одній.

2. Вияснити, чи є задане число паліндромом, користуючись стеком, тобто, цифри числа по одній спочатку покласти у стек, потім виймаючи їх звідти порівнювати з цифрами числа.

3. Перевести число у систему числення з основою n, користуючись стеком для запам'ятовування цифр.

4. Перевести звичайний запис арифметичного виразу у постфіксний. У цьому випадку всі операції завжди будуть після своїх операндів. Допускаються змінні з однобуквенними іменами та операції $+, -, *, /, \wedge$. Остання операція - піднесення до степеня. Операції $+, -$ мають найменший пріоритет, $*, /$ більший, $\wedge$ найбільший. Вирази можуть містити круглі дужки. Правила перетворення: 1) (- завжди в стек; 2)) - викидає зі стека все на вихід, аж до (включно, але самі дужки на вихід не попадають; 3) всі букви зразу попадають на вихід; 4) всі операції проходять через стек. Якщо пріоритет операції менший, чи рівний пріоритету тієї операції, що лежить на вершині стека, то операція зі стека попередньо видаляється на вихід.

5. Написати арифметичний калькулятор, який приймає рядочки виду "10 5 * 3 +"і знаходить значення. У нашому прикладі повинно вийти 53.

6. Виконати задачу №14 розділу Сортування та пошук, використовуючи стек для запам'ятовування частин масива, які ще не відсортовані.

7. Виконати вправу №4 розділу Рядочки.

8. Згенерувати знакоперемінну послідовність випадкових чисел, розподілених рівномірно у інтервалі від $-n$ до n. Далі перетворити послідовність так, щоб порядок від'ємних чисел змінився на протилежний, а порядок додатніх зберігся.

9. Порозряде сортування. Нехай у нас є послідовність двоцифрових натуральних чисел. Заведемо 10 черг, у які будемо складати наші числа, в залежності від того, яка у них остання цифра. Далі зберемо всі числа по порядку з усіх черг у одну послідовність. Знайдену таким чином послідовність ще раз розкладемо по чергах, але вже тепер у залежності від того, яка у них передостання цифра. Якщо тепер всі числа зібрати з черг по порядку на вихід, то послідовність виявиться відсортованою у порядку зростання.

10. Прочитайте (згенеруйте) дві черги - у одну поставте n дівчат, у іншу m хлопців. Шляхом вибирання перших людей з кожної пари, надрукуйте список k танцювальних пар. Після того, як пара утворена, їх імена видаляються з черги і ставляться у хвіст.

11. Виконати вправу №19 розділу Різні вправи.

12. У нашому розпорядженні комп'ютер-маршрутизатор, на який поступають листи від чотирьох серверів a,b,c,d з інтервалом від 1 до 5 секунд. Листи можуть бути адресовані чотирьом іншим серверам: A,B,C,D. Однак листи відсилаються лише пачками по п'ять штук. Для цього маршрутизатор створює по черзі на кожен із серверів-адресатів і тримає листи там. Змоделювати роботу системи і знайти середній час очікування від моменту прибуття листа до його відправки.

13. Аналогічно до завдання №12, але листи надходять з різною частотою, наприклад, сервер a надсилає вдвічі більше листів, ніж сервер b, той, у свою чергу, вдвічі більше, ніж c, а той - вдвічі більше, ніж d.

14. Реалізуйте метод порозрядного сортування, описаний у №9 так, щоб послідовність можна було відсортувати у порядку спадання величини елементів.

15. Якщо взяти 2^n чисел і розкласти їх послідовно у n черг а потім зібрати знову у одну послідовність, то числа, звичайно, перемішаються. А що буде, якщо таку процедуру проробити n разів?

16. Якщо взяти 2^n чисел і розкласти їх послідовно у n стеків а потім зібрати знову у одну послідовність, то числа, звичайно, перемішаються. А що буде, якщо таку процедуру проробити n разів?

17. Прочитайте файл з прізвищами студентів і утворіть з нього зв'язаний список. Відсортуйте його у алфавітному порядку, наприклад алгоритмом фон-Неймана (№13 розділ Сортування та пошук) і надрукуйте.

18. Як і в завданні №17, але тепер додайте у список ще одного студента з клавіатури, збережіть у файл і надрукуйте результат.

19. Як і в завданні №17, але тепер дайте відповідь на питання, чи є у списку студент з прізвищем, введеним з клавіатури.

20. Як і в завданні №17, але тепер видаліть із списку одного студента, прізвище якого введіть з клавіатури, збережіть у файл і надрукуйте результат.

21. Видаліть зі списка всі дублікати.

22. Знайдіть переріз двох списків, тобто отримайте список, у якому будуть лише ті елементи, що входять у обидва списки.

23. Знайдіть об'єднання двох списків, тобто отримайте список, у якому будуть всі елементи, що входять хоча б один список.

24. Виконайте вправу №19 розділу Різні вправи з іменами людей, а не з номерами, використовуючи список.

25. Прочитати з файла, чи клавіатури n чисел і розмістити їх у бінарному дереві. Перший елемент стає коренем, всі інші розміщуються, так, що менше число завжди стає лівим сином, а більше - правим. Надрукувати дерево, обходячи його у прямому порядку: спочатку ліве піддерево, потім вузол, потім праве піддерево.

26. Теж, що у попередній задачі, але обхід зробити у зворотньому порядку: спочатку праве піддерево, потім сам вузол, тоді ліве піддерево.

27. Прочитати невеликий текст, а слова, які в ньому покласти у дерево так, що перше слово стає коренем, а наступні розміщуються так, що ті, що по алфавіту раніше, стають лівими синами, а інші навпаки (рекурсивно). У кожному з вузлів слід тримати лічильник того, скільки разів задане слово зустрічається у тексті. Надрукувати результат.

28. Упорядковану по зростанню послідовність вкласти у дерево так, як сказано у вправі №25. Обійдіть дерево у зворотньому порядку: спочатку праве піддерево, потім вузол, потім ліве піддерево. Перебуваючи у якомусь вузлі друкуйте його вміст.

29. Бінарні дерева часто використовуються для представлення арифметичних виразів. При цьому операція є вузлом дерева, а її операнди - листками цього вузла. Прочитайте простий постфіксний вираз (див.№4), покладіть його елементи у дерево, надрукуйте результат у такому порядку: ліве піддерево, праве піддерево, вузол.
30. Теж, що у попередній задачі, але результат надрукуйте у прямому прямому порядку: ліве піддерево, вузол, праве піддерево.
31. Дерева арифметичних виразів (див. попередню вправу) допускають операцію диференціювання. Для цього потрібно лише запрограмувати правила диференціювання як перетворення дерева. Маючи простий постфіксний вираз, наприклад, не більше двох арифметичних операцій, реалізуйте диференціатор і надрукуйте результат.
32. Упорядковану по спаданню послідовність вкласти у дерево так, як сказано у вправі №25. Обійдіть дерево у прямому порядку: спочатку ліве піддерево, потім вузол, потім праве піддерево. Перебуваючи у якомусь вузлі друкуйте його вміст.

16. Олімпіадні задачі

Задачі цього розділу вибрані з різноманітних олімпіад з програмування. Деякі з них можна назвати складними. Всі ці задачі необов'язкові.
1. На початку шахматна позиція записується так:

$$rnbqkbnr : pppppppp : 8 : 8 : 8 : 8 : PPPPPPPP : RNBQKBNR.$$

Між двокрапками записують рядок, цифри означають кількість вільних кліток зліва направо. Великі букви позначають білі фігури, маленькі - чорні. Співвідношення між буквами та фігурами зрозуміле. Вияснити скільки кліток поля, а також які фігури знаходяться під боєм білих а потім чорних.
2. Подати задане натуральне число у вигляді суми послідовних натуральних чисел. Скількома способами це можна зробити.
3. Співвідношення, записані нижче представляють правила побудови речень деякої мови. Вертикальна риска має смисл "або". Тобто, A = B | C, означає, A є (складається з) B або C. Будь-яка частина співвідношення, що записана нижне не за допомогою великих букв мусить появитись у правильному реченні.

$$\begin{array}{l} STATEMENT = ACTION|STATEMENT, ACTION \\ ACTION = ACTIVELISTVERBACTIVELIST \\ ACTIVELIST = ACTOR|ACTIVELISTandACTOR \\ ACTOR = NOUN|ARTICLENOUN \\ ARTICLE = a|the \\ NOUN = tom|jerry|goofy|mickey|jimmy|dog|cat|mouse \\ VERB = hate|love|know|like|VERBs \end{array}$$

Вияснити, чи деяка фраза, наприклад "the dog and a cat know goofy", чи "goofy hate mouse jerry"відповідає цим правилам.
4. Числова система Штерна-Брокота будується за таким правилом. Починаємо з двох формальних дробів $\frac{0}{1}$ та $\frac{1}{2}$. На кожному кроці між двома сусідніми дробами $\frac{n}{m}$ та $\frac{n'}{m'}$ вставляємо дріб $\frac{n+n'}{m+m'}$. Після першого разу маємо $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$,

$\frac{1}{0}$. Після другого $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}$. Будемо розглядати кожний новий дріб як лівого, чи правого сина у дереві, що будується крок за кроком. У цьому дереві будуть усі можливі дроби. Якщо мені потрібен якийсь з дробів, я можу почати з 1/1 і далі рухатись по цьому дереву. Наприклад, щоб дійти до 5/7, треба пройти від 1/1 вліво, вправо, вправо, вліво. В цьому смислі 5/7=LRRL. Знайти запис заданого дробу у цій системі.

5. Задано 121 натуральне число: 1,...121. Розбити числа в 11 груп так, кожна група вміщувала 11 чисел, кожне число належало якійсь групі, сума чисел у кожній групі була одинакова.

6. Між цифрами номера тролейбесного талона вставити знаки операцій +,-,*,/ так, щоб вийшло 100. Якщо між цифрами знака немає, вважати, що це двоцифрове число.

7. У вузлах решітки розміром $n \times m$ лежить дві кульки. Вони рухаються, перескакуючи у один з чотирьох сусідніх вузлів по діагоналі. При ударі в стінку кульки відскакують під тим самим кутом, а при попаданні у кут напрямок руху змінюється на протилежний. Чи зіткнуться кульки?

8. Розкладіть у прямокутнику 8×7 всі кістки доміно так, щоб сума крапок по горизонталі і по вертикалі була одинаковою.

9. Знайти таке m-цифрове число, що всі n-цифрові числа, утворені першими n його цифрами діляться на n.

10. Задано два цілих додатніх числа. Чи можна отримати друге число викреслюючи у довільному порядку цифри першого.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.

Бібліоґрафія

[1] Абрамов С.А., Гнездилова Г.Г., Капустина Е.Н., Селюк М.И., *Задачи по программированию* М.: Наука, 1988.-224 с.

[2] Арсак Ж., *Программированин игр и головоломок* М.: Наука, 1990.-224 с.

[3] Бурсиан Е.В., *Задачи по физике для компьютера* М.: Просвещение, 1991.- 256 с.

[4] Дьяконов В.П., *Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персонального компьютера* М.: Наука, 1987.- 240 с.

[5] Дейтел В., Дейтел Г., *Как программировать на C* М.: Бином, 1998.

[6] Дейтел В., Дейтел Г., *Как программировать на C++* М.: Бином, 1999.

[7] Гудман С., Хидетниеми С., *Введение в разработку и анализ алгоритмов* М.: Мир, 1981.

[8] Керниган Б., Риччи Д., *Язык программирования C* М.: Мир, 1992.

[9] Проценко В.С., Чаленко П.И., Сорока Р.А., *Техника программирования* К.: Вища школа, 1990.- 194 с.

[10] Страуструп Б., *Язык программирования C++* К.: Диалектика, 1993.

[11] Уэзерэлл Ч., *Этюды для программистов* М.: Мир, 1982.- 288 с.