Применение СПО для решения задач аэро- и газовой динамики

Лекция 2. Уравнение неразрывности и закон сохранения количества движения

Преподаватель: Романова Дарья Игоревна

Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, Москва

2023

Закон сохранения массы (ЗСМ)

для индивидуального объёма сплошной среды

Закон сохранения массы (вариант 1)

Масса M любого индивидуального объёма сплошной среды постоянна:

$$M = const$$

.

Индивидуальный объём

выделенная часть среды, состоящая из одних и тех же индивидуальных частиц.

Закон сохранения массы (ЗСМ)

для индивидуального объёма сплошной среды

В механике сплошных сред интерес представляет не столько масса некоторого объёма, сколько распределение массы по объёму, которое характеризуется распределением плотности.

Плотность

в точке среды определяется как предел отношения массы малого объёма Δm к самому объёму ΔV, при стягивании объёма в точку:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Закон сохранения массы (вариант 2)

для конечного индивидуального объёма сплошной среды $V_{\text{инд}}$

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_{\text{инд}}(t)} \rho dV = 0.$$

Закон сохранения массы (ЗСМ)

для индивидуального объёма сплошной среды

Дифференцирование по времени интеграла по подвижному объёму

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} A dV = \int\limits_{V} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int\limits_{\Sigma} A \boldsymbol{U_n} d\sigma.$$

Эта формула обобщает следующую известную формулу дифференцирования интеграла с переменными пределами:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f|_{x=b}\frac{db}{dt} - f|_{x=a}\frac{da}{dt}.$$

Закон сохранения массы (вариант 3)

$$\int\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_{\Sigma} \rho \boldsymbol{U_n} d\sigma = 0$$

Закон сохранения массы (ЗСМ)

для пространственного объёма

Заметим, что в последнем варианте закона сохранения массы производная по времени имеется только в подынтегральном выражении. В этой формуле участвуют только V и Σ только для рассматриваемого (одного) момента времени в отличии от второго варианта закона, в котором содержится производная по времени от интеграла по $V(t)$, для вычисления которой необходимо знать, как меняется V со временем.

Если мы имеем дело с V, Σ лишь в один (хотя и любой) момент времени, то невозможно различить, является ли V движущимся (индивидуальным) или неподвижным, то есть просто некоторой выделенной областью пространства. Поэтому **3-ий вариант ЗСМ верен как для движущегося объёма V, так и для пространственного.**

Если V — неподвижный объём, то дифференцирование по времени можно просто вынести из под знака интеграла.

Закон сохранения массы (ЗСМ)

для пространственного объёма

Закон сохранения массы

для пространственного объёма, через границы которого движется среда:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = -\int\limits_\Sigma \rho \boldsymbol{U_n} d\sigma.$$

Скорость изменения массы в пространственном объёме равна притоку массы через границы объёма в единицу времени.

Здесь $\int\limits_V \rho dV$ — масса той среды, что находится внутри пространственного объёма V в данный момент, а правая часть уравнения — это масса, поступившая за единицу времени через границы этого пространственного объёма. Знак «−» в правой части связан с тем, что $\boldsymbol{U_n}$ — проекция U на внешнюю нормаль.

Уравнение неразрывности

Дифференциальное уравнение неразрывности — следствие закона сохранения массы.

Применим формулу Гаусса-Остроградского (если ρ и $\boldsymbol{U}$ непрерывны и дифференцируемы в V):

$$\int\limits_{\Sigma} \rho \boldsymbol{U_n} d\sigma = \int\limits_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{U}) dV.$$

Тогда закон сохранения массы может быть записан в виде:

$$\int\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int\limits_{\Sigma} \rho \boldsymbol{U_n} d\sigma = \int\limits_{V} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \boldsymbol{U} \right) dV = 0.$$

Уравнение неразрывности

при эйлеровом описании:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \boldsymbol{U} = 0.$$

Уравнение неразрывности

для несжимаемой среды

Несжимаемая среда

среда, объём каждой индивидуальной частицы которой не меняется:

$$\rho = const, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой среды

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} = 0.$$

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

для материальной точки

Рассмотрим закон сохранения количества движения (импульса) сначала для материальной точки с массой m. Запишем для неё второй закон Ньютона:

$$m\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{F}.$$

Так как масса материальной точки постоянна, то

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{F}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{U}.$$

$\boldsymbol{Q}$ — количество движения или импульс точки.
Теперь второй закон Ньютона можно сформулировать в виде закона сохранения количества движения: **скорость изменения количества движения материальной точки равна силе, действующей на точку.**

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

для системы материальных точек

Рассмотрим теперь систему N материальных точек.
Для k-ой точки системы выполнено уравнение

$$\frac{d}{dt}(m_k \boldsymbol{U}_k) = \boldsymbol{F}_k^{(i)} + \boldsymbol{F}_k^{(e)}$$

Здесь сила, действующая на точку, представлена в виде суммы внутренней силы $\boldsymbol{F}_k^{(i)}$, то есть силы, действующей со стороны остальных точек рассматриваемой системы, и внешней силы $\boldsymbol{F}_k^{(e)}$, то есть силы, действующей со стороны объектов, не принадлежащих системе. Складывая эти равенства для всех точек системы и учитывая, что сумма внутренних сил равна нулю согласно третьему закону Ньютона, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{(e)}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{U}_k.$$

$\boldsymbol{Q}$ — количество движения системы материальных точек.

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

количество движения индивидуального объёма сплошной среды

Рассмотрим теперь индивидуальный объём V сплошной среды, ограниченный поверхностью Σ.

Закон сохранения количества движения для индивидуального объёма сплошной среды

скорость изменения количества движения индивидуального объёма сплошной среды равна сумме внешних сил, действующих на этот объём.

Скорости всех точек среды разные, тогда разобьём объём V на малые частицы, в пределах которых скорости всех точек можно считать одинаковыми. Масса малой частицы ρdV, её количество движения есть $\boldsymbol{U}\rho dV$.

Количество движения всего объёма V сплошной среды равно

$$\boldsymbol{Q} = \int\limits_V \boldsymbol{U}\rho dV.$$

Силы, действующие на среду делятся на **массовые** и **поверхностные**.

Массовые силы

силы, которые действуют на частицы внутри объёма и для малого объёма пропорциональны его массе.
Сумма массовых сил, действующих на весь объём V:

$$\int\limits_V \boldsymbol{F} \rho dV$$

где $\boldsymbol{F} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathcal{F}_{mass}}{\rho \Delta V}$ — плотность массовых сил (отношение силы к массе).

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

силы действующие на среду: массовые и поверхностные

Силы, действующие на среду делятся на **массовые** и **поверхностные**.

Поверхностные силы

силы, которые приложены к поверхности среды, и для малого элемента поверхности пропорциональны площади этого элемента.
Сумма поверхностных сил, действующих на всю поверхность Σ объёма V:

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{P_n} d\sigma$$

где $\boldsymbol{P_n} = \lim\limits_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta \mathcal{F}_{area}}{\Delta\sigma}$ — плотность поверхностных сил, которая называется **вектором напряжений**, действующим на площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$.

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

для индивидуального объёма сплошной среды

Закон сохранения количества движения для индивидуального объёма сплошной среды

Скорость изменения количества движения индивидуального объёма сплошной среды равна сумме внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объём.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} \boldsymbol{U}\rho dV = \int\limits_{V} \boldsymbol{F}\rho dV + \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{P_n} d\sigma.$$

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

дифференцирование по времени интеграла по подвижному объёму

Запишем формулу дифференцирования по времени интеграла по подвижному объ-ёму от некоторой функции $A(t,\boldsymbol{x}) = f(t,\boldsymbol{x})\rho(t,\boldsymbol{x})$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} f\rho dV = \int\limits_{V} \frac{\partial(f\rho)}{\partial t} dV + \int\limits_{\Sigma} f\rho \boldsymbol{U_n} d\sigma.$$

Поверхностный интеграл преобразуем по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} f\rho dV = \int\limits_{V}\left(\frac{\partial(f\rho)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(f\rho\boldsymbol{U})\right)dV = \int\limits_{V}\left(\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\right) + f\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{U})\right)\right)dV.$$

В силу уравнения неразрывности множитель при f в правом слагаемом равен 0.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_{\text{инд}}} f\rho dV = \int\limits_{V} \rho\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla} f\right) dV = \int\limits_{V} \rho\frac{df}{dt} dV.$$

Здесь $\frac{df}{dt}$ — полная (индивидуальная) производная функции времени и координат.

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

формула Коши для вектора напряжений

Следуя формуле дифференцирования по времени интеграла по подвижному объёму закон сохранения количества движения можно переписать в виде:

$$\int\limits_V \left(\frac{d\boldsymbol{U}}{dt}\rho - \boldsymbol{F}\rho\right) dV = \int\limits_\Sigma \boldsymbol{P_n} d\sigma.$$

Так как эта формула верна для любого объёма, то необходимо знать набор векторов напряжений $\boldsymbol{P_n}$, действующих на всевозможных площадках в данной выбранной точке, который будет определять напряженное состояние в данной точке.

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

формула Коши для вектора напряжений

Согласно Коши, вектор напряжений $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}$, действующий на площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$, можно выразить в виде линейной комбинации векторов напряжений $\boldsymbol{P}_k$, действующих на координатных площадках декартовой системы координат.

Формула Коши[1]

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{P}_1 n_1 + \boldsymbol{P}_2 n_2 + \boldsymbol{P}_3 n_3,$$

где n_i — компоненты вектора $\boldsymbol{n}$.

[1] Это не общепринятое название, но оно оправдывается тем, что Коши впервые (в 1822 году) получил эту формулу

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

тензор напряжений

Тензор напряжений

тензор $\boldsymbol{P_n}$, столбцы матрицы компонент которого в декартовой системе координат представляют собой компоненты векторов напряжений $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ на координатных площадках:

$$\boldsymbol{P}_1 = (p_{11}, p_{21}, p_{31}), \quad \boldsymbol{P}_2 = (p_{12}, p_{22}, p_{32}), \quad \boldsymbol{P}_3 = (p_{13}, p_{23}, p_{33}),$$

$$\boldsymbol{P_n} = \begin{pmatrix} p_{11}, & p_{12}, & p_{13} \\ p_{21}, & p_{22}, & p_{23} \\ p_{31}, & p_{32}, & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Механический смысл компонент тензора напряжений в декартовой системе координат: в декартовой системе координат p_{23} — это проекция вектора напряжений, действующего на площадке, перпендикулярной оси x_3, на ось x_2.

Закон сохранения количества движения (ЗСКД)

дифференциальные уравнения движения

Дифференциальные уравнения движения — это дифференциальные уравнения, которые следуют из закона сохранения количества движения.

$$\int\limits_V \frac{d\boldsymbol{U}}{dt}\rho dV = \int\limits_V \boldsymbol{F}\rho dV + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{P_n} d\sigma = \int\limits_V \boldsymbol{F}\rho dV + \int\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P_n} dV.$$

$$\int\limits_V \left(\rho\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} - \boldsymbol{F}\rho - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P_n}\right) dV = 0$$

Последнее выражение верно для любого объёма. Поэтому, если подынтегральное выражение непрерывно, то оно равно нулю. Следовательно, всюду в области непрерывного движения выполняется уравнение:

Уравнение движения

$$\rho\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{F}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P_n}.$$

Математические модели сплошной среды

Математическая модель сплошной среды или процесса это система уравнений и необходимых дополнительных условий, решая которые мы можем рассчитать интересующие нас характеристики процесса.

Чтобы построить математическую модель необходимо:

- выделить количественные характеристики среды или явления, которые существенны для данной задачи;
- написать полную систему уравнений, из которых можно вычислить интересующие характеристики;
- для каждого конкретного явления (конкретной задачи) необходимо указать граничные и начальные условия.

Жидкости и газы в механике сплошных сред

Жидкостью или газом в механике сплошных сред

называются среды, в которых в состоянии покоя отсутствуют касательные напряжения на любых площадках.
То есть на любой площадке в состоянии покоя

$$\boldsymbol{P_n} || \boldsymbol{n}$$

В твёрдых телах это не так: тяжёлый кирпич может лежать на наклонной плоскости, удерживаемый силой трения. Жидкий «кирпич» лежать на наклонной плоскости не может, жидкость будет течь.

Давление

В жидкостях и газах в состоянии покоя величина вектора $\boldsymbol{P_n}$ на всех площадках в данной точке одинакова: $\boldsymbol{P_n} = -p\boldsymbol{n}$, где p — **давление**.

Действительно, из формулы Коши: $\boldsymbol{P}_1 = p_{11}\boldsymbol{i} + p_{21}\boldsymbol{j} + p_{31}\boldsymbol{k} = p_{11}\boldsymbol{i}$, так как p_{21}, p_{31} — это касательные компоненты вектора $\boldsymbol{P}_1$, которые по определению жидкости равны нулю, если жидкость покоится.

Аналогично $\boldsymbol{P}_2 = p_{22}\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{P}_3 = p_{33}\boldsymbol{k}$.

В то же время: $\boldsymbol{P_n} = p_n\boldsymbol{n}$, где p_n — проекция вектора $\boldsymbol{P_n}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$.

По формуле Коши: $\boldsymbol{P_n} = p_{11}n_1\boldsymbol{i} + p_{22}n_2\boldsymbol{j} + p_{33}n_3\boldsymbol{k} = p_n(n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k})$.

Отсюда $p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p$, и $\boldsymbol{P_n} = -p\boldsymbol{n}$, где $(-p)$ — обозначение проекции вектора напряжений на нормаль к площадке, на которой он действует.

Идеальные жидкости и газы

При движении в жидкости возникают касательные напряжения. Они называются **вязкими напряжениями**. Иногда касательными напряжениями можно пренебречь, если они малы по сравнению с силами, вызванными давлением. Тогда используется модель идеальной жидкости.

Идеальные жидкости и газы

такие жидкости и газы, в которых не только в состоянии покоя, но и при движении отсутствуют касательные напряжения: $\boldsymbol{P_n} || \boldsymbol{n}$.

Матрица компонент тензора напряжений в идеальной жидкости имеет вид

$$\boldsymbol{P_n} = \begin{pmatrix} -p, & 0, & 0 \\ 0, & -p, & 0 \\ 0, & 0, & -p \end{pmatrix}, \quad P_{\boldsymbol{n}_{ij}} = -p\delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Дифференциальные уравнения движения

идеальных жидкостей или газов

Уравнения Эйлера

дифференциальные уравнения движения идеальных жидкостей или газов

$$\rho \frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} - \boldsymbol{\nabla} p.$$

Вязкие жидкости и газы

Вязкие жидкости и газы

жидкости и газы в которых при движении возможны касательные напряжения. Компоненты тензора напряжений в вязкой жидкости представляются в виде

$$\boldsymbol{P_n} = -p\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\tau}.$$

Где p — давление, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$ — метрический тензор, который равен единичному в декартовой системе координат, $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений.

Изотропная линейно вязкая или ньютоновская среда

Изотропная среда

среда, свойства которой по любому направлению одинаковы.

Линейно вязкая среда

среда, тензор вязких напряжений которой является линейной функцией тензора скоростей деформаций.

Тензор вязких напряжений для несжимаемой изотропной линейно вязкой среды

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{s}.$$

Здесь μ — коэффициент сдвиговой вязкости.

Дифференциальные уравнения движения

вязких жидкостей или газов

Уравнения Навье-Стокса

дифференциальные уравнения движения вязких жидкостей или газов

$$\rho \frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} - \boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Полная система уравнений несжимаемой изотропной линейно-вязкой жидкости

Полная система уравнений несжимаемой изотропной линейно-вязкой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости

состоит из уравнения неразрывности, условия несжимаемости и уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0, \\ \dfrac{d\rho}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\boldsymbol{U}}{dt} = \boldsymbol{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{U}, \quad \nu = \dfrac{\mu}{\rho}. \end{cases}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, μ — динамическая.

Задачи

1. Показать, что $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P_n} = -\boldsymbol{\nabla} p$ для идеальной жидкости. (Использовать покомпонентную запись)
2. Показать, что $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mu \Delta \boldsymbol{U}$ для несжимаемой изотропной линейно вязкой жидкости. (Использовать покомпонентную запись)

Ответы

Показать, что $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P_n} = -\boldsymbol{\nabla} p$ для идеальной жидкости. (Использовать покомпонентную запись)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P_n} = \nabla_k P_{\boldsymbol{n}ik} = \nabla_k(-p)\delta_{ik} = -\nabla_k p = -\boldsymbol{\nabla} p$$

Задачи

Показать, что $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = \mu\Delta\boldsymbol{U}$ для несжимаемой изотропной линейно вязкой жидкости. (Использовать покомпонентную запись)

$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{s}$, $\tau_{ij} = 2\mu s_{ij}$ для изотропной линейно вязкой жидкости, следовательно

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau} = \nabla_k\tau_{ik} = 2\mu\nabla_k s_{ik},$$

так как тензор скоростей деформаций имеет вид: $\boldsymbol{s} = 0.5\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{U} + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{U})^T\right)$, $s_{ij} = 0.5(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i)$, тогда

$$\mu\nabla_k(\nabla_i U_k+\nabla_k U_i) = \mu\nabla_k\nabla_i U_k+\mu\nabla_k\nabla_k U_i = \mu\nabla_i\nabla_k U_k+\mu\nabla_k\nabla_k U_i = \mu\nabla_k\nabla_k U_i = \mu\Delta\boldsymbol{U},$$

здесь $\nabla_i\nabla_k U_k$ — градиент от дивергенции скорости (для несжимаемого течения дивергенция скорости равна 0), $\nabla_k\nabla_k U_i$ — определяет оператор Лапласа от скорости.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Список литературы