Применение СПО для решения задач аэро- и газовой динамики

Лекция 1. Базовые понятия

Преподаватель: Романова Дарья Игоревна

Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, Москва

2023

Аэродинамика

Аэродинамика есть часть аэромеханики.

Аэромеханика

наука, раздел механики, изучающий равновесие и движение газообразных сред и силовое взаимодействие этих сред с погружёнными в них твёрдыми телами.

Аэромеханика подразделяется на аэродинамику и аэростатику и является частным случаем механики сплошных сред.

Механика сплошных сред

раздел механики, физики сплошных сред и физики конденсированного состояния, посвящённый движению газообразных, жидких и деформируемых твёрдых тел, а также силовым взаимодействиям в таких телах.

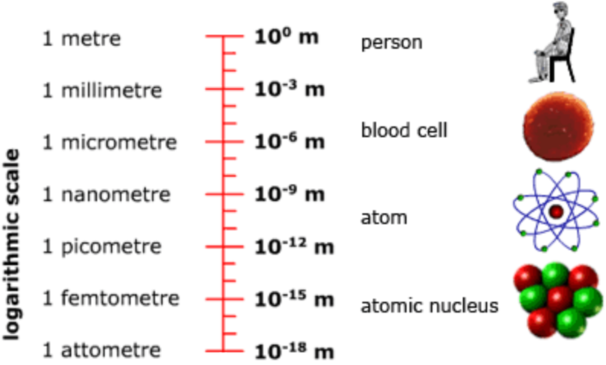
Сплошная среда

это среда, заполняющая занятую ею область непрерывно, то есть в любом сколь угодно малом объёме этой области содержится масса.

Понятие сплошной среды

В действительности все среды имеют дискретное строение, состоят из из частиц, находящихся часто на большом (по сравнению с размерами частиц) расстоянии друг от друга. Например, радиус молекулы водорода $\approx 10^{-8}$ см, а радиус ядра (в котором в основном и сосредоточена масса) $\approx 10^{-13}$ см, то есть размер ядра в 100 000 раз меньше размера молекулы. Расстояние между молекулами в газе $\approx 10^{-5}$ см, то есть в 1000 раз больше, чем размер самой молекулы.

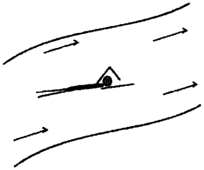
В то же время расстояния между частицами обычно много меньше размеров изучаемых тел. Например, в воздухе при нормальных условиях в кубике со стороной 0.001 см содержится 27 миллиардов молекул.



Понятие сплошной среды

Оказывается, если изучается явление, масштаб которого L много больше расстояния между частицами и размера частиц, то можно считать массу размазанной по непрерывно по всей области, занятой средой, то есть использовать модель сплошной среды. Как потоки сплошной среды можно рассматривать даже потоки камней (камнепад на склоне горы), или зерна, или других крупных частиц, если ширина и глубина потока много больше размера частиц.

Системы координат



Эйлеровы координаты

Координаты точек среды в пространственной системе координат называются пространственными или эйлеровыми координатами.При движении среды пространственные координаты индивидуальных точек среды являются функциями времени и «имени» точки: $x_i = x_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$

Лагранжевы коорддинаты

Параметры ξ_i, которые выделяют индивидуальные точки среды, называются материальными или лагранжевыми координатами.Для индивидуальной точки они не меняются в процессе движения.

Материальная (индивидуальная) производная по времени

Материальная, или индивидуальная, производная по времени

от величины f описывает, как меняется со временем величина f в индивидуальной точке среды.Обычно материальная производная функции f обозначается $\frac{df}{dt}$.

При лагранжевом описании $(f = f(t, \xi_i))$

индивидуальная производная есть просто частная производная по t, так как $\xi_i = const$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(t, \xi_i)}{\partial t}.$$

При эйлеровом описании $(f = f(t, x_i), \quad x_i = x_i(t, \xi_k))$

индивидуальная производная вычисляется как производная сложной функции:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(t, x_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x_i)}{\partial x_{\boldsymbol{j}}} \frac{\partial x_{\boldsymbol{j}}(t, \xi_k)}{\partial t} = \frac{\partial f(t, x_i)}{\partial t} + u_{\boldsymbol{j}} \frac{\partial f(t, x_i)}{\partial x_{\boldsymbol{j}}} \quad [1]$$

[1] **Соглашение о суммировании:** если в одночленном выражении какой-то индекс повторяется дважды, то по этому индексу производится суммирование от 1 до 3.

Операции над векторами и тензорами

Вектор

задаётся в виде строки

$$\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, U_3)$$

Тензор

задаётся в виде матрицы

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11}, & \tau_{12}, & \tau_{13} \\ \tau_{21}, & \tau_{22}, & \tau_{23} \\ \tau_{31}, & \tau_{32}, & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

Умножение вектора на число

$$\lambda \boldsymbol{U} = (\lambda U_1, \lambda U_2, \lambda U_3)$$

Умножение тензора на число

$$\lambda \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \lambda\tau_{11}, & \lambda\tau_{12}, & \lambda\tau_{13} \\ \lambda\tau_{21}, & \lambda\tau_{22}, & \lambda\tau_{23} \\ \lambda\tau_{31}, & \lambda\tau_{32}, & \lambda\tau_{33} \end{pmatrix}$$

Операции над векторами и тензорами

Сложение векторов

$$\boldsymbol{U}+\boldsymbol{V}=(U_1+V_1,U_2+V_2,U_3+V_3)=\boldsymbol{Y},$$

$$Y_i=U_i+V_i.$$

Сложение тензоров

$$\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\varsigma}=\begin{pmatrix}\tau_{11}+\varsigma_{11}, & \tau_{12}+\varsigma_{12}, & \tau_{13}+\varsigma_{13}\\ \tau_{21}+\varsigma_{21}, & \tau_{22}+\varsigma_{22}, & \tau_{23}+\varsigma_{23}\\ \tau_{31}+\varsigma_{31}, & \tau_{32}+\varsigma_{32}, & \tau_{33}+\varsigma_{33}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\varsigma},\quad \chi_{ij}=\tau_{ij}+\varsigma_{ij}.$$

Операции над векторами и тензорами

Векторное умножение

$$
\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ U_1, & U_2, & U_3 \\ V_1, & V_2, & V_3 \end{vmatrix} = (U_3 V_2 - U_2 V_3, \quad U_1 V_3 - U_3 V_1, \quad U_2 V_1 - U_1 V_2) = \boldsymbol{Y},
$$

где $|\cdot|$ — определитель матрицы,

$$
Y_k = U_j V_i - U_i V_j,
$$

где (i, j, k) — круговая перестановка из $(1, 2, 3)$.

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} -
$$

$$
- \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
= 0 + 70 - 9 - 84 + 0 + 12 = -11.
$$

Операции над векторами и тензорами

Скалярное умножение

$$\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V}^T = (U_1, U_2, U_3) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = U_i V_i.$$

Скалярное произведение векторов:

- есть скаляр, и не зависит от выбора системы координат;
- не зависит от порядка сомножителей;
- обладает свойством линейности: $\boldsymbol{W} \cdot (\lambda \boldsymbol{U} + \nu \boldsymbol{V}) = \lambda(\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{U}) + \nu(\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{V})$, где λ, ν — скаляры.

Операции над векторами и тензорами

Тензорное (полиадное, неопределённое, внешнее) умножение

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^T \cdot \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} (V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} U_1 V_1, & U_1 V_2, & U_1 V_3 \\ U_2 V_1, & U_2 V_2, & U_2 V_3 \\ U_3 V_1, & U_3 V_2, & U_3 V_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y},$$

$$Y_{ij} = U_i V_j.$$

Свойства тензорного произведения:

- зависит от порядка сомножителей $\boldsymbol{U}\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}$;
- линейная операция: $\boldsymbol{W} \cdot (\lambda \boldsymbol{U} + \nu \boldsymbol{V}) = \lambda(\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{U}) + \nu(\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{V})$, где λ, ν — скаляры;
- не зависит от выбора системы координат.

Набла

Оператор набла

векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам. Обозначается символом $\boldsymbol{\nabla}$ (набла).

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Через оператор набла естественным способом выражаются операции grad (градиент), div (дивергенция), rot (ротор), а также оператор Лапласа.

Оператор набла не совсем вектор: скалярное и векторное произведение для него определено с некоторыми отличиями (оператор действует на те поля, что стоят от него справа, и не действует на стоящие от него слева, из-за чего скалярное и векторное произведение с участием $\boldsymbol{\nabla}$ не коммутативны и не антикоммутативны, как это свойственно для таких произведений обычных векторов).

Градиент

Градиент (от лат. gradiens, род. п. gradientis «шагающий, растущий»)

вектор, своим направлением указывающий направление возрастания (а антиградиент - убывания) некоторой скалярной величины φ (значение которой меняется от одной точки пространства к другой, образуя скалярное поле), а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении. Если умножить вектор $\boldsymbol{\nabla}$ на функцию φ, то получится вектор градиента:

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) = \mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{\psi},$$

$$\psi_i = \nabla_i\varphi.$$

Градиент скорости

Градиент скорости

$$\boldsymbol{\nabla U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla} U_1 \\ \boldsymbol{\nabla} U_2 \\ \boldsymbol{\nabla} U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial U_3}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial U_3}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{L}.$$

$$L_{ij} = \nabla_i U_j$$

Градиент скорости раскладывается на симметричный тензор $\boldsymbol{s}$ (тензор скоростей деформаций) и кососимметричный тензор $\boldsymbol{r}$ (тензор вихря).

$$\boldsymbol{s} = 0.5\left(\boldsymbol{\nabla U} + 0.5(\boldsymbol{\nabla U})^T\right), \quad \boldsymbol{r} = 0.5\left(\boldsymbol{\nabla U} - (\boldsymbol{\nabla U})^T\right).$$

Дивергенция

Дивергенция (от лат. divergere — обнаруживать расхождение)

определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле».
Если скалярно умножить вектор $\boldsymbol{\nabla}$ на вектор $\boldsymbol{U}$, то получится скаляр:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \mathrm{div}\boldsymbol{U} = \nabla_k U_k.$$

Физическая интерпретация (если $\boldsymbol{U}$ — абстрактное векторное поле):

- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} > 0$ — точка поля является источником,
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} < 0$ — точка поля является стоком,
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} = 0$ — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Механический смысл (если $\boldsymbol{U}$ — скорость):
дивергенция скорости определяет скорость относительного изменения объёма при движении среды.

Дивергенция тензора

Дивергенция тензора

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\tau}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\tau_{11}, & \tau_{12}, & \tau_{13})\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\tau_{21}, & \tau_{22}, & \tau_{23})\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot(\tau_{31}, & \tau_{32}, & \tau_{33})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\tau_{13}}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial\tau_{21}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\tau_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\tau_{23}}{\partial x_3}\\ \dfrac{\partial\tau_{31}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\tau_{32}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\tau_{33}}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\nabla_k\tau_{ik}.$$

Ротор

Ротор, ротация или вихрь

векторный дифференциальный оператор над векторным полем, характеризующий вращательную составляющую поля в соответствующих точках.

Если ∇ умножить на $\boldsymbol{U}$ векторно, то получится ротор вектора $\boldsymbol{U}$ (если $\boldsymbol{U}$ — скорость, то $0.5(\nabla \times \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{\omega}$ — вектор вихря):

$$\nabla \times \boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ U_1, & U_2, & U_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) = \operatorname{rot}\boldsymbol{U} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Оператор Лапласа

Оператор Лапласа

скалярное произведение $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}^2$ есть скалярный оператор, называемый оператором Лапласа:

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \nabla_i \nabla_i \varphi.$$

Тензор деформаций

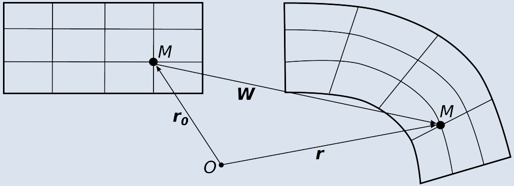
Тензор деформаций

Тензорная физическая величина, характеризующая деформацию среды.

$$\varepsilon = 0.5\left(\nabla \boldsymbol{W} + (\nabla \boldsymbol{W})^T\right),$$

$$s_{ij} = 0.5\left(\nabla_i W_j + \nabla_j W_i\right),$$

где $\boldsymbol{W}$ — вектор перемещения индивидуальной точки.



Механический смысл компонент тензора деформаций Диагональные компоненты тензора деформаций показывают коэффициенты относительного удлинения отрезков, лежащих вдоль соответствующих осей. Внедиагональные компоненты равны половине изменения угла между соответствующими осями в данный момент времени.

Тензор скоростей деформаций

Тензор скоростей деформаций

Тензорная физическая величина, характеризующая скорость деформации среды.

$$\boldsymbol{s} = \frac{d\varepsilon}{dt} = 0.5\left(\boldsymbol{\nabla U} + (\boldsymbol{\nabla U})^T\right)$$

$$s_{ij} = 0.5\left(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i\right)$$

Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций

Диагональные компоненты тензора скоростей деформаций показывают скорость относительного удлинения отрезков, лежащих вдоль соответствующих осей.

Внедиагональные компоненты равны половине скорости изменения угла между соответствующими осями в данный момент времени.

Тензор вихря. Вектор вихря

Вектор вихря

$$\boldsymbol{\omega} = 0.5(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{U})$$

$$\omega_k = 0.5(\nabla_i U_j - \nabla_j U_i),$$

где (i, j, k) — круговая перестановка из $(1,\ 2,\ 3)$.

Механический смысл вектора вихря: это угловая скорость вращения частицы, которую частица имела бы, если бы она мгновенно затвердела.

Тензор вихря

$$\boldsymbol{r} = 0.5\left(\boldsymbol{\nabla U} - (\boldsymbol{\nabla U})^T\right)$$

$$r_{ij} = 0.5\left(\nabla_i U_j - \nabla_j U_i\right)$$

Тензор вихря кососимметричный, в следствии чего у него всего 3 отличных от нуля компоненты, которые задают вектор вихря:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0, & -\omega_3, & \omega_2 \\ \omega_3, & 0, & -\omega_1 \\ -\omega_2, & \omega_1, & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема Коши-Гельмгольца

о распределении скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды

Рассмотрим некоторую точку M сплошной среды с координатами $\boldsymbol{X}$ и её малую окрестность. Пусть точка M' с координатами $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{dX}$ — некоторая произвольная точка малой окрестности точки M. Используя формулу Тейлора можем записать

$$\boldsymbol{U}(M') = U(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{dX}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{X}) + \nabla\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{dX} =$$

$$= \boldsymbol{U}(M) + 0.5(\nabla\boldsymbol{U} + (\nabla\boldsymbol{U})^T) \cdot \boldsymbol{dX} + 0.5(\nabla\boldsymbol{U} - (\nabla\boldsymbol{U})^T) \cdot \boldsymbol{dX} = \boldsymbol{U}(M) + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{dX} + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{dX}$$

Теорема Коши-Гельмгольца

Движение малой частицы сплошной среды можно представить как сумму:

1. поступательного движения со скоростью $\boldsymbol{U}(M)$,
2. движения, связанного с деформареванием, которое описывается скоростью $\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{dX}$,
3. вращения как твёрдого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (выражается через $\boldsymbol{r}$).

Потенциал скорости. Циркуляция скорости

Потенциалом скорости

называется такая функция φ, что для вектора скорости $\boldsymbol{U}$ выполнена формула

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla}\varphi.$$

То есть $U_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

Циркуляцией скорости

по линии AB называется следующий интеграл по линии AB:

$$\Gamma_{AB} = \int\limits_A^B \boldsymbol{U_L} dL,$$

где $\boldsymbol{U_L}$ — проекция скорости на касательную к линии AB, L — расстояние вдоль линии AB.

Циркуляция по замкнутому контуру:

$$\Gamma = \oint\limits_C \boldsymbol{U_L} dL.$$

Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса

Формула Гаусса-Остроградского

преобразует интеграл по объёму в интеграл по поверхности, ограничивающей этот объём.

$$\int\limits_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} dV = \int\limits_\Sigma \boldsymbol{U_n} d\sigma.$$

Формула Стокса

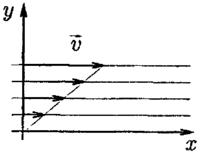
связывает интеграл по замкнутому контуру C с интегралом по поверхности Σ, натянутой на этот контур.

$$\Gamma = \oint\limits_C \boldsymbol{U_L} dL = 2 \int\limits_\Sigma \boldsymbol{\omega_n} d\sigma.$$

То есть она связывает циркуляцию и вихрь.

Задачи

1. Расписать покомпонентно (для U_i) уравнения решателя `pimpleFoam`, если
$$\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, U_3),\ \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13} \\ \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23} \\ \tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33} \end{pmatrix}:$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}.$$
2. Доказать, что всякое безвихревое движение является потенциальным, а всякое потенциальное — безвихревым. (Второе утверждение — задача со *)
3. Вычислить вектор вихря для течения в котором $U_1 = ax_2, U_2 = U_3 = 0, a = const.$



Ответы

Задача 1

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}) = -\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Эквивалентно

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1 U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1 U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_1 U_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_2 U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2 U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2 U_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial t} + \frac{\partial U_3 U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3 U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3 U_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}.$$

Ответы

Задача 2

Доказать, что всякое безвихревое движение является потенциальным, а всякое потенциальное — безвихревым.

Пусть $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$. Покажем, что $\boldsymbol{\omega} = 0$.

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2}\right) = 0.$$

Аналогично показывается, что $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$.

Ответы

Задача 2

Пусть теперь $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Рассмотрим дифференциальную форму $U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3$. Из математического анализа известно, что эта форма локально представляет собой полный дифференциал некоторой функции φ если и только если

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2}.$$

Эти условия выполнены, если $\boldsymbol{\omega} = 0$. Таким образом, при $\boldsymbol{\omega} = 0$:

$$U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3 = d\varphi.$$

Отсюда

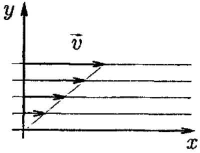
$$U_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad U_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad U_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

то есть $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla} \varphi$.

Ответы

Задача 3

Вычислить вектор вихря для течения в котором $U_1 = ax_2, U_2 = U_3 = 0, a = const$.



Компоненты вектора вихря в этом течении таковы:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) = -\frac{a}{2}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Список литературы