Teiloro ir Lorano eilutės

1 pavyzdys. Funkciją $f(x) = 5x^2 - 10x - 4\sin x$ išskleisime Teiloro eilute taškų $a = 0$ ir $b = -2$ aplinkose. Palyginsime gautų eilučių grafikus su duotos funkcijos grafiku.

Sintaksė:

T = taylor(funkcija,kintamasis)

T = taylor(funkcija,kintamasis, taškas kurio aplinkoje skleidžiame)

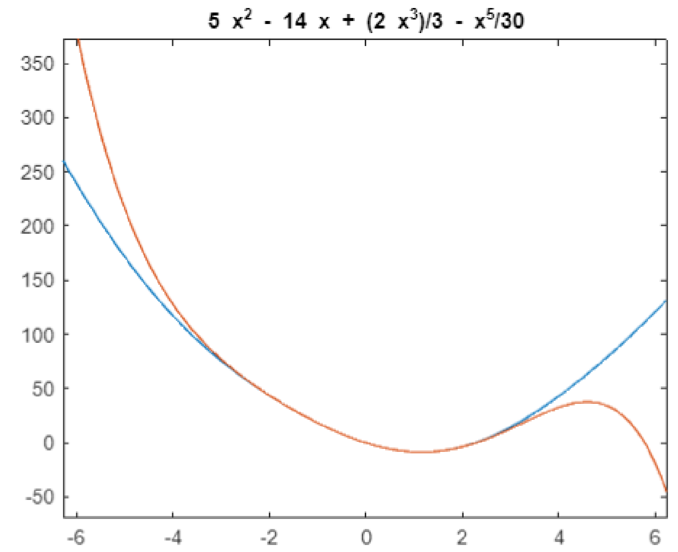
T = taylor(funkcija,kintamasis, ExpansionPoint = taškas kurio aplinkoje skleidžiame)

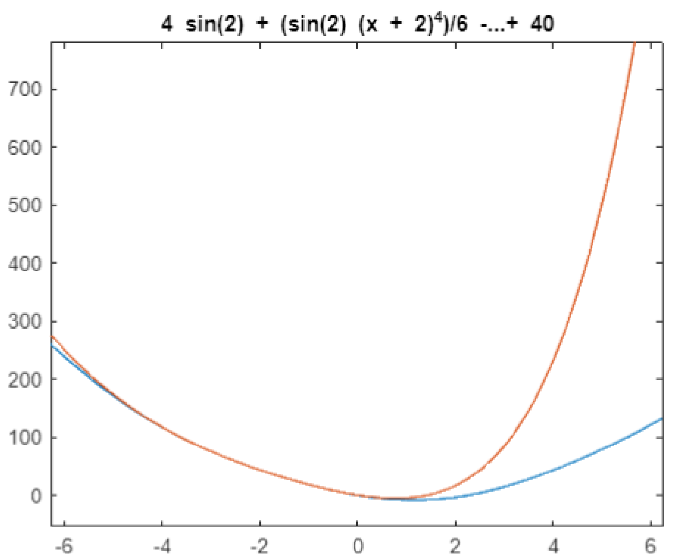
Pastabos.

1. ***Pagal nutylėjimą eilutė sudarom iki x^5***
2. ***Jeigu nenurodome taško, kurio aplinkoje skleisime, Matlab laikys, kad jis lygus nuliui.***

<table>
<tr><th>Komandos</th><th>Rezultatas</th></tr>
<tr><td>
<pre>
clear all
syms x
f=5*x^2-10*x-4*sin(x);
taylor_serie1=taylor(f);
taylor_serie2 =
taylor(f,x,ExpansionPoint=-2);

ezplot(f)
hold on
ezplot(taylor_serie1)
hold off

ezplot(f)
hold on
ezplot(taylor_serie2)
hold off
</pre>
</td><td>




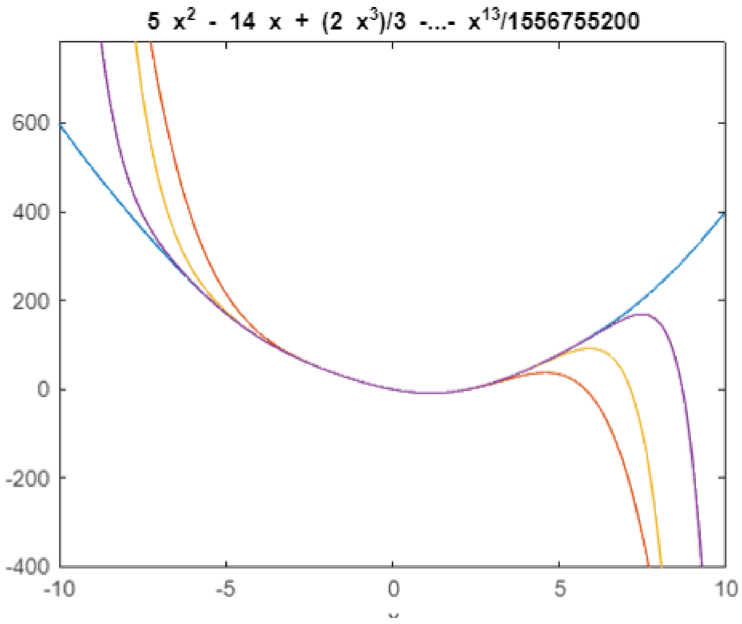
</td></tr>
</table>

Tikslumą galima didinti. Kuo daugiau narių imsime, tuo tikslesnį rezultatą gausime.

taylor(f,x,Order=narių skaičius)

2 pavyzdys. Funkciją $f(x) = 5x^2 - 10x - 4\sin x$ išskleisime Teiloro eilute taško $a = 0$ aplinkoje su 5, 10 ir 15 narių. Palyginsime gautų eilučių grafikus su duotos funkcijos grafiku.

<table>
<tr><th>Komandos</th><th>Rezultatas</th></tr>
<tr><td><pre><code>clear all
syms x
f=5*x^2-10*x-4*sin(x);
taylor_serie1=taylor(f);
taylor_serie2=taylor(f,x,Order=10);
taylor_serie3=taylor(f,x,Order=15);

ezplot(f,[-10,10])
hold on
ezplot(taylor_serie1,[-10,10])
hold on
ezplot(taylor_serie2,[-10,10])
hold on
ezplot(taylor_serie3,[-10,10])
hold off</code></pre></td><td>
</td></tr>
</table>

3 pavyzdys. Išskleisime funkciją $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ Lorano eilute kai $z_0 = 1$.

Sprendimas. Funkcija yra analizinė visoje plokštumoje išskyrus taškus $z_1 = 0$ ir $z_2 = 3$. Iš centro $z_0 = 1$ brėžiame apskritimus, kurių spinduliai yra z_0 atstumai iki z_1 ir z_2:

$$\begin{aligned} D_1&: \quad |z-1| < 1 \\ D_2&: \quad 1 < |z-1| < 2 \\ D_3&: \quad 2 < |z-1| < \infty \end{aligned}$$

1. $|z-1| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(z-1)-2} - \frac{1}{(z-1)+1}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} - \frac{1}{1+(z-1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k\right) = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k+1}} + (-1)^k\right)\cdot(z-1)^k$$

2. $1 < |z-1| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(z-1)-2} - \frac{1}{(z-1)+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(-2)\cdot\left(1-\frac{z-1}{2}\right)} - \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k - \frac{1}{z-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z-1)^k}\right)$$

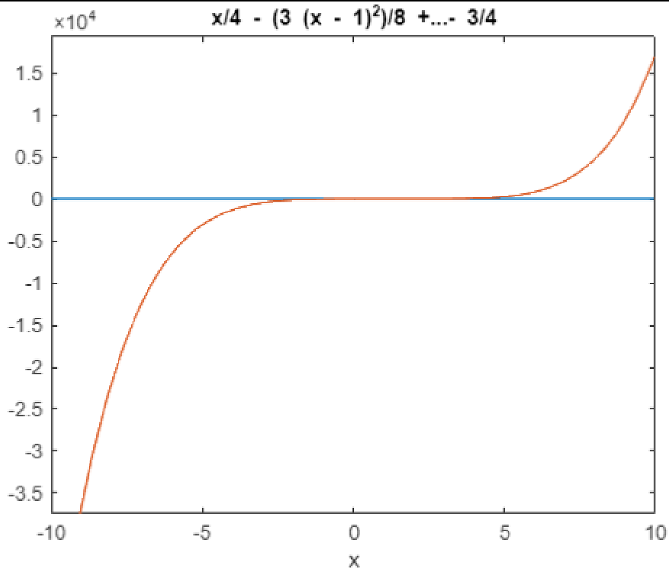
3. $2 < |z-1| < \infty$

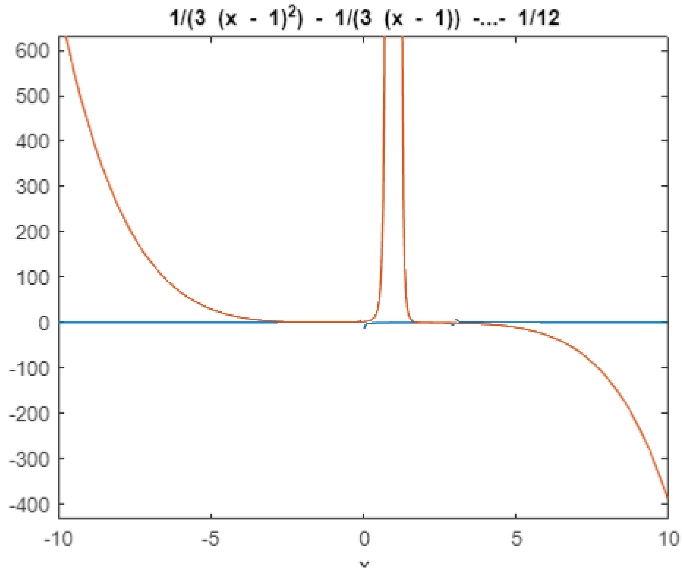
$$f(z) = \frac{1}{z(z-3)} = \frac{1}{3(z-1)}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}} - \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}\right) = \frac{1}{3(z-1)}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z-1)^k}\right) =$$

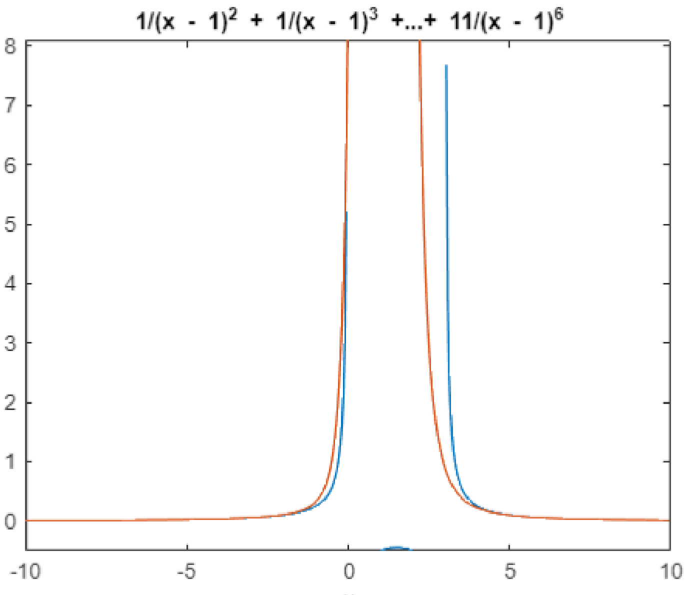
$$= \frac{1}{3(z-1)} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2^k - (-1)^k) \cdot \frac{1}{(z-1)^{k+1}} \right)$$

Komandos	Rezultatas

```
clear all
syms x k
f=1/(x*(x-3))


% Sudarysime tris skirtingas formules kiekvienam iš intervalų
% Eilutes skaičiuosime ne iki begalybės, o iki kokio nors nario
f1=0;
f2=0;
f3=0;
for n=0:1:5
f1=f1+simplify(subs(-1/3*(1/2^(k+1)+(-1)^k)*(x-1)^k ,k,n));
f2=f2+simplify(subs(1/3*(-1/2 *((x-1)/2)^k - 1/(x-1)*(-1)^k/(x-1)^k) ,k,n));
f3=f3+simplify(subs(1/(3*(x-1))*((2^k-(-1)^k))*1/(x-1)^k ,k,n));
end


ezplot(f,[-10,10])
hold on
ezplot(f1,[-10,10])
hold off


ezplot(f,[-10,10])
hold on
ezplot(f2,[-10,10])
hold off


ezplot(f,[-10,10])
hold on
ezplot(f3,[-10,10])
hold off
```







Pastaba. Galima skleisti funkciją kitaip:

```
ff=series(f)
ezplot(f,[-10,10])
hold on
ezplot(ff,[-10,10])
hold off
```

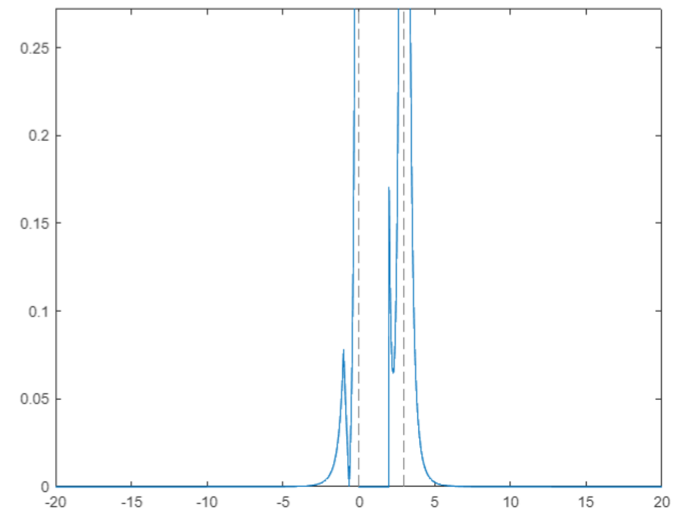
Palyginkite rezultatą (brėžinys čia nepateikiamas)

Kaip matome iš pateiktų iliustracijų, kiekviena formulė aproksimuoja funkciją atitinkamame intervale. Šias funkcijų išraiškas galime apjungti ir patikrinti, kokią paklaidą padarėme. Didžiausios paklaidos bus singuliarumo taškų aplinkose. Paklaidos mažės, jei imsime daugiau narių (tą galite patikrinti savarankiškai)

Komandos

```
combined_f=simplify(piecewise(x<-1, f3,
x<0, f2, x<2, f, x<3, f2, x>3, f3))

error=abs(combined_f-f)
fplot(error,[-20,20])
```

Rezultatas



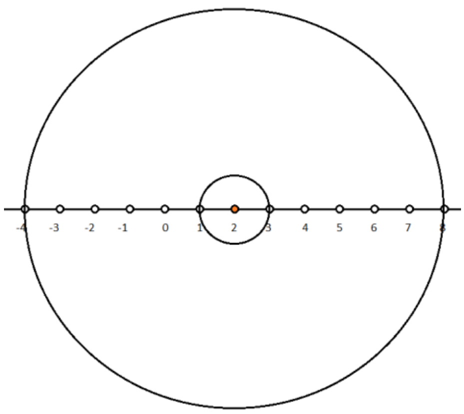
4 pavyzdys. Išskleiskite funkciją $f(z)=\frac{12z-81}{z^2-11z+24}$ Lorano eilute taško $z_0=2$ aplinkoje. Palyginkite gautos eilutės ir funkcijos grafikus.

Komandos

Nubraižykime duotos funkcijos grafiką ir pakeiskime funkcijos išraišką dviejų trupmenų suma.

```
clear all
syms x k t
f=(12*x-81)/(x^2-11*x+24)
ezplot(f,[-10,10])
partfrac(f)
```

Pasinaudodami gauta informacija padalinkime plokštumą į sritis:



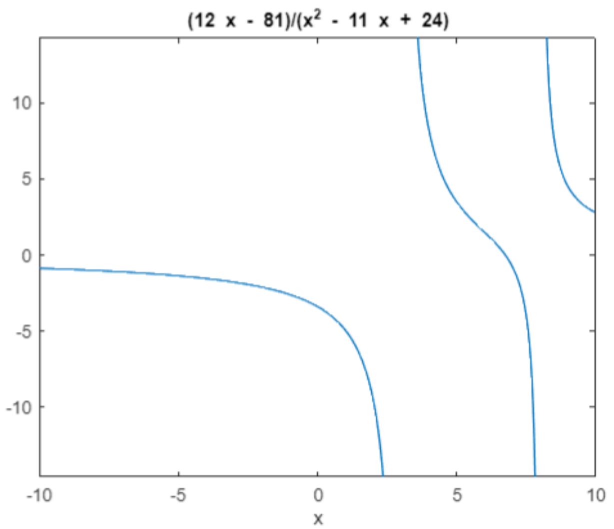
Jų bus trys:

$$D_1:\quad |z-2|<1$$
$$D_2:\quad 1<|z-2|<6$$
$$D_3:\quad 6<|z-2|<\infty$$

Rezultatas

f =

$$\frac{12\,x-81}{x^2-11\,x+24}$$



ans =

$$\frac{9}{x-3}+\frac{3}{x-8}$$

Kiekvienoje šių sričių panaudosime Matlab funkcijas, neskleisime funkcijos eilute patys.

Pirma, sudarysime abiejų trupmenų Teiloro eilutes (šios formulės bus naudojamos atitinkamų apskritimų viduje)

```
function_1=9/(x-3)
function_2=3/(x-8)


F_1=taylor(function_1, x, 2, Order=10)
F_3=taylor(function_2, x, 2, Order=10)
```

function_1 =

$$\frac{9}{x-3}$$

function_2 =

$$\frac{3}{x-8}$$

F_1 =

$$9-9\,(x-2)^2-9\,(x-2)^3-9\,(x-2)^4-9\,(x-2)^5-9\,(x-2)^6-9\,(x$$

F_3 =

$$-\frac{x}{12}-\frac{(x-2)^2}{72}-\frac{(x-2)^3}{432}-\frac{(x-2)^4}{2592}-\frac{(x-2)^5}{15552}-\frac{(x-2)^6}{93312}-\frac{(x-2)^7}{559872}-$$

Dabar turime sudaryti formules apskritimų išorei. Tam darysime keitinį $t = 1/(x-2)$, taigi $x = \frac{1}{t} + 2$. Toks keitinys leis skleisti funkciją $(x-2)$ laipsniais:

```
y=subs(function_1,x,1/t)
tay=taylor(y,t,Order=10)
F_2=subs(tay, t, 1/x)


y=subs(function_2,x,1/t)
tay=taylor(y,t,Order=10)
F_4=subs(tay, t, 1/x)
```

y =

$$\frac{9}{\frac{1}{t}-1}$$

tay = $9\,t^9+9\,t^8+9\,t^7+9\,t^6+9\,t^5+9\,t^4+9\,t^3+9\,t^2+9\,t$

F_2 =

$$\frac{9}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}+\frac{9}{(x-2)^3}+\frac{9}{(x-2)^4}+\frac{9}{(x-2)^5}+\frac{9}{(x-2)^6}+\frac{9}{(x-2)^7}+$$

y =

$$\frac{3}{\frac{1}{t}-6}$$

tay =

$$5038848\,t^9+839808\,t^8+139968\,t^7+23328\,t^6+3888\,t^5+648\,t^4+108$$

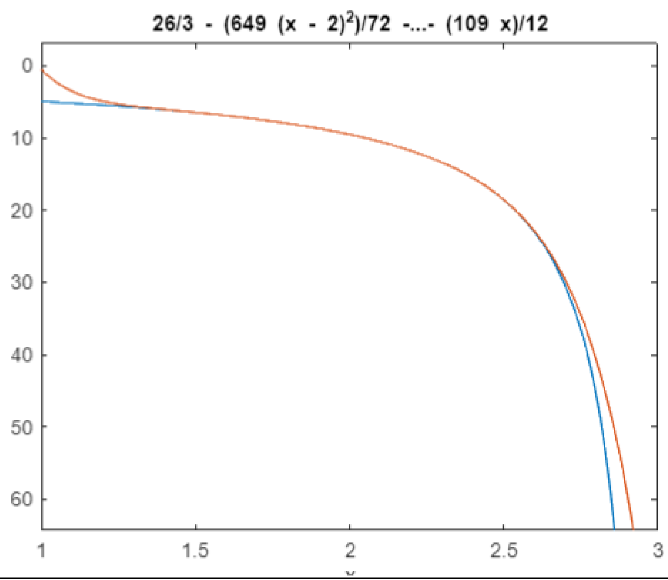
F_4 =

$$\frac{3}{x-2}+\frac{18}{(x-2)^2}+\frac{108}{(x-2)^3}+\frac{648}{(x-2)^4}+\frac{3888}{(x-2)^5}+\frac{23328}{(x-2)^6}+\frac{139968}{(x-2)^7}+$$

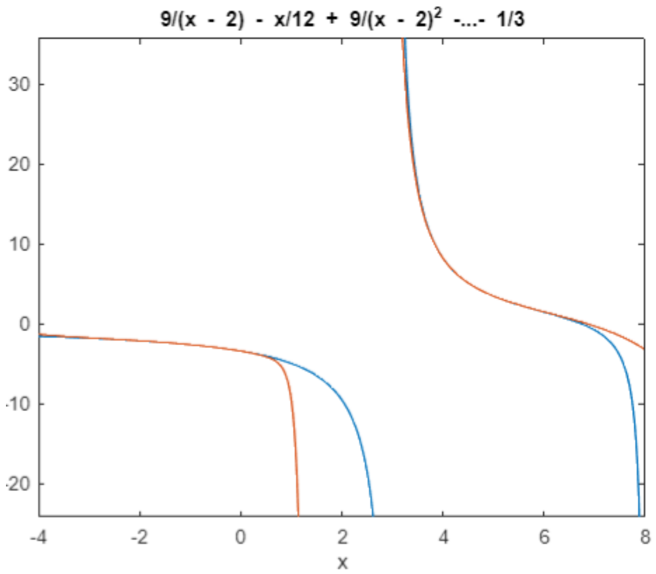
Sričiai D_1 imsime $F_1 + F_3$, sričiai D_2 imsime $F_2 + F_3$, ir sričiai D_3 - sumą $F_2 + F_4$

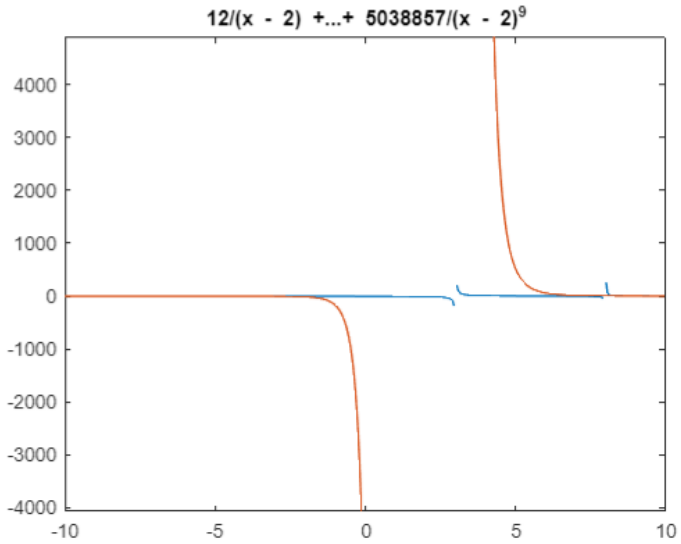
Sukonstruokime funkcijas ir nubraižykime grafikus:

```
f1=F_1+F_3;
f2=F_2+F_3;
f3=F_2+F_4;

ezplot(f,[1,3])
hold on
ezplot(f1,[1,3])
hold off
```



```
ezplot(f,[-6,8])
hold on
ezplot(f2,[-6,8])
hold off

ezplot(f,[-10,10])
hold on
ezplot(f3,[-10,10])
hold off
```





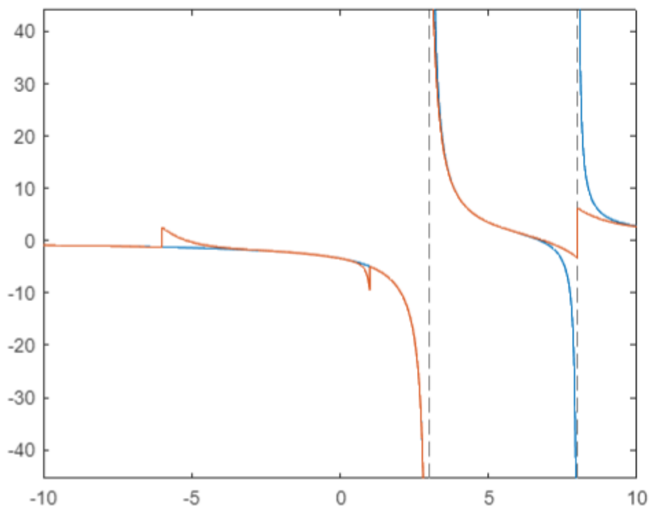
Pastabos:

Galime matyti, kad kiekvienoje iš sričių D_1, D_2 ir D_3 skleidinių ir funkcijos grafikai pakankamai panašūs. Galime šias formules apjungti ir palyginti su duotąja funkcija viename brėžinyje (pav. apačioje). Tačiau, jei narių skleidiniuose bus labai daug, Matlab ne visada sugeba tokį brėžinį atvaizduoti ir jis atrodys „tuščias“.

Tokiais atvejais galima supaprastinti išraiškas (komanda *simplify)* arba vietoje *ezplot* ir *fplot* naudoti kitas funkcijų grafikų vaizdavimui tinkančias funkcijas (pavyzdžių galite rasti kitų laboratorinių darbų aprašymuose).

Apjungtas grafikas

```
combined_f=simplify(piecewise(x<-6, f3,
x<1, f2, x<3, f, x<8, f2, x>8, f3))
fplot(f, [-10,10])
hold on
fplot(combined_f,[-10,10])
hold off
```



26 UŽDUOTIS

Išskleiskite funkciją f(z) Lorano eilute nurodytoje srityje.

26.0 $f(z)=\dfrac{6z-14}{z^2-4z+3}$, $1<|z|<3$;

26.1 $f(z)=\dfrac{11z-56}{z^2-10z+24}$, $4<|z|<6$;

26.2 $f(z)=\dfrac{2z-9}{z^2-9z+20}$, $4<|z|<5$;

26.3 $f(z)=\dfrac{8z-11}{z^2-3z+2}$, $1<|z|<2$;

26.4 $f(z)=\dfrac{13z-27}{z^2-3z+3}$, $1<|z|<3$;

26.5 $f(z)=\dfrac{10z-26}{z^2-5z+6}$, $2<|z|<3$;

26.6 $f(z)=\dfrac{5z-27}{z^2-10z+24}$, $4<|z|<6$;

26.7 $f(z)=\dfrac{7z-22}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

26.8 $f(z)=\dfrac{10z-25}{z^2-5z+6}$, $2<|z|<3$;

26.9 $f(z)=\dfrac{7z-25}{z^2-5z+4}$, $1<|z|<4$;

26.10 $f(z)=\dfrac{6z-14}{z^2-6z+5}$, $1<|z|<5$;

26.11 $f(z)=\dfrac{5z-16}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

26.12 $f(z)=\dfrac{10z-26}{z^2-6z+8}$, $2<|z|<4$;

26.13 $f(z)=\dfrac{6z-19}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

26.14 $f(z)=\dfrac{10z-54}{z^2-10z+24}$, $4<|z|<6$;

26.15 $f(z)=\dfrac{4z-19}{z^2-9z+20}$, $4<|z|<5$;

26.16 $f(z)=\dfrac{10z-32}{z^2-8z+15}$, $3<|z|<5$;

26.17 $f(z)=\dfrac{6z-21}{z^2-7z+6}$, $1<|z|<6$;

26.18 $f(z)=\dfrac{7z-31}{z^2-11z+28}$, $4<|z|<7$;

26.19 $f(z)=\dfrac{6z-24}{z^2-8z+15}$, $3<|z|<5$;

26.20 $f(z)=\dfrac{9z-39}{z^2-8z+15}$, $3<|z|<5$;

26.21 $f(z)=\dfrac{9z-17}{z^2-9z+2}$, $1<|z|<2$;

26.22 $f(z)=\dfrac{10z-31}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

26.23 $f(z)=\dfrac{10z-40}{z^2-8z+15}$, $3<|z|<5$;

26.24 $f(z)=\dfrac{8z-31}{z^2-7z+12}$, $3<|z|<4$;

26.25 $f(z)=\dfrac{12z-60}{z^2-9z+18}$, $3<|z|<6$;

26.26 $f(z)=\dfrac{15z-80}{z^2-10z+24}$, $4<|z|<6$;

26.27 $f(z)=\dfrac{6z-36}{z^2-12z+32}$, $4<|z|<8$;

26.28 $f(z)=\dfrac{6z-26}{z^2-10z+20}$, $4<|z|<5$;

26.29 $f(z)=\dfrac{4z-14}{z^2-8z+15}$, $3<|z|<5$;

26.30 $f(z)=\dfrac{8z-46}{z^2-11z+30}$, $5<|z|<6$.

27 UŽDUOTIS

Išskleiskite funkciją f(z) Lorano eilute

27.0 $f(z)=\dfrac{7z-9}{z^2-3z+2}$;

27.1 $f(z)=\dfrac{7z-10}{z^2-3z+2}$;

27.2 $f(z)=\dfrac{9z-22}{z^2-5z+6}$;

27.3 $f(z)=\dfrac{11z-38}{z^2-7z+12}$;

27.4 $f(z)=\dfrac{5z-29}{z^2-10z+9}$;

27.5 $f(z)=\dfrac{13z-58}{z^2-9z+20}$;

27.6 $f(z)=\dfrac{15z-82}{z^2-11z+30}$;

27.7 $f(z)=\dfrac{17z-110}{z^2-13z+42}$;

27.8 $f(z)=\dfrac{10z-79}{z^2-15z+56}$;

27.9 $f(z)=\dfrac{3z-25}{z^2-17z+72}$;

27.10 $f(z)=\dfrac{13z-110}{z^2-17z+72}$;

27.11 $f(z)=\dfrac{11z-82}{z^2-15z+56}$;

27.12 $f(z)=\dfrac{9z-58}{z^2-13z+42}$;

27.13 $f(z)=\dfrac{9z-13}{z^2-4z+3}$;

27.14 $f(z)=\dfrac{14z-36}{z^2-5z+6}$;

27.15 $f(z)=\dfrac{16z-87}{z^2-11z+30}$;

27.16 $f(z)=\dfrac{10z-68}{z^2-12z+35}$;

27.17 $f(z)=\dfrac{12z-68}{z^2-10z+21}$;

27.18 $f(z)=\dfrac{14z-26}{z^2-4z+3}$;

27.19 $f(z)=\dfrac{11z-60}{z^2-9z+8}$;

27.20 $f(z)=\dfrac{10z-54}{z^2-14z+45}$;

27.21 $f(z)=\dfrac{16z-80}{z^2-10z+25}$;

27.22 $f(z)=\dfrac{5z-45}{z^2-18z+81}$;

27.23 $f(z)=\dfrac{13z-91}{z^2-14z+49}$;

27.24 $f(z)=\dfrac{11z-65}{z^2-11z+28}$;

27.25 $f(z)=\dfrac{14z-96}{z^2-14z}$;

27.26 $f(z)=\dfrac{4z-35}{z^2-17z+72}$;

27.27 $f(z)=\dfrac{8z-48}{z^2-10z+9}$;

27.28 $f(z)=\dfrac{17z-67}{z^2-8z+15}$;

27.29 $f(z)=\dfrac{10z-30}{z^2-6z+9}$;

27.30 $f(z)=\dfrac{12z-81}{z^2-11z+24}$;