Options sur Best Of

SALL Mouhamadou
RICHOU Romaric

ENSTA Paris
8 mai 2022

Plan

Un actif financier : Le Best Of

Payoff Option :

$$\text{Call } \left(f(S_T^i) - K\right)_+ , \text{put } \left(K - f(S_T^i)\right)_+$$

Payoff Forward :

$$(f(S_T^i) - K)$$

Etude et Valorisation avec $f = max(S_i(t))_{1 \leq i \leq N}$.

Le Modèle de Black & Scholes

Soient $(S_i(t))_{1\leq i\leq N}$ le cours des actifs risqués au temps t, $(W_i(t))_{1\leq i\leq N}$ des mouvements browniens de matrice de correlations ρ q Les équations vérifiées par ces cours sont :

$$dS_i(t) = S_i(t)(rdt + \sigma_i dW_i(t)) \tag{1}$$

$$S_i(0) = S_{i,0} \geq 0$$

La solution de Black & Scholes

En posant $f(S_t, t) = \ln S_t$, on obtient grâce à la formule d'Itô (calcul formel) :

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= 0dt + \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma S_t)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{S_t}(rS_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

On peut alors intégrer et il en découle que :

$$S_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right]$$

$\longrightarrow$ Nouvelle application d'Itô et unicité de la solution

Le Best Of : Forward

Prix $P^1 = e^{-rT}\mathbf{E}^* \left[max_i(S_i(T)) - K\right]$

Avec la propriété de martingale des prix des actifs actualisés :

- $P^1 \geq \mathbb{E}^* \left[S_i^a(T)\right] - e^{-rT}K \ \forall \ i \in \{1 \ldots 3\}$
- $P^1 \geq \mathbb{E}^* \left[S_i^a(0)\right] - e^{-rT}K \ \forall \ i \in \{1 \ldots 3\}$
- $P^1 \geq S_{i,0} - e^{-rT}K \ \forall \ i \in \{1 \ldots 3\}$

  Alors il vient :
- $P^1 \geq \max_{i=1.3}\{S_{i,0}\} - e^{-rT}K$

$$\boxed{Minorant = \max_{i=1.3}\{S_{i,0}\} - e^{-rT}K} \tag{2}$$

La méthode de Monte Carlo

Nous allons ainsi pour estimer cette espérance, utiliser le théorème central car :

$\longrightarrow$ moments d'ordre 1 et 2 finis

$\longrightarrow$ Limite en simulant des trajectoires iid.

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mathbf{E}(X)}{Var(X)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \mathbf{N}(0,1)$$

La simulation

Simulations gaussiennes : Box-Muller

X suit $\mathbf{N}(0, Id)$ => Y = AX donne que Y suit $\mathbf{N}(0, AA^t)$.

Racine de Γ, avec Cholesky

Cas N=3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ \rho & \rho\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} & \sqrt{1-\frac{2\rho^2}{1+\rho}} \end{pmatrix}$ on as $AA^t = \Gamma$

Résultat Monte Carlo classique

Résultat pour :

N=100 000 simu, r=0.02, $\rho = 0.3$, $\sigma = 0.3$, $S_{i,0} = 1$, K=1, T=1.5

```
Affichage estimation forward:
Moyenne empirique : 0.303239
Variance empirique : 0.164929
Erreur:0.00211258
IC=[0.301127,0.305352]
```

Monte Carlo avec réducation de variance par variable antithétiques

$\mathbf{E}(f(X)) = \frac{\mathbf{E}(f(X))+\mathbf{E}(f(-X))}{2}$ si X symétrique.

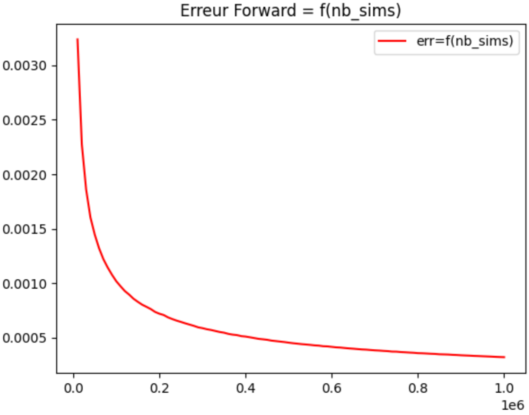
Et $Var(\frac{f(X)+f(-X)}{2}) \leq Var(f(X))$

Résultats Monte Carlo avec réduction de variance

Avec réduction de variance (antithétique) :

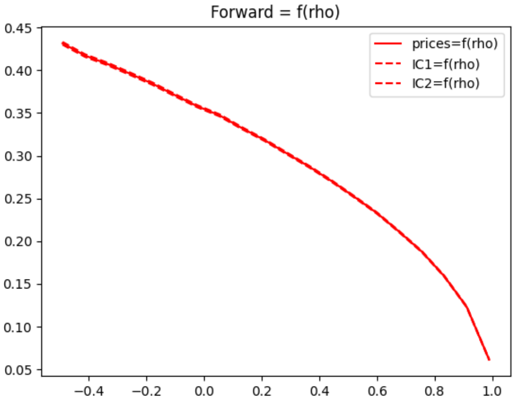
```
Affichage estimation forward minvar:
Moyenne empirique : 0.300384
Variance empirique : 0.0382572
Erreur:0.00101747
IC=[0.299367,0.301402]
```

Resultats Monte Carlo avec reduction de variance



Resultats Monte Carlo avec reduction de variance

Prix du Forward en fonction de ρ.



Put sur Bestof

$$P^2 = e^{-rT}\mathbb{E}^*\left[\left(K - \max_{i=1.3}\{S_i(T)\}\right)\right] \quad (3)$$

Cas simple avec un seul actif :

$$C = \mathbb{E}^*\left[e^{-rT}(K - S_T)^+\right] = \mathbb{E}^*\left[\left(e^{-rT}K - S^a(T)\right)^+\right]$$

Calcul d'espérance avec une loi normale $\mathbb{N}(0,1) \Longrightarrow$

$$C = e^{-rT}K\Phi\left(-d^-\right) - S_0\Phi\left(-d^+\right),$$

- $\phi(x) = \mathbb{F}_{\mathbb{N}}(x)$: Fonction de répartition
- $$d^{\pm} = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

Majorant du Put

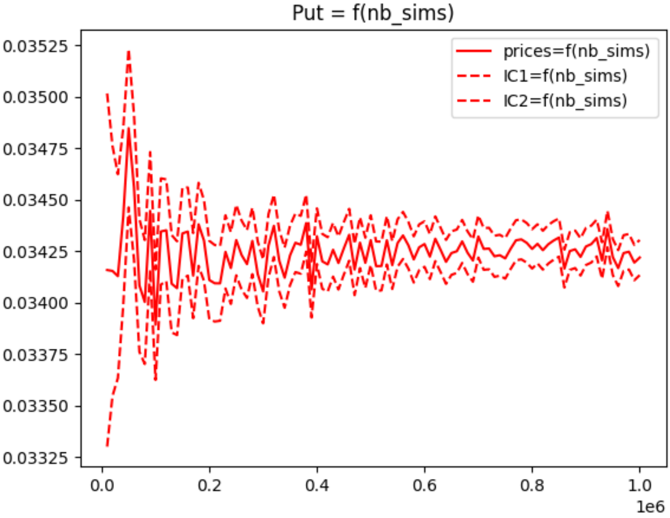
$\max_{i=1...3}\{S_i(T)\} \geq S_i(T)\ \forall\ i$

$\Longrightarrow \mathrm{P}^2 \leq P^{E,i}\ \forall\ i = 1\ldots3$

$\Longrightarrow \mathrm{P}^2 \leq \min_{i=1...3}\left\{P^{E,i}\right\}$

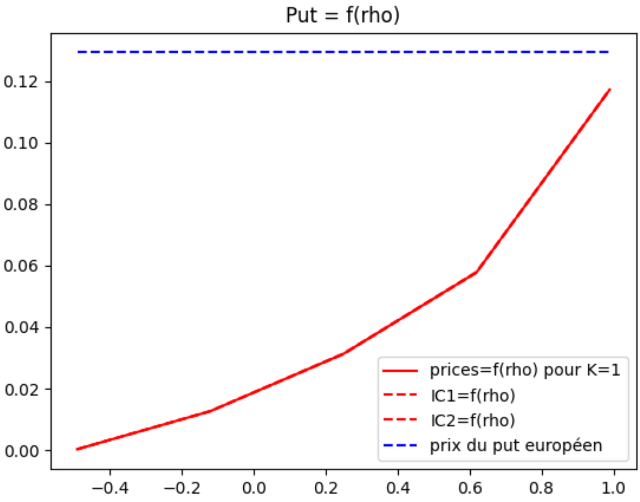
$$\boxed{Majorant = \min_{i=1...3}\left\{P^{E,i}\right\}} \tag{4}$$

Réduction de variance sur le Put

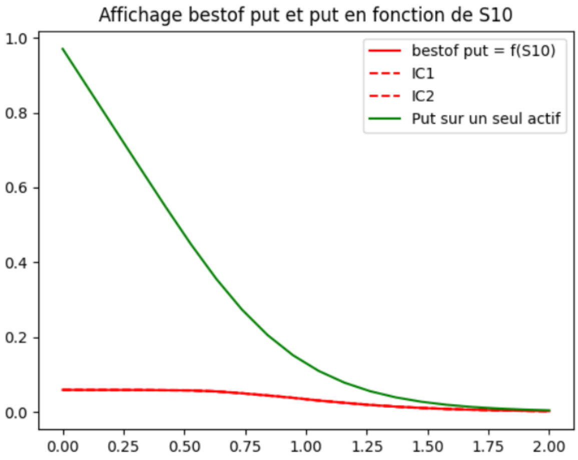


Put en fonction de ρ

Critére : Erreur $\leq 5\% \longrightarrow$ *nbsims* $= 5.10^5$



Put et le prix initial

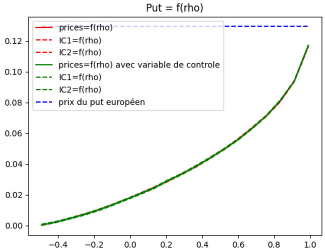


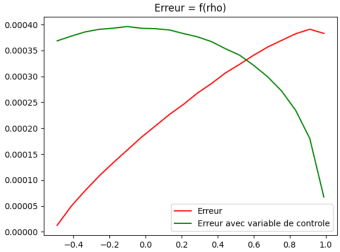
Estimation du Put avec variable de contrôle

- $P^2 = P^2 - P^{E,i} + P^{E,i}$

- $P^{E,i}$ connu avec une erreur de l'ordre de 10^{-8}

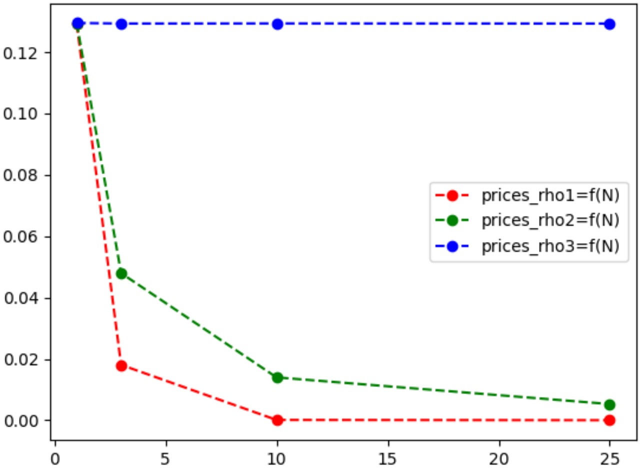
- $Var\left[P^2 - P^{E,i}\right] \leq Var\left[P^2\right]$?





Put avec N actifs et la corrélation

$\rho 1 = 0, \rho 2 = 0.5, \rho 3 = 1$



Lien entre forward, call, put sur Best of

Forward = Call - Put

```
Affichage estimation forward minvar:
Moyenne empirique : 0.300384
Variance empirique : 0.0382572
Erreur:0.00101747
IC=[0.299367,0.301402]

Affichage estimation option put:
Moyenne empirique : 0.0346014
Variance empirique : 0.00270858
Erreur:0.00027073
IC=[0.0343307,0.0348721]

Affichage estimation option call:
Moyenne empirique : 0.333489
Variance empirique : 0.0387704
Erreur:0.00102427
IC=[0.332465,0.334514]
```

Conclusion

Bonne compréhension des options et forward

Application de C++ en Finance

Méthode de Monte Carlo = Simple et Efficace si bien utilisé.