Projet : OPTIONS SUR BEST OF

Romaric RICHOU
Mouhamadou Ibn Moustapha SALL
ENSTA Paris

8 mai 2022

Table des matières

1 Introduction

Ce document a pour but d'exhiber notre travail sur le calcul du prix d'une option sur maximum d'un panier d'actifs. Cette option est traditionnellement appelée option Best Of. Plus précisément, nous considérons en premier lieu le contrat forward sur Best Of, puis nous considérons le cas d'un put sur Best Of. Cette option est dépendante de la loi jointe des actifs, nous étudierons en particulier cet aspect. Nous utiliserons la méthode de valorisation par technique de Monte Carlo dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

2 Modèle de Black & Scholes

Soit $(S_i(t))_{1\leq i\leq N}$ le cours des actifs risqués au temps t, $(W_i(t))_{1\leq i\leq N}$ des mouvements browniens de matrice de corrélation ρ q Les équations vérifiées par ces cours sont :

$$dS_i(t) = S_i(t)(rdt + \sigma_i dW_i(t)) \tag{1}$$
$$S_i(0) = S_{i,0} \geq 0$$

Question 1 :
Calculons S(t) sous le modèle de Black & Scholes :
En posant $f(S_t, t) = \ln S_t$, on obtient grâce à la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= 0dt + \frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma S_t)^2\,dt \\ &= \frac{1}{S_t}(rS_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

On peut alors intégrer et il en découle que :

$$S_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]$$

Il semble donc que

$$S_t = s_0 \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

soit une solution de (5.20). Vérifions rigoureusement cela. Posons

$$\begin{aligned} f(s,x) &= s_0 \cdot \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma x\right\}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(s,x) &= \sigma f(s,x), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x) &= \sigma^2 f(s,x), \\ \frac{\partial f}{\partial s}(s,x) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)f(s,x). \end{aligned}$$

D'après la formule d'Itô, applicable car la exponentielle est de classe C^2

$$S_t = f(t, W_t) = \underbrace{f(0,0)}_{s_0} + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, W_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s)\,dW_s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (s, W_s) \, d[W, W]_s$$
$$= s_0 + \int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) f \, (s, W_s) \, ds + \int_0^t \sigma f \, (s, W_s) \, dW_s$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f \, (s, W_s) \, ds$$
$$= s_0 + r \int_0^t ds S_s + \sigma \int_0^t S_s dW_s$$

Ainsi par unicité de la solution (les foncions σx et rx sont à croissance linéaire et Lipchtiziennes) , On conclut que $(S_t)_{t \geq 0}$ est l'unique soluion de l'équation (1).

3 Forward sur Best Of

Ici on se place dans le cas N=3

Question 2 :

Soit le prix du forward donné par : $P^1 = e^{-rT} \mathbf{E}^* \left[max_i(S_i(T)) - K \right]$
Avec la propriété de martingale des prix des actifs actualisés :

- $P^1 \geq \mathbb{E}^* \left[S_i^a(T) \right] - e^{-rT} K \ \forall \ i \in \{1 \dots 3\}$
- $P^1 \geq \mathbb{E}^* \left[S_i^a(0) \right] - e^{-rT} K \ \forall \ i \in \{1 \dots 3\}$
- $P^1 \geq S_{i,0} - e^{-rT} K \ \forall \ i \in \{1 \dots 3\}$

Alors il vient :

- $P^1 \geq \max_{i=1.3} \{S_{i,0}\} - e^{-rT} K$

$$\boxed{Minorant = \max_{i=1.3} \{S_{i,0}\} - e^{-rT} K}$$

Question 3 :

On remarque qu'en posant la matrice A $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} & 0 \\ \rho & \rho \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} & \sqrt{1 - \frac{2\rho^2}{1+\rho}} \end{pmatrix}$ on as AA^t =Γ

Ainsi pour simuler W(T), on part de la simulation de 3 gaussiennes centrées réduites indépendantes, on les multiplie par $\sqrt{T}$ puis par la matrice A. En effet pour tout vecteur gaussien, si X suit la loi $\mathbf{N}(\mu, \Gamma)$ alors avec la transformation $Y = AX$, Y suit la loi $\mathbf{N}(\mu, A\Gamma A^t)$.
Ainsi, en utilisant le théorème central limite on approxime l'espérance :

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mathbf{E}(X)}{Var(X)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \mathbf{N}(0, 1)$$

Voici le résultat pour les valeurs N=100 000 simu, r=0.02, $\rho = 0.3$, $\sigma = 0.3$, $S_{i,0} = 1$, K=1, T=1.5 :

```
Affichage estimation forward:
Moyenne empirique : 0.303239
Variance empirique : 0.164929
Erreur:0.00211258
IC=[0.301127,0.305352]
```

NB : La solution de B&S vérifie bien la condition $\mathbf{E}(S_T^2) < +\infty$ nécessaire pour le théorème central limite.

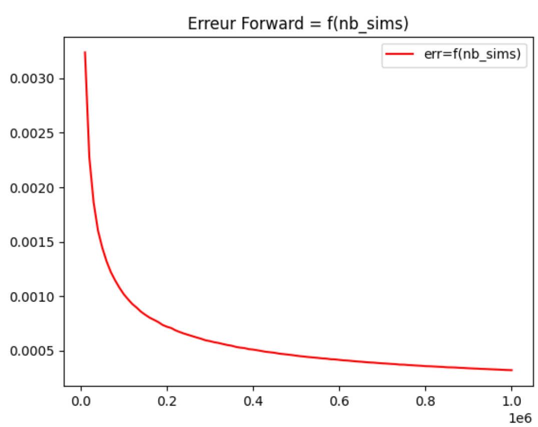
Question 4 :

Le principe de la méthode de réduction de variance par variables antithétiques et d'utiliser la formule :
$\mathbf{E}(f(X)) = \frac{\mathbf{E}(f(X))+\mathbf{E}(f(-X))}{2}$ si X symétrique.
Or $Var(\frac{f(X)+f(-X)}{2}) \leq Var(f(X))$ ce qui assure que la convergence est plus rapide (voir formule théorème central limite plus haut).
Voici le résultat avec les mêmes valeurs :

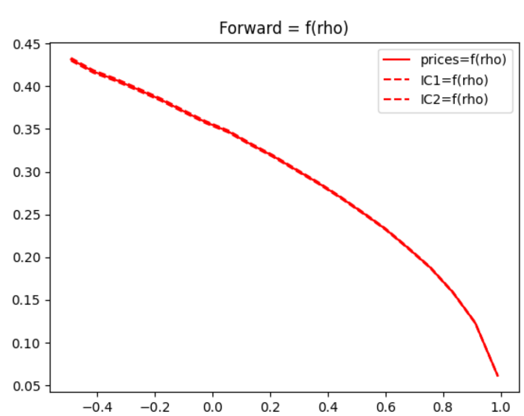
```
Affichage estimation forward minvar:
Moyenne empirique : 0.300384
Variance empirique : 0.0382572
Erreur:0.00101747
IC=[0.299367,0.301402]
```

On constate bien un gain de vitesse de convergence (un rapport de variance d'environ 2).

Question 5 :
On souhaite avoir une erreur à 90% qui nous donne environ 3 chiffres significatifs, c'est pourquoi nous nous fixons le critére de 0.05% d'erreur. Nous traçons l'erreur en fonction du nombre de simulations t ainsi nous choisissons 500 000 simulations.



Question 6 : :
En gardant les autres paramètres fixés, nous affichons le prix en fonction de ρ :



On constate que comme on pouvait s'y attendre, le Forward voit son prix décroitre quand ρ croît. En effet plus ρ est grand, plus les 3 actifs sont correlés et plus le prix du maximum est proche d'une martingale. Lorsque ρ tend vers 1, les trois actifs sont identiques (car les $S_{i,0}$ tous identiques) et le prix tend alors vers $S_{i,0} - e^{-rT}K = 1 - exp(-0.03) = 0.03$

4 Put sur Best of

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement d'un put sur un panier d'actifs dont le prix est donné par la formule :

$$P^2 = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(K - \max_{i=1.3}\{S_i(T)\}\right)_+\right] \tag{2}$$

Question 7 : Nous nous plaçons dans le cas simple où on a un seul actif ce qui correspond à un put européen. Avec la formule de Black-Scholes, on détermine analytiquement le prix de cette option qui est donné par :

$$C = \mathbb{E}^*\left[e^{-rT}\left(K - S_T\right)^+\right] = \mathbb{E}^*\left[\left(e^{-rT}K - S^a(T)\right)^+\right]$$

Or, nous avons vu que,

$$S^a(T) = S_0 \exp\left(\sigma B_T - \sigma^2 T/2\right) \stackrel{(d)}{=} S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{T}G - \sigma^2 T/2\right)$$

où G est une gaussienne centrée réduite. Notant $\alpha = \sigma\sqrt{T}$, on obtient donc

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-rT}K - S_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}}\right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}}\int_I e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_I e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

si $I = \left\{x \in \mathbb{R}, S_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} \leq e^{-rT}K\right\} = [-\infty, -d^-[$ avec

$$d^{\pm} = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\alpha^2}{2}}{\alpha} = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}.$$

En remplaçant I et par changement de variable il vient alors :

$$\begin{aligned} C &= \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\leq -d^-} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\leq -d^-} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\leq -d^-} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{y\leq -d^- -\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \end{aligned}$$

et comme $d^- + \alpha = d^+$, on obtient finalement

$$C = e^{-rT}K\Phi\left(-d^-\right) - S_0\Phi\left(-d^+\right),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de loi normale centrée réduite. Pour l'implémentation,le point crucial est de calculer l'intégrale qui apparaît dans la fonction de répartition. On utilisera dans ce cas, la formule d'approximaton de Abramowitz & Stegun pour avoir une valeur approchée du prix de l'option (Voir le code pour les détails du calcul).

Question 8 : Majorant du Put

Nous voulons trouver un majorant du Put sur l'option Best of : Une inégalité naturelle qu'on peut extraire dans le prix de l'option c'est que l'opposé du maximum des actifs est plus grand que chaque actif.

$$\max_{i=1\ldots3}\{S_i(T)\} \geq S_i(T)\ \forall \text{ i } \in 1\ldots3$$

$$(\text{K - }\max_{i=1\ldots3}\{S_i(T)\})_+ \leq (K - S_i(T)\ )_+\ \forall \text{ i } \in 1\ldots3$$

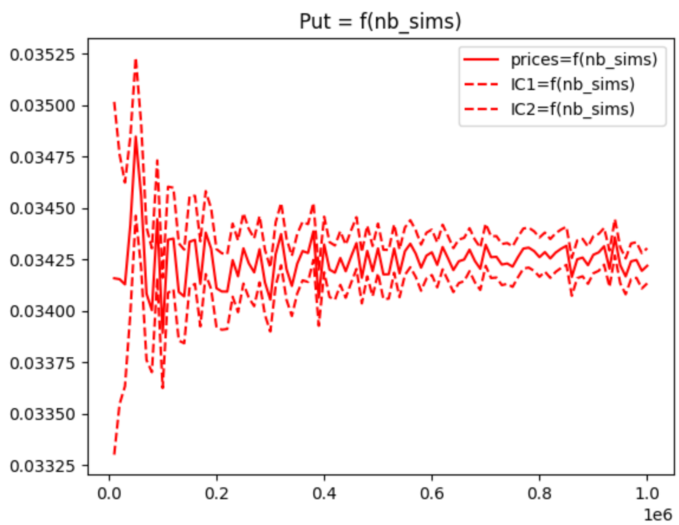
$$\text{E }[(K - \max_{i=1\ldots3}\{S_i(T)\})_+] \leq \mathbb{E}\,[(K - S_i(T)\ )_+]\ \forall \text{ i } \in 1\ldots3$$

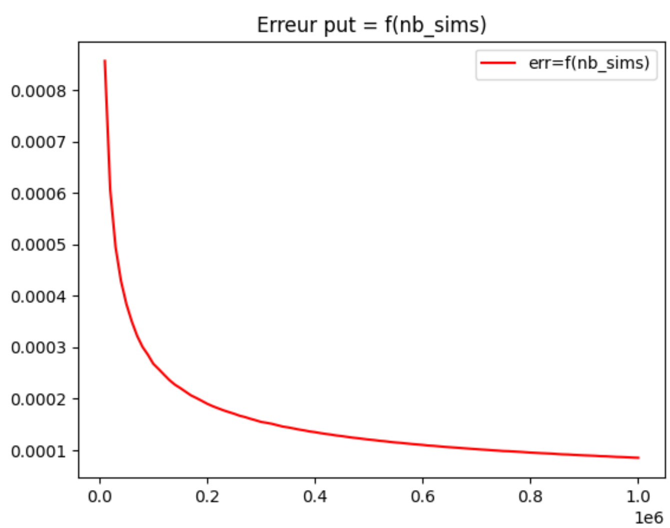
$\longrightarrow P^2 \leq P^{E,i}\ \forall$ i $\in 1\ldots3$
$\longrightarrow P^2 \leq \min_{i=1\ldots3}\left\{P^{E,i}\right\}$

$$\boxed{Majorant = \min_{i=1...3}\left\{P^{E,i}\right\}}$$

Question 9 : Réduction de Variance

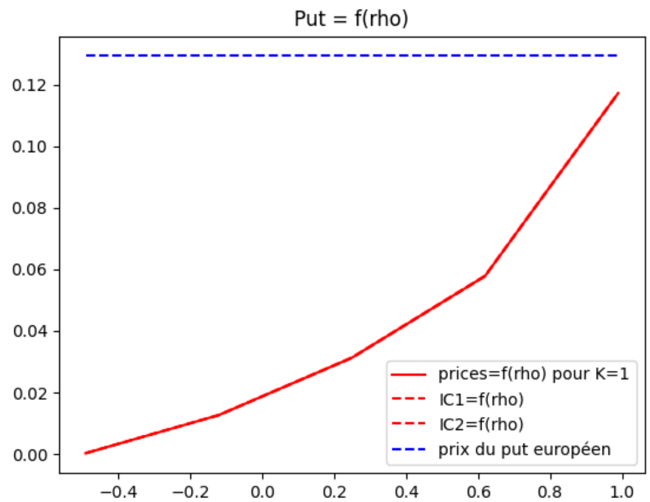
Dans cette question, on utilise la même méthode développée dans la première partie en ce qui concerne les variables antithétiques pour réduire l'erreur de moitié (comparée à la mèthode classique). On a donc implémenté pratiquement le même alogrithme pour le cas du Call avec toujours un intervalle de à 90 %.
On constate que les bornes de l'intervalle de confiance tendent bien vers la moyenne empirique qui correspond au prix du Put. On remarque qu'à partir de 5.10^5 simulations, la dynamique de notre reste quasi-inchangée comparée à ce qu'on observe du début jusqu'à 5.10^5 simulations. Pour mieux visualiser cela, nous allons nous focaliser sur l'erreur en fonction du nombre de simulations.





On voit sur cette courbe que pour avoir une erreur autour de 0.05%, il faut fixer le nombre de simulations au moins égale à 5.10^5. On peut égalament noter la décroissante en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de l'erreur.

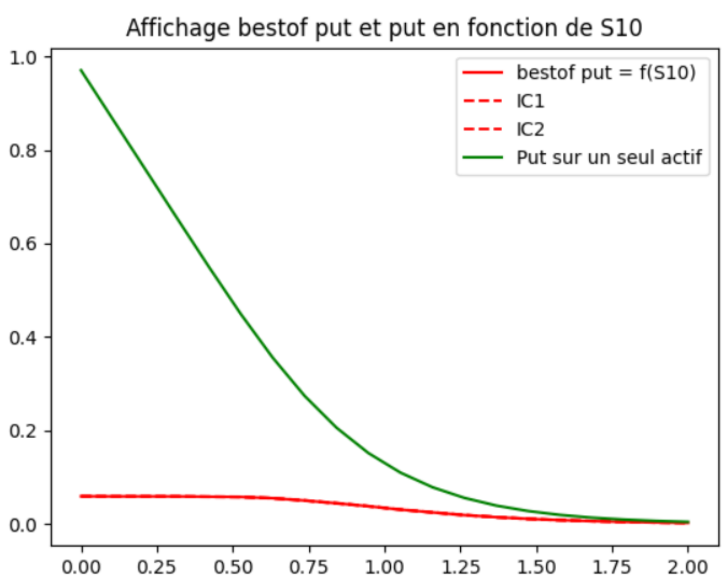
Question 10 : Estimateur de P^2 en fonction de ρ



La courbe bleue montre bien la majoration du Put sur Best of par le Put européen (ici tous les actifs partent du même point et ont la même variance, ce qui fait qu'il suffit juste de calculer le Put européen sur un des actifs donné). De plus, On note avec nos résultats, une croissance du prix du Put en fonction du strike (K), ce qui correspond bien à nos attentes.
Ici c'est un put, il est donc normal de voir le put augmenter avec ρ (car si les variables sont anticorélées, le max est plus élevé en moyenne, et donc on y est perdant sur le put). On retrouve également que lorsque ρ tend vers 1, on tend vers le prix du put sur un seul actif.

Question 11 : Estimateur de P^2 en fonction de $S_{1,0}$

On affiche maintenant le prix en fonction de $S_{1,0}$



On remarque que le prix semble varier entre deux plateaux, lorsque $S_{1,0}$ est grand devant les autres actifs, le prix semble tendre vers le prix d'un put sur cet actif uniquement (ce qui est logique ca il y a une très faible probabilité que les autres actifs dépassent ce dernier).

Puis un résultat "intuitif" mais qui n'a pas été démontré, le prix lorsque $S_{1,0}$ est petit, semble tendre vers le prix d'un put sur Best Of à deux actifs.

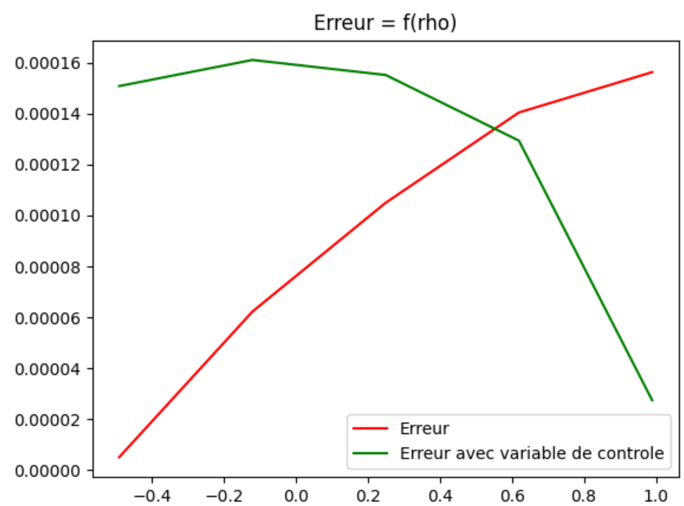
Question 12 : Variable de contrôle

Dans cette question on utilise une variable de contrôle dont le prix peut être calculé explicitement grâce à la formule de Black-Scholes. Donc on essaie de réécrire la variable qu'on veut estimer en fonction du Put européen (qui est calculé explicitement à la question 7). On a donc :

$P^2 = P^2 - P^{E,i} + P^{E,i}$

$P^{E,i}$ connu avec une erreur de l'ordre de 10^{-8}

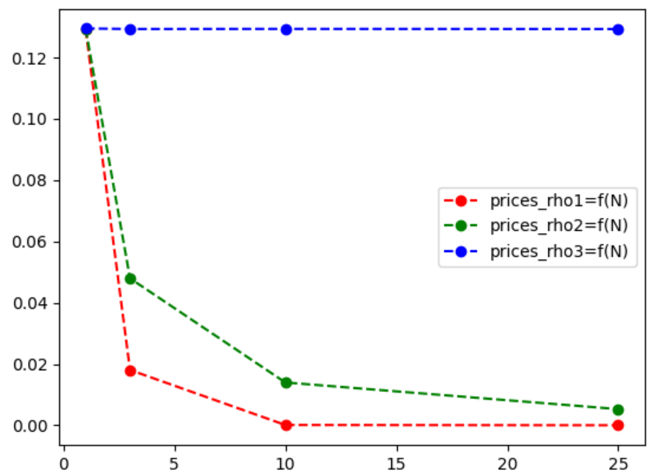
Il faut maintenant vérifier si $Var\left[P^2 - P^{E,i}\right] \leq Var\left[P^2\right]$ pour la transformation faite puisse avoir un sens c'est à dire que l'erreur soit plus petite que celle obtenue avec la méthode classique. On va voir analyser cela dans la figure ci-dessous



On remarque que le résultat est vrai pour rho grand. Ce qui logique car dans le calcul de $Var\left[P^2 - P^{E,i}\right]$, il apparait un terme négatif résulant de la covariance des deux termes (donc de la corrélation des deux actifs). Alors pour espérer avoir une diminution de l'erreur, il faut que la corrélation soit assez élevée pour pénaliser la somme des deux autres variances.
Intuitivement le résultat est vrai quand l'influence de ce premier actif est grande, et donc cela serait aussi vrai pour ρ faible mais $S_{1,0}$ grand devant les autres.

Question 13 : Put avec N actifs

On se propose d'élargir notre algorithme de pricing à des Best Of avec un nombre d'actifs variable. Pour se faire le seul point compliqué est de trouver une racine de Γ, mais cela ce fait avec l'algorithme de Cholesky.
Voici un graphe de résultats pour plusieurs N et ρ (prix d'un put) :



On observe bien que le prix est constant lorsque $\rho = 1$ car celà correspond à un unique actif.
On constate aussi pour ρ fixé, une décroissante du prix du Put. Ceci est du fait qu'on prend le maximum sur un nombre d'actifs plus grand, ce qui fait le prix de l'actif croît et donc on obtient une baisse du Put.
De plus si on fixe N, on obtient également une croissance du prix en fonction de ρ, c'est bien la conclusion qui a été faite dans la question 10.

5 Lien entre le Forward, le Put et le Call sur Best of

La décomposition du forward en sa partie positive (Le Call) et sa partie négative(le Put) nous donne bien une relation entre ces trois produits. On a ainsi :

$$e^{-rT}\mathbf{E}^*\left[max_i(S_i(T)) - K\right] = e^{-rT}\mathbf{E}^*\left[\left(\max_{i=1.3}\{S_i(T)\} - K\right)_+\right] - e^{-rT}\mathbf{E}^*\left[\left(K - \max_{i=1.3}\{S_i(T)\}\right)_+\right] \qquad (3)$$

Prix du Forward= Prix du Call - Prix du Put
On vérifie cela avec les résulats obtenus (on a traité le Put sur Best of paraléllement avec le Call sur Best). On voit bien que la relation établie entre les trois produits est bien vérifiée :

```
Affichage estimation forward minvar:
Moyenne empirique : 0.300384
Variance empirique : 0.0382572
Erreur:0.00101747
IC=[0.299367,0.301402]

Affichage estimation option put:
Moyenne empirique : 0.0346014
Variance empirique : 0.00270858
Erreur:0.00027073
IC=[0.0343307,0.0348721]

Affichage estimation option call:
Moyenne empirique : 0.333489
Variance empirique : 0.0387704
Erreur:0.00102427
IC=[0.332465,0.334514]
```

6 Conclusion

Ce projet nous aura permis de faire une étude complète sur un produit exotique dans le modéle de Black-Scholes, et d'être capable d'expliquer les différentes variations de prix des produits étudiés en fonction de paramétres pertinents. Il nous aura également permis d'être plus à l'aise avec le C++ qui est un langage de programmation essentiel dans le métier de la finance.