

# Теория игр. Часть 3

## Теория

**Выигрышные и проигрышные позиции.**

Все позиции делятся на выигрышные и проигрышные.

**Выигрышная позиция** — это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, обязательно выиграет при любых действиях соперника, если не допустит ошибки; при этом говорят, что у данного игрока есть выигрышная стратегия – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть.

Если игрок, делающий первый ход, находится в проигрышной позиции, то он обязательно проиграет, если ошибку не сделает его оппонент; в этом случае говорят, что у данного игрока нет выигрышной стратегии.

Таким образом, общая стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом создать проигрышную позицию для оппонента.

Выигрышные и проигрышные позиции характеризуются так:

- позиция, из которой все возможные ходы ведут в выигрышные позиции – проигрышная;
- позиция, из которой хотя бы один из последующих возможных ходов ведет в проигрышную позицию — выигрышная, при этом стратегия игрока состоит в том, чтобы перевести игру в эту проигрышную (для оппонента) позицию.

**Кто выиграет при стратегически правильной игре?**

Для того чтобы определить, какой из игроков выиграет при стратегически правильной игре, необходимо ответить на вопросы:

- Может ли какой-либо из игроков выиграть, независимо от ходов других игроков?
- Что должен сделать игрок с выигрышной стратегией первым ходом, чтобы он смог выиграть, независимо от ходов игроков?





## Пример задания

Полина и Вероника играют в игру, правила которой заключаются в следующем:

- 1) Перед игроками лежит одна куча камней.
- 2) За один ход игрок может добавить в кучу 1 камень или увеличить количество камней в куче в 2 раза. Для этого у каждого игрока есть неограниченный запас камней.
- 3) Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче стало не менее 100.
- 4) Победителем является тот игрок, который сделал последний ход и получил сумму камней в куче, равную 100 или больше.

**Пример:** из 10 камней за один ход можно получить кучу из 11 или 20 камней.

В начальный момент в куче было  $N$  камней в диапазоне  $[1, 99]$ .

**Примечание.** Игрок обладает выигрышной стратегией, если у него есть возможность набрать нужную сумму камней в куче для выигрыша при любых ходах противника.

19. Определите и запишите в ответ минимальное значение  $N$ , при котором Полина может выиграть за один ход.

20. Найдите значение  $N$ , при котором у Полины есть выигрышная стратегия, учитывая выполнение двух условий:

- Полина не может выиграть за один ход;
- Полина может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Вероника.

21. Найдите минимальное значение  $N$ , при котором параллельно выполняются два условия:

- у Вероники есть стратегия, позволяющая ей выиграть первым или вторым ходом при любой игре Полины;
- у Вероники нет стратегии, которая позволит ей гарантированно выиграть первым ходом.





## Решение

- 1 Объявляем функцию `g(s, p, end)`, которая будет вычислять результат игры, где `s` — текущее количество камней в куче, `p` — текущий ход игры, `end` — количество ходов, за которое должна завершиться игра.
- 2 Внутри функции пропишем, что если количество камней в куче не менее 100 и игра завершилась за необходимое количество ходов, то вернем истину, в остальных случаях — ложь.
- 3 Если следующий ход будет такой же четности, что и последний, то нам нужна хотя бы одним ходом, иначе — всеми вариантами ходов.
- 4 С помощью генераторов списков вычислим все результаты игры за необходимое количество ходов.

Полный код Python:

```
def g(s, p, end):
    if s >= 100: return p in end
    if s < 100 and p == max(end): return False
    moves = [g(s + 1, p + 1, end), g(s * 2, p + 1, end)]
    return any(moves) if (p + 1) % 2 == (end[0] % 2) else
all(moves)

print([s for s in range(1, 100) if g(s, 0, [1])]) # Ответ:
50
print([s for s in range(1, 100) if g(s, 0, [3])]) # Ответ:
48
print([s for s in range(1, 100) if g(s, 0, [2, 4])]) # Ответ:
47
```



# Заметки

