



## Etude d'un modèle de ruissellement 1-d

Stéphane Cordier, Frédéric Darboux, Olivier Delestre, Francois James

### ► To cite this version:

Stéphane Cordier, Frédéric Darboux, Olivier Delestre, Francois James. Etude d'un modèle de ruissellement 1-d. 2007. hal-00133742

**HAL Id: hal-00133742**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00133742>**

Preprint submitted on 28 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude d'un modèle de ruissellement 1D

Stéphane Cordier  
Frédéric Darboux  
Olivier Delestre  
François James

28 février 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Système de Saint-Venant avec un fond plat</b>	<b>2</b>
1.1	Propriétés . . . . .	2
1.2	Approximation numérique . . . . .	3
1.3	Consistance, stabilité et choix d'un flux numérique . . . . .	4
1.4	Diffusion par rapport au maillage . . . . .	5
1.5	Flux numérique HLL . . . . .	7
1.6	Schéma d'ordre 2 . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Système de Saint-Venant avec topographie</b>	<b>16</b>
2.1	Propriétés . . . . .	16
2.2	Propriétés du schéma . . . . .	17
2.3	Schémas explicitement équilibrés . . . . .	18
2.4	Schéma de reconstruction hydrostatique . . . . .	19
2.5	Simulation numérique . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Système de Saint-Venant avec terme de frottement</b>	<b>25</b>
3.1	Système de Saint-Venant avec terme de frottement générique . . .	25
3.2	Système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach . . . . .	26
3.3	Simulation numérique . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Système de Saint-Venant avec terme d'infiltration</b>	<b>29</b>
4.1	Modèle de Green-Ampt . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Expérimentation</b>	<b>31</b>

## 1 Système de Saint-Venant avec un fond plat

On cherche à approcher les solutions du système de Saint-Venant homogène :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = 0 \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où  $g$  est la constante de gravité,  $h(t, x) \in \mathbb{R}^+$  la hauteur d'eau et  $u(t, x) \in \mathbb{R}$  la vitesse d'écoulement de l'eau.

Ce système peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (2)$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \text{ et } F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{pmatrix},$$

où  $q(t, x) = h(t, x).u(t, x)$  est la quantité de mouvement, ou le débit.

### 1.1 Propriétés

On regarde les solutions  $U = (h, hu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  du système (1).

- C'est un système d'Equations aux Dérivées Partielles non linéaire du premier ordre.

- Ce système est hyperbolique :

En effet,

$$\partial_x F(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2/h^2 + gh & 2q/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_x q \end{pmatrix} = A(U) \partial_x U,$$

donc le système s'écrit :

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = 0,$$

avec :

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^2/h^2 + gh & 2q/h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix},$$

donc :

$$\det(A(U) - \lambda I) = \lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - gh = (\lambda - u)^2 - gh.$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1(U) = u - \sqrt{gh} \text{ et } \lambda_2(U) = u + \sqrt{gh}.$$

Si  $h > 0$ , on a  $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$ . Donc en dehors des zones sèches, le système de Saint-Venant est un système strictement hyperbolique.

- Le volume d'eau total est conservé (la première équation est conservative).
- La positivité de la hauteur d'eau doit être préservée.

## 1.2 Approximation numérique

On a le système sous la forme (2).

On voudrait approcher sa solution :

$$U(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0,$$

par des valeurs discrètes :

$$U_i^n = \begin{pmatrix} h_i^n \\ h_i^n u_i^n \end{pmatrix} \text{ avec } i \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

On considère une grille de points  $x_{i+1/2}$  avec  $i \in \mathbb{Z}$  :

$$\dots < x_{-3/2} < x_{-1/2} < x_{1/2} < x_{3/2} < \dots$$

On considère un pas de temps constant :

$$\Delta t > 0,$$

et on définit les temps discrets par :

$$t_n = n.\Delta t \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

On va utiliser ici la méthode des volumes finis. On découpe l'espace en cellules (volumes finis) :

$$C_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[,$$

centrées sur :

$$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2},$$

et de longueur :

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} > 0,$$

puis on intègre le système considéré sur chaque cellule et sur un pas de temps. Apparaissent alors les moyennes des solutions sur chaque cellule :

$$U_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} U(t_n, x) dx.$$

On obtient des solutions constantes par morceaux (et donc discontinues) et des termes de bords (autrement dit, les flux échangés entre les cellules au niveau de leur frontière ou interface).

Ainsi, le flux sortant d'une cellule est égal à celui qui rentre dans la cellule voisine, d'où un algorithme conservatif.

Pour résoudre ce système, on utilise le schéma de volume fini suivant :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) = 0. \quad (3)$$

Remarque : ce schéma permet de calculer les " $U^{n+1}$ ", en connaissant les " $U^n$ ", il s'agit donc d'un schéma explicite.

$F_{i+1/2}^n$  (respectivement  $F_{i-1/2}^n$ ) représente le flux numérique à l'interface entre les cellules  $C_i$  et  $C_{i+1}$  (respectivement  $C_{i-1}$  et  $C_i$ ). Ces flux aux interfaces font intervenir les valeurs des variables aux interfaces, qui ne sont pas connues.

Développer une méthode volumes finis consiste donc à définir un flux numérique à partir des valeurs des variables aux noeuds du maillage.

On considère dans cette étude des schémas explicites à trois points.

Les flux aux interfaces sont de la forme :

$$\begin{cases} F_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n) \\ F_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) \end{cases}, \quad (4)$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonction que l'on précisera appelée flux numérique.

Cependant, il est nécessaire d'imposer une condition de C.F.L. (Courant Friedrichs Levy) sur le pas de temps pour prévenir une explosion des valeurs numériques, cette condition est de la forme :

$$a.\Delta t \leq \Delta x_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

où  $a$  est une approximation de la vitesse de propagation.

### 1.3 Consistance, stabilité et choix d'un flux numérique

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer un flux numérique. Deux critères principaux jouent un rôle important dans son choix :

- **Consistance** : la consistance est la propriété minimale requise pour un schéma, pour assurer que l'on approche bien la solution de l'équation.

**Définition 1** On dit que le schéma (3)-(4) est consistant avec le système (2), si le flux numérique vérifie :

$$\mathcal{F}(U, U) = F(U), \quad \forall U.$$

- **Stabilité** : la stabilité d'un schéma peut être analysée de différentes façons, ici on doit retenir la conservation d'un domaine convexe invariant.

**Définition 2** On dit que le schéma (3)-(4) préserve un domaine convexe invariant  $C$  pour le système (2), si sous une condition de C.F.L., on a :

$$U_i^n \in C, \quad \forall i \Rightarrow U_i^{n+1} \in C, \quad \forall i.$$

Remarque : une difficulté apparaît en essayant d'obtenir l'implication, les trois valeurs  $U_{i-1}^n$ ,  $U_i^n$  et  $U_{i+1}^n$  sont impliquées dans le calcul de  $U_i^{n+1}$ .

Alors au prix de la diminution de la C.F.L., on a la définition suivante :

**Définition 3** On dit que le flux numérique  $\mathcal{F}(U_G, U_D)$  préserve un domaine convexe  $C$  par interface, pour le système (2), si pour :

$$\sigma_G(U_G, U_D) < 0 < \sigma_D(U_G, U_D),$$

on a :

$$(U_G, U_D) \in C^2 \Rightarrow \begin{cases} U_G + \frac{\mathcal{F}(U_G, U_D) - F(U_G)}{\sigma_G} \in C \\ U_D + \frac{\mathcal{F}(U_G, U_D) - F(U_D)}{\sigma_D} \in C \end{cases},$$

où  $\sigma_G$  et  $\sigma_D$  sont des vitesses numériques.

•Flux de Rusanov : le flux numérique le plus simple pour résoudre un système de la forme (2), est le flux de Lax-Friedrichs :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \frac{F(U_G) + F(U_D)}{2} - c \cdot \frac{U_D - U_G}{2}, \quad (5)$$

avec un paramètre :

$$c > 0.$$

On peut montrer que ce flux numérique est consistant, l'analyse du domaine invariant demande une analyse plus poussée qui dépasse le cadre de ce travail. On va utiliser un flux de Lax-Friedrichs amélioré, le flux de Rusanov, en prenant :

$$c = \sup_{U=U_G, U_D} \left( \sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)| \right),$$

donc on a :

$$c = \max(|u_G| + \sqrt{gh_G}, |u_D| + \sqrt{gh_D}). \quad (6)$$

Le flux de Rusanov préserve la positivité de la densité  $h$ .

Au schéma de Rusanov, on associe la condition de C.F.L. :

$$2. \sup_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda_1(U_i^n)|, |\lambda_2(U_i^n)|) \cdot \Delta t \leq \Delta x_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## 1.4 Diffusion par rapport au maillage

On a réalisé "la rupture d'un barrage sur fond mouillé" avec différents maillages :

M	$\Delta t$	J	$\Delta x$
50	0.01	50	0.2
100	0.005	100	0.1
200	0.0025	200	0.05
400	0.00125	400	0.025
800	0.000625	800	0.0125
1600	0.0003125	1600	0.00625

Les conditions initiales étaient :

$$h(0, x) = \begin{cases} 5 & \text{pour } 0 \leq x < 5 \text{ m} \\ 2 & \text{pour } 5 \leq x \leq 10 \text{ m} \end{cases},$$

$$u(0, x) = 0 \text{ m/s}.$$

Puis, on a tracé les solutions pour :

$$t = 0, 5 \text{ s}.$$

Ce test est intéressant puisqu'il existe une solution analytique (solution de Stoker [10], on notera les solutions :  $h^{anal}$  et  $u^{anal}$ ). Ceci permet de comparer les résultats à des références fiables.

Dans le cas d'une rupture sur fond mouillé, on doit observer une détente liant  $h_g = 5 \text{ m}$  (hauteur d'eau en amont de la retenue) à une valeur intermédiaire  $h_m$ , suivie d'un choc liant  $h_m$  à  $h_d = 2 \text{ m}$  (hauteur d'eau en aval de la retenue). On a effectué les tracés de la hauteur d'eau et de la vitesse d'écoulement pour différents maillages. La vitesse de déplacement du choc est bien calculée. On a vérifié que plus le maillage était fin, moins le schéma était diffusif. Ce qui était attendu pour un schéma d'ordre un.

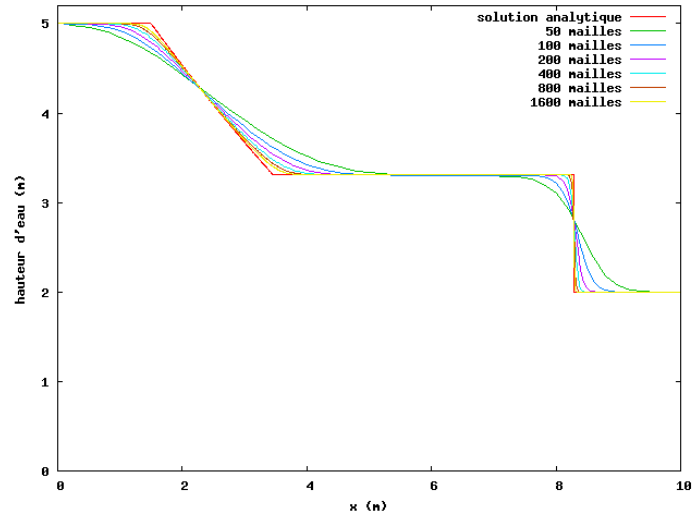


FIG. 1 – Hauteur d'eau en fonction du maillage

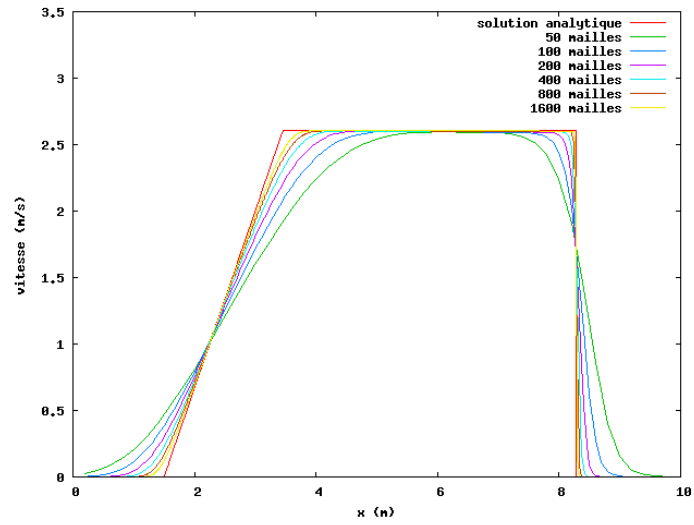


FIG. 2 – Vitesse en fonction du maillage



## 1.5 Flux numérique HLL

Le flux numérique de Harten, Lax et van Leer (noté HLL) est une généralisation du flux de Lax-Friedrichs. Le flux HLL est de la forme :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = \begin{cases} F(U_G) & \text{si } 0 < c_1 \\ \frac{c_1 F(U_G) - c_2 F(U_D)}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (U_D - U_G) & \text{si } c_1 < 0 < c_2 \\ F(U_D) & \text{si } c_2 < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

avec deux paramètres :

$$c_1 < c_2.$$

Pour  $c_1$  et  $c_2$ , on peut prendre :

$$c_1 = \inf_{U=U_G, U_D} \left( \inf_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)| \right) \text{ et } c_2 = \sup_{U=U_G, U_D} \left( \sup_{j \in \{1,2\}} |\lambda_j(U)| \right).$$

Le flux HLL peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{F}(U_G, U_D) = t_1 F(U_D) + t_2 F(U_G) - t_3 (U_D - U_G),$$

avec :

$$t_1 = \frac{\min(c_2, 0) - \min(c_1, 0)}{c_2 - c_1}, \quad t_2 = 1 - t_1, \quad t_3 = \frac{c_2 |c_1| - c_1 |c_2|}{2(c_2 - c_1)}.$$

Remarque : pour  $c_2 = -c_1$ , on retrouve le flux de Lax-Friedrichs.

On a réalisé le même test que précédemment, avec le flux de Rusanov et le flux HLL.

On a pris :

$$M = 50, \quad \Delta t = 0.01, \quad J = 50, \quad \Delta x = 0.2.$$

On a effectué des calculs avec d'autres maillages, afin d'obtenir l'évolution de l'erreur en norme  $L^1$  faite sur  $h$  au temps  $t = 5$  s (respectivement sur  $u$ ) en fonction du maillage et du flux (Rusanov ou HLL).

On définit l'erreur faite sur  $h$  (au temps  $t = 5$  s) par :

$$\|h_{t=5}^{approx} - h_{t=5}^{anal}\|_{L^1} \simeq \sum_{i=1}^J |h_{i,M}^{approx} - h_{i,M}^{anal}| \cdot \Delta x,$$

où  $h^{approx}$  est obtenue par le schéma et  $h^{anal}$  est la hauteur analytique.

On obtient l'erreur faite sur  $u$ , en remplaçant  $h$  par  $u$  dans la formule.

On a remarqué que le flux HLL était moins diffusif que le flux de Rusanov.

Pour réduire l'effet diffusif du schéma, on doit augmenter l'ordre de celui-ci.

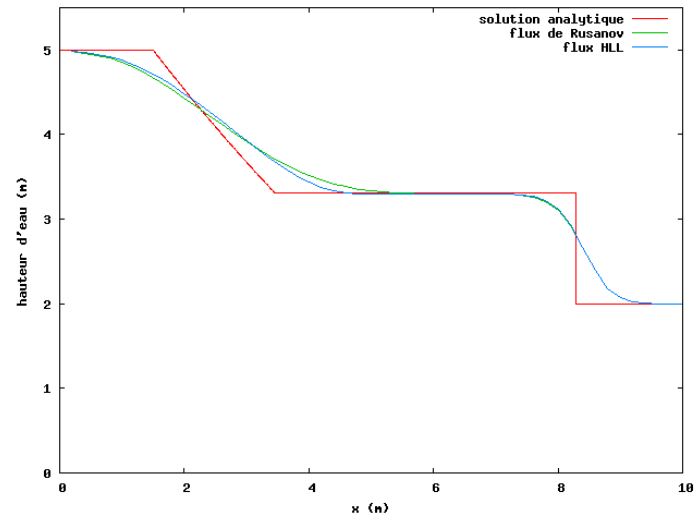


FIG. 3 – Hauteur en fonction du flux

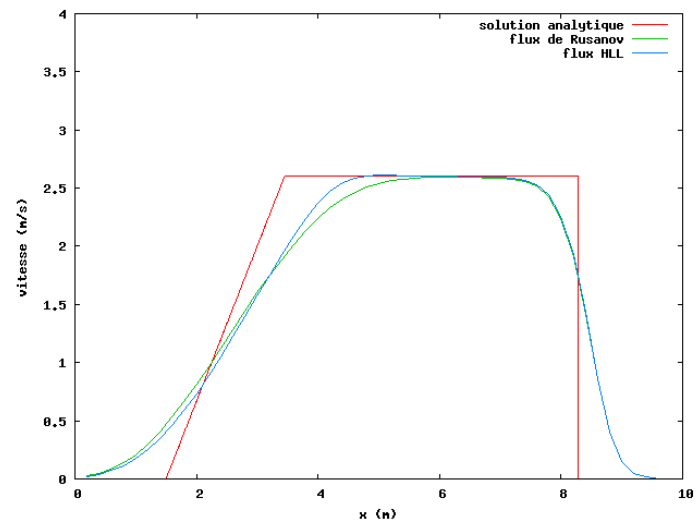
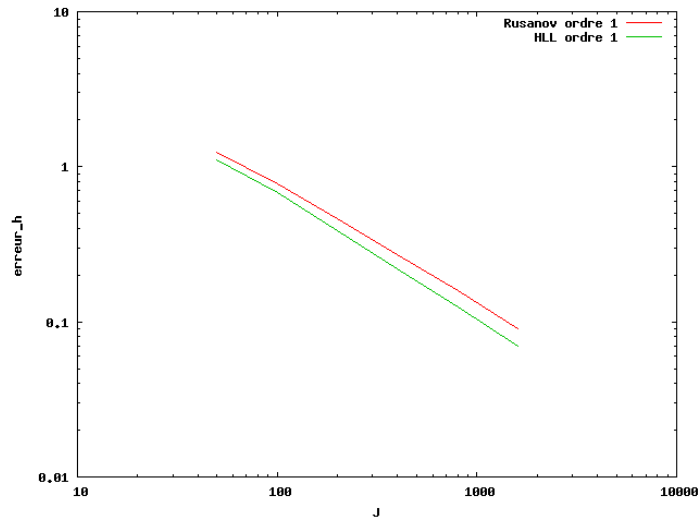
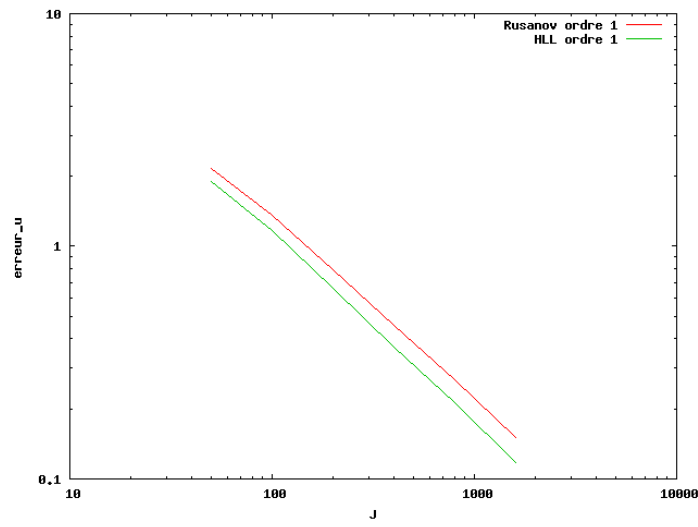


FIG. 4 – Vitesse en fonction du flux

FIG. 5 –  $\|h_{t=5}^{approx} - h_{t=5}^{anal}\|_{L^1}$  en fonction du maillageFIG. 6 –  $\|u_{t=5}^{approx} - u_{t=5}^{anal}\|_{L^1}$  en fonction du maillage

### 1.6 Schéma d'ordre 2

Pour obtenir un schéma d'ordre 2 en espace, on utilise un flux d'ordre 1 avec un opérateur de reconstruction.

**Définition 4** On appelle opérateur de reconstruction d'ordre 2, tout opérateur associant les valeurs  $U_{i+1/2-}$  et  $U_{i+1/2+}$  à la suite  $(U_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , défini par :

$$\text{pour tout } i, U_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} U(x) dx,$$

et vérifiant les points suivants :

- i)  $\frac{U_{i-1/2+} + U_{i-1/2-}}{2} = U_i$  (relation de conservation)  
 ii) pour toute fonction régulière  $U$  :

$$U_{i+1/2-} = U(x_{i+1/2}) + O(h^2) \text{ et } U_{i+1/2+} = U(x_{i+1/2}) + O(h^2).$$

Le schéma d'ordre 2 en espace est de la forme :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) = 0$$

avec :

$$F_{i+1/2} = \mathcal{F}(U_{i+1/2-}^n, U_{i+1/2+}^n),$$

où  $\mathcal{F}(U_G, U_D)$  est un flux numérique consistant et  $(U_{i+1/2\pm}^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  sont des reconstructions des  $(U_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$ .

On dit que la reconstruction préserve un domaine convexe invariant  $C$ , si :

$$U_i^n \in C, \forall i \Rightarrow U_{i+1/2\pm}^{n+1} \in C, \forall i.$$

**Proposition 1** Si sous une condition de C.F.L., le flux numérique préserve un domaine convexe invariant  $C$ , et si la reconstruction préserve aussi ce domaine, alors en prenant la moitié de la condition de C.F.L. initiale, le schéma d'ordre 2 préserve aussi ce domaine  $C$ .

• Pour une fonction scalaire  $U \in \mathbb{R}$ , on définit une reconstruction minmod qui est d'ordre 2, par :

$$U_{i-1/2+} = U_i - \frac{\Delta x_i}{2} \cdot D_{mm} U_i \text{ et } U_{i+1/2-} = U_i + \frac{\Delta x_i}{2} \cdot D_{mm} U_i,$$

avec :

$$D_{mm} U_i = \minmod\left(2 \frac{(U_i - U_{i-1})}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}, 2 \frac{(U_{i+1} - U_i)}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}\right)$$

et :

$$\minmod(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } x, y \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{si } x, y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette reconstruction vérifie le principe du maximum :

$$\inf_j U_j \leq U_{i-1/2+}, U_{i+1/2-} \leq \sup_j U_j.$$

• On définit la reconstruction ENO (essentially non oscillatory) par :

$$U_{i-1/2+} = U_i - \frac{\Delta x}{2} \cdot D_{eno} U_i \text{ et } U_{i+1/2-} = U_i + \frac{\Delta x}{2} \cdot D_{eno} U_i,$$

avec :

$$D_{eno} U_i = \minmod\left(\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \cdot D^2 U_{i-1/2}, \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot D^2 U_{i+1/2}\right),$$

où :

$$D^2 U_{i+1/2} = \minmod\left(\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{U_{i+2} - 2U_{i+1} + U_i}{\Delta x^2}\right).$$

Cette reconstruction permet un gain de précision (la dérivée discrète  $DU_i$  est d'ordre 2), mais on risque la perte du principe du maximum (nécessaire pour la positivité de  $h$ ).

• Pour remédier à ceci, on utilise la reconstruction ENO modifiée, en prenant :

$$D_{enom} U_i = \minmod(D_{eno} U_i, 2D_{mm} U_i),$$

à la place de :

$$D_{eno} U_i.$$

• Pour le système de Saint-Venant, on peut utiliser la reconstruction d'ordre 2 suivante :

$$h_{i-1/2+} = h_i - \frac{\Delta x_i}{2} \cdot Dh_i, \quad h_{i+1/2-} = h_i + \frac{\Delta x_i}{2} \cdot Dh_i$$

et :

$$u_{i-1/2+} = u_i - \frac{h_{i+1/2-}}{h_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{2} \cdot Du_i,$$

$$u_{i+1/2-} = u_i + \frac{h_{i-1/2+}}{h_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{2} \cdot Du_i.$$

On peut prendre  $D_{mm} h_i$  (respectivement  $D_{mm} u_i$ ) pour  $Dh_i$  (respectivement  $Du_i$ ), on peut également prendre  $D_{enom} h_i$  (respectivement  $D_{enom} u_i$ ).

Les variables  $U_{i+1/2\pm} = (h_{i+1/2\pm}, h_{i+1/2\pm} u_{i+1/2\pm})$  sont les reconstructions des variables  $U_i = (h_i, h_i u_i)$ .

Ces reconstructions vérifient les relations de conservations suivantes :

$$\frac{h_{i-1/2+} + h_{i+1/2-}}{2} = h_i$$

et :

$$\frac{h_{i-1/2+} u_{i-1/2+} + h_{i+1/2-} u_{i+1/2-}}{2} = h_i u_i.$$

• On peut écrire le schéma d'ordre 2 en espace sous la forme :

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \cdot \Phi(U^n),$$

où :

$$U = (U_i)_{i \in \mathbb{Z}}$$

et :

$$\Phi(U_i^n) = \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}).$$

$\Phi$  est donc un opérateur non linéaire dépendant du maillage.

Pour obtenir un schéma d'ordre 2 en temps, on utilise la méthode de Heun qui est une méthode de prédiction-correction. On obtient le schéma d'ordre 2 en temps et en espace suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{U}^{n+1} &= U^n + \Delta t \cdot \Phi(U^n), \\ \tilde{U}^{n+2} &= \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \cdot \Phi(\tilde{U}^{n+1}), \\ U^{n+1} &= \frac{U^n + \tilde{U}^{n+2}}{2}.\end{aligned}$$

La condition de C.F.L. est inchangée.

• On a réalisé la rupture de barrage précédente, avec un schéma d'ordre 1 et un schéma d'ordre 2 (avec le flux HLL).

On a pris :

$$M = 50, \Delta t = 0.01, J = 50, \Delta x = 0.2.$$

On a effectué les tracés les erreurs faites sur  $h$  et  $u$  en fonction du maillage.

On a remarqué que le schéma à l'ordre 2 était moins diffusif qu'à l'ordre 1, ce qui était attendu.

• On a aussi réalisé "la rupture de barrage sur fond sec" à l'ordre 1 et à l'ordre 2 (avec le flux HLL). On a pris :

$$M = 200, \Delta t = 0.0025, J = 100, \Delta x = 0.1.$$

Les conditions initiales étaient :

$$h(0, x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < 5 \text{ m} \\ 0 & \text{pour } 5 \leq x \leq 10 \text{ m} \end{cases},$$

$$u(0, x) = 0 \text{ m/s}.$$

Puis, on a tracé les solutions pour :

$$t = 0, 5 \text{ s}.$$

Ce test est intéressant car il existe une solution analytique (solution de Ritter [10]). Dans ce cas, on a une perte d'hyperbolicité (hauteur d'eau nulle). On obtient alors une détente liant les états  $h_g = 1 \text{ m}$  et  $h_d = 0 \text{ m}$ .

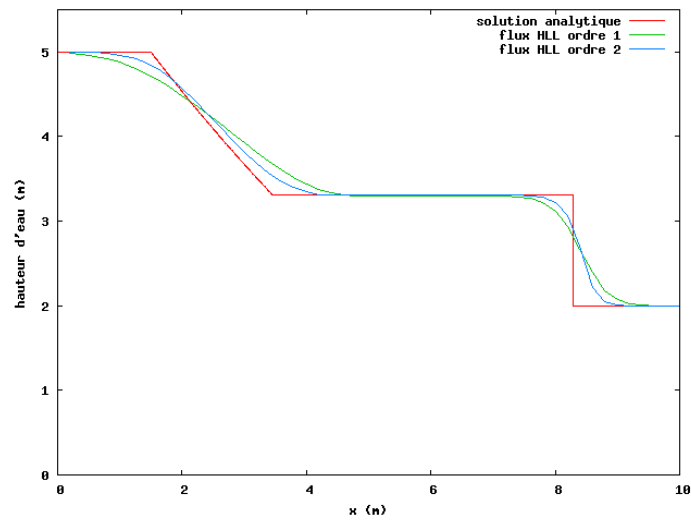


FIG. 7 – Hauteur en fonction de l'ordre du schéma

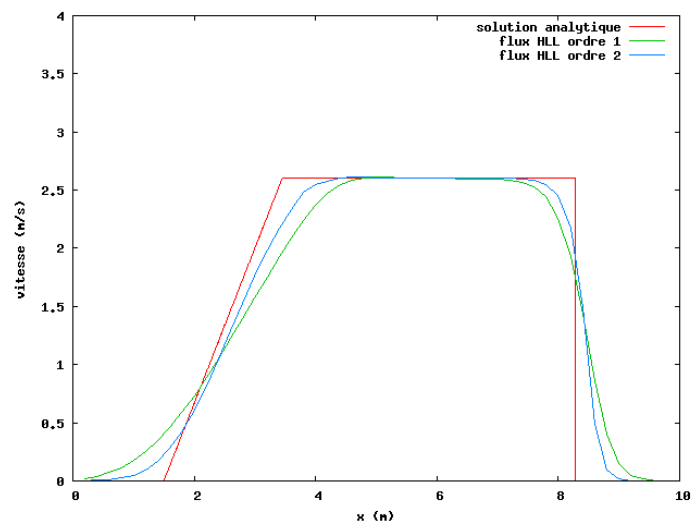
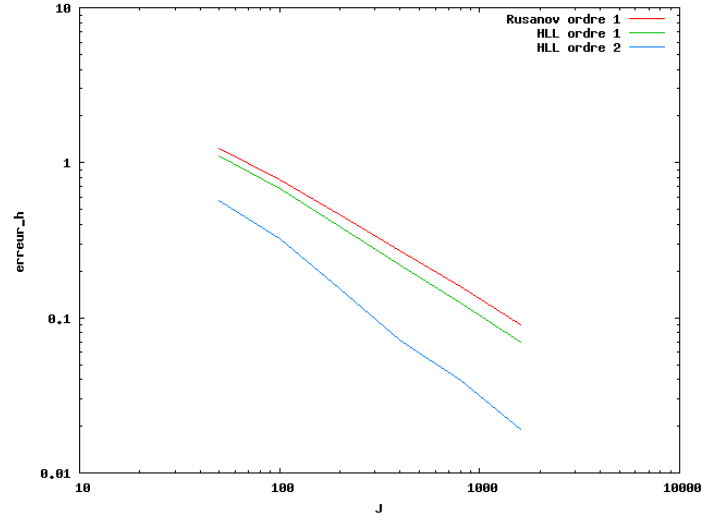
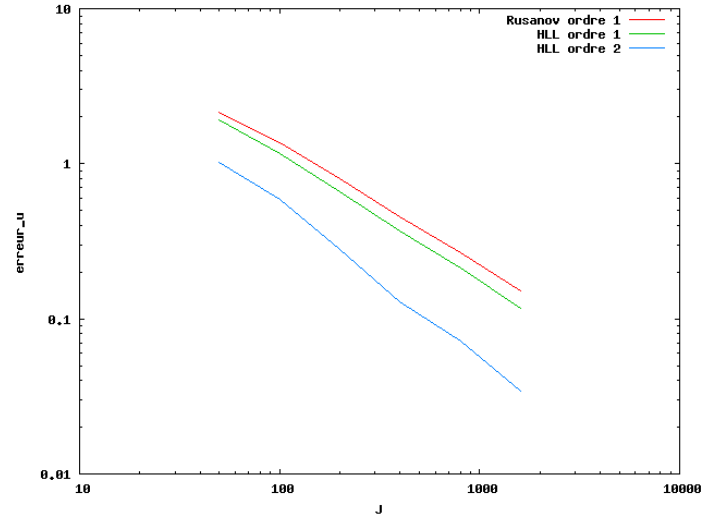


FIG. 8 – Vitesse en fonction de l'ordre du schéma

FIG. 9 –  $\|h_{t=5}^{approx} - h_{t=5}^{anal}\|_{L^1}$  en fonction du maillageFIG. 10 –  $\|u_{t=5}^{approx} - u_{t=5}^{anal}\|_{L^1}$  en fonction du maillage



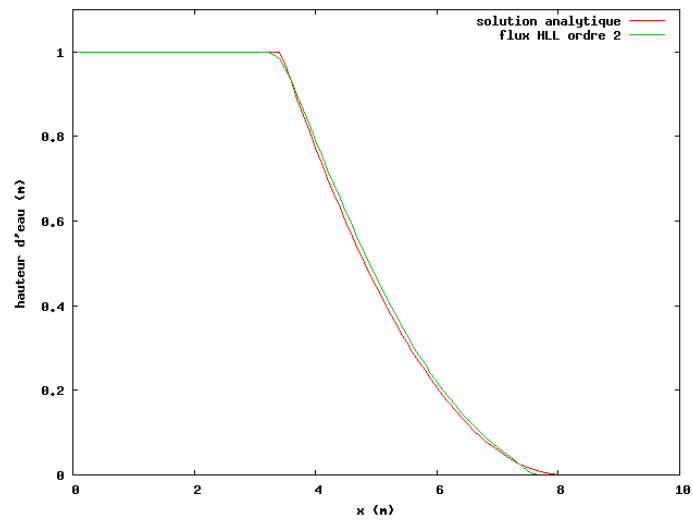


FIG. 11 – Rupture de barrage sur fond sec

## 2 Système de Saint-Venant avec topographie

Pour ce qui va suivre, on souhaite tenir compte de la topographie du terrain. Pour cela, on cherche à approcher les solutions du système de Saint-Venant usuel (avec topographie) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

où le nouveau terme :  $z(x) \in \mathbb{R}$  est la topographie du sol, que l'on suppose ici indépendante du temps, puisque l'on ne tient pas compte de l'érosion.

Ce système peut encore s'écrire :

$$\partial_t U + \partial_x F(U, Z) + B(U, Z)\partial_x Z = 0,$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, Z = gz, F(U, Z) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \text{ et } B(U, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

### 2.1 Propriétés

On regarde les solutions  $U = (h, hu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  du système (8).

- Pour  $z = Cte$ , on retrouve le système de Saint-Venant homogène (1).
- Le système usuel (8) est invariant par translation dans  $Z$  (quand on ajoute une constante à  $Z$ , on ne modifie pas les équations).
- Les états d'équilibre sont les solutions  $U(x)$  indépendantes du temps, donc :

$$\partial_t U = 0,$$

et ainsi les états d'équilibre sont solutions de :

$$\partial_x F(U, Z) = -B(U, Z)\partial_x Z,$$

soit encore :

$$\partial_x F(U, Z) + B(U, Z)\partial_x Z = 0, \quad (9)$$

de façon plus précise, à partir de (8), en multipliant l'équation sur  $h$  par  $u$ , on a :

$$u\partial_t h + u\partial_x(hu) = 0,$$

avec l'équation en  $hu$ , on a :

$$h\partial_t u + hu\partial_x u + gh\partial_x h + gh\partial_x z = 0,$$

en faisant la différence, puis en divisant par  $h$ , on obtient :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2 + g(h+z)) = 0..$$

Les états d'équilibre sont donc les fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} hu = Cte \\ u^2/2 + g(h+z) = Cte \end{cases}. \quad (10)$$

Ces solutions jouent un rôle important, car elles sont en général obtenues quand le temps tend vers l'infini.

Cependant, ces états stationnaires sont non triviaux. En effet, à cause du terme de topographie, le système de Saint-Venant présente des états d'équilibre complexes (où les inconnues ne sont pas constantes).

Ainsi, on s'intéressera à des états d'équilibre plus simples. Notamment, la préservation d'une zone d'équilibre au repos qui est de la forme :

$$\begin{cases} u = 0 \\ h + z = Cte \end{cases} \quad (11)$$

Cet état d'équilibre est important pour la crédibilité des résultats (conservation d'une flaque d'eau).

## 2.2 Propriétés du schéma

Comme pour le système de Saint-Venant homogène, on utilise un schéma du premier ordre à trois points :

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (F_{i+1/2-}^n - F_{i-1/2+}^n) = 0, \quad (12)$$

avec :

$$\begin{cases} F_{i-1/2+}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1}^n, Z_{i-1}, U_i^n, Z_i) \\ F_{i+1/2-}^n = \mathcal{F}_G(U_i^n, Z_i, U_{i+1}^n, Z_{i+1}) \end{cases} \quad (13)$$

où les fonctions  $\mathcal{F}_G$  et  $\mathcal{F}_D$  sont les flux numériques à gauche et à droite.

- Le schéma doit préserver les états d'équilibre discrets qui approchent les états d'équilibre exacts.

Ces derniers sont les fonctions  $(U(x), Z(x))$  qui vérifient (9).

Alors, les états d'équilibre discrets sont des suites discrètes  $(U_i, Z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifiant une approximation de (9).

Cette approximation est une relation de la forme :

$$D(U_i, Z_i, U_{i+1}, Z_{i+1}) = 0,$$

reliant :

$$U_i, U_{i+1}, Z_i \text{ et } Z_{i+1}.$$

Pour alléger les notations, on adoptera souvent une forme locale :

$$D(U_G, Z_G, U_D, Z_D) = 0.$$

Comme les états d'équilibre vérifient (10), alors les états d'équilibre discrets vérifient :

$$\begin{cases} h_G u_G = h_D u_D \\ u_G^2/2 + g(h_G + z_G) = u_D^2/2 + g(h_D + z_D) \end{cases} \quad .$$

En particulier, les états d'équilibre discrets au repos vérifient :

$$\begin{cases} u_G = u_D = 0 \\ h_G + z_G = h_D + z_D \end{cases} \quad (14)$$

- Le schéma ne doit dépendre que de  $\Delta Z = Z_D - Z_G$ , et pas séparément de  $Z_G$  et de  $Z_D$  : car il doit préserver l'invariance par translation dans  $Z$ .

Ainsi, dans le schéma, on a :

$$\begin{cases} F_{i-1/2+}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1}^n, U_i^n, \Delta Z_{i-1/2}) \\ F_{i+1/2-}^n = \mathcal{F}_G(U_i^n, U_{i+1}^n, \Delta Z_{i+1/2}) \end{cases} \quad (15)$$

avec :

$$\Delta Z_{i+1/2} = Z_{i+1} - Z_i, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Comme on a :

$$Z_i^{n+1} = Z_i^n, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N},$$

alors on n'a pas besoin de formule pour  $Z$ .

Remarque : comme on l'a vu précédemment, le système à l'équilibre est de la forme (9).

Ainsi, on définit les états d'équilibre discrets par la relation :

$$F(U_D, Z_D) - F(U_G, Z_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z) \Delta Z = 0, \quad (16)$$

avec  $\Delta Z = Z_D - Z_G$  et  $B(U_G, U_D, \Delta Z)$  qui est une discrétisation consistante de  $B(U, Z)$ .

Or pour le système de Saint-Venant usuel (8), on a :

$$F(U, Z) = F(U) \text{ et } B(U, Z) = B(U),$$

donc le système à l'équilibre est de la forme :

$$\partial_x F(U) + B(U) \partial_x Z = 0, \quad (17)$$

on définit alors les états d'équilibre discrets par la relation :

$$F(U_D) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z) \Delta Z = 0. \quad (18)$$

Dès que l'on a choisi les états d'équilibre discrets, on définit les schémas équilibre ou well-balanced de la façon suivante :

**Définition 5** *Le schéma (12)-(15) est équilibré relativement à un état d'équilibre, si pour cet état d'équilibre, on a :*

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, Z_G, U_D, Z_D) = F(U_G, Z_G) \\ \mathcal{F}_D(U_G, Z_G, U_D, Z_D) = F(U_D, Z_D) \end{cases}.$$

Remarque : si au temps  $t_n$ , on a un état d'équilibre  $U_i$  alors au temps  $t_{n+1}$ , on a toujours cet état d'équilibre.

On veut un schéma équilibre pour les états d'équilibre au repos (11).

Comme  $h + z = Cte$ , alors pour tout  $h_G, h_D \geq 0$ , on a :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G((h_G, 0), (h_D, 0), \Delta Z) = \mathcal{F}_G((h_G, 0), (h_D, 0), g(h_G - h_D)) = (0, gh_G^2/2) \\ \mathcal{F}_D((h_G, 0), (h_D, 0), \Delta Z) = \mathcal{F}_D((h_G, 0), (h_D, 0), g(h_G - h_D)) = (0, gh_D^2/2) \end{cases}.$$

### 2.3 Schémas explicitement équilibrés

Par schémas explicitement équilibrés, on signifie qu'ils sont définis par la résolution d'états d'équilibre discrets.

Comme on l'a vu précédemment, le système à l'équilibre est de la forme (17).

On a défini des états d'équilibre discrets par la relation (18).

Supposons que  $F$  n'ait pas de point critique. Alors, il existe un unique  $U_G^{*D}$  et un unique  $U_D^{*G}$  vérifiant :

$$\begin{cases} F(U_G^{*D}) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z) \Delta Z = 0 \\ F(U_D) - F(U_D^{*G}) + B(U_G, U_D, \Delta Z) \Delta Z = 0 \end{cases}. \quad (19)$$

On définit les flux numériques par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D^{*G}) \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D) \end{cases} ,$$

où  $\mathcal{F}(U_G, U_D)$  est un flux numérique de classe  $\mathcal{C}^1$ , consistant avec le système de Saint-Venant homogène (on peut donc prendre le flux de Rusanov).

**Proposition 2** *Le schéma (19), avec :*

$$\begin{cases} F(U_G) = \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D^{*G}) \\ F(U_D) = \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D) \end{cases}$$

*est équilibré et consistant.*

Démonstration de l'équilibre :

Si on a un état d'équilibre discret :

$$F(U_D) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z)\Delta Z = 0,$$

alors on a :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D) = F(U_G) \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G, U_D) = F(U_D) \end{cases} .$$

Remarques :

- Cette méthode est très simple, mais n'est pas adaptée pour traiter les points critiques : elle ne garantit pas l'unicité de  $U_G^{*D}$  et de  $U_D^{*G}$ .
- Une variante de ce schéma est :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D^{*G}) - F(U_G^{*D}) + F(U_G) \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^{*D}, U_D^{*G}) - F(U_D^{*G}) + F(U_D) \end{cases} ,$$

où l'on a :

$$\begin{cases} F(U_G^{*D}) - F(U_G) + B(U_G, U_D, \Delta Z)(\Delta Z)_+ = 0 \\ F(U_D) - F(U_D^{*G}) + B(U_G, U_D, \Delta Z)(\Delta Z)_- = 0 \end{cases} , \quad (20)$$

avec :

$$\Delta Z = (\Delta Z)_+ + (\Delta Z)_-, \quad (21)$$

où :

$$\begin{cases} (\Delta Z)_+ = \max(0, \Delta Z) \\ (\Delta Z)_- = \min(0, \Delta Z) \end{cases} .$$

## 2.4 Schéma de reconstruction hydrostatique

Le schéma de reconstruction hydrostatique est particulièrement adapté à la résolution du système de Saint-Venant avec topographie.

Sa construction peut être vue comme une modification du schéma explicitement équilibré, impliquant les valeurs  $U_G^{*D}$  et  $U_D^{*G}$ .

Ces dernières sont obtenues en résolvant les états d'équilibre (20)-(21).

Les points critiques nous empêchent d'obtenir des solutions uniques :

$$U_G^{*D} \text{ et } U_D^{*G}.$$

Alors, on remplace les relations d'état d'équilibre (10), par des relations plus simples :

$$\begin{cases} u = Cte \\ g(h + z) = Cte \end{cases} \quad (22)$$

Ces relations coïncident avec celles initiales pour les états d'équilibre au repos (11), donc quand  $u = 0$ .

De plus, la singularité due aux points critiques est supprimée quand on résout le système avec deux constantes arbitraires.

En notant  $U = (h, hu)$  comme précédemment, les flux numériques sont définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_G(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^*, U_D^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ g/2(h_G^2 - (h_G^*)^2) \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_D(U_G, U_D, \Delta Z) = \mathcal{F}(U_G^*, U_D^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ g/2(h_D^2 - (h_D^*)^2) \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (23)$$

où  $\mathcal{F}(U_G, U_D)$  est le flux numérique choisi pour le système de Saint-Venant homogène.

Les états reconstruits  $U_G^*$  et  $U_D^*$  sont définis en accord avec les états d'équilibre (22), par :

$$\begin{cases} U_G^* = (h_G^*, h_G^* u_G), U_D^* = (h_D^*, h_D^* u_D) \\ h_G^* = (h_G + z_G - z^*)_+ \\ h_D^* = (h_D + z_D - z^*)_+ \end{cases}. \quad (24)$$

Les parties positives :  $(\ )_+$  assurent l'obtention de densités :  $h_G^*$  et  $h_D^*$  positives.

La valeur  $z^*$  (resp.  $Z^*$ ) est définie par :

$$z^* = \max(z_G, z_D) \text{ (resp. } Z^* = \max(Z_G, Z_D)\text{)}.$$

Comme  $\Delta Z = Z_D - Z_G$ , on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} gh_G^* = (gh_G - (\Delta Z)_+)_+ \\ gh_D^* = (gh_D - (-\Delta Z)_+)_+ \end{cases},$$

ce qui montre que  $\mathcal{F}_G$  et  $\mathcal{F}_D$  ne dépendent que de  $\Delta Z$ .

Ce schéma est très rapide (puisque les flux sont définis directement) et il est très stable.

**Proposition 3** *On considère un flux numérique  $\mathcal{F}$  consistant avec le système de Saint-Venant homogène (c'est à dire avec  $z = Cte$ ) qui préserve la positivité de la densité par interface.*

*Alors le schéma défini par les flux numériques (23), avec :*

$$\begin{cases} U_G^* = (h_G^*, h_G^* u_G), U_D^* = (h_D^*, h_D^* u_D) \\ gh_G^* = (gh_G - (\Delta Z)_+)_+ \\ gh_D^* = (gh_D - (-\Delta Z)_+)_+ \end{cases},$$

- *préserve la positivité de  $h$  par interface,*
- *est équilibré, il préserve les états d'équilibre au repos (14),*
- *est consistant avec le système de Saint-Venant usuel (8).*

Le schéma est stable et les densités restent positives sous la même condition de C.F.L. que celle du système homogène.

## 2.5 Simulation numérique

On a réalisé "la rupture d'un barrage" dans une parabole, avec différents maillages :

M	$\Delta t$	J	$\Delta x$
2500	0.001	200	0.01
12500	0.0002	1000	0.002
25000	0.0001	2000	0.001

La topographie était :

$$z(x) = (x - 1)^2 \text{ pour } 0 \leq x \leq 2 \text{ m.}$$

Les conditions initiales étaient :

$$h(0, x) = \begin{cases} \max(0, 0.36 - z(x)) & \text{pour } 0 \leq x < 1 \text{ m} \\ 0 & \text{pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{cases},$$

$$u(0, x) = 0 \text{ m/s.}$$

Puis, on a regardé la situation après 2,5s. On a remarqué que pour différents maillages, on n'avait pas le même résultat. En effectuant des animations, on a visualisé des comportements oscillatoires qui semblaient s'amortir.

Ensuite, on a effectué le tracé de la fonction  $hmax$  définie par :

$$hmax(t) = \max_{0 \leq x \leq 2} (h(t, x)) \text{ pour } 0 \leq t \leq 2,5 \text{ s,}$$

et de la fonction  $V$  définie par :

$$V(t) = \int_{1/2}^{3/2} \left( \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx \simeq \sum_{i=J/4}^{3J/4} \left( \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \right)^2 \Delta x,$$

où  $V$  est la semi-norme  $H^1$  de  $h$ .

On a pu ainsi constater que plus le maillage était fin, moins les oscillations étaient amorties. Ce qui était attendu pour un schéma d'ordre un. Un prolongement intéressant consisterait en la mise en oeuvre d'un schéma d'ordre deux (comme dans [1]).

Enfin, on a effectué le tracé de la fonction  $S_-h$  définie par :

$$S_-h(t) = \int_0^2 h(t, x) dx$$

On a pu observer le caractère conservatif du schéma, en visualisant l'évolution de  $S_-h$  en fonction du temps.

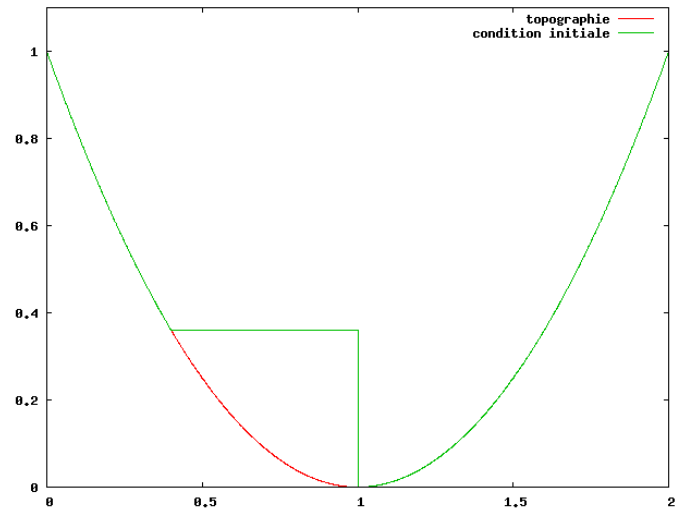


FIG. 12 – Situation initiale

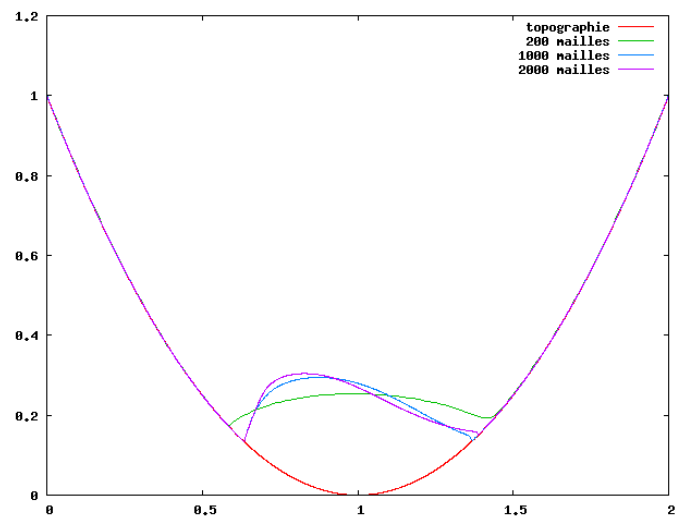
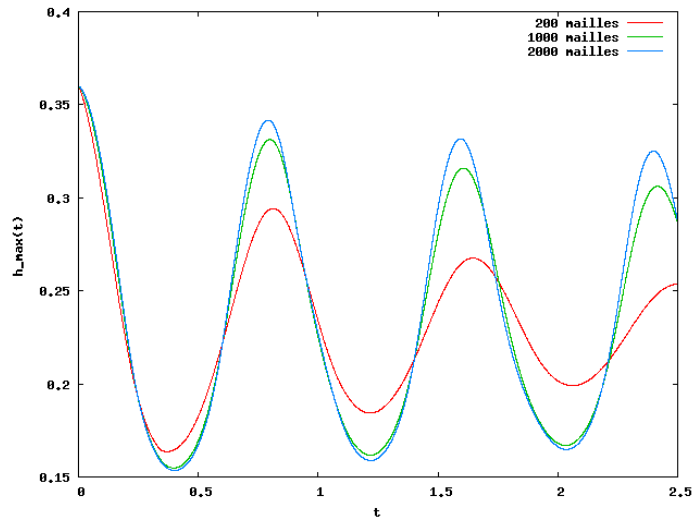
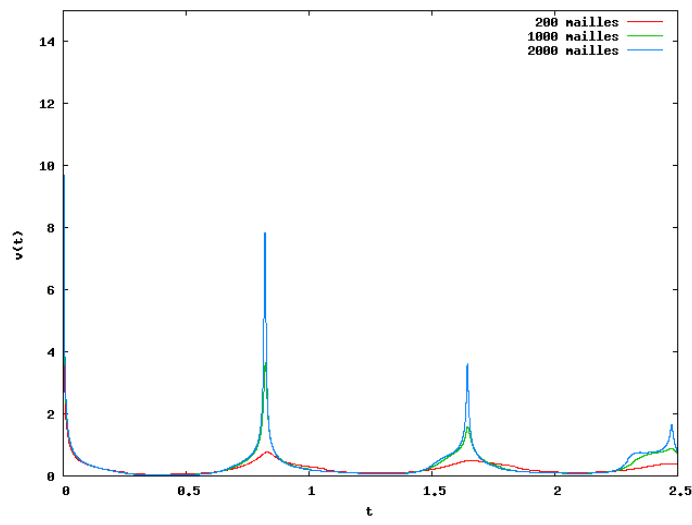
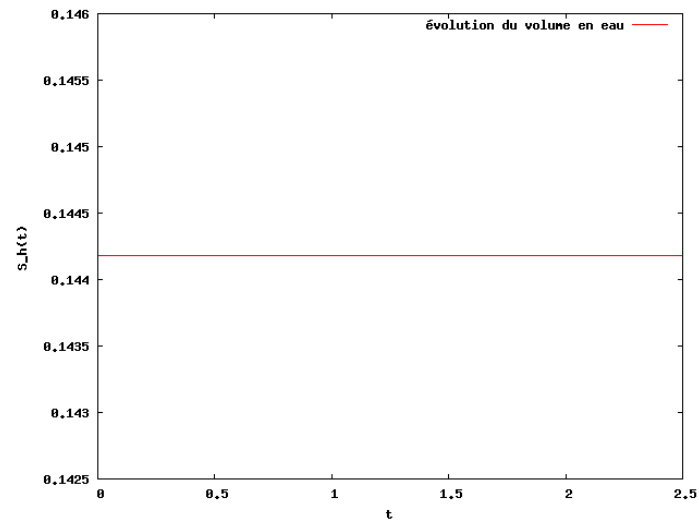


FIG. 13 – Situation après 2,5s



FIG. 14 – Evolution de  $h_{\max}$  en fonction de  $t$ FIG. 15 – Evolution de  $V$  en fonction de  $t$

FIG. 16 – Evolution de  $S_h$  en fonction du temps

### 3 Système de Saint-Venant avec terme de frottement

#### 3.1 Système de Saint-Venant avec terme de frottement générique

On considère maintenant le système de Saint-Venant avec topographie et une force extérieure  $f$  :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + h\partial_x Z = hf \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

où  $h(t, x)$  est la hauteur d'eau,  $u(t, x)$  est la vitesse de l'eau,  $Z = g.z(x)$  (avec  $z$  la topographie du sol) et  $f$  est la force extérieure.

On peut avoir une relation de la forme :

$$f(t, x) = g(h, u),$$

maintenant, on a :

$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2 + g(h + z)) = f,$$

et les états d'équilibre au repos sont donc les fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} u = 0 \\ \partial_x(u^2/2 + g(h + z)) = f \end{cases}.$$

L'idée pour résoudre le système (25), est d'identifier le système (25) au système de Saint-venant usuel avec une nouvelle topographie :

$$Z + B,$$

où :

$$\partial_x B = -f.$$

Maintenant,  $B$  dépend uniquement du temps alors qu'il devrait être indépendant du temps. Mais en utilisant des temps discrets  $t_n$ , on peut geler la valeur sur un intervalle de temps. Ainsi, on prend  $\partial_x B^n = -f^n$  et on résout le système de Saint-Venant sur l'intervalle de temps  $(t_n, t_{n+1})$  avec la topographie  $Z + B^n$ .

Remarque : pour les solutions stationnaires, cette approximation est exacte, ainsi les solutions stationnaires sont préservées.

On définit :

$$\Delta B_{i+1/2}^n = -f_{i+1/2}^n \Delta x_{i+1/2},$$

avec :

$$\Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i.$$

On obtient une approximation de  $U = (h, hu)$  par le schéma (12), avec :

$$\begin{cases} F_{i-1/2+}^n = \mathcal{F}_D(U_{i-1}^n, U_i^n, \Delta Z_{i-1/2} + \Delta B_{i-1/2}^n) \\ F_{i+1/2-}^n = \mathcal{F}_G(U_i^n, U_{i+1}^n, \Delta Z_{i+1/2} + \Delta B_{i+1/2}^n) \end{cases}, \quad (26)$$

où  $\Delta Z_{i+1/2} = Z_{i+1} - Z_i$  et les fonctions  $\mathcal{F}_G$  et  $\mathcal{F}_D$  sont les flux numériques associés au problème de Saint-Venant usuel (8).

Si ces flux sont consistants avec le système de Saint-Venant usuel (8), alors le nouveau schéma est consistant avec le système (25).

De plus, si les flux numériques sont équilibrés relativement aux états d'équilibre au repos, alors le nouveau schéma préserve les données vérifiant :

$$\begin{cases} u_i = 0 \\ g(h_{i+1} + z_{i+1}) = g(h_i + z_i) + f_{i+1/2} \Delta x_{i+1/2} \end{cases}.$$

Ces dernières relations peuvent être considérées comme des états d'équilibre discrets approchant les relations :

$$\begin{cases} u = 0 \\ \partial_x(g(h + z)) = f \end{cases}.$$

Remarque : dans le livre de François Bouchut, on peut lire que cette méthode a été utilisée pour résoudre le système de Saint-Venant avec force de Coriolis et le système de Saint-Venant avec force de frottement de Coulomb.

### 3.2 Système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach

On considère maintenant le système de Saint-Venant avec terme de frottement de Darcy-Weisbach :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + h\partial_x Z = -ghS_f \end{cases},$$

avec :

$$S_f = \frac{Fu|u|}{8gh},$$

soit :

$$f = -g.S_f = -\frac{Fu|u|}{8h},$$

où  $F$  est le facteur de friction de Darcy-Weisbach.

Remarque : ce facteur peut-être déterminé par un calibrage ou par des tables, ce facteur dépend de la nature du sol.

Ce système est de la forme (25), on peut donc appliquer la méthode précédente pour résoudre ce système (ce qui semble être une nouveauté).

On utilise donc le schéma précédent (12)-(26). Remarque : on peut considérer que si la hauteur d'eau est nulle, il n'y a pas d'eau, donc pas de frottement.

On prend donc :

$$f_{i+1}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } h_i^n = h_{i+1}^n = 0 \\ \frac{-Fu_{i+1/2}^n |u_{i+1/2}^n|}{8h_{i+1/2}^n} & \text{sinon} \end{cases},$$

avec :

$$u_{i+1/2}^n = \frac{h_i^n u_i^n + h_{i+1}^n u_{i+1}^n}{h_i^n + h_{i+1}^n},$$

et :

$$h_{i+1/2}^n = \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2}.$$

### 3.3 Simulation numérique

On pose :

$$Cf = \frac{F}{8}$$

On a réalisé "la rupture d'un barrage" dans une parabole, avec différentes valeurs pour  $Cf$  :

$$0, 0.0001, 0.001 \text{ et } 0.01.$$

Remarque : le cas  $Cf = 0$  correspond à une situation sans frottement.

On a pris :

$$M = 25000, \Delta t = 0.0001, J = 2000 \text{ et } \Delta x = 0.001.$$

La topographie était :

$$z(x) = (x - 1)^2 \text{ pour } 0 \leq x \leq 2 \text{ m.}$$

Les conditions initiales étaient :

$$h(0, x) = \begin{cases} \max(0, 0.36 - z(x)) & \text{pour } 0 \leq x < 1 \text{ m} \\ 0 & \text{pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{cases},$$

$$u(0, x) = 0 \text{ m/s.}$$

Puis, on a regardé la situation après 2,5s. On a remarqué que pour différents coefficients de frottement, on n'avait pas le même résultat.

Ensuite, on a effectué le tracé de la fonction  $hmax$  définie par :

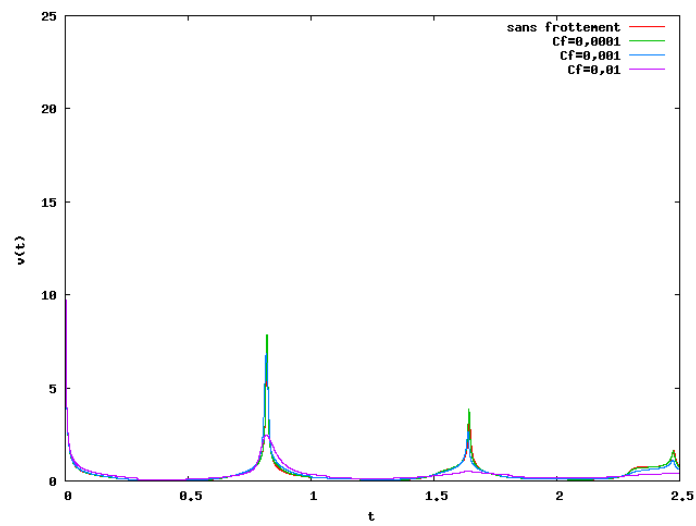
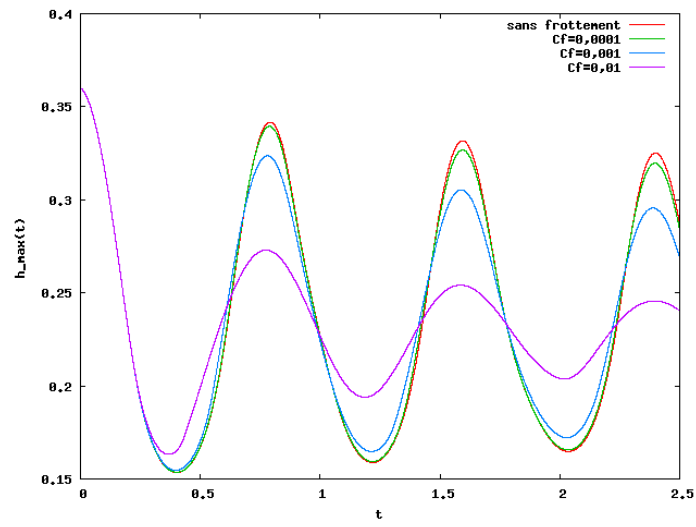
$$hmax(t) = \max_{0 \leq x \leq 2} (h(t, x)) \text{ pour } 0 \leq t \leq 2,5 \text{ s,}$$

et de la fonction  $V$  définie par :

$$V(t) = \int_{1/2}^{3/2} \left( \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} \right)^2 dx \simeq \sum_{i=J/4}^{3J/4} \left( \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} \right)^2 \Delta x,$$

où  $V$  est la semi-norme  $H^1$  de  $h$ .

On a pu ainsi constater que plus le coefficient de frottement était grand, plus les oscillations étaient amorties. Ce qui est en accord avec le bon sens.



## 4 Système de Saint-Venant avec terme d'infiltration

Dans cette partie, on considère le système de Saint-Venant avec topographie et un terme source  $e$  décrivant les échanges "verticaux" en eau (infiltration dans le sol et pluie) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = e \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + h\partial_x Z = 0 \end{cases}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

avec :

$$e = P - T^{inf},$$

où  $P$  est le taux de pluie et  $T^{inf}$  est le taux d'infiltration.

Pour calculer le taux d'infiltration, on utilise le modèle de Green-Ampt.

### 4.1 Modèle de Green-Ampt

A chaque noeud  $i$  du maillage, on peut calculer la capacité d'infiltration  $I_i^C$  (c'est à dire le flux que le sol peut infiltrer), à l'aide du modèle de Green-Ampt :

$$I_{i,n}^C = K_i \cdot \left( \frac{\Psi_{i,n} \cdot \Delta\theta_i}{I_{i,n}} + 1 \right),$$

où  $K_i$  est la conductivité effective,  $\Psi_{i,n}$  est le front de succion humide et  $I_{i,n}$  est la hauteur d'eau infiltrée.

On a :

$$\Psi_{i,n} = h_i^f + h_{i,n},$$

où  $h_i^f$  est la succion matricielle au niveau du front et  $h_{i,n}$  est la hauteur d'eau à la surface.

Et on a :

$$\Delta\theta_i = \theta_S - \theta_O,$$

où  $\theta_O$  est la teneur en eau initiale et  $\theta_S$  est la teneur en eau à saturation.

Le taux d'eau "disponible" à l'infiltration est :

$$W_{i,n}^a = P_i + \frac{q_{i,n}^{on}}{\Delta x} + \frac{h_{i,n}}{\Delta t},$$

où  $P_i$  est le taux de pluie,  $q_{i,n}^{on}$  est la somme des flux de part et d'autre du noeud  $i$ .

On a deux situations possibles :

- $W_{i,n}^a \leq I_{i,n}^C$ ,

alors toute l'eau s'infiltrer, et on a :

$$T_{i,n}^{inf} = W_{i,n}^a,$$

- $W_{i,n}^a > I_{i,n}^C$ , alors l'eau s'accumule à la surface et on a :

$$T_{i,n}^{inf} = I_{i,n}^C.$$

On a donc :

$$e_{i,n} = P_i - T_{i,n}^{inf} = \begin{cases} P_i - (P_i + \frac{q_{i,n}^{on}}{\Delta x} + \frac{h_{i,n}}{\Delta t}) & \text{si } W_{i,n}^a \leq I_{i,n}^C \\ P_i - I_{i,n}^C & \text{si } W_{i,n}^a > I_{i,n}^C \end{cases},$$

donc  $e_{i,n}$  peut varier de :

$$e_{i,n}^{min} = -\left(\frac{q_{i,n}^{on}}{\Delta x} + \frac{h_{i,n}}{\Delta t}\right)$$

(dans ce cas toute l'eau à la surface s'infiltre),

à :

$$e_{i,n}^{max} = P_i$$

(dans ce cas le sol est imperméable).



## 5 Expérimentation

Le but de cette partie, est de comparer des résultats expérimentaux et des résultats obtenus par simulation numérique.

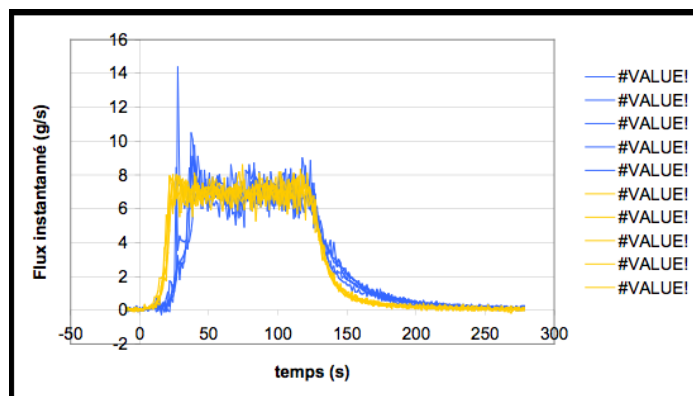
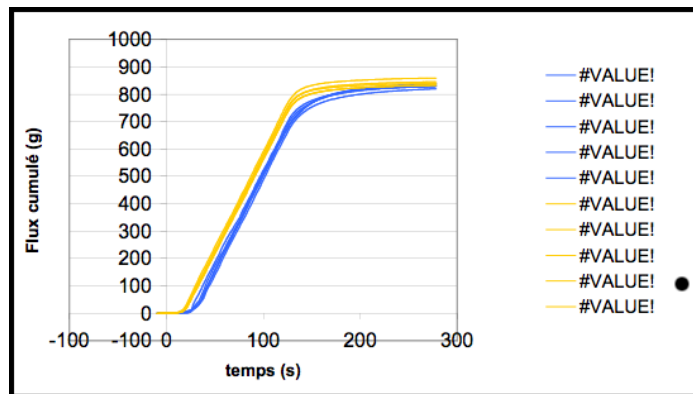
L'expérience a été effectuée sur le site de l'INRA d'Orléans. Elle consistait à simuler expérimentalement une pluie dans un canal. Pour ces simulations, il s'agissait d'un canal à fond lisse de 4m de long et l'intensité de la pluie était de 55mm/h (sans apport en amont).

Deux configurations furent testées : une faible pente (5% environ) et une forte pente (25% environ).

Après installation du dispositif, il y a eu le démarrage de la pluie artificielle et de la mesure du flux à l'aval (pesée automatique par balance électronique).

Pour chacune des deux configurations (5% et 25% de pente), 5 répétitions ont été effectuées.

Confrontation avec la simulation numérique.



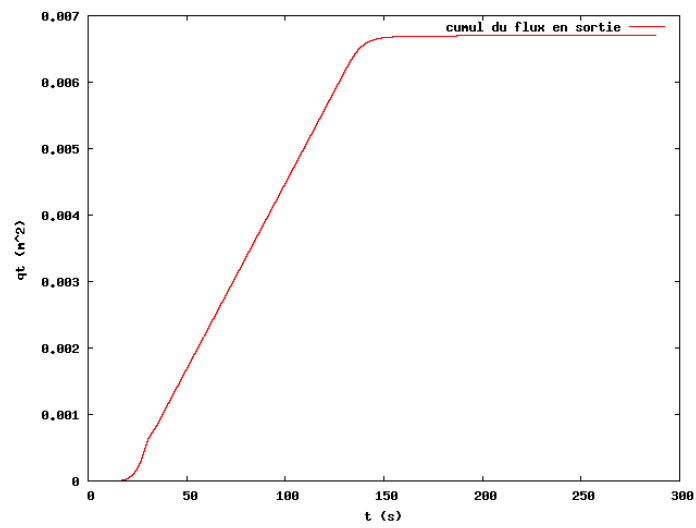
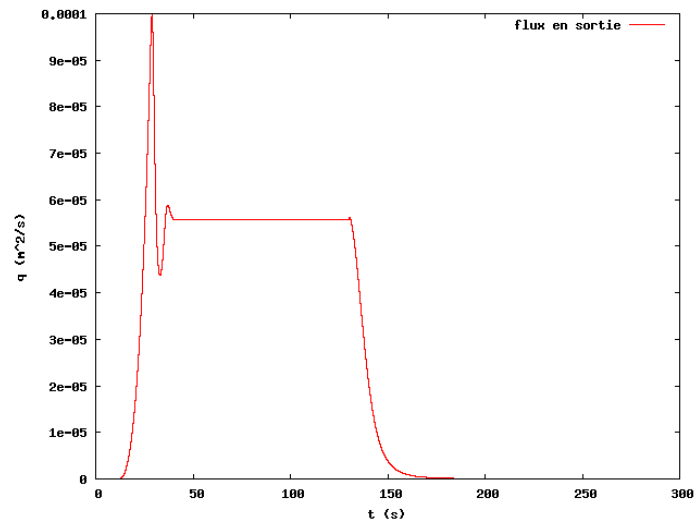




FIG. 17 – Le dispositif expérimental

## Références

- [1] F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser (2004).
- [2] E. Audusse, *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*, Thèse, Université Paris VI (2004).
- [3] M. Esteves et al., Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values, *J. Hydrol.* **228**, (2000), 265-282.
- [4] C.W. Rose et al., Overland flow to and through segment of uniform resistance, *J. Hydrol.* **255**, (2002), 134-150.
- [5] W.L. Hogarth et al., Addendum to overland flow to and through a segment of unifor resistance, *J. Hydrol.* **283**, (2003), 218-224.
- [6] W. Zhang et T.W. Cundy, Modeling of two-dimensional overland flow, *Water Resour. Res.* **25**, (1989), 2019-2035.
- [7] F.R. Fiedler et J.A. Ramirez, A numerical method for simulating discontinuous shallow flow over an infiltrating surface, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **32**, (2000), 219-240.
- [8] W.H. Green et G.A. Ampt, Studies on soil physics : 1, The flow of air and water through soils, *J. Agric. Sci.* **4**, (1911), 1-24.
- [9] L.A. Richards, Capillary conduction of liquids through porous mediums, *Physics*, (1931), 318-333.
- [10] J.M. Hervouet, *Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*, Presses des Ponts et Chaussées, (2003).